

Lehrbuch der höheren Mathematik

für Universitäten und Technische Hochschulen

Bearbeitet nach den Vorlesungen

von

Dr. Gerhard Kowalewski

o. Professor an der Technischen Hochschule zu Dresden

o. Mitglied der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig

Erster Band

Vektorrechnung und analytische Geometrie

Mit 67 Figuren



Walter de Gruyter & Co.

vormals G.J. Göschen'sche Verlagshandlung
J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg
Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W10 und Leipzig

1933

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten

Archiv-Nr. 12 66 33

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 10

Vorwort.

Als ich im Jahre 1928 mein 25jähriges Professorenjubiläum beging, legten mir einige meiner ehemaligen Schüler den Plan zu einem dreibändigen Lehrbuch der höheren Mathematik vor, das sich auf nachgeschriebene Kolleghefte stützen sollte.

Dieser Plan ist erst jetzt zur Ausführung gekommen. Ich machte bei der Sichtung des Materials die Beobachtung, daß meine Hörer Fragen, die ich selbst für weniger wichtig hielt, oft mit großer Hingebung viel weiter verfolgt haben. Vielleicht wird gerade hierdurch die Lesbarkeit und Brauchbarkeit des Buches erhöht. Der Vortragende weiß oft nicht genau, nach welcher Richtung die Interessen der Hörer eingestellt sind. Manches hält er für besonders schön und interessant, was die jungen Köpfe geradezu abstößt. Es ist überhaupt kein schlechtes pädagogisches Prinzip, den Lernenden über die Lehrmethoden etwas mitreden zu lassen.

Dresden, Weißer Hirsch, 1933.

Gerhard Kowalewski.

Inhaltsübersicht des ersten Bandes.

Vektorrechnung und analytische Geometrie.

	Seite
§ 1. Definition und Bezeichnung der Vektoren	1
§ 2. Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl	2
§ 3. Addition und Subtraktion der Vektoren	3
§ 4. Basisdarstellung der Vektoren	5
§ 5. Homogene Koordinaten für die Punkte einer Ebene und einer Geraden	8
§ 6. Übergang zu einer neuen Basis	10
§ 7. Volumprodukt dreier Vektoren	13
§ 8. Haupteigenschaften der Determinanten	17
§ 9. Der allgemeine Determinantenbegriff	21
§ 10. Beispiele und Erläuterungen	27
§ 11. Einige geometrische Anwendungen	36
§ 12. Systeme linearer Gleichungen	44
§ 13. Lineare homogene Gleichungen	49
§ 14. Anwendung auf die inhomogenen linearen Gleichungssysteme	54
§ 15. Das innere Produkt zweier Vektoren	56
§ 16. Das äußere Produkt zweier Vektoren	59
§ 17. Doppelkreuzprodukte und andere mehrfache Produkte	63
§ 18. Anwendungen auf die sphärische Trigonometrie	66
§ 19. Ein Beispiel aus der Statik	72
§ 20. Analytische Darstellung der Drehungen	79
§ 21. Koaxiale Quaternionen und gewöhnliche komplexe Zahlen	92
§ 22. Drehstreckungen	100
§ 23. Linear gebrochene Transformationen	104
§ 24. Spiegelungen an Kreisen	116
§ 25. Spiegelungen an Geraden	120
§ 26. Grundgebilde erster Stufe und projektive Beziehungen zwischen ihnen.	131
§ 27. Involutionen in Grundgebilden erster Stufe	152
§ 28. Die Punktpaare einer Involution in analytischer Darstellung	161
§ 29. Der Pascalsche Satz	166
§ 30. Projektivität zwischen Ebenen	174
§ 31. Projektive Umformung einer Kurve zweiter Ordnung	186
§ 32. Die Bewegungen als projektive Transformationen	198
§ 33. Kurven zweiter Ordnung mit Mittelpunkt	203

Vektorrechnung und analytische Geometrie.

§ 1. Definition und Bezeichnung der Vektoren.

Wenn man im Raume von einem Punkte A geradlinig zu einem Punkte B übergeht, so beschreibt oder durchläuft man die Strecke AB . Sie hat den Anfangspunkt A und den Endpunkt B . In dem Streckensymbol AB steht immer an erster Stelle der Anfangspunkt, an zweiter Stelle der Endpunkt. Der Endpunkt wird in den Figuren gewöhnlich durch eine Pfeilspitze markiert. Zwei Strecken AB und A_1B_1 heißen äquivalent, wenn man die eine in die andere durch Parallelverschiebung überführen kann, d. h. wenn ABB_1A_1 die Ecken eines Parallelogramms sind, wie man sie beim Durchlaufen des Randes der Reihe nach antrifft (vgl. Fig. 1). Die Äquivalenz der Strecken AB , A_1B_1 wird durch die Gleichung

$$AB = A_1B_1$$

ausgedrückt.

Alle mit einer bestimmten Strecke AB äquivalenten Strecken betrachten wir als Einzelercheinungen eines Vektors. Jede zu AB äquivalente Strecke gilt als Repräsentant dieses Vektors. Ein Vektor ist, so könnte man kurz sagen, eine Strecke, der alle Parallelverschiebungen erlaubt sind. Es kann vorkommen, daß diese Freiheit eingeengt wird, daß man z. B. nur Verschiebungen auf der Geraden AB erlaubt. Dann spricht man von gebundenen Vektoren.

Vektoren werden gewöhnlich durch große oder kleine deutsche Buchstaben bezeichnet.

Wenn man im Raume eine Translation (Parallelverschiebung) vornimmt, die den Punkt A in B , den Punkt C in D überführt usw., so sind die Strecken $AB, CD, \dots$ alle äquivalent. Bei einer Translation beschreiben alle Punkte des Raumes äquivalente Strecken. Es gehört also zu jeder Translation ein Vektor. Die Translationen können wir als anschauliche Korrelate der Vektoren betrachten. Ein Vektor ist, anschaulich gesprochen, eine Translation.

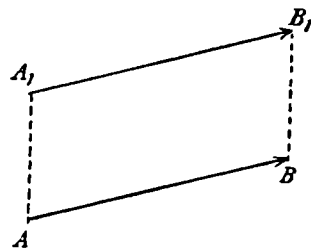


Fig. 1.

§ 2. Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl.

$\mathfrak{A}$ sei ein Vektor und k eine positive oder negative Zahl. Dann soll $k\mathfrak{A}$ einen Vektor bezeichnen, der die $|k|$ -fache Länge ¹⁾ von $\mathfrak{A}$ hat und die gleiche oder entgegengesetzte Richtung, je nachdem k positiv oder negativ ist. So entsteht der Vektor $3\mathfrak{A}$, indem man $\mathfrak{A}$, ohne die Richtung zu ändern, auf die dreifache Länge bringt, $\frac{1}{3}\mathfrak{A}$ hat dieselbe Richtung wie $\mathfrak{A}$, aber nur den dritten Teil der Länge. $(-5)\mathfrak{A}$ wäre ein Vektor von derselben Länge wie $5\mathfrak{A}$, aber von entgegengesetzter Richtung. Ist also AB ein Repräsentant von $5\mathfrak{A}$, so wird BA den Vektor $(-5)\mathfrak{A}$ darstellen. $(-1)\mathfrak{A}$, wofür man auch kurz $-\mathfrak{A}$ schreibt, ist der Vektor BA .

Wenn man den Vektor $\mathfrak{A}$ zuerst mit k_1 und dann mit k_2 multipliziert, so kommt dasselbe Ergebnis heraus wie bei direkter Multiplikation mit k_1k_2 . Die Länge von $\mathfrak{A}$ wird zuerst mit $|k_1|$ und dann noch mit $|k_2|$ multipliziert, also im ganzen mit $|k_1||k_2|$ oder $|k_1k_2|$. Wenn k_1 und k_2 beide positiv sind, bleibt beidemal die Richtung des Vektors erhalten. Ist einer der beiden Faktoren negativ, so tritt einmal eine Umkehrung der Richtung ein, ebenso wie bei direkter Multiplikation mit der negativen Zahl k_1k_2 . Sind endlich k_1 und k_2 beide negativ, so erfolgt beidemal eine Umkehrung der Richtung, d. h. die Richtung ist schließlich dieselbe geblieben, ebenso wie bei direkter Multiplikation mit der positiven Zahl k_1k_2 . Man kann dieses einfache Rechnungsgesetz durch die Formel

$$(I) \quad k_2(k_1\mathfrak{A}) = (k_1k_2)\mathfrak{A}$$

ausdrücken. Soll der Vektor $\mathfrak{A}$ mit der negativen Zahl k multipliziert werden, so kann man ihn, da $k = (-1)|k|$ ist, zuerst mit $|k|$ und dann mit -1 multiplizieren. Da wir statt $(-1)\mathfrak{B}$ kurz $-\mathfrak{B}$ schreiben, so ist also bei negativem k

$$k\mathfrak{A} = -|k|\mathfrak{A}.$$

Alle Vektoren, die zu einem gegebenen Vektor $\mathfrak{A}$ parallel sind, können in der Form $x\mathfrak{A}$ dargestellt werden. Ist $\mathfrak{B}$ ein solcher Vektor, so wird offenbar $\mathfrak{B} = x\mathfrak{A}$ sein, wenn man unter x das Längenverhältnis der Vektoren $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ versteht (Länge von $\mathfrak{B}$ dividiert durch Länge von $\mathfrak{A}$) und dieses Längenverhältnis mit dem Pluszeichen oder Minuszeichen versieht, je nachdem die Vektoren gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben. In dieser einfachen Überlegung steckt die Wurzel der analytischen Geometrie auf einer Geraden. Wenn man auf einer Geraden einen Anfangspunkt O und einen Grundvektor OE ein für allemal wählt, so gehört zu jedem Punkt P der Geraden ein Ortsvektor OP , der sich in der Form xOE schreiben läßt. Die Zahl x kann zur Kennzeichnung des Punktes P dienen und heißt die Abszisse dieses Punktes. Die analytische Geometrie auf der Geraden, deren Gegenstand vor allem die Punktgruppen auf der Geraden bilden, operiert mit dieser zahlenmäßigen Kennzeichnung der Punkte.

¹⁾ $|k|$ ist der absolute Betrag von k .

§ 3. Addition und Subtraktion der Vektoren.

Wenn zwei Vektoren $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$, repräsentiert durch die Strecken A_1B_1 und A_2B_2 , vorliegen, so wird die Summe $\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2$ folgendermaßen gebildet: Man geht von irgendeinem Punkte P aus und wählt zunächst den Punkt Q derart, daß $PQ = A_1B_1$ ist, sodann den Punkt R derart, daß $QR = A_2B_2$ ist. Man stellt also aus A_1B_1 und A_2B_2 durch Translationen einen Streckenzug her. Kennzeichnend für einen Streckenzug ist der Umstand, daß die zweite Strecke im Endpunkt der ersten beginnt. Bei Streckenzügen, die aus drei Strecken bestehen, fängt die dritte Strecke dort an, wo die zweite aufhört. Ähnliches gilt für n -gliedrige Streckenzüge. Hat man nun aus A_1B_1 und A_2B_2 durch Translationen den Streckenzug PQ, QR gebildet, so heißt PR die schließende Strecke (vgl. Fig. 2). Sie repräsentiert die Summe $\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2$. Richtung und Länge von PR sind offenbar unabhängig von der Wahl des Anfangspunktes der Konstruktion. Wenn man will, kann man ihn mit A_1 zusammenfallen lassen. Dann hat man die Strecke A_2B_2 durch Translation nach dem Endpunkt von A_1B_1 zu bringen.

Wenn man bei der Summenbildung $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ vertauscht, so muß man zuerst einen Punkt S wählen derart, daß $PS = A_2B_2$ ist. Dann wird (vgl. Fig. 2) $SR = A_1B_1$ sein. Es kommt also beidemal dieselbe schließende Strecke PR heraus, d. h. es gilt die Gleichung

$$(II) \quad \mathfrak{U}_2 + \mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2.$$

Die Addition der Vektoren ist kommutativ.

Wenn drei Vektoren $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3$ vorliegen und man wählt die Punkte P, P_1, P_2 derart, daß

$$PP_1 = \mathfrak{U}_1, P_1P_2 = \mathfrak{U}_2, P_2P_3 = \mathfrak{U}_3$$

ist, so folgt offenbar aus

$$PP_2 = \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2, P_2P_3 = \mathfrak{U}_3$$

die Gleichung

$$PP_3 = (\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2) + \mathfrak{U}_3,$$

ebenso aber aus

$$PP_1 = \mathfrak{U}_1, P_1P_3 = \mathfrak{U}_2 + \mathfrak{U}_3$$

die Gleichung

$$PP_3 = \mathfrak{U}_1 + (\mathfrak{U}_2 + \mathfrak{U}_3).$$

Hiernach ist also

$$(III) \quad (\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2) + \mathfrak{U}_3 = \mathfrak{U}_1 + (\mathfrak{U}_2 + \mathfrak{U}_3).$$

Man sagt auf Grund dieser Beziehung, die Addition der Vektoren sei assoziativ. Da $(\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2) + \mathfrak{U}_3$ und $\mathfrak{U}_1 + (\mathfrak{U}_2 + \mathfrak{U}_3)$ übereinstimmen, bezeichnet man beide Ausdrücke mit $\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2 + \mathfrak{U}_3$. Ähnliches gilt bei mehr als drei Summanden.

Wir wollen hier noch zwei Rechnungsregeln besprechen, die sich auf die beiden bisher behandelten Operationen beziehen. Sie kommen in Frage,

wenn es sich um die Multiplikation einer Vektorensumme mit einer Zahl oder um die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahlensumme handelt.

Wenn $PQ = \mathfrak{A}$, $QR = \mathfrak{B}$, also $PR = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ ist, so zeigt ein Blick auf Fig. 3, daß die Gleichung

$$(IV) \quad k(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = k\mathfrak{A} + k\mathfrak{B}$$

gilt. Hat nämlich k den positiven Wert k_1 und ist $PQ_1 = k_1 PQ$, $PR_1 = k_1 PR$, so wird von selbst $Q_1R_1 = k_1 QR$ sein. Es gilt also die Gleichung

$$k_1 PQ + k_1 QR = k_1 PR.$$

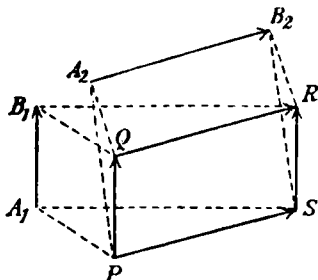


Fig. 2.

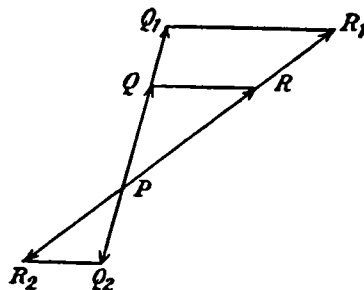


Fig. 3.

Hat k den negativen Wert k_2 und ist $PQ_2 = k_2 PQ$, $PR_2 = k_2 PR$, so wird von selbst $Q_2R_2 = k_2 QR$ sein. Es gilt also die Gleichung

$$k_2 PQ + k_2 QR = k_2 PR.$$

Die andere Rechnungsregel, die bei der Multiplikation eines Vektors mit einer Zahlensumme in Frage kommt, lautet

$$(V) \quad (x_1 + x_2)\mathfrak{A} = x_1\mathfrak{A} + x_2\mathfrak{A}.$$

Sind x_1, x_2 beide positiv, so braucht man nur zu bedenken, daß der Vektor $x_1\mathfrak{A}$ die x_1 -fache, der Vektor $x_2\mathfrak{A}$ die x_2 -fache Länge von $\mathfrak{A}$ hat. Da die Richtung beider Vektoren mit der von $\mathfrak{A}$ übereinstimmt und die Vektoren beim Addieren einfach aneinandergesetzt werden, so ist klar, daß der Summenvektor die $(x_1 + x_2)$ -fache Länge und dieselbe Richtung wie $\mathfrak{A}$ hat. Sind x_1, x_2 beide negativ, so gilt zunächst die Gleichung

$$(-x_1 - x_2)\mathfrak{A} = (-x_1)\mathfrak{A} + (-x_2)\mathfrak{A}.$$

Multipliziert man beiderseits mit -1 und wendet die vorhin bewiesene Rechnungsregel an, so ergibt sich die behauptete Gleichung. Ist x_1 positiv und x_2 negativ oder umgekehrt, so kann man die Nummern 1 und 2 eventuell vertauschen und bewirken, daß $x_1 + x_2$ und $-x_1$ dasselbe Zeichen haben. Dann ist nach den bisherigen Feststellungen

$$(x_1 + x_2)\mathfrak{A} + (-x_1)\mathfrak{A} = x_2\mathfrak{A}.$$

Addiert man auf beiden Seiten $x_1\mathfrak{A}$ und bedenkt, daß $(-x_1)\mathfrak{A}$ und $x_1\mathfrak{A}$ als Summe einen Nullvektor (Vektor von der Länge Null) ergeben, den man, wo er als Summand auftritt, ohne weiteres fortlassen kann, so findet man die Gleichung (V).

Über die Subtraktion der Vektoren ist nicht viel zu sagen. Die Differenz $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ wird einfach als Summe der beiden Vektoren $\mathfrak{A}$ und $-\mathfrak{B}$ erklärt. Läßt man $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beide von demselben Punkte O ausgehen, so daß $\mathfrak{A} = OP$, $\mathfrak{B} = OQ$ ist, so wird $-\mathfrak{B} = QO$, also (unter Benutzung von (II))

$$\mathfrak{A} + (-\mathfrak{B}) = QO + OP = QP.$$

Der Vektor $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ geht also vom Endpunkt der subtrahierten zum Endpunkt der andern Strecke.

§ 4. Basisdarstellung der Vektoren.

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ seien drei Vektoren, die nicht komplanar sind. Damit meinen wir, daß sie sich nicht durch Translationen in eine gemeinsame Ebene bringen lassen. Wenn man drei solche Vektoren durch Parallelverschiebungen nach demselben Ursprung bringt ($\mathfrak{A} = OA$, $\mathfrak{B} = OB$, $\mathfrak{C} = OC$), so fallen sie nicht in eine Ebene, d. h. es gibt keine Ebene, welche die Punkte O , A , B , C enthält.

Nun sei $\mathfrak{B}$ ein beliebiger Vektor. Wir können ihn nach O verschieben, so daß $\mathfrak{B} = OP$ wird. Die durch P zu OC gezogene Parallele schneidet die Ebene OAB in einem Punkte Q (vgl. Fig. 4) gerade deshalb, weil OC nicht in die genannte Ebene fällt. Die durch Q zu OB gezogene Parallele trifft die Gerade OA in einem Punkte R , weil OB nicht in dieser Geraden enthalten ist. Dadurch, daß wir OA , OB , OC als nichtkomplanar voraussetzen, wird zugleich ausgeschlossen, daß zwei von diesen Strecken derselben Geraden angehören oder, wie man zu sagen pflegt, kollinear sind. Deshalb konnten wir auch von der Ebene OAB reden.

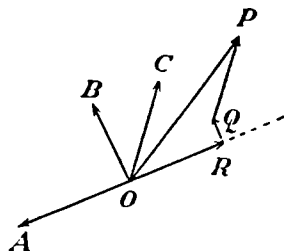


Fig. 4.

Offenbar ist jetzt

$$OP = OR + RQ + QP.$$

Die drei Strecken, in die OP hier zerlegt erscheint, sind parallel zu OA , OB , OC und können in der Form xOA , yOB , zOC geschrieben werden. Es gilt also die Darstellung

$$(1) \quad \mathfrak{B} = x\mathfrak{A} + y\mathfrak{B} + z\mathfrak{C}.$$

Jeder Vektor $\mathfrak{B}$ läßt sich somit aus den drei Grundvektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ aufbauen. Diese Darstellung bezeichnen wir als Basisdarstellung des Vektors $\mathfrak{B}$. Die Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bilden die Basis. Die einzige Bedingung, der sie unterliegen, ist die, daß sie nicht komplanar sein dürfen.

Wenn der Vektor $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ komplanar ist, so fällt OP in die Ebene OAB . Die Punkte P und Q rücken zusammen, und man hat

$$OP = OQ = OR + RQ,$$

d. h.

$$\mathfrak{B} = x\mathfrak{A} + y\mathfrak{B}.$$

Jeder mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ komplanare Vektor läßt sich also aus den beiden Grundvektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ aufbauen. Diese dürfen nicht kollinear sein, sind aber sonst keiner Bedingung unterworfen. Wenn man mit zwei beliebigen Zahlen x , y den Vektor $x\mathfrak{A} + y\mathfrak{B}$ bildet, so ist er mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ komplanar. In der Tat wird $xOA = OA'$, wobei A' der Geraden OA angehört, ebenso $yOB = OB'$, wobei B' auf der Geraden OB liegt. Wenn man aber OA' , OB' zu einem Streckenzug zusammenschiebt, so bleibt man in der Ebene OAB .

Wenn der Vektor $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}$ kollinear ist, also dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung wie $\mathfrak{A}$ hat, so wird

$$\mathfrak{B} = x\mathfrak{A}.$$

Die einzige Bedingung, die der Vektor $\mathfrak{A}$ erfüllen muß, ist die, daß seine Länge nicht null sein darf.

Wir kehren jetzt zu der Darstellung (1) zurück, um die Bemerkung zu machen, daß $\mathfrak{B}$ nur auf eine Weise in der Form (1) ausgedrückt werden kann. Wäre nämlich

$$x\mathfrak{A} + y\mathfrak{B} + z\mathfrak{C} = x'\mathfrak{A} + y'\mathfrak{B} + z'\mathfrak{C},$$

so hätte man

$$(x - x')\mathfrak{A} = (y' - y)\mathfrak{B} + (z' - z)\mathfrak{C}.$$

Wir stützen uns dabei auf die Rechnungsregel (V) und benutzen zugleich, daß man einen Nullvektor in einer Summe fortlassen kann. Die neue Gleichung kommt dadurch zustande, daß in der alten beiderseits die Vektoren $-x'\mathfrak{A}$, $-y\mathfrak{B}$, $-z\mathfrak{C}$ addiert werden. Wäre nun $x - x' \neq 0$, so ergäbe sich

durch Multiplikation mit $\frac{1}{x - x'}$, unter Benutzung der Rechnungsregel (I)

$$\mathfrak{A} = \frac{y' - y}{x - x'} \mathfrak{B} + \frac{z' - z}{x - x'} \mathfrak{C}.$$

Diese Gleichung würde aber bedeuten, daß $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ komplanar ist, was wir gerade ausschließen. Es muß also $x - x' = 0$ sein. Ebenso folgt $y - y' = 0$, $z - z' = 0$. Damit ist die Eindeutigkeit der Basisdarstellung bewiesen.

Genau ebenso ergibt sich, daß ein mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ komplanarer Vektor nur auf eine Weise in der Form $x\mathfrak{A} + y\mathfrak{B}$ ausgedrückt werden kann und ein mit $\mathfrak{A}$ kollinear Vektor nur auf eine Weise in der Form $x\mathfrak{A}$. Vorausgesetzt wird dabei, daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nicht kollinear sind, und im letzten Falle, daß $\mathfrak{A}$ kein Nullvektor ist. Nullvektoren werden, wie wir bei dieser Gelegenheit bemerken wollen, durch eine Null dargestellt. Die Gleichung $\mathfrak{B} = 0$ besagt, daß $\mathfrak{B}$ ein Nullvektor (Vektor von der Länge 0) ist.

Wenn man einen Vektor $\mathfrak{B}$ in der Form (1) dargestellt hat, so heißen die drei Zahlen x , y , z seine Koordinaten in bezug auf die Basis $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$. Die drei Summanden $x\mathfrak{A}$, $y\mathfrak{B}$, $z\mathfrak{C}$ werden als die Komponenten von $\mathfrak{B}$ bezeichnet, $x\mathfrak{A}$ als die $\mathfrak{A}$ -Komponente, $y\mathfrak{B}$ als die $\mathfrak{B}$ -Komponente, $z\mathfrak{C}$ als die $\mathfrak{C}$ -Komponente. Durch die Basisdarstellung sind wir zu einer zahlenmäßigen Kennzeichnung der Vektoren gelangt. Jedem Vektor entspricht, wenn wir

eine Basis $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ zugrunde legen, ein geordnetes Zahlentripel x, y, z und umgekehrt. Die Vektoren des Raumes sind, so können wir sagen, auf die Gesamtheit der geordneten Zahlentripel abbildbar.

Läßt man alle Vektoren von einem festen Punkt O ausgehen und ist $\mathfrak{A} = OA$, $\mathfrak{B} = OB$, $\mathfrak{C} = OC$ und $\mathfrak{P} = OP$, so werden x, y, z als die Koordinaten des Punktes P in bezug auf die Grundstrecken OA, OB, OC bezeichnet. Man erhält diese Koordinaten, wenn man den Ortsvektor OP des Punktes P mittels der Basisvektoren OA, OB, OC darstellt:

$$OP = xOA + yOB + zOC.$$

Hiermit ist die Grundlage für die analytische Geometrie des Raumes gewonnen. Besonders wichtig ist der Fall, wo die Grundstrecken OA, OB, OC die Länge 1 haben und paarweise aufeinander senkrecht stehen. Gewöhnlich wählt man die Strecken so, daß sie ein Rechtssystem bilden, also so zueinander liegen, wie das rechte Bein, das linke Bein und der Oberkörper eines breitbeinig sitzenden Menschen (vgl. Fig. 5).

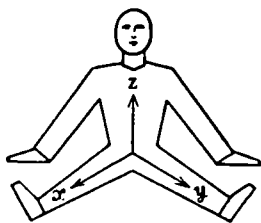


Fig. 5.

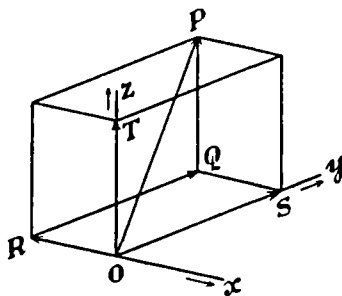


Fig. 6.

Wenn OA, OB, OC orthogonale Einheitsstrecken sind, heißen x, y, z die rechtwinkligen cartesischen Koordinaten des Punktes P . Die Geraden OA, OB, OC werden als die Koordinatenachsen bezeichnet und als x -Achse, y -Achse und z -Achse voneinander unterschieden. Auf jeder dieser Achsen gibt es eine positive Richtung, die von O nach A oder B oder C hinweist. Man zeichnet gewöhnlich nur die positiven Hälften der Achsen, die von O über A, B, C hinausführen. Die Komponenten des Ortsvektors OP sind nichts anderes als die Projektionen von OP auf die Koordinatenachsen (vgl. Fig. 6). Man sieht in der Tat sofort, daß $OS = RQ$, $OT = QP$ ist, also

$$OP = OR + OS + OT.$$

Die x -Koordinate des Punktes P läßt sich offenbar auch als die mit einem gewissen Vorzeichen versehene Länge der Strecke OR erklären, und zwar ist dieses Zeichen $+$ oder $-$, je nachdem OR (von O nach R durchlaufen) der positiven oder der negativen Richtung der x -Achse folgt. Ähnliches gilt für y und z . Die positiven Achsenrichtungen sind durch beigesetzte Pfeile markiert.

Will man analytische Geometrie in einer Ebene treiben, so braucht man nur zwei in der Ebene liegende Grundstrecken OA, OB . Der Ortsvektor OP jedes Punktes der Ebene läßt sich in der Form $xOA + yOB$ ausdrücken. x, y sind die Koordinaten des Punktes P . Auch hier ist der Fall besonders wichtig, wo OA und OB zueinander orthogonal sind und die Länge 1 haben. Man spricht dann von rechtwinkligen cartesischen Koordinaten. x heißt gewöhnlich die Abszisse, y die Ordinate des Punktes P .

§ 5. Homogene Koordinaten für die Punkte einer Ebene und einer Geraden.

Wenn eine Ebene α vorliegt und O ein Punkt außerhalb α ist, so kann man durch O drei beliebige nichtkomplanare Strecken OA, OB, OC legen. Jede von O ausgehende Strecke OP kann in der Form $xOA + yOB + zOC$ dargestellt werden. Sie schneidet, genügend verlängert, die Ebene α in einem Punkte P^* . Die drei Zahlen x, y, z werden als homogene Koordinaten des Punktes P^* bezeichnet. Es ist klar, daß zwei Geraden OP und OP_1 dann und nur dann denselben Schnittpunkt mit α haben, wenn OP und OP_1 kollinear sind, d. h. $OP_1 = kOP$. Ist nun

$$OP_1 = x_1OA + y_1OB + z_1OC,$$

so wäre also nach den Rechnungsregeln (IV) und (I)

$$x_1OA + y_1OB + z_1OC = kxOA + kyOB + kzOC.$$

Hieraus folgt, da OA, OB, OC nicht komplanar sind,

$$x_1 = kx, \quad y_1 = ky, \quad z_1 = kz.$$

Man sieht also, daß die homogenen Koordinaten bis auf einen Faktor k festliegen. Daß hier ein solcher willkürlicher Faktor hineinkommt, hat die Benennung „homogene“ Koordination veranlaßt.

Die Schnittpunkte der Geraden OA, OB, OC mit α , die wir mit A^*, B^*, C^* bezeichnen, nennt man die Grundpunkte der Ebene α . Die Koordinaten von A^* sind proportional zu 1, 0, 0, die von B^* zu 0, 1, 0, die von C^* zu 0, 0, 1. Der Punkt von α , dessen Koordinaten proportional zu 1, 1, 1 sind, wird als Einheitspunkt bezeichnet. Setzt man

$$OA + OB + OC = OE,$$

so ist er der Punkt E^* , in welchem die Gerade OE die Ebene α trifft. Sind A^*, B^*, C^*, E^* bekannt und hat man den Punkt O , so lassen sich OA, OB, OC bis auf einen Proportionalitätsfaktor bestimmen. Es ist nämlich $OA = aOA^*, OB = bOB^*, OC = cOC^*$ und andererseits $OE = \lambda OE^*$. Also muß folgende Gleichung stattfinden:

$$aOA^* + bOB^* + cOC^* = \lambda OE^*.$$

Man ersieht hieraus, daß sich a, b, c zueinander verhalten wie die Koordinaten des Vektors OE^* in bezug auf die Basis OA^*, OB^*, OC^* . Damit sind OA, OB, OC bis auf einen Proportionalitätsfaktor, der hier offenbar belanglos ist, festgelegt.

Auch auf einer Geraden kann man in ganz entsprechender Weise homogene Punktkoordinaten einführen. Wir wollen hierauf näher eingehen, um gleichzeitig zu zeigen, wie mit Hilfe der homogenen Koordinaten das Unendlichferne erfaßt werden kann. Entsprechendes gilt natürlich für die Ebene. Um auf der Geraden g homogene Koordinaten einzuführen, benutzen wir einen Punkt O , der außerhalb der Geraden liegt, und zwei Strecken OA und OB in der Ebene O, g , die nicht kollinear sind. Jede von O ausgehende Strecke $OP = xOA + yOB$ trifft in ihrer Verlängerung die Gerade g in einem Punkte P^* , als dessen homogene Koordinaten x und y definiert werden. Sie sind nur bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt, weil OP mit einem beliebigen Faktor versehen werden kann. Wenn OP zu der Geraden g parallel wird, rückt P^* ins Unendliche. Wir betrachten in diesem Falle die Größen x, y als die homogenen Koordinaten des unendlich fernen Punktes oder, wie wir kürzer sagen wollen, des Fernpunktes der Geraden g .

Wir wollen noch einmal zu der Ebene α zurückkehren, um zu zeigen, daß sich die rechtwinkligen cartesischen Koordinaten dem hier eingeführten allgemeineren Koordinatenbegriff unterordnen. In der Ebene α seien die rechtwinkligen Achsen $C\xi, C\eta$ gezeichnet. O sei ein Punkt außerhalb der Ebene α . Wir wählen die beiden ersten Grundstrecken OA, OB so, daß sie die Länge 1 haben und den positiven Achsenrichtungen $C\xi, C\eta$ folgen. Als dritte Grundstrecke benutzen wir OC (vgl. Fig. 7). Dann ist nach der Definition der cartesischen Koordinaten ξ, η

$$CP^* = \xi OA + \eta OB,$$

mithin

$$OP^* = OC + CP^* = \xi OA + \eta OB + OC.$$

Die homogenen Koordinaten von P^* sind nach der oben gegebenen Definition die Faktoren x, y, z , welche in der Basisdarstellung einer mit OP^* kollinearen oder, wie wir auch sagen, einer zu OP^* proportionalen Strecke OP auftreten. Sie sind also proportional zu $\xi, \eta, 1$. Wir nennen diese besondere Art homogener Koordinaten homogene cartesische Koordinaten. ξ, η sind demgegenüber die inhomogenen cartesischen Koordinaten. Da x, y, z sich von $\xi, \eta, 1$ nur um einen Proportionalitätsfaktor unterscheiden, so ist

$$\xi = \frac{x}{z}, \quad \eta = \frac{y}{z}.$$

Man stelle sich nun vor, daß der Punkt P^* auf der Geraden CP^* ins Unendliche forttrückt. Dann wird die Gerade OP^* in eine Parallele zu dieser Geraden übergehen und wird also in die Ebene OAB fallen. Eine auf dieser Parallelen liegende Strecke OP läßt sich in der Form $xOA + yOB$ darstellen. Der Faktor z der dritten Grundstrecke ist null. Der unendlich ferne Punkt oder Fernpunkt der Geraden CP^* hat also die homogenen Koordinaten $x, y, 0$. Die beiden ersten, x und y , sind proportional zu den Koordinaten ξ, η des

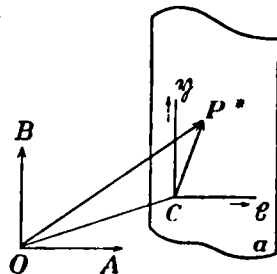


Fig. 7.

Vektors CP^* , also eines beliebigen Vektors auf der betrachteten Geraden. Man nennt zwei solche Zahlen Richtungskoeffizienten dieser Geraden. Alle zu CP^* parallelen Geraden der Ebene α haben denselben Fernpunkt. Die Fernpunkte der Ebene α sind, wie man sieht, dadurch gekennzeichnet, daß die dritte homogene cartesische Koordinate verschwindet.

§ 6. Übergang zu einer neuen Basis.

Wir haben gesehen, daß alle Vektoren sich aus drei nichtkomplanaren Grundvektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ aufbauen lassen. Für jeden Vektor $\mathfrak{B}$ gibt es drei Zahlen x , y , z , welche die Gleichung

$$\mathfrak{B} = x\mathfrak{A} + y\mathfrak{B} + z\mathfrak{C}$$

herbeiführen. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ nannten wir auch die Basisvektoren und x , y , z die Koordinaten des Vektors $\mathfrak{B}$ in bezug auf die Basis $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$.

Es entsteht nun die Frage, wie sich die Koordinaten x , y , z ändern, wenn man statt $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ eine neue Basis $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ einführt. Wir wollen wissen, wie die in der Gleichung

$$\mathfrak{B} = x'\mathfrak{A}' + y'\mathfrak{B}' + z'\mathfrak{C}'$$

auf tretenden Faktoren x' , y' , z' mit x , y , z zusammenhängen.

Wenn man die Vektoren $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ auf die Basis $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bezieht, so erhält man drei Gleichungen von folgender Gestalt:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}' &= \alpha_1\mathfrak{A} + \beta_1\mathfrak{B} + \gamma_1\mathfrak{C}, \\ \mathfrak{B}' &= \alpha_2\mathfrak{A} + \beta_2\mathfrak{B} + \gamma_2\mathfrak{C}, \\ \mathfrak{C}' &= \alpha_3\mathfrak{A} + \beta_3\mathfrak{B} + \gamma_3\mathfrak{C}.\end{aligned}$$

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ sind die Koordinaten des neuen Basisvektors $\mathfrak{A}'$ in bezug auf $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ebenso $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ die des Vektors $\mathfrak{B}'$ und $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ die des Vektors $\mathfrak{C}'$. Setzt man diese Ausdrücke in $x'\mathfrak{A}' + y'\mathfrak{B}' + z'\mathfrak{C}'$ ein, so ergibt sich unter Benutzung der Rechnungsregeln (I), (II), (III), (IV), (V)

$$\begin{aligned}\mathfrak{B} &= (\alpha_1x' + \alpha_2y' + \alpha_3z')\mathfrak{A} \\ &\quad + (\beta_1x' + \beta_2y' + \beta_3z')\mathfrak{B} \\ &\quad + (\gamma_1x' + \gamma_2y' + \gamma_3z')\mathfrak{C}.\end{aligned}$$

Da die Basisdarstellung eindeutig ist, muß

$$\begin{aligned}x &= \alpha_1x' + \alpha_2y' + \alpha_3z', \\ y &= \beta_1x' + \beta_2y' + \beta_3z', \\ z &= \gamma_1x' + \gamma_2y' + \gamma_3z'\end{aligned}$$

sein. Man nennt eine solche Beziehung zwischen x , y , z und x' , y' , z' eine lineare Transformation. Unser Ergebnis läßt sich also dahin aussprechen, daß beim Übergange zu einer neuen Basis die Vektorkoordinaten eine lineare Transformation erfahren, sich linear transformieren.

Aus demselben Grunde werden Gleichungen von folgender Form bestehen:

$$\begin{aligned}x' &= a_1x + a_2y + a_3z, \\y' &= b_1x + b_2y + b_3z, \\z' &= c_1x + c_2y + c_3z.\end{aligned}$$

Diese lineare Transformation nennt man die Umkehrung der andern.

Auch die Gleichungen, die $\mathfrak{U}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{U}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}'$ verknüpfen, kann man als lineare Transformation ansehen. Nur werden hier nicht Zahlen, sondern Vektoren linear transformiert. Wir wollen uns in diesem Zusammenhang mit dem wichtigen Begriff der Matrix und der Multiplikation der Matrizen bekanntmachen. Zu diesem Zweck betrachten wir drei Tripel nicht-komplanarer Vektoren

$$\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3; \quad \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3; \quad \mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \mathfrak{W}_3.$$

Beziehen wir die Vektoren $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3$ auf die Basis $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$, so entstehen Gleichungen von der Form

$$(1) \quad \begin{cases} \mathfrak{U}_1 = a_{11}\mathfrak{B}_1 + a_{12}\mathfrak{B}_2 + a_{13}\mathfrak{B}_3, \\ \mathfrak{U}_2 = a_{21}\mathfrak{B}_1 + a_{22}\mathfrak{B}_2 + a_{23}\mathfrak{B}_3, \\ \mathfrak{U}_3 = a_{31}\mathfrak{B}_1 + a_{32}\mathfrak{B}_2 + a_{33}\mathfrak{B}_3. \end{cases}$$

Beziehen wir $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$ auf die Basis $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \mathfrak{W}_3$, so gelangen wir zu Darstellungen von folgender Gestalt:

$$(2) \quad \begin{cases} \mathfrak{B}_1 = b_{11}\mathfrak{W}_1 + b_{12}\mathfrak{W}_2 + b_{13}\mathfrak{W}_3, \\ \mathfrak{B}_2 = b_{21}\mathfrak{W}_1 + b_{22}\mathfrak{W}_2 + b_{23}\mathfrak{W}_3, \\ \mathfrak{B}_3 = b_{31}\mathfrak{W}_1 + b_{32}\mathfrak{W}_2 + b_{33}\mathfrak{W}_3. \end{cases}$$

Endlich finden wir, wenn $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3$ auf die Basis $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \mathfrak{W}_3$ bezogen werden,

$$(3) \quad \begin{cases} \mathfrak{U}_1 = c_{11}\mathfrak{W}_1 + c_{12}\mathfrak{W}_2 + c_{13}\mathfrak{W}_3, \\ \mathfrak{U}_2 = c_{21}\mathfrak{W}_1 + c_{22}\mathfrak{W}_2 + c_{23}\mathfrak{W}_3, \\ \mathfrak{U}_3 = c_{31}\mathfrak{W}_1 + c_{32}\mathfrak{W}_2 + c_{33}\mathfrak{W}_3. \end{cases}$$

Andererseits erhalten wir durch Einsetzen der Ausdrücke (2) in die Gleichungen (1) folgendes Ergebnis:

$$(3^*) \quad \begin{cases} \mathfrak{U}_1 = (\Sigma a_{1,b_{r1}})\mathfrak{W}_1 + (\Sigma a_{1,b_{r2}})\mathfrak{W}_2 + (\Sigma a_{1,b_{r3}})\mathfrak{W}_3, \\ \mathfrak{U}_2 = (\Sigma a_{2,b_{r1}})\mathfrak{W}_1 + (\Sigma a_{2,b_{r2}})\mathfrak{W}_2 + (\Sigma a_{2,b_{r3}})\mathfrak{W}_3, \\ \mathfrak{U}_3 = (\Sigma a_{3,b_{r1}})\mathfrak{W}_1 + (\Sigma a_{3,b_{r2}})\mathfrak{W}_2 + (\Sigma a_{3,b_{r3}})\mathfrak{W}_3. \end{cases}$$

Bei der durch Σ angedeuteten Summation durchläuft der Index die Werte 1, 2, 3.

Wegen der Eindeutigkeit der Basisdarstellung müssen nun die Koeffizienten in den Gleichungen (3) und (3*) übereinstimmen. Man faßt diese Übereinstimmung gewöhnlich in eine einzige Gleichung zusammen, die man folgendermaßen schreibt:

$$(4) \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma a_{1,b_{r1}} & \Sigma a_{1,b_{r2}} & \Sigma a_{1,b_{r3}} \\ \Sigma a_{2,b_{r1}} & \Sigma a_{2,b_{r2}} & \Sigma a_{2,b_{r3}} \\ \Sigma a_{3,b_{r1}} & \Sigma a_{3,b_{r2}} & \Sigma a_{3,b_{r3}} \end{pmatrix}.$$

Auf jeder Seite dieser Gleichung steht eine sogenannte dreireihige Matrix. Zwei solche Matrizen gelten dann und nur dann als gleich, wenn jedes Element

der einen dem entsprechenden Element der andern gleich ist. Eine Gleichung zwischen zwei dreireihigen Matrizen stellt also eine Zusammenfassung von neun gewöhnlichen Gleichungen dar.

Die Elemente c erscheinen hier in besonderer Weise aus den Elementen a und b aufgebaut. Wir wollen die Zeilen der Matrix

$$(5) \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

mit a_1, a_2, a_3 bezeichnen, die Spalten der Matrix

$$(6) \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

mit b_1, b_2, b_3 . Ferner wollen wir

$$a_{e1}b_{1\sigma} + a_{e2}b_{2\sigma} + a_{e3}b_{3\sigma} = a_e \cdot b_\sigma.$$

setzen und diesen Ausdruck die Zusammensetzung der Zeile a_e mit der Spalte b_σ nennen. Diese Zusammensetzung kommt dadurch zustande, daß man jedes Element der Zeile a_e mit dem entsprechenden Element der Spalte b_σ multipliziert und die Summe dieser Produkte bildet. Unter Benutzung dieser Symbole schreibt sich die Gleichung (4) in folgender Weise:

$$(4^*) \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 & a_1 \cdot b_2 & a_1 \cdot b_3 \\ a_2 \cdot b_1 & a_2 \cdot b_2 & a_2 \cdot b_3 \\ a_3 \cdot b_1 & a_3 \cdot b_2 & a_3 \cdot b_3 \end{pmatrix}.$$

Man sieht jetzt deutlicher, wie die Elemente $c_{e\sigma}$ aus den Elementen a und b entstehen. $c_{e\sigma}$ ist nichts anderes als die Zusammensetzung der e -ten Zeile der Matrix (5) mit der σ -ten Spalte der Matrix (6). Um die erste Zeile der Matrix (4*) zu erhalten, muß man die erste Zeile von (5) mit den Spalten von (6) zusammensetzen. Die zweite Zeile von (4*) ergibt sich, wenn man die zweite Zeile von (5) mit den Spalten von (6) zusammensetzt, und die dritte Zeile von (4*), wenn man dasselbe mit der dritten Zeile von (5) macht.

Weil nun die lineare Transformation (3) nichts anderes ist als die Aneinanderfolge der linearen Transformationen (1) und (2) oder, wie man auch sagt, das Produkt dieser beiden Transformationen, pflegt man die Matrix (4) das Produkt der Matrizen (5) und (6) in dieser Reihenfolge zu nennen und dieses Produkt dadurch zu symbolisieren, daß man zuerst die Matrix (5) und rechts daneben die Matrix (6) aufschreibt. Man hat also

$$(7) \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 & a_1 \cdot b_2 & a_1 \cdot b_3 \\ a_2 \cdot b_1 & a_2 \cdot b_2 & a_2 \cdot b_3 \\ a_3 \cdot b_1 & a_3 \cdot b_2 & a_3 \cdot b_3 \end{pmatrix}.$$

Dies ist die wichtige Multiplikationsregel für Matrizen. Sie belehrt uns darüber, in welcher Weise sich lineare Transformationen zusammensetzen.

§ 7. Volumprodukt dreier Vektoren.

Wir betrachten drei Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, die wir uns durch Translationen nach demselben Ursprung O gebracht denken, so daß

$$\mathfrak{A} = OA, \quad \mathfrak{B} = OB, \quad \mathfrak{C} = OC$$

ist. Als Volumprodukt der Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bezeichnen wir den Inhalt des durch OA , OB , OC bestimmten Parallelepipeds, genommen mit dem Plus- oder Minuszeichen, je nachdem OA , OB , OC ein Rechtssystem oder ein Linkssystem bilden. Als Symbol für das Volumprodukt soll $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ benutzt werden. Es sei daran erinnert, daß OA , OB , OC ein Rechtssystem bilden, wenn sie so zueinander liegen, wie das rechte Bein, das linke Bein und der Oberkörper eines breitbeinig sitzenden Menschen. Man halte sich an Fig. 5, die das sogenannte Koordinatenmännchen darstellt, das in der Ecke jedes Rechtssystems OA , OB , OC wohnt, sein rechtes Bein auf OA , sein linkes auf OB stützt und den Rücken gegen OC lehnt. Koordinatenmännchen heißt dieses Wesen, weil die rechtwinkligen cartesischen Achsen auch ein Rechtssystem bilden.

Das Volumprodukt $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ hat die Eigenschaft, nur sein Zeichen zu wechseln, wenn man zwei der beteiligten Vektoren vertauscht. Wenn nämlich OA , OB , OC ein Rechtssystem bilden, so sind die Tripel OB , OA , OC und OC , OB , OA und OA , OC , OB Linkssysteme. Läßt man zwei solche Vertauschungen aufeinander folgen, so findet ein zweimaliger Zeichenwechsel statt und das Volumprodukt bleibt völlig ungeändert. $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$ entsteht aus $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ dadurch, daß man zuerst unter Vertauschung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zu $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ übergeht und dann unter Vertauschung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ zu $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$. Es ist daher

$$[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}] = [\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}].$$

Man nennt diese Aussage den Vertauschungssatz. Er stellt fest, daß bei zyklischer Vertauschung der beteiligten Vektoren das Volumprodukt ungeändert bleibt. Gegenüber der Tatsache, daß das Volumprodukt bei Auswechslung zweier Vektoren nur sein Zeichen ändert, bedeutet er nichts Neues. Auf Grund dieser Zeicheneigenschaft sagt man, das Volumprodukt sei eine alternierende Größe.

Man überzeugt sich leicht, daß die Volumprodukte

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}], [\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}], [\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$$

denselben Wert V haben und die Volumprodukte

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}], [\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{C}], [\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{A}]$$

den Wert $-V$. Es sind hiermit alle sechs Anordnungen oder Permutationen der Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ erschöpft. Sie zerfallen hier in zwei Klassen nach übereinstimmenden Volumprodukten. Wenn man in einer Permutation zwei Vektoren auswechselt, entsteht eine Permutation der andern Klasse, weil das Volumprodukt sein Zeichen ändert. Zwei Permutationen derselben Klasse hängen stets durch eine gerade Anzahl solcher Auswechslungen (Transpositionen) zusammen, zwei Permutationen verschiedener Klassen stets

durch eine ungerade Anzahl. Es ist klar, daß man jede Permutation durch Transpositionen in jede andere überführen kann, weil es auf solche Weise möglich ist, jedes Element an eine beliebige Stelle zu bringen. Man kann diese Überführung auf vielerlei Arten machen, indem man zunächst ins Blaue hinein Transpositionen vornimmt und dann systematisch auf das Ziel losgeht. Wie man es auch einrichten mag, immer wird die Anzahl der Transpositionen bis auf ein Vielfaches von 2 dieselbe sein. Derselbe Satz gilt auch für Permutationen mit mehr als drei Elementen.

Wenn man in dem Volumprodukt $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ einen der drei Vektoren mit einem Zahlenfaktor versieht, so multipliziert sich das Volumprodukt mit diesem Faktor. Da $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$, $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}]$, $[\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ gleiche Werte haben, genügt es, die angegebene Eigenschaft für den dritten Vektor festzustellen, also zu zeigen, daß

$$(1) \quad [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, k\mathfrak{C}] = k[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$$

ist. Im Falle $k > 0$ hat das Tripel $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, k\mathfrak{C}$ denselben Charakter wie $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$. Außerdem ist klar, daß das Volumen des Parallelepipedes OA, OB, OC sich mit k multipliziert, wenn man die Strecke OC auf die k -fache Länge bringt. Andererseits bilden $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, -\mathfrak{C}$, nach gemeinsamem Ursprung verschoben, ein Parallelepiped desselben Inhalts wie $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$. Beide Tripel sind aber von entgegengesetztem Charakter. Mithin ist

$$[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, -\mathfrak{C}] = -[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}].$$

Im Falle $k < 0$ wird $-k$ positiv sein. Daher hat man

$$[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, k\mathfrak{C}] = -[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, -k\mathfrak{C}] = (-1)(-k)[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = k[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}].$$

Damit ist der Beweis unserer Behauptung vollkommen erledigt. Im Falle $k = 0$ wird sie trivial.

Wenn in einem Volumprodukt einer der drei Vektoren eine Summe ist, so zerlegt sich das Produkt dementsprechend in zwei Summanden. Auch hier genügt es, den Beweis beim dritten Vektor durchzuführen und zu zeigen, daß

$$(2) \quad [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2] = [\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1] + [\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}_2]$$

ist. Wären $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ kollinear, so würden sich alle drei Volumprodukte auf Null reduzieren und die Gleichung wäre erfüllt. Nehmen wir also an, daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nicht kollinear sind, und sei $\mathfrak{C}$ ein dritter Vektor, der mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ ein nichtkomplanares Tripel bildet. Wir können jetzt $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ auf die Basis $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ beziehen und demgemäß schreiben

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_1 &= x_1\mathfrak{A} + y_1\mathfrak{B} + z_1\mathfrak{C}, \\ \mathfrak{C}_2 &= x_2\mathfrak{A} + y_2\mathfrak{B} + z_2\mathfrak{C}. \end{aligned}$$

Nach unsern Rechnungsregeln wird dann

$$\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 = (x_1 + x_2)\mathfrak{A} + (y_1 + y_2)\mathfrak{B} + (z_1 + z_2)\mathfrak{C}.$$

Hierbei haben wir uns besonders auf die Regel (V) gestützt.

Nach Einsetzung der obigen Ausdrücke haben wir es mit Volumprodukten von der Form $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, x\mathfrak{A} + y\mathfrak{B} + z\mathfrak{C}]$ zu tun. Ist nun $OA = \mathfrak{A}$,

$OB = \mathfrak{B}$, $OP = x\mathfrak{A} + y\mathfrak{B} + z\mathfrak{C}$ und $OQ = z\mathfrak{C}$, so gelangt man offenbar von Q nach P unter Zurücklegung einer Strecke, die gleich $x\mathfrak{A} + y\mathfrak{B}$ ist, also parallel zur Ebene OAB läuft. Die durch OA, OB, OP und durch OA, OB, OQ bestimmten Parallelepipede sind daher inhaltsgleich. Sie haben zur Basis das Parallelogramm aus OA und OB und zur Höhe die von P und Q auf dieses Parallelogramm gefällten Lote, welche beide gleich lang sind. Da sich OP und OQ auf derselben Seite der Ebene OAB befinden, werden die Tripel OA, OB, OP und OA, OB, OQ von gleichem Charakter sein. Es folgt also

$$[OA, OB, OP] = [OA, OB, OQ],$$

d. h.

$$[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, x\mathfrak{A} + y\mathfrak{B} + z\mathfrak{C}] = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, z\mathfrak{C}].$$

Hiernach ist nun

$$[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}_1] = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, z_1\mathfrak{C}] = z_1[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}],$$

$$[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}_2] = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, z_2\mathfrak{C}] = z_2[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}],$$

$$[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2] = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, (z_1 + z_2)\mathfrak{C}] = (z_1 + z_2)[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}],$$

woraus sich die behauptete Gleichung unmittelbar ergibt.

Wir wollen nun zwei Vektorentripel $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3$ und $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$ betrachten, die durch folgende Gleichungen verknüpft sind:

$$\mathfrak{u}_1 = a_{11}\mathfrak{B}_1 + a_{12}\mathfrak{B}_2 + a_{13}\mathfrak{B}_3,$$

$$\mathfrak{u}_2 = a_{21}\mathfrak{B}_1 + a_{22}\mathfrak{B}_2 + a_{23}\mathfrak{B}_3,$$

$$\mathfrak{u}_3 = a_{31}\mathfrak{B}_1 + a_{32}\mathfrak{B}_2 + a_{33}\mathfrak{B}_3.$$

Dann ist nach der Eigenschaft (2) und (1)

$$[\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3] = \Sigma[a_{1\varrho}\mathfrak{B}_\varrho, a_{2\sigma}\mathfrak{B}_\sigma, a_{3\tau}\mathfrak{B}_\tau] = \Sigma a_{1\varrho}a_{2\sigma}a_{3\tau}[\mathfrak{B}_\varrho\mathfrak{B}_\sigma\mathfrak{B}_\tau].$$

Wenn ϱ, σ, τ nicht alle verschieden sind, so verschwindet $[\mathfrak{B}_\varrho\mathfrak{B}_\sigma\mathfrak{B}_\tau]$. Man braucht also die Summation nur über alle sechs Permutationen von 1, 2, 3 zu erstrecken. Ist ϱ, σ, τ eine gerade Permutation, d. h. von derselben Klasse wie 1, 2, 3, so wird

$$[\mathfrak{B}_\varrho\mathfrak{B}_\sigma\mathfrak{B}_\tau] = [\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3],$$

ist ϱ, σ, τ eine ungerade Permutation, so hat man

$$[\mathfrak{B}_\varrho\mathfrak{B}_\sigma\mathfrak{B}_\tau] = -[\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3].$$

Wenn man unter $\text{sgn}(\varrho, \sigma, \tau)$ die positive oder negative Einheit versteht, je nachdem ϱ, σ, τ und 1, 2, 3 derselben Klasse oder verschiedenen Klassen angehören, so kann man schreiben

$$[\mathfrak{B}_\varrho\mathfrak{B}_\sigma\mathfrak{B}_\tau] = [\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3] \text{sgn}(\varrho, \sigma, \tau).$$

Setzt man diesen Ausdruck ein, so wird

$$(3) \quad [\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3] = [\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3] \Sigma \text{sgn}(\varrho, \sigma, \tau) a_{1\varrho}a_{2\sigma}a_{3\tau}.$$

Wir stoßen hier auf den wichtigen Begriff der Determinante. Man nennt die Summe, die in obiger Formel als Faktor von $[\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3]$ erscheint, die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

und benutzt dafür ein ähnliches Symbol wie für die Matrix, nur mit senkrechten Strichen statt der Klammern. Es ist also

$$(4) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum \operatorname{sgn}(\varrho, \sigma, \tau) a_{1\varrho} a_{2\sigma} a_{3\tau}.$$

Was an dieser Formel noch stört, ist die augenscheinliche Bevorzugung der ersten Indizes, die auf der rechten Seite in ihrer natürlichen Anordnung stehenbleiben, während die zweiten Indizes permutiert werden. Diese Bevorzugung läßt sich leicht beseitigen. Man hätte gleich zu Anfang schreiben können

$$\begin{aligned} [u_1 u_2 u_3] &= \frac{1}{3!} \sum [u_{\varrho} u_{\sigma} u_{\tau}] \operatorname{sgn}(\varrho, \sigma, \tau) \\ &= \frac{1}{3!} \sum a_{\varrho\varrho'} a_{\sigma\sigma'} a_{\tau\tau'} [\mathfrak{B}_{\varrho'} \mathfrak{B}_{\sigma'} \mathfrak{B}_{\tau'}] \operatorname{sgn}(\varrho, \sigma, \tau) \\ &= \frac{1}{3!} \sum a_{\varrho\varrho'} a_{\sigma\sigma'} a_{\tau\tau'} \operatorname{sgn}(\varrho, \sigma, \tau) \operatorname{sgn}(\varrho', \sigma', \tau') [\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3]. \end{aligned}$$

Hierbei durchläuft sowohl ϱ, σ, τ als auch ϱ', σ', τ' alle sechs Permutationen von 1, 2, 3. Es ergibt sich auf diese Weise folgende Darstellung der Determinante:

$$(4^*) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{3!} \sum \operatorname{sgn}(\varrho, \sigma, \tau) \operatorname{sgn}(\varrho', \sigma', \tau') a_{\varrho\varrho'} a_{\sigma\sigma'} a_{\tau\tau'}.$$

Wenn $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$ drei orthogonale Einheitsvektoren sind, die ein Rechtssystem bilden, so sind $a_{\varrho 1}, a_{\varrho 2}, a_{\varrho 3}$ die cartesischen Koordinaten des Vektors u_{ϱ} . Da nun $[\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3] = 1$ wird, so erhalten wir aus Formel (3)

$$[u_1 u_2 u_3] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Das Volumprodukt dreier Vektoren ist also gleich der Determinante ihrer cartesischen Koordinaten, die man kurz die Koordinatendeterminante nennt.

Man kann auch die allgemeine Formel (3) leicht in Worte kleiden. Wenn man unter $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$ drei nichtkomplanare Vektoren versteht, so sind $a_{\varrho 1}, a_{\varrho 2}, a_{\varrho 3}$ die Koordinaten des Vektors u_{ϱ} in bezug auf die Basis $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$. Die Determinante dieser Koordinaten ist nach (3) gleich dem Quotienten der beiden Volumprodukte $[u_1, u_2, u_3]$ und $[\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3]$, d. h. es gilt die Gleichung

$$(3^*) \quad \frac{[u_1 u_2 u_3]}{[\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3]} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Auch die Matrix der a könnte man symbolisch als den Quotienten aus den beiden Vektorentripeln u_1, u_2, u_3 und $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$ betrachten. Jede Matrix läßt sich auf unendlich viele Weisen als Quotient zweier Vektoren-

tripel auffassen. Man kann nämlich das Nennertripel $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$ beliebig wählen, nur darf es nicht aus komplanaren Vektoren bestehen. Das Zählertripel bilden dann die Vektoren

$$\mathfrak{U}_\varrho = a_{\varrho 1} \mathfrak{B}_1 + a_{\varrho 2} \mathfrak{B}_2 + a_{\varrho 3} \mathfrak{B}_3. \quad (\varrho = 1, 2, 3).$$

Man kann die Elemente a leicht durch die Vektoren $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$ ausdrücken. Nach den Regeln (1) und (2) hat man nämlich

$$[\mathfrak{U}_\varrho \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3] = a_{\varrho 1} [\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3],$$

$$[\mathfrak{B}_1 \mathfrak{U}_\varrho \mathfrak{B}_3] = a_{\varrho 2} [\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3],$$

$$[\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{U}_\varrho] = a_{\varrho 3} [\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3],$$

wobei auch die Eigenschaft benutzt worden ist, daß ein Volumprodukt verschwindet, wenn darin ein Vektor mehrfach auftritt. Z. B. hat man

$$[\mathfrak{U}_\varrho \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3] = a_{\varrho 1} [\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3] + a_{\varrho 2} [\mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3] + a_{\varrho 3} [\mathfrak{B}_3 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3],$$

die beiden letzten Glieder sind aber gleich Null.

§ 8. Haupteigenschaften der Determinanten.

Aus Formel (3*) in § 7 lassen sich die wichtigsten Eigenschaften der Determinanten unmittelbar ablesen. Man muß sich nur vor Augen halten, daß zwischen den beiden Vektorentripeln $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3$ und $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$ die Beziehung

$$\mathfrak{U}_1 = a_{11} \mathfrak{B}_1 + a_{12} \mathfrak{B}_2 + a_{13} \mathfrak{B}_3,$$

$$\mathfrak{U}_2 = a_{21} \mathfrak{B}_1 + a_{22} \mathfrak{B}_2 + a_{23} \mathfrak{B}_3,$$

$$\mathfrak{U}_3 = a_{31} \mathfrak{B}_1 + a_{32} \mathfrak{B}_2 + a_{33} \mathfrak{B}_3$$

besteht. Wenn man zwei Vektoren $\mathfrak{U}$ vertauscht, so läuft dies hinaus auf eine Vertauschung zweier Determinantenzeilen. Da hierbei $[\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2 \mathfrak{U}_3]$ nur sein Zeichen wechselt, so gilt folgender Satz:

Wenn man in einer Determinante zwei Zeilen vertauscht, wechselt sie nur ihr Zeichen.

Dasselbe gilt, wenn man zwei Spalten der Determinante vertauscht. Es müssen dann, damit die Ausdrücke $\mathfrak{U}$ erhalten bleiben, die entsprechenden Vektoren $\mathfrak{B}$ ausgetauscht werden. Dabei schlägt das Zeichen von $[\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3]$ um, also nach Formel (3*) auch das der Determinante.

Wenn man die Elemente $a_{\varrho 1}, a_{\varrho 2}, a_{\varrho 3}$ mit dem Faktor k versieht, so tritt offenbar an die Stelle des Vektors $\mathfrak{U}_\varrho$ der Vektor $k \mathfrak{U}_\varrho$. Wie wir aus der Regel (1) wissen, multipliziert sich dann $[\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2 \mathfrak{U}_3]$ ebenfalls mit k . Es gilt also folgender Satz:

Wenn man in einer Determinante alle Elemente einer Zeile mit dem Faktor k versieht, multipliziert sich die Determinante mit k .

Derselbe Satz gilt für die Spalten der Determinante. Wenn man nämlich $\mathfrak{B}_\varrho$ durch $k^{-1} \mathfrak{B}_\varrho$ ersetzt und zugleich die Elemente der ϱ -ten Spalte mit dem Faktor k versieht, bleiben die Ausdrücke $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3$ offenbar ungeändert. Da $[\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3]$ den Faktor k^{-1} erhält, so tritt zur linken Seite der Gleichung (3*) der Faktor k , folglich auch zur rechten Seite.

Wenn man die Elemente a_{e1}, a_{e2}, a_{e3} durch $a_{e1} + \lambda a_{\sigma 1}, a_{e2} + \lambda a_{\sigma 2}, a_{e3} + \lambda a_{\sigma 3}$ ersetzt, so bedeutet dies nichts anderes als die Umwandlung von u_e in $u_e + \lambda u_\sigma$. Da hierbei $[u_1, u_2, u_3]$ ungeändert bleibt, so gilt dasselbe von der Determinante.

Die Determinante bleibt ungeändert, wenn man zu einer Zeile die mit λ multiplizierten Elemente einer andern Zeile addiert.

Ersetzt man die Elemente a_{1e}, a_{2e}, a_{3e} durch $a_{1e} + \lambda a_{1\sigma}, a_{2e} + \lambda a_{2\sigma}, a_{3e} + \lambda a_{3\sigma}$ und zugleich den Vektor $\mathfrak{B}_e$ durch $\mathfrak{B}_e - \lambda \mathfrak{B}_\sigma$, so bleiben die Ausdrücke u_1, u_2, u_3 ungeändert. Auch $[\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3]$ ändert sich nicht. Dasselbe gilt also von der Determinante, d. h. der obige Satz überträgt sich auf die Spalten.

Daß alle drei Sätze, die wir zunächst für die Zeilen der Determinante ausgesprochen haben, auch für die Spalten in Kraft bleiben, beruht auf einer allgemeinen Eigenschaft der Determinanten, die wir jetzt an Hand der Formel (4*) des vorigen Paragraphen beweisen werden.

Zwei Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

nennen wir zueinander spiegelbildlich, wenn die Relationen $b_{e\sigma} = a_{\sigma e}$ bestehen. Die eine Matrix entsteht aus der andern durch Spiegelung an der Hauptdiagonale, auf welcher die Elemente a_{11}, a_{22}, a_{33} bzw. b_{11}, b_{22}, b_{33} liegen. Solche Matrizen haben, wie wir uns jetzt überzeugen werden, gleiche Determinanten. Nach Formel (4*) ist die Determinante der a -Matrix in der Form

$$\frac{1}{3!} \sum \text{sgn}(\varrho, \sigma, \tau) \text{sgn}(\varrho', \sigma', \tau') a_{\varrho\varrho'} a_{\sigma\sigma'} a_{\tau\tau'}$$

darstellbar, die b -Matrix in der Form

$$\frac{1}{3!} \sum \text{sgn}(\varrho', \sigma', \tau') \text{sgn}(\varrho, \sigma, \tau) b_{\varrho'\varrho} b_{\sigma'\sigma} b_{\tau'\tau}.$$

Bei der Summation durchläuft sowohl ϱ, σ, τ als auch ϱ', σ', τ' alle Permutationen von 1, 2, 3. Da $b_{\varrho'\varrho} = a_{\varrho\varrho'}$, $b_{\sigma'\sigma} = a_{\sigma\sigma'}$, $b_{\tau'\tau} = a_{\tau\tau'}$ ist, so stimmen beide Summen vollkommen überein. Es ist also

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Man nennt diesen Satz auch den Umklappungssatz. Die eine Matrix entsteht aus der andern durch Umklappen um die Hauptdiagonale.

Offenbar sind die Zeilen der einen Determinante die Spalten der andern. Hierauf beruht es, daß Sätze, die von Zeilen handeln, sich unmittelbar in Sätze über Spalten der Determinante verwandeln.

Wir wollen, ehe wir weitergehen, noch zwei Folgerungen der bisherigen Determinantensätze hervorheben, die sich ebenso leicht direkt mit Hilfe der Formel (3*) beweisen lassen.

Wenn in einer Determinante zwei Zeilen oder zwei Spalten übereinstimmen, ist die Determinante gleich Null.

Vertauscht man nämlich die beiden übereinstimmenden Zeilen oder Spalten, so hat man dieselbe Determinante vor sich. Andererseits schlägt aber bei einer solchen Operation das Zeichen um. Beides läßt sich nur dann miteinander vereinigen, wenn die Determinante verschwindet.

Wenn in einer Determinante alle Elemente einer Zeile oder einer Spalte Nullen sind, ist die Determinante ebenfalls gleich Null. Der in allen jenen Elementen enthaltene Faktor Null tritt nämlich vor die Determinante.

Nun kommen wir zu dem sogenannten Additionssatz. Wenn die Elemente a_{11}, a_{12}, a_{13} Binome sind, also

$$a_{11} = a'_{11} + a''_{11}, \quad a_{12} = a'_{12} + a''_{12}, \quad a_{13} = a'_{13} + a''_{13}.$$

so ist der Vektor

$$u_1 = a_{11} \mathfrak{B}_1 + a_{12} \mathfrak{B}_2 + a_{13} \mathfrak{B}_3$$

die Summe der beiden Vektoren

$$\begin{aligned} u'_1 &= a'_{11} \mathfrak{B}_1 + a'_{12} \mathfrak{B}_2 + a'_{13} \mathfrak{B}_3, \\ u''_1 &= a''_{11} \mathfrak{B}_1 + a''_{12} \mathfrak{B}_2 + a''_{13} \mathfrak{B}_3. \end{aligned}$$

Infolgedessen ist

$$[u_1 u_2 u_3] = [u'_1 u_2 u_3] + [u''_1 u_2 u_3].$$

Andererseits hat man

$$\frac{[u_1 u_2 u_3]}{[\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3]} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

ebenso aber auch

$$\frac{[u'_1 u_2 u_3]}{[\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3]} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

und

$$\frac{[u''_1 u_2 u_3]}{[\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3]} = \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Also folgt

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Entsprechendes gilt, wenn in der zweiten oder dritten Zeile Binome stehen. Es besteht somit folgender Satz:

Zwei Determinanten, die nur in der ϱ -ten Zeile verschieden sind, werden addiert, indem man die beiden abweichenden Zeilen zusammenfaßt.

Dasselbe gilt für die Spalten.

Nun kommen wir zu dem berühmten Multiplikationssatz der Determinanten. $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$ seien drei nichtkomplanare Vektoren. Außerdem sollen zwei andere Vektorentripel $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$ und $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3$ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_1 &= b_{11}\mathfrak{B}_1 + b_{12}\mathfrak{B}_2 + b_{13}\mathfrak{B}_3, \\ \mathfrak{B}_2 &= b_{21}\mathfrak{B}_1 + b_{22}\mathfrak{B}_2 + b_{23}\mathfrak{B}_3, \\ \mathfrak{B}_3 &= b_{31}\mathfrak{B}_1 + b_{32}\mathfrak{B}_2 + b_{33}\mathfrak{B}_3\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathfrak{U}_1 &= a_{11}\mathfrak{B}_1 + a_{12}\mathfrak{B}_2 + a_{13}\mathfrak{B}_3, \\ \mathfrak{U}_2 &= a_{21}\mathfrak{B}_1 + a_{22}\mathfrak{B}_2 + a_{23}\mathfrak{B}_3, \\ \mathfrak{U}_3 &= a_{31}\mathfrak{B}_1 + a_{32}\mathfrak{B}_2 + a_{33}\mathfrak{B}_3\end{aligned}$$

erklärt sein. Es ist dann, wie wir wissen,

$$[\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3] = [\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3] B$$

und

$$[\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2 \mathfrak{U}_3] = [\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3] A.$$

Dabei stellt A die Determinante der a und B die Determinante der b dar. Aus beiden Gleichungen folgt

$$[\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2 \mathfrak{U}_3] = [\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3] AB.$$

Drückt man die Vektoren $\mathfrak{U}$ direkt durch $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$ aus, so ergeben sich Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned}\mathfrak{U}_1 &= c_{11}\mathfrak{B}_1 + c_{12}\mathfrak{B}_2 + c_{13}\mathfrak{B}_3, \\ \mathfrak{U}_2 &= c_{21}\mathfrak{B}_1 + c_{22}\mathfrak{B}_2 + c_{23}\mathfrak{B}_3, \\ \mathfrak{U}_3 &= c_{31}\mathfrak{B}_1 + c_{32}\mathfrak{B}_2 + c_{33}\mathfrak{B}_3.\end{aligned}$$

Wir wissen, wie die Koeffizienten c mit den a und b zusammenhängen. $c_{\varrho\sigma}$ ist die Zusammensetzung der ϱ -ten Zeile der Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

mit der σ -ten Spalte der Matrix

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

d. h.

$$c_{\varrho\sigma} = a_{\varrho 1}b_{1\sigma} + a_{\varrho 2}b_{2\sigma} + a_{\varrho 3}b_{3\sigma},$$

wofür wir kurz

$$c_{\varrho\sigma} = a_{\varrho} \cdot b_{\cdot\sigma}$$

schrieben. Bedenkt man nun, daß