

Mathematische Mussestunden

Eine Sammlung

von

Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungs-
aufgaben mathematischer Natur

Von

Dr. Hermann Schubert

Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg

Zweite, stark vermehrte Auflage

Dritter Band:

**Reise-Probleme und Geometrische
Probleme**



Leipzig

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung

1900

Alle Rechte,
insbesondere das Übersetzungsrecht, vorbehalten.

Inhaltsverzeichnis.

. . .

I. Abschnitt.

Reise - Probleme.

	Seite
§ 1. Rösselsprünge	1
§ 2. Das Nonnenspiel oder Solitärspiel	37
§ 3. Eulersche Wanderungen	58
§ 4. Hamiltonsche Rundreisen	68
§ 5. Durchwanderung eines Labyrinths	86
§ 6. Das Saltaspiel	94

.

II. Abschnitt.

Geometrische Probleme.

§ 1. Hölzchen fortnehmen und zulegen	112
§ 2. Zerlegung und Zusammensetzung von Flächen- stücken	127
§ 3. Gruppierung von Punkten, sodass immer drei von ihnen in gerader Linie liegen	135
§ 4. Der goldene Schnitt	145
§ 5. Teilung des Kreises; regelmässige Sternfiguren .	153
§ 6. Geometrische Trugschlüsse	159
§ 7. Die Quadratur des Kreises	169
§ 8. Das delische Problem	214
§ 9. Die Trisektion des Winkels	218
§ 10. Die vierte Dimension	224

—————

I. Abschnitt.

Reise-Probleme.

§ 1.

Rösselsprünge.

A. Einleitendes.

Die Aufgaben, welche in den Unterhaltungs-Zeitschriften unter dem Namen Rösselsprung vorgelegt werden, verlangen vom Leser, 64 Silben, die in die 64 Felder einer Schachbrett-Figur eingeschrieben sind, derartig zusammenzustellen, dass erstens je zwei Silben, die der Leser aufeinanderfolgen lässt, auf dem Schachbrett in zwei Feldern stehen, zwischen denen beim Schachspiel der Springer springen darf, und dass zweitens die nach diesem Prinzip vom Leser gefundene Silbenfolge einen Sinn giebt, gewöhnlich sogar ein kleines gereimtes Gedicht liefert. Ehe wir auf diese Aufgaben und die schwereren umgekehrten Aufgaben, die verlangen, richtige Rösselsprünge zu schaffen, näher eingehen, müssen wir, zur Verdeutlichung der folgenden Erörterungen, einige Erklärungen vorausschicken.

Der Übergang von jedem Felde eines in Quadrate

zerlegten Rechtecks, dessen Seiten horizontal und vertikal sind, nach einem rechts oder links, oben oder unten benachbarten Felde heisse ein „Schritt“. Von jedem der vier Eckfelder kann man daher nur zwei Schritte und von jedem Randfelde, das nicht Eckfeld ist, nur drei Schritte machen, während von jedem andern nicht am Rande liegenden Felde vier Schritte möglich sind. Ein Schritt nach rechts oder links heisse „horizontal“, ein Schritt nach oben oder unten „vertikal“. Die Regel, nach welcher sich beim Schachspiel der Springer bewegen darf, kann hiernach kurz so ausgesprochen werden: Er springt immer zugleich einen Schritt horizontal und zwei Schritte vertikal oder umgekehrt. Von zwei Feldern, zwischen denen der Springer sich in dieser Weise bewegen darf, oder, was dasselbe ist, die so liegen, dass sie um einen horizontalen und zwei vertikale Schritte oder umgekehrt von einander abstehen, wollen wir sagen, dass sie „sich rösseln.“ Die Bewegung zwischen zwei sich rösselnden Feldern heisse ein Sprung. Von jedem Eckfelde sind immer 2 Sprünge möglich, von jedem Randfeld, das einen Schritt von einem Eckfeld entfernt ist, sind 3 Sprünge möglich, während von einem Randfeld, das zwei oder mehr Schritte von einem Eckfeld entfernt ist, 4 Sprünge möglich sind. Ferner rösselt jedes Feld, das vom Rande um einen horizontalen und einen vertikalen Schritt entfernt ist, 4 Felder, dagegen rösseln die Felder, die vom einen Rande einen Schritt, von einem benachbarten Rande zwei Schritte entfernt sind, 6 Felder. Endlich rösselt ein Feld 8 Felder, wenn es von jedem Rande zwei oder mehr Schritte entfernt ist. Für ein gewöhnliches

Schachbrett von 64 Feldern sind daher von jedem Felde soviel Sprünge möglich, wie in der folgenden Figur durch die in die Felder gesetzten Zahlen angegeben wird:

2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	6	6	6	6	4	3
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	6	6	6	4	3
2	3	4	4	4	4	3	2

Die Summe dieser Zahlen ist 336. Rechnet man daher einen Sprung von einem Felde zu einem anderen und den umgekehrten Sprung vom zweiten Felde zum ersten zurück nur als einen einzigen Sprung, so ergibt sich 168 als die Anzahl der Springer-Züge auf einem gewöhnlichen Schachbrett. Diese Betrachtung kann man leicht auf ein rechteckiges Schachbrett von a mal b Feldern ausdehnen. Man erhält dann

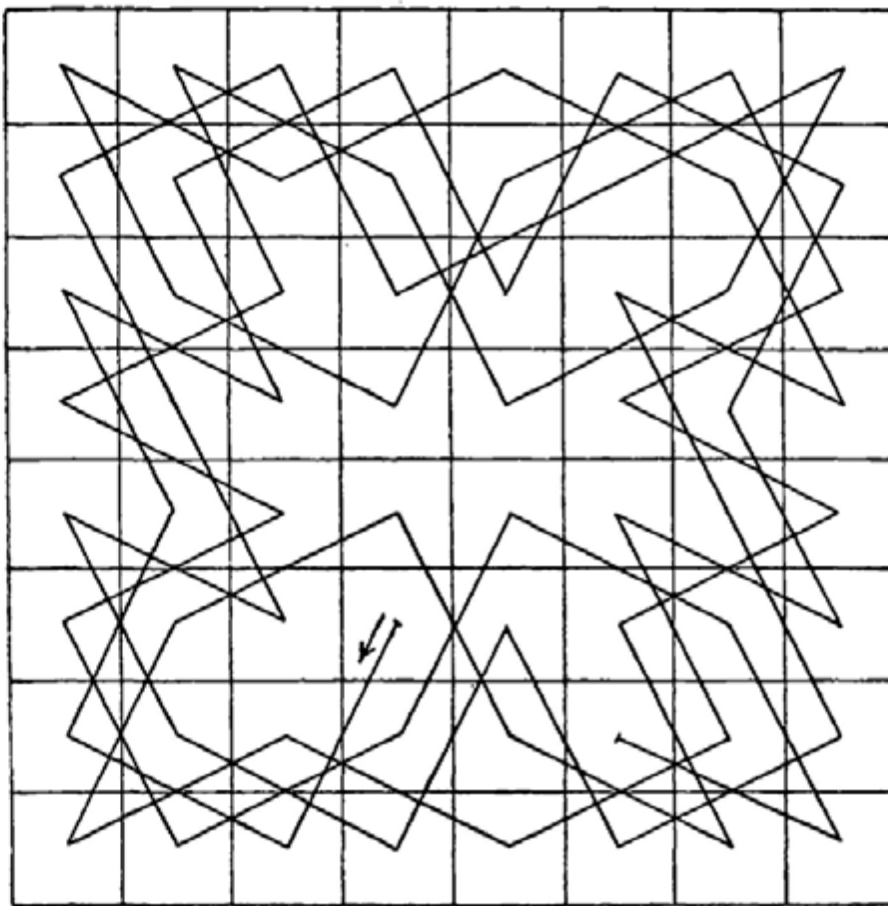
$$2(2ab - 3a - 3b + 4)$$

als die Anzahl der Paare sich rösselnder Felder.

Das Eulersche Rösselsprung-Problem besteht nun in der Aufgabe, in die 64 Felder des Schachbretts die 64 Zahlen von 1 bis 64 derartig einzuschreiben, dass zwei Felder, die aufeinanderfolgende Zahlen enthalten, sich rösseln. Ersetzt man dann noch die Zahlen von 1 bis 64 durch 64 Silben, die in ihrem Zusammenhange einen Sinn geben, so entsteht die Aufgabe, nun umgekehrt die 64 Silben so abzulesen, dass die 64 Silben den gewünschten Sinn liefern, wobei der Löser einer solchen Aufgabe in fortwährendem Zweifel ist, welchen der verschiedenen noch möglichen Sprünge er von dem zuletzt betretenen Felde zu machen hat, ein Zweifel, der zu Anfang und bei den 16 Mittelfeldern, deren jedes 8 Felder rösselt, am meisten Verlegenheit bereitet. Von einer solchen Rösselsprung-Aufgabe geben wir hier das folgende Beispiel:

genb	sprach	ter	Zeit	Der	ruft	in	Al
Ba	te	nicht	ter	mein	Der	Ba	nach
bu	Su	es	schon	Man	jagt	ter	war's
auch	zum	gu	ner	va	So	dir	ter
ter	Zeit	Es	flagt	den	Herr	es	spricht
nach	ter	sprach's	o	Sohn	und	so	mit
te	va	Das	sprech	um	Brauch	ze	so
Al	zu	al	Groß	leib	zum	bidh	der

Die Lösung solcher Rösselsprünge wird in den Unterhaltungszeitschriften meist in Form eines Diagramms gegeben, d. h., es werden die Mitten der aufeinanderfolgenden Felder durch gerade Linien verbunden. Man kann jedoch die Lösung auch so geben, dass man die im Rösselsprung aufeinanderfolgenden Felder der Reihe nach mit den Zahlen 1 bis 64 besetzt. Hier folgt die Lösung des obigen Rösselsprungs in beiderlei Form:



31	54	47	8	33	10	27	50
46	7	32	53	28	49	34	11
5	30	55	48	9	36	51	26
56	45	6	29	52	25	12	35
43	4	57	20	61	14	37	24
58	19	41	1	40	23	62	13
3	42	17	60	21	64	15	38
18	59	2	41	16	39	22	63

Wiewohl die Lösung solcher Rösselsprung-Aufgaben einige Geduld erfordert, so ist doch ungleich mehr Geduld dazu nötig, auch nur einen richtigen Rösselsprung zu formieren. Wenn man nämlich von einem beliebigen Anfangsfelde aus die Zahlen von 1 an nach der Regel des Springerzuges in die Felder einzuschreiben beginnt, so wird man bald finden, dass gewisse Felder leer bleiben, zu denen man nie gelangen kann, weil die Felder, von denen aus sie erreichbar sind, schon besetzt sind. Man wird dann anfangen, zu ändern; aber dann erkennt man bald, dass nun wieder andere nicht mehr erreichbare Felder leer bleiben, und erst nach langen Mühen wird man zu

einem richtigen Rösselsprunge gelangen. Es giebt jedoch Methoden, durch welche man leicht auf richtige Rösselsprünge geführt wird, und diese sollen im Folgenden besprochen werden.

B. Geschichtliches.

In der Litteratur kommt das Problem, die 64 Felder durch die Zahlen von 1 bis 64 nach der Regel des Springerzuges zu besetzen, zuerst im Jahre 1759 vor, und zwar im 15. Bande der Memoiren der Berliner Akademie. Dort erzählt der berühmteste deutsche Mathematiker des vorigen Jahrhunderts Leonhard Euler, dass die Aufgabe in einer Gesellschaft von jemand vorgetragen sei, dem es zugleich gelang, von jedem Felde als Anfangsfeld aus das Problem richtig zu lösen. Euler fasste das Problem vom Standpunkte des Mathematikers auf, korrespondierte darüber mit Bertrand in Genf und veröffentlichte in der citierten Abhandlung Methoden, durch welche man aus jedem durch leer gebliebene Felder misslungenen Versuche allmählich zu einer richtigen Lösung gelangen muss. Ferner fügte Euler dann erschwerende Bedingungen hinzu, wie z. B. die ist, dass erst die 32 die Hälfte des Schachbretts bildenden Felder sämtlich besetzt sein müssen, ehe man zur andern Hälfte übergehen darf. In derselben Richtung wie Euler arbeitete an dem Probleme auch Vandermonde, Mitglied des französischen National-Instituts, dessen Abhandlung, welche die Aufgabe als eine der Geometrie der Lage betrachtete, in den Mémoires de Paris 1771 erschien. Dann gab 1773

Collini in Mannheim in einer besonderen Schrift eine Methode an, welche zwar nur zu einem kleinen Teile der vielen Lösungen des Problems, zu dieser aber mit Sicherheit führt. Diesen älteren Methoden stehen die von einigen neueren französischen Gelehrten gegenüber, welche von vornherein Prinzip in den Lauf des Springers bringen, während die Methoden Eulers und Vandermondes im wesentlichen nur darauf hielten, einen willkürlich angefangenen Springerlauf schliesslich so zu verbessern, dass ein richtiger Rösselsprung entsteht. Diese französischen Gelehrten sind namentlich die Herren Polignac und Laquière. Polignac veröffentlichte seine Rösselsprung-Untersuchungen teils in den Berichten der Pariser Akademie vom April 1861, teils im Jahrgang 1880 des „Bulletin de la Société Mathématique de France“. Der obengenannte Jahrgang enthält auch die inhaltreiche Abhandlung von Laquière über das Rösselsprung-Problem. Von den Untersuchungen, welche das Rösselsprung-Problem in einem Rechteck von a mal b Feldern behandeln, ist die wichtigste die von Herrn Flye-Sainte-Marie, die im Aprilheft des Jahrgangs 1877 des Bulletin de la Société Mathématique de France veröffentlicht ist. Er erledigte in dieser Untersuchung den Fall, dass 4 mal 8 quadratisch geordnete Felder vorhanden sind, mit grösster Vollständigkeit, indem er sogar die genannte Zahl der möglichen Rösselsprünge berechnet, während doch die Anzahl der möglichen Rösselsprünge bei 8 mal 8 Feldern noch nicht einmal annähernd bestimmt ist. Endlich erweiterte der Verfasser dieses Buches das Rösselsprung-Problem dahin, dass statt

eines Quadrats mit 8 mal 8 Feldern ein Würfel mit 4 mal 4 mal 4 Fächern vorliegt, und zwar im Jahrgang 1892 der „Naturwissenschaftlichen Wochenschrift“.

C. Methoden Eulers und Vandermondes.

Wenn der Aufgabe, die 64 Felder des Schachbretts nacheinander vom Springer durchlaufen zu lassen, auf irgend eine Weise genügt ist, so lassen sich sehr mannigfache Änderungen des Ganges daraus ableiten. Namentlich lässt sich von einem Felde an, aus dem der Springer in das letzte Feld gelangen kann, die Reihenfolge der Felder umkehren. Wir gehen beispielsweise von dem folgenden Rösselsprung aus:

34	21	52	9	36	19	54	7
51	10	35	20	53	8	37	18
22	33	12	61	28	45	6	55
11	50	29	44	13	62	17	38
32	23	60	63	46	27	56	5
49	64	43	30	59	14	39	16
24	31	2	47	26	41	4	57
1	48	25	42	3	58	15	40

Da hier das mit 11 besetzte Feld das Schlussfeld 64 rösselt, so erhält man aus diesem Rösselsprung einen neuen, wenn man die Zahlen 1 bis 11 in ihren Feldern stehen lässt, dann aber die Zahl 64 durch 12, 63 durch 13, 62 durch 14 u. s. w. ersetzt, so dass schliesslich aus dem ursprünglich mit 12 bezeichneten Felde das die Zahl 64 aufnehmende Schlussfeld wird. Da in dem ursprünglichen Quadrate auch das Feld 47 sich mit dem Felde 64 rösselt, so erhält man aus dem ursprünglichen Rösselsprung einen zweiten abgeleiteten, wenn man die Zahlen 1 bis 47 in ihren Feldern stehen lässt, dann aber die Zahlen 48 bis 64 beziehungsweise durch die Zahlen 64 bis 48 ersetzt. Dieses Verfahren lässt sich dadurch beliebig fortsetzen, dass irgend ein das neu gewonnene Schlussfeld rösselnde Feld gerade so behandelt wird, wie oben die Felder 11 oder 47 behandelt wurden. Ja, es lässt sich sogar auf solche Weise erzielen, dass irgend ein vorgeschriebenes Feld Schlussfeld wird. Um dies deutlich erkennen zu lassen, wollen wir jedes der 64 Felder des Schachbretts kurz mit derjenigen Zahl bezeichnen, die in unserer obigen Figur hineingesetzt ist. Dann lässt sich der erste von den beiden abgeleiteten Rösselsprüngen kurz so bezeichnen:

1 bis 11, 64 bis 12.

Da das neue Schlussfeld 12 das Feld 53 rösselt, so folgt hieraus wieder der Rösselsprung:

1 bis 11, 64 bis 53, 12 bis 52.

Hieraus entsteht, weil das Feld 52 das Feld 33 rösselt:

1 bis 11, 64 bis 53, 12 bis 33, 52 bis 34
u. s. w.

Um nun z. B. das mit 40 bezeichnete Feld rechts unten zum Schlussfeld zu machen, beachte man die Springerzug-Folge:

64—29—30—41—40

und gestalte demgemäss den ursprünglichen Rösselsprung auf folgende Weise um:

- 1) 1 bis 29, 64 bis 30
- 2) 1 bis 29, 64 bis 41, 30 bis 40,

wodurch die gestellte Bedingung, dass das mit 40 besetzte Feld Schlussfeld werden soll, auf kürzeste Weise erfüllt ist. Man erkennt leicht, dass man sogar auf äusserst mannigfaltige Weise einen vorliegenden Rösselsprung in einen andern mit vorgeschriebenem Schlussfeld verwandeln kann, und ferner, dass man auf eben solche Weise auch jedes Feld zum Anfangsfeld machen kann, weil man bei der vorherigen Betrachtung jeden Gang des Springers genau rückwärts lesen kann.

Diese Methode, einen Rösselsprung so umzuformen, dass ein beliebig vorgeschriebenes Feld Schlussfeld wird, bildet die Grundlage der Lösung der für die praktische Herstellung von Rösselsprüngen wichtigen Aufgabe, eine durch den Springer erfolgte Felderbesetzung, die noch etliche nicht mehr erreichbare Felder leer gelassen hat, so zu verwandeln, dass die leeren Felder ausgefüllt werden und also ein richtiger Rösselsprung entsteht. Um die Lösung dieser

Aufgabe zu verdeutlichen, nehmen wir an, es sei jemand gelungen, 62 Felder des Schachbretts nacheinander durch Springerzüge zu bedecken, es seien ihm aber dabei 2 Felder leer und unerreichbar geblieben. Die Anordnung, auf die er gestossen ist, sei die folgende, wobei die leer gebliebenen Felder mit den Buchstaben a und b besetzt sind:

7	18	47	30	5	16	45	28
48	31	6	17	46	29	4	15
19	8	49	52	39	60	27	44
32	53	40	59	42	51	14	3
9	20	a	50	61	38	43	26
54	33	62	41	58	25	2	13
21	10	35	56	23	12	37	b
34	55	22	11	36	57	24	1

Hier kann man nun die Folge der Felder von 1 bis 62, durch welche der Springer geführt ist, gerade so wie oben die Folge von 1 bis 64 in eine andere verwandeln, in welcher das letzte Feld ein vorgeschriebenes ist. Demgemäss verwandele man die

Folge von 1 bis 62 in eine andere, in welcher das Schlussfeld ein Feld ist, das sich mit dem leer gebliebenen Felde a rösselt, wie es z. B. das hier von 10 besetzte Feld ist. Dadurch kommt die Zahl 62 auf das neu gewählte Schlussfeld, und es kann dann 63 auf das leer gebliebene Feld a geschrieben werden. Mit der erhaltenen Folge von 63 Feldern verfähre man auf dieselbe Weise, indem man sie in eine andere umwandelt, in welcher das letzte Feld einen Springer-Übergang nach dem zweiten leer gebliebenen Felde b gestattet. Schreibt man dann 64 in das Feld b, so hat man einen richtigen Rösselsprung erhalten. Wären mehr als zwei Felder leer geblieben, so würde man dieses Verfahren so oft wiederholen, wie noch leere Felder da sind. Um nun die Verwandlung des obigen Rösselsprungs-Versuchs in einen wirklichen Rösselsprung auszuführen, beachten wir, dass das leere Feld a vom Felde 10, 10 von 9 und 9 von dem vorläufigen Schlussfelde 62 gerösselt wird. Demgemäss bilden wir aus der Folge 1 bis 62 die neue Folge

1 bis 9, 62 bis 10,

der man nur das Feld a als 63tes anzuschliessen hat. Um nun die erhaltene Folge von 63 Feldern in eine solche zu verwandeln, der sich das Feld b anhängen lässt, hat man, wenn möglich, ein von a und ein von b gerösseltes Feld derartig zu bestimmen, dass in den beiden bestimmten Feldern zwei aufeinanderfolgende Zahlen stehen. Zwei solche Felder sind hier die von 58 und von 57 besetzten Felder. Dementsprechend verwandeln wir die obige Folge in:

1 bis 9, 62 bis 58, a, 10 bis 57,

woran man nur noch das Feld b anzuschliessen hat, um einen richtigen Rösselsprung zu erhalten. Besetzt man in demselben die aufeinanderfolgenden Felder der Reihe nach mit den Zahlen von 1 bis 64, so erhält man den folgenden Rösselsprung, der nunmehr keine leeren Felder mehr hat:

7	24	53	36	5	22	51	34
54	37	6	23	52	35	4	21
25	8	55	58	45	12	33	50
38	59	46	13	48	57	20	3
9	26	15	56	11	44	49	32
60	39	10	47	14	31	2	19
27	16	41	62	29	18	43	64
40	61	28	17	42	63	30	1

In dem so gefundenen Rösselsprung stehen die Zahlen 1 und 64 in zwei Feldern, die sich nicht rösseln. Schon seit Euler bevorzugt man aber solche Rösselsprünge, bei denen das Schlussfeld wieder das Anfangsfeld rösselt. Derartige Rösselsprünge, die man ge-

geschlossen nennt, haben die Eigentümlichkeit, dass jedes beliebige Feld als Anfangsfeld betrachtet werden kann, weil der Übergang von dem mit 64 besetzten Felde zu dem mit 1 besetzten durch einen Springerzug möglich ist. Unsere oben besprochene Methode, einen vorliegenden richtigen Rösselsprung in einen neuen zu

48	27	36	9	46	25	56	11
35	6	47	26	37	10	45	24
28	49	8	5	64	55	12	57
7	34	63	54	3	38	23	44
50	29	4	1	62	53	58	13
33	18	31	52	39	2	43	22
30	51	16	61	20	41	14	59
17	32	19	40	15	60	21	42

verwandeln, bei dem ein beliebig gewähltes Feld Schlussfeld wird, liefert auch die Umwandlung jedes ungeschlossenen Rösselsprungs in einen geschlossenen. Man hat nämlich nur ein das Anfangsfeld rösselndes Feld als Schlussfeld zu bestimmen und jene Methode anzuwenden. Um z. B. den zuletzt gefundenen Rössel-

sprung in einen geschlossenen zu verwandeln, hat man die hier mit

11 bis 17, 10 bis 1, 18 bis 31, 64 bis 57, 32 bis 45,
56 bis 46

besetzten Felder beziehungsweise mit den aufeinanderfolgenden Zahlen

1 bis 7, 8 bis 17, 18 bis 31, 32 bis 39, 40 bis 53,
54 bis 64

zu besetzen. Dadurch erhält man einen in sich zurücklaufenden und dadurch gewissermaassen 64 fachen Rösselsprung, wie die Figur auf Seite 15 zeigt.

D. Methode von Collini.

Die Vermittelung zwischen den soeben besprochenen Methoden Eulers und Vandermondes und den neueren Methoden Polignacs und Laquières bildet die Methode, welche Collini in seiner in Mannheim 1773 erschienenen Schrift „Solution du problème du Cavalier au jeu des échecs“ niedergelegt hat. Hiernach soll man sich das Schachbrett in zwei Gebiete geteilt denken, nämlich das Mittelquadrat, das aus den 16 symmetrisch um die Mitte gelagerten Feldern besteht, und den Rahmen, der aus den übrigen 48 Feldern besteht. Dann lautet die Regel Collinis folgendermassen:

„Man besetze erst 12 Felder des Rahmens so, dass man vom 12ten Felde in das Mittelquadrat springen kann. In diesem besetze man 4 Felder, die entweder ein Quadrat oder einen Rhombus bilden. Darauf besetze man wieder 12 Felder des Rahmens, dann wieder 4 Felder des Mittelquadrats u. s. w.“

In der That erhält man auf solche Weise immer ohne Mühe und ohne Zweifel einen richtigen Rösselsprung, beispielsweise den folgenden:

40	23	52	7	38	21	50	5
53	8	39	22	51	6	37	20
24	41	14	47	30	61	4	49
9	54	31	62	15	48	19	36
42	25	46	13	64	29	60	3
55	10	63	32	45	16	35	18
26	43	12	57	28	33	2	59
11	56	27	44	1	58	17	34

E. Methode von Polignac und Laquière.

Auch die modernen Forscher in der Rösselsprung-Theorie betrachten, wie Collini, Teilquadrate von 4 mal 4 Feldern, nehmen aber nicht das Mittelquadrat, sondern die 4 Teilquadrate, die entstehen, wenn man durch die Mitte des Schachbretts zwei Parallelen zu den Rändern legt. Ein solches Teilquadrat liefert 4 geschlossene Springerläufe, über 4 Felder, wie die folgende Figur verdeutlicht:

c	d	b	a
b	a	c	d
d	c	a	b
a	b	d	c

Hier haben je vier mit demselben Buchstaben gefüllte Felder die Eigenschaft, dass der Springer dieselben so zu durchlaufen vermag, dass er vom vierten Felde wieder auf das erste zurückgelangen kann, und zwar kann dieses Durchlaufen immer in zwei verschiedenen Richtungen geschehen, nämlich entweder im Sinne der Drehung eines Uhrzeigers oder im entgegengesetzten Sinne. Einen solchen Springerlauf über 4 Felder, die in einem Quadrate von 16 Feldern so liegen, wie in der obigen Figur die mit gleichen Buchstaben besetzten Felder, wollen wir kurz einen Viersprung nennen. Es giebt vier Arten von Viersprüngen, die wir nach den oben eingeschriebenen Buchstaben a, b, c, d unterscheiden. Man beachte, dass jeder der beiden Viersprünge a und c die vier Ecken eines Rhombus besetzt, während jeder der beiden Viersprünge b und d die vier Ecken eines schrägliegenden Quadrats besetzt. Man bezeichne sich nun in den vier Teilquadraten immer die 4 mal 4 Felder, welche 4 Viersprünge gleicher Art bilden. Dann erhält man im ganzen 16 bezeichnete Felder, die der Springer immer auf

mehrfache Art so durchwandern kann, dass er vom 16. Felde auf das erste zurückgelangen kann. Jeder Springerlauf über 16 derartig zusammengehörige Felder wollen wir einen Sechzehnsprung nennen, und zwar vom Typus A, B, C, D, je nachdem die vier besuchten Felder eines Teilquadrats dem Typus a, b, c, d angehören. In der folgenden Figur liefern also die 16 mit a bezeichneten Felder einen Sechzehnsprung vom Typus A. Ebenso geben die mit b, mit c, mit d bezeichneten Felder Sechzehnsprünge, die beziehungsweise den Typus A, B, C oder D haben.

c	d	b	a	c	d	b	a
b	a	c	d	b	a	c	d
d	c	a	b	d	c	a	b
a	b	d	c	a	b	d	c
c	d	b	a	c	d	b	a
b	a	c	d	b	a	c	d
d	c	a	b	d	c	a	b
a	b	d	c	a	b	d	c

Wenn man nun den Springer irgend einen Sechzehnsprung immer so machen lässt, dass derselbe nach

Absolvierung desselben zu einem andern Sechzehnsprung übergehen kann, so erhält man stets einen richtigen geschlossenen Rösselsprung. So formierte Rösselsprünge zeigen, gegenüber den aus Versuchen hervorgegangenen, mehr Symmetrie und Regelmässigkeit, die am deutlichsten hervortritt, wenn man sie graphisch darstellt, d. h. die Mitten aufeinanderfolgender Felder durch Strecken verbindet. Als Beispiel diene der folgende Rösselsprung, bei welchem die Typen der aufeinanderfolgenden Sechzehnsprünge C, D, A, B sind:

10	27	56	39	14	29	58	43
55	38	11	28	57	42	15	30
26	9	40	53	32	13	44	59
37	54	25	12	41	60	31	16
8	23	52	33	4	17	62	45
51	36	5	24	61	48	1	18
22	7	34	49	20	3	46	63
35	50	21	6	47	64	19	2

Bei diesem Rösselsprung sind die 16 Felder jedes Sechszehnsprungs in solcher Reihenfolge durchschritten,

dass immer erst die vier Felder jedes Viersprungs nacheinander besucht sind. Es ist dies jedoch durchaus nicht erforderlich, wie der folgende Rösselsprung zeigt, der auch die Typenfolge CDAB hat, bei dem aber in jedem der vier Sechzehnsprünge zunächst immer nur drei Felder jedes Teilquadrats besetzt und dann erst die ausgelassenen Felder erledigt sind:

2	27	54	39	4	25	56	37
53	40	3	26	55	38	5	24
28	1	46	63	30	15	36	57
41	52	29	16	47	62	23	6
12	17	64	45	14	31	58	35
51	42	13	32	61	48	7	22
18	11	44	49	20	9	34	59
43	50	19	10	33	60	21	8

Es setzt sich dieser Rösselsprung also wohl aus 4 Sechzehnsprüngen, aber nicht aus 16 Viersprüngen zusammen.

Was diejenigen Rösselsprünge betrifft, die sich aus 16 vollständig erledigten Viersprüngen zusammensetzen, so lassen sich dieselben auf folgende Weise schematisch

darstellen. Man hänge den Zeichen a, b, c, d für die vier Arten von Viersprüngen die Zahlen 1, 2, 3, 4 als Indices an, je nachdem der Viersprung in dem Teilquadrat oben links, oben rechts, unten rechts oder unten links gemeint ist. Dadurch lässt sich z. B. der erste von den beiden obigen Rösselsprüngen auf folgende Weise schematisch darstellen:

$c_8 \ c_4 \ c_1 \ c_2 \ d_3 \ d_4 \ d_1 \ d_2 \ a_4 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ b_4 \ b_1 \ b_2 \ b_3.$

Wenn man nun umgekehrt ein solches Schema und zugleich das Anfangsfeld kennt, so ist der ganze Lauf des Rösselsprungs eindeutig bestimmt, weil die angehängten Indices angeben, in welches Teilquadrat man nach Erledigung eines Viersprungs gelangen muss und dadurch jeder Zweifel über die Reihenfolge der Besetzung der Felder getilgt wird. So führt das Schema

$c_1 \ c_4 \ c_3 \ c_2 \ d_1 \ d_4 \ d_3 \ d_2 \ a_2 \ a_1 \ a_4 \ a_3 \ b_2 \ b_1 \ b_4 \ b_3$
zu einem geschlossenen Rösselsprung, den der Leser auf S. 23 durch Zahlen dargestellt findet.

Wenn man die Reihenfolge der 16 Zeichen eines Schemas unverändert lässt und nur den Anfang wechselt, so erhält man Rösselsprünge, welche zu den 63 gehören, die aus jedem geschlossenen Rösselsprunge durch Wechsel des Anfangsfeldes abgeleitet werden können.

In den obigen Beispielen sind immer die vier Viersprünge eines und desselben Typus nacheinander wiederholt und dadurch Sechzehnsprünge gebildet. Man gelangt jedoch bei einiger Aufmerksamkeit auch dann leicht zu richtigen Rösselsprüngen, wenn man

3	18	53	38	15	32	51	34
54	39	2	17	52	35	14	31
19	4	37	56	29	16	33	50
40	55	20	1	36	49	30	13
5	22	57	44	9	28	63	48
58	41	8	21	64	45	12	27
23	6	43	60	25	10	47	62
42	59	24	7	46	61	26	11

immer nach Erledigung eines Vierprungs zu einem neuen Viersprung übergeht, unbekümmert darum, ob derselbe von gleichem oder von verschiedenem Typus ist. Bei dem folgenden Schema eines richtigen Rösselsprungs ist z. B. jeder Typus immer nur zweimal wiederholt:

$a_4 \ a_3 \ b_2 \ b_1 \ c_3 \ c_4 \ d_3 \ d_2 \ a_2 \ a_1 \ b_4 \ b_3 \ c_1 \ c_2 \ d_1 \ d_4$.

Dieses Schema liefert den auf S. 24 befindlichen Rösselsprung:

Die nach der Méthode von Polignac und Laquière auffindbaren Rösselsprünge zeichnen sich zwar vor allen übrigen durch Symmetrie und Eleganz aus; sie bilden aber doch nur eine kleine Gruppe in der Gesamtheit aller möglichen geschlossenen Rösselsprünge und können

51	58	13	38	53	32	11	34
14	39	52	57	12	35	54	31
59	50	37	16	29	56	33	10
40	15	60	49	36	9	30	55
23	62	41	4	17	28	47	8
42	1	24	61	48	5	18	27
63	22	3	44	25	20	7	46
2	43	64	21	6	45	26	19

deshalb in keiner Weise einen Beitrag zur Lösung der Hauptfrage liefern, welche eine Bildungsmethode verlangt, die von vornherein zu allen möglichen Rösselsprüngen führt und dadurch auch eine Berechnung ihrer Anzahl gestattet. Diese Hauptfrage ist bis jetzt noch nicht gelöst.

F. Rösselsprünge auf weniger als 64 Feldern.

Wenn man statt des Schachbretts mit seinen acht mal acht Feldern ein Quadrat oder Rechteck mit weniger Feldern zu Grunde gelegt, so vermindern sich die Schwierigkeiten für die Lösung der am Schluss von E angedeuteten Hauptfrage beträchtlich. Beispielsweise ist diese Hauptfrage vollständig gelöst für den Fall, dass