

GESCHICHTE DER ELEMENTAR-MATHEMATIK

IN SYSTEMATISCHER DARSTELLUNG
MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG
DER FACHWÖRTER

VON

DR. JOHANNES TROPFKE
DIREKTOR DER KIRSCHNER-OBERREALSCHULE ZU BERLIN

SIEBENTER BAND STEREOMETRIE VERZEICHNISSE

ZWEITE, VERBESSERTE UND
SEHR VERMEHRTE AUFLAGE



BERLIN UND LEIPZIG 1924
WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG • J. GUTTENTAG, VERLAGS-
BUCHHANDLUNG • GEORG REIMER • KARL J. TRÜBNER • VEIT & COMP.

Alle Rechte, einschließlich des Übersetzungsrechts, vorbehalten.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Vorwort.

Mit dem vorliegenden siebenten Band ist die zweite Auflage des Werkes zu Ende geführt. Der Verfasser ist sich wohl bewußt, daß auch jetzt noch das gesteckte Ziel nur annähernd erreicht ist. Die ungeheure vorhandene Literatur zu bewältigen, übersteigt die Kraft des einzelnen. Viele Lücken mußten bleiben. Wenn weitere Literatur zu Händen kommt, werden an so manchen Stellen die Zeitangaben für das erstmalige Auftreten der einzelnen Bestandteile der Schulmathematik, besonders auch in der Fachwörtergeschichte, etwas heraufgesetzt werden können. Jede Mitarbeit, Ergänzung und Verbesserung, wäre dringend erwünscht.

Die Verzeichnisse sind möglichst gedrungen, aber eingehend gehalten.

Eine besondere Geschichte der Differential- und Integralrechnung ist mehrfach angeregt worden. Besser als sie mein treuer Mitarbeiter H. WIELEITNER in seinen eigenen Veröffentlichungen in der Sammlung Schubert (vgl. Bd. I, Vorwort S. V Anm. 3) und in knapperer Form in der Sammlung Goeschel (Nr. 226, 875, Geschichte der Mathematik, Neue Bearbeitung) gegeben hat, könnte sie aber gegenwärtig kaum dargestellt werden. Überhaupt sind die Werke WIELEITNERS für alle sieben Bände die notwendige Ergänzung, indem dort die historischen Zusammenhänge in dem Gesamtverlauf der Entwicklung der Mathematik, wie die Lebensarbeit der einzelnen Gelehrten, schärfer hervortreten, als das in einer systematischen Darstellung der Fall sein kann. Auf die neuere Veröffentlichung WIELEITNERS „Die Geburt der modernen Mathematik“ (zwei Hefte der Sammlung „Wissen und Wirken“ bei G. Braun, Karlsruhe i. B.) sei besonders hingewiesen.

Mit selbstloser Hingabe und regster Aufmerksamkeit haben bei der Drucklegung H. WIELEITNER und J. RUSKA, in den trigonometrischen Teilen auch K. SCHOY, die Arbeit des Verfassers unterstützt und gefördert. Der Tod G. ENESTRÖMS war ein schwerer Verlust; die Bände V—VII hätten sicher so manche Verbesserung von ihm erfahren. Dem scharfen Auge meines Amtsgenossen K. LEWENT, der die Hauptkorrekturen mit ausgezeichneter Genauigkeit las, werden nur wenige Druckfehler entgangen sein. Diese vielseitige, wertvolle Hilfe mit Dank abzugelten, fehlen mir die zureichenden Worte. Von dem Erfolg des Werkes gebührt ihnen ein guter Teil.

Berlin, im August 1924.

Johannes Tropfke.

Inhalt.

Stereometrie. Verzeichnisse.

	Seite
Stereometrie	3— 54
A. Geschichtlicher Überblick	3— 8
B. Besonderer Teil	9— 54
1. Die geraden Linien und die Ebenen im Raum	9— 14
2. Die Volumen- und Oberflächenberechnungen	14— 54
a) Allgemeines	14— 16
b) Parallelepipedon und Prisma	16— 20
c) Die Pyramide	20— 29
d) Zylinder und Kegel	29— 34
e) Die Kugel und die allgemeinen Rotationskörper	35— 42
f) Allgemeine Körper. Das CAVALIERISCHE Prinzip. Die SMIPSONSCHE Regel	42— 54
Verzeichnis I: Namen und Schriften	55—100
Verzeichnis II: Sachliches	101—128

STEREOMETRIE. VERZEICHNISSE

Stereometrie.

A. Geschichtlicher Überblick.

Die Stereometrie ist die jüngere Schwester der Planimetrie. Beide entspringen den in praktischer Erfahrung gesammelten Kenntnissen, deren Umfang sich ganz allmählich vergrößerte. Das Bedürfnis nach räumlichen Betrachtungen wird anfangs ein geringeres gewesen sein als das für geometrische Überlegungen. Aber allmählich lernte der Landmann die Erntehaufen, die in bestimmten Formen auf dem Felde aufgestapelt standen, in rohem Maße abschätzen, der Techniker suchte sich einen Überschlag zu machen über die Menge des Baumaterials, das zu einem Mauerwerk von verschiedener Gestalt mit vorgeschriebenen Abmessungen erforderlich war usw. Es entstanden praktische Berechnungsvorschriften, über deren Genauigkeit die Rechner mehr oder weniger unterrichtet waren. Himmelsbeobachtungen, deren Wichtigkeit für die Zeiteinteilung und Zeitangabe sehr früh erkannt wurde, förderten stereometrische Untersuchungen an der Kugel. Nach und nach verdichtete sich der wachsende Bestand solcher Kenntnisse und bildete sich, wohl zumeist unter der Hand besonders befähigter Männer, zu einer wirklichen Theorie aus.

Dieser hypothetische Entwicklungsgang der Stereometrie spiegelt sich in den geschichtlichen Urkunden, so spärlich sie besonders für die ältere Zeit sind, in der Tat wieder.

Die wirkliche Überlieferung beginnt, wie wir fast bei allen Kapiteln der Mathematik bemerken konnten, mit jenem uralten ägyptischen Papyrus, der als Rechenbuch des AHMES^{I 481} (zwanzigstes bis siebzehntes Jahrhundert v. Chr.) bezeichnet zu werden pflegt. Der Charakter dieser Schrift ist der eines Rechenübungsbuches; sie läßt daher keine Ansprüche an systematische Zusammenstellung des gegebenen Stoffes stellen, wenigstens soweit Planimetrie und Stereometrie in Betracht kommen. Die gewählten Aufgaben sollen nur

die eingeschlagenen Rechenmethoden erläutern. Der Verfasser legt kein Gewicht darauf, etwa die Kreisberechnung selbst vor der Berechnung von Körpern mit kreisrunder Grundfläche vorzunehmen. Trotzdem gewähren die gestellten Aufgaben einen tiefen Einblick in den damaligen Bestand der Mathematik; wir haben aus ihnen in den vorstehenden Kapiteln öfters, besonders in der ebenen Geometrie, wertvolle Schlüsse für die Geschichte der Mathematik ziehen können. Auffallend ist, daß uns der Verfasser für das Gebiet der Stereometrie fast ganz im Stich läßt. Die einzigen von ihm gelieferten stereometrischen Übungsbeispiele¹ beziehen sich auf die Ausmessung von Fruchtspeichern, deren Gestalt uns nicht einmal genauer bekannt ist; bei einzelnen ist eine kreisförmige Grundfläche anzunehmen. Unser Befremden löst sich, wenn wir annehmen, daß zur Zeit des AHMES die Stereometrie in dem oben angedeuteten Anfangsstadium begriffen war. Freilich legen jene gewaltigen Bauten der Ägypter, deren einige noch vor der Zeit des AHMES hergestellt worden waren, Zeugnis dafür ab, daß dem alten Techniker gewisse Grundformen stereometrischer Gebilde, wie sogar die der Pyramide, geläufig waren. Aber noch mögen für diese in der Baukunst bereits bekannten Körperformen sich nicht so feststehende Berechnungsvorschriften entwickelt haben, daß sie aus den engsten Fachkreisen heraus einer größeren Öffentlichkeit zugänglich waren. Solche durfte AHMES bei seinen Rechenübungen nicht als bekannt voraussetzen, wie er es bei der so häufig nötig werdenden und gewiß viel geübten Ausmessung von Erntehaufen, wie er es vor allem bei den planimetrischen Formeln (vgl. Bd. IV, S. 127—128) tun konnte.

Wie weit die ägyptische Stereometrie allmählich vorgedrungen war, ist schwer zu begrenzen. Man kann annehmen, daß sie die Volumenberechnungen an Würfeln, an geraden, eckigen und runden Säulen genau ausführen konnte, daß sie für die Pyramide, den Kegel, vielleicht auch für die Kugel Näherungsformeln gefunden hatte. Die genauen Formeln für die letzteren Körper sind erst spätere griechische Entdeckungen, wie geschichtlich feststeht. Ein gutes Bild der ägyptischen Leistung scheinen uns die Schriften HERONS zu geben (erstes Jahrhundert v. Chr.). Wir haben öfters (vgl. Bd. I, S. 150; II, S. 136; III, S. 36; IV, S. 127 f.; V, S. 5 f.) auf die Eigentümlichkeit der führenden griechischen Mathematiker hingewiesen, daß sie die technische Anwendung ihrer hohen theoretischen Resultate gänzlich übergehen. Das strenge, starre System

¹ AUG. EISENLOHR, S. 93 ff.¹⁴⁸¹.

ihrer Mathematik schien ihnen nur um seiner selbst willen da zu sein, seine vermeintliche Würde vertrug sich nicht mit praktischer Übertragung. Der Theoretiker fühlte sich erhaben über den Techniker. Wenn nun die Schriften des Alexandriners HERON gerade den entgegengesetzten Standpunkt einnehmen und nur auf die praktische Berechnung Wert legen, so scheinen sie sich damit so von dem griechischen Geiste zu entfernen, daß wir in ihnen die alte ägyptische Wissenschaft wiederzufinden glauben, die der Verfasser an der Quelle durch eigenes Studium hatte kennen lernen können. Natürlich hat HERON die ihm bekannten neueren griechischen Entdeckungen mit aufgenommen. Der Archimedische Wert für π (vgl. Bd. IV, S. 205) hat bei ihm den alten ägyptischen Wert glatt verdrängt, da er ebenso bequem, aber um vieles genauer war. Die neue griechische Theorie der spitzen Körper und der Kugel ist verwertet; kaum haben sich Andeutungen erhalten, wie man vordem rechnete. Zu diesen Spuren gehört eine Näherungsformel für den Kegelstumpf, die einen Zylinder mit dem Mittelkreis als Querschnitt zugrunde legt.² Die unmittelbar nach Verwendung dieses Notbehelfs gebrauchte genaue Kegelstumpfformel³ verrät die griechische Verbesserung des altägyptischen Verfahrens. Dieselbe Näherungsmethode mit dem Mittelkreis befolgte HERON noch bei einer Reihe anderer, unbekannter Körper, die er *πίθος* (Faß),⁴ *κοῦνα* (Kufe?),⁵ *βούτις* (Butte?)⁶ u. a. nennt. Die Anzahl solcher Körperarten, über deren Aussehen kaum Vermutungen möglich, ja deren Namen uns dunkel sind, ist bei HERON merkwürdig groß. Vielleicht gelingt es einmal der späteren Sprachforschung, Genaueres hierüber in Erfahrung zu bringen, vielleicht ist eine Verbindung mit jenen unbekannten Fruchtspeicherformen des AHMES nachzuweisen.

Von der babylonischen Stereometrie weiß man so gut wie nichts. Aus einem kleinen Text, dessen Übersetzung aber noch ganz unklar ist,⁷ geht nur hervor, daß man einen Wall mit trapezförmigem Querschnitt zu berechnen wußte. Andere veröffentlichte Texte bedürfen erst der Enträtselung. Zahlreiches Mathematische ist überhaupt noch nicht gedruckt.

Der mathematisch-wissenschaftliche Geist der Griechen vertiefte die aus Ägypten bezogenen praktischen Kenntnisse zu einer wirk-

² HERON, *Stereom.*, I, cap. 15, ed. HEIBERG 5^{II 456}, S. 12, Z. 27 ff. — ³ Dasselbst cap. 16, S. 14. — ⁴ *Stereom.*, II, cap. 23, 24, ed. HEIBERG 5, S. 100. — ⁵ Dasselbst I, cap. 51, S. 54; II, cap. 3, 7, S. 86, 90. — ⁶ Dasselbst I, cap. 52, S. 56; II, cap. 9, S. 92. — ⁷ A. UNGNAD, *Zur babylonischen Mathematik*¹⁹⁷⁴⁷, Orientalist. Lit.-Ztg. 19, 1916, Sp. 363 f.

lichen Lehre, in der Stereometrie aber erheblich später als in der Planimetrie. Der Aufschwung begann mit der Perspektive. Ein Maler, AGATHARCHOS, stellte zur Zeit der letzten Tragödien des AISCHYLOS († 456/455 v. Chr.) eine perspektivische Bühnendekoration her und schrieb auch eine Abhandlung über die neue Kunst.⁸ ANAXAGORAS, der um 463 nach Athen kam, erfaßte das darin liegende mathematische Problem und bearbeitete es wissenschaftlich-theoretisch. DEMOKRIT erweiterte um 430/400 seine Untersuchungen. Die Lehre der Perspektive schuf so die Anfänge einer stereometrischen Betrachtungsweise, die sich schließlich frei weiter entwickelte. Etwa gleichzeitig mit DEMOKRIT nahm HIPPOKRATES VON CHIOS stereometrische Untersuchungen auf; er ist der erste, der auf eine Lösung des inzwischen gestellten Würfelverdoppelungsproblems hinweist (Bd. III, S. 66). Zur Zeit PLATONS (429—348 v. Chr., Athen) gab es indes noch keine eigentlichen Lehrgebäude der Stereometrie;⁹ er kämpft in seinen Schriften für ihren Aufbau und bedauert die Unwissenheit seiner Zeitgenossen: „Hinsichtlich der Messungen von allem, was Länge, Breite und Tiefe hat, legen die Griechen eine in allen Menschen von Natur vorhandene, aber ebenso lächerliche wie schmählische Unwissenheit an den Tag“ — in derben Ausdrücken fährt er fort: „nicht wie es Menschen, sondern wie es Schweinen geziemt, und ich schämte mich daher nicht bloß über mich selbst, sondern für alle Griechen.“¹⁰

Was an ihrem Teil lag, haben PLATON, seine Zeitgenossen und Schüler das Versäumte nachgeholt, besonders die unteritalische Schule um ARCHYTAS, von PLATON als ‚sogenannte‘ Pythagoreer bezeichnet. Kannten die früheren Pythagoreer, d. i. die engere Schule des PYTHAGORAS, von den regelmäßigen Körpern nur die Formen des Würfels und des Tetraeders, vielleicht noch das Dodekaeder (vgl. S. 48) — alle weitergehenden Berichte sind legendenhaft —, so fügte THEÄTET († 369 v. Chr.) das Oktaeder und Ikosaeder hinzu und bildete erst eine Theorie aller fünf Körper aus.¹¹ Dabei be-

⁸ VITRUV, Vorwort zum 7. Buch der *Architectura*, ed. F. KROHN, Leipzig 1912, S. 146, Z. 21. Vgl. ERICH FRANK, *Plato und die sogenannten Pythagoreer*, Halle 1923, S. 19 ff., 234 ff. — ⁹ EVA SACHS, *Die fünf platonischen Körper*. Philolog. Untersuchungen, Heft 24, Berlin 1917, S. 146—160. — ¹⁰ PLATON, *Gesetze*, Buch VII, cap. 21, 819 D, ed. STALLBAUM, X, 2, Gotha 1859, S. 379: ... και ἔδοξέ μοι τοῦτο οὐκ ἀνθρώπων, ἀλλὰ ὑγῶν τιῶν εἶναι μᾶλλον θρεμμάτων, ἡσχύνθην τε οὐχ ὑπὲρ ἑαυτοῦ μόνον ἀλλὰ καὶ ὑπὲρ πάντων Ἑλλήνων. Ähnliche Klagen im *Staat*, lib. VII, 258, ed. STALLBAUM, III, 2, Gotha u. Erfurt 1859, S. 157 ff. — ¹¹ EVA SACHS⁹, S. 76 ff.

nutzte er eine kurz vor ihm erschienene Schrift des EUDOXOS VON KNIDOS (410—356 v. Chr.) über die stetige Teilung (*τομή*). THEÄTETS Arbeiten sind im dreizehnten Buch der Elemente EUKLIDS wiedergegeben. ARCHYTAS VON TARENT (430—365 v. Chr.) beherrschte bereits in überraschender Weise die Grundlagen der Stereometrie. Er kannte nicht nur Sätze über das gegenseitige Schneiden von Ebenen, sondern wußte auch Bescheid mit der Entstehung von Zylindern und Kegeln, benutzte z. B. die bei der Durchdringung solcher Körper gebildeten Kurven zu einer scharfsinnigen Lösung des Würfelverdoppelungsproblems, das damals gerade eine brennende Tagesfrage war (vgl. Bd. II, S. 135; III, S. 66). Sein älterer Zeitgenosse DEMOKRITOS ist der Entdecker jenes Satzes, daß die Pyramide ein Drittel des Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe ist; einen ausreichenden Beweis gab indes erst EUDOXOS. Dem letzteren ist auch wohl die Abfassung eines stereometrischen Lehrbuches zuzuschreiben, dem sich EUKLID wahrscheinlich ziemlich eng anschloß. Weisen wir noch auf die Leistungen des begabtesten Schülers PLATONS, MENAICHMOS (um 350 v. Chr.) hin, des Erfinders der Kegelschnitte, und erwägen wir, daß seine Ableitungen an diesen Kurven mit stereometrischen Betrachtungen verbunden wurden (vgl. Bd. VI, S. 129, 130), so erhalten wir eine Ahnung von dem gewaltigen Aufschwung, den die Stereometrie in kaum einem halben Jahrhundert genommen hatte.

Nunmehr beginnen auch die Quellen unmittelbarer Überlieferung zu fließen. Die mathematischen Stellen in Schriften des ARISTOTELES (384—322 v. Chr.), die für die Planimetrie ziemlich ergiebig waren, geben für die Stereometrie noch äußerst wenig. Es wird erwähnt, daß Lote auf derselben Geraden in denselben Punkten in einer Ebene liegen, daß ein Schnitt durch den Mittelpunkt einer Kugel einen größten Kreis gibt. ARISTOTELES zeigt auch Kenntnis der regelmäßigen Körper.¹² Ein eigentliches Lehrgebäude der Stereometrie können wir ihm aber nicht entnehmen. Das älteste Lehrbuch einer sphärischen Stereometrie,^{IV 780} zusammengestellt durch AUTOLYKOS VON PITANE (um 333 v. Chr.), und dann vor allem EUKLIDS (um 325 v. Chr.) Elemente liegen uns tatsächlich vor. Die letzteren enthalten eine vollständige Lehre der elementaren Stereometrie, über die auch unser modernes Schulpensum nur in einzelnen

¹² HEIBERG, *Mathematisches zu Aristoteles*¹⁸⁰⁴, S. 25.

Punkten hinausgeht. An Erweiterungen verdankt man ARCHIMEDES (287—212 v. Chr., Syrakus) die Berechnung des Kugelvolumens und der Kugeloberfläche, ferner die Aufstellung der halbbregulären Viel-
fläche und die Bestimmung der Volumina für gewisse Rotationskörper. Durch ihn ist der Höhepunkt griechischer Stereometrie erreicht. HYPsikLES (um 190 v. Chr.) und PAPPOS (um 295 n. Chr.) fügen eine Anzahl rechnerischer Relationen zwischen den Fundamentalstücken der fünf regelmäßigen Körper hinzu; bei PAPPOS findet sich auch zum erstenmal die Aufstellung des sogenannten GULDINSchen Theorems von den Rotationskörpern.

Weder die Inder noch die Araber, sonst so gelehrige Schüler, kamen in der Stereometrie über die Forschungen der Griechen hinaus. Erst die Neuzeit brachte, mit dem Auftreten der Infinitesimalrechnung, durch KEPLER (1571—1630) und CAVALIERI (1591—1647) neue Methoden und neue Resultate. Die Theorie der regelmäßigen Körper wurde durch die KEPLERSchen Sternpolyeder fortgeführt. Die von NEWTON und LEIBNIZ begründete Integralrechnung lieferte die allgemeine Lösung des Kubaturproblems. Mit dem Ende des siebzehnten Jahrhunderts begann auch eine analytische Geometrie des Raumes (vgl. Bd. VI, S. 113) sich zu entwickeln, der sich, hauptsächlich im neunzehnten Jahrhundert, eine projektive Raumgeometrie gegenüberstellte.

Das Wort Stereometrie begegnet uns zuerst unmittelbar nach dem Tode PLATONS bei PHILIPPOS VON OPUS;¹³ PLATON kennt es bestimmt noch nicht.¹⁴ Bei ARISTOTELES (384—322 v. Chr.) erscheint es nur einmal.¹⁵ Es geht unverändert in die lateinische (BOËTIUS)¹⁶ und deutsche Sprache (1477, deutsche Übersetzung^{IV}¹⁷ des *tractatus quadrantis* von ROBERTUS ANGLICUS)¹⁷ über.

¹³ Vgl. EVA SACHS⁹, S. 155. — ¹⁴ Dasselbst S. 147. — ¹⁵ *Ἀναλυτικῶν ὑστ.* α, 13, Akademieausgabe¹², I, S. 78 rechts, Z. 38. — ¹⁶ BOËTIUS, *Aristoteles anal. poster.* 1, 7, S. 258. — ¹⁷ M. CURTZE, Abh. Gesch. Math. 9, 1899, S. 45: Stereometrie ist, wann wir ains Dings lenge, praitte vnd tieffe suchen.