Hauptsätze
der
Elementar-Mathematik
zum Gebrauche an höheren Lehranstalten

von

Dr. F. G. Mehler.

Bearbeitet von A. Schulte-Tigges,
Direktor des Realgymnasiums zu Kassel.

Ausgabe B.

Unterstufe.

Planimetrie und Arithmetik nebst den Anfangsgründen der Trigonometrie und Stereometrie und drei Anhängen.

Berlin W. 10
Druck und Verlag von Georg Reimer
1918

Planimetrie und Arithmetik

nebst den Anfangsgründen

der Trigonometrie und Stereometrie

und drei Anhängen.

Für die unteren und mittleren Klassen höherer Lehranstalten

bearbeitet

von

A. Schulte-Tigges,

Direktor des Realgymnasiums zu Kassel.

Neunte unveränderte Auflage

Berlin W. 10

Druck und Verlag von Georg Reimer

1918.

Vorwort zur ersten Auflage.

Bei der Bearbeitung der vorliegenden Ausgabe B der Schellbach-Mehlerschen „Hauptsätze der Elementar-Mathematik“ hatte der Herausgeber völlige Freiheit hinsichtlich der Art und des Umfangs der ihm notwendig erscheinenden Änderungen. Es konnte daher den neueren Anschauungen auf dem Gebiet mathematischer Methodik in weitem Umfang, wenn auch in vorsichtiger Abwägung ihres wirklichen Wertes Rechnung getragen werden, ohne daß dabei Altbewährtes hätte zurücktreten müssen. Insbesondere gilt jenes von der Pflege des räumlichen Anschauungs- und Vorstellungsvermögens und der Gewöhnung an die Auffassung von Raumgebilden und Zahlen als im Werden begriffener und voneinander abhängiger Größen. So sind überall, wo dies ohne Künstelei möglich war, die Figuren durch Bewegung, Verschiebung oder Drehung erst gebildet, und auch bei den Beweisen selbst sowie bei der Ermittelung von Übungssätzen (vgl. insbesondere die Winkel-, Dreiecks- und Kreislehre) ist von demselben Grundsatz vielfach Gebrauch gemacht worden. Daß dabei funktionelle Abhängigkeiten zutage treten, ist natürlich, doch sind ihrer Betrachtung noch zwei besondere Abschnitte, die Vorübungen zur Dreieckslehre und die Einführung in die graphische Darstellung im Anhang III, gewidmet.

Die Einleitung zur Planimetrie ist bedeutend erweitert worden und dürfte in ihrer jetzigen Gestalt wohl die Grundlage für eine erste Einführung in die Geometrie darbieten. In der sich anschließenden Winkel- und Dreieckslehre sind die indirekten Beweise wie die arithmetische Beweisform — beides Klippen, an denen das Verständnis erfahrungsgemäß oft scheitert — nach Möglichkeit vermieden worden. Die Forderung, alle Zeichnungen nur mit Lineal und Zirkel auszuführen, tritt mit Absicht erst ziemlich spät auf (§ 77); bis dahin wird von dem Winkelmesser, dem Meßstreifen und dem Zeichendreieck (zum Ziehen von Parallelen und zum Errichten und Fällen von Loten) ausgiebig Gebrauch gemacht. Es erscheint dies auch notwendig, wenn man die Schüler die Voraussetzung der Beweise nicht durch eine reine Gedankenoperation, sondern auf Grund der von ihnen ausgeführten Zeichnung finden lassen will.

Die eigentliche Dreieckslehre ist in zwei Arten getrennt behandelt worden, so daß die Wahl zwischen beiden völlig frei bleibt, das eine Mal unter ausgiebiger Verwendung des Begriffs der Symmetrie, während die andere Art der Betrachtung sich der heute meist gebräuchlichen mehr nähert. Es ist dabei aber auch nicht ausgeschlossen, einige Sätze nach der ersten, andere wiederum nach der zweiten Art durchzunehmen. Auch die Kreislehre hat eine vollständige Umgestaltung erfahren, indem der Stoff einheitlich geordnet und seine Behandlung soweit als möglich auf symmetrische Betrachtungen gegründet ist.

In der Arithmetik sind die negativen Zahlen und diejenigen Fälle besonders eingehend, wenn auch in möglichst einfacher Weise, behandelt worden, wo die ursprüngliche Erklärung der betreffenden Rechnungsart versagt und eine neue für den Zahlenausdruck gesucht werden muß.

Daß der von der geometrischen Konstruktionsaufgabe handelnde Anhang I trotz der klärenden Vorarbeiten von Petersen, Fischer-Benzon u. A. noch weiterer Durcharbeitung bedarf, weiß der Verfasser recht wohl; indessen ist die Schwierigkeit, einen Überblick über die Lösungsmethoden so zu geben, daß bei einer vorliegenden Aufgabe der Weg zum Ziel leicht in die Augen springt, nicht zu unterschätzen.

Anhang II enthält eine kurze Anleitung zum perspektivischen Zeichnen räumlicher Gebilde, wie sie für Realanstalten verbindlich ist.

In dem Anhang III ist auf Grund geometrischer und arithmetischer Vorübungen, die sich zum Teil schon für eine frühe Stufe eignen, der Begriff der Funktion und ihrer graphischen Darstellung in einfacher Weise entwickelt und auf die verschiedenen arithmetischen Rechnungsarten sowie auf praktische Beispiele angewandt worden. Da diese Beispiele, deren Zahlentabellen dem Statistischen Handbuch und den Statistischen Jahrbüchern für das Deutsche Reich entnommen sind, sich größtenteils auf die handelspolitische und volkswirtschaftliche Entwicklung Deutschlands seit dem großen Kriege beziehen, so dürften sie, auch von allgemeinen pädagogischen Gesichtspunkten aus, hinreichendes Interesse beanspruchen.

Die Beigabe von Übungsstoff, der in den „Hauptsätzen" bisher fehlte, schien aus mehrfachen Gründen zweckmäßig. Nur in der Arithmetik ist hiervon abgesehen worden, da es eine Reihe von guten Aufgabensammlungen gibt und solche meist auch in den Händen der Schüler zu sein pflegen. Die durch die Aufnahme des Übungsstoffes verursachte Vermehrung des äußeren Umfanges bedingte die Zerlegung des in der Ausgabe A ungetrennten Buches in zwei Stufen, von denen die vorliegende Unterstufe für die unteren und mittleren Klassen der Realanstalten völlig ausreichen dürfte.

Eine gern geübte Pflicht ist es dem Herausgeber, Herrn Professor Frenzel in Lauenburg i. P. für seine auch diesmal freundlichst gewährten, auf langjähriger Erfahrung beruhenden Ratschläge sowie den Herren Fachgenossen des hiesigen Realgymnasiums für die Bereitwilligkeit, mit der sie einzelne Teile des vorliegenden Buches im Unterricht erprobten, den herzlichsten Dank auszusprechen.

Cassel, im September 1908. A. Schulte-Tigges.

Vorwort zur dritten Auflage.

Die dritte Auflage ist wie auch die zweite ein unveränderter Abdruck der ersten, in dem nur eine Reihe von Druckfehlern berichtigt worden ist.

Cassel, im Februar 1912. A. Schulte-Tigges.

Inhalt.

Erster Teil: Planimetrie.

Einleitung.

§ 1. Jeder Teil des Raumes, der nach allen Seiten begrenzt ist, wird Körper genannt.

Als Beispiele können dienen: Rechtkant, Würfel, (vierseitige) Pyramide, Zylinder (Walze), Kegel, Kugel, sowie Gegenstände, die im Schulzimmer vorhanden oder allgemein bekannt sind.

Gegen den übrigen Teil des Raumes ist ein Körper durch Flächen abgegrenzt, die eben oder gekrümmt sein können. Durch Flächen sind die Körper auch in Teile zerlegbar, die selbst wieder Körper sind. Eine solche Trennungsfläche bildet dann die gemeinsame Grenzfläche der Teilkörper.

An einem Körper unterscheidet man Länge, Breite und Höhe oder Dicke. Eine Fläche hat nur Länge und Breite, aber keine Dicke.

Übungen: 1) Gib bei den erwähnten Körpern die Zahl und Art der Grenzflächen an.

2) Denke dir bei diesen Körpern Flächen aus, durch die sie in Teile zerlegt werden, und untersuche die Teilkörper.

§ 2. Eine Fläche ist durch Linien begrenzt, die gerade oder krumm sind; sie kann auch durch Linien in Teile zerlegt werden; die selbst wieder Flächen sind. Die Linien, in denen die Flächen eines Körpers zusammenstoßen, heißen seine Kanten.

Eine Linie hat weder Breite noch Dicke, nur eine Länge.

Übungen: 1) Gib bei den schon untersuchten Körpern die Zahl und Art der Kanten an.

2) Denke dir Linien aus, durch die jene Flächen zerlegt werden, und untersuche die Teilflächen.

§ 3. Eine Linie wird durch Punkte begrenzt und ist auch durch Punkte in Teile zerlegbar, die selbst wieder Linien sind. Endpunkte, Teilpunkte. Die Endpunkte der Kanten eines Körpers heißen seine Ecken.

Ein Punkt hat weder Länge, noch Breite, noch Dicke.

Übungen: Untersuche die Ecken der betrachteten Körper auf Anzahl und Beschaffenheit.

§ 4. Denkt man sich eine gerade Linie nach beiden Seiten unbegrenzt, so spricht man von einer Geraden schlechthin; ist sie dagegen an einer Seite durch einen Punkt begrenzt, so heißt sie Strahl und, wenn beiderseits begrenzt, Strecke.

Eine gebrochene Linie setzt sich aus Strecken zusammen, die verschiedenen Geraden angehören; eine krumme Linie ist eine solche, von der auch nicht der kleinste Teil gerade ist.

Einen Punkt bezeichnet man gewöhnlich mit einem großen lateinischen Buchstaben, eine gerade Linie durch einen daneben geschriebenen großen lateinischen Buchstaben (wie G oder L), oder indem man zwei ihrer Punkte bezeichnet, eine Strecke auch durch einen neben ihre Mitte gesetzten kleinen lateinischen Buchstaben.

Übungen: Zeichne eine Gerade, einen Strahl, eine Strecke, eine gebrochene, eine krumme Linie und versieh sie mit der üblichen Bezeichnung.

§ 5. Eine Linie kann man sich veranschaulicht denken durch einen möglichst dünnen Faden. Einem solchen Faden, der zwei Punkte lose verbindet, kann man die mannigfaltigste Form und die verschiedenste Länge geben. Spannt man ihn aber hinreichend straff an, so nimmt er stets dieselbe Form an, nämlich die der geraden Linie.

Grundsatz: Die gerade Linie ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte (oder der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten).

Man nennt daher die Strecke, die zwei Punkte verbindet, ihre Entfernung oder ihren Abstand.

§ 6. Eine ebene Fläche heißt, wenn man sie sich nach allen Richtungen unbegrenzt denkt, Ebene schlechthin. Eine Ebene hat die Eigenschaft, daß man nach allen Richtungen gerade Linien hineinlegen kann (oder daß eine Gerade, die zwei beliebige Punkte der Ebene verbindet, ganz in sie hineinfällt). Hierauf beruht ein praktisches Verfahren, wie man eine Fläche auf ebene Beschaffenheit prüfen kann.

Ein Teil einer ebenen Fläche, der ringsum begrenzt ist, heißt ebene Figur oder einfach Figur. Je nach der Begrenzung unterscheidet man geradlinige und krummlinige Figuren. Zu den krummlinigen Figuren gehört der Kreis; die geradlinigen Figuren werden von Strecken begrenzt, die Seiten genannt werden und in den Ecken der Figur zusammenstoßen. Nach der Zahl der Ecken (oder Seiten) unterscheidet man: Dreiecke, Vierecke, Fünfecke usw., allgemein Vielecke. Besondere Arten der Vierecke sind u. a.: Rechteck und Quadrat.

Man bezeichnet eine Figur, indem man die Ecken mit großen lateinischen Buchstaben benennt uud diese Buchstaben in derselben Reihenfolge, wie die Ecken aufeinander folgen, aneinanderfügt.

Diejenigen Strecken, die zwei nicht benachbarte Ecken einer Figur verbinden, heißen Diagonalen.

Übungen: 1) Suche Figuren an den betrachteten Körpern auf und gib ihre nähere Beschaffenheit an.

2) Zeichne die Figuren ab, indem du die betreffende Fläche des Körpers auf das Papier legst und mit einem recht spitzen Bleistift vorsichtig herumfährst.

3) Ziehe in den Figuren Diagonalen und untersuche die Teilfiguren.

§ 7. Zwei ebene Figuren, die man so aufeinander legen kann, daß sie sich genau decken, heißen kongruent; sie haben nicht nur genau denselben Umriß, sondern schließen auch gleich große Flächen ein (haben gleichen Flächeninhalt). Seiten der Figuren, die hierbei aufeinander fallen, heißen gleichliegend (oder homolog). In kongruenten Figuren sind daher die gleichliegenden Seiten gleich lang; denn zwei Strecken sind dann gleich lang, wenn sie sich zur Deckung bringen lassen.

Solches geschieht beim Messen, indem man durch Auflegen des Maßstabes auf die zu messende Strecke feststellt, welche Strecke des ersteren sich mit der letzteren deckt. Die Länge der untersuchten Strecke kann dann in Längeneinheiten des Maßstabes angegeben werden, und zwar durch eine Maßzahl unter Hinzufügung der benutzten Längeneinheit als Benennung.

Übungen: 1) Miß Strecken an den untersuchten Körpern und an den gezeichneten Figuren.

2) Welche Eigenschaften dieser Figuren ergeben sich hieraus?

3) Zeichne Strecken nach Maßangaben.

§ 8. Unter dem Umfang einer Figur versteht man die Länge der geschlossenen Linie, die die Figur begrenzt. Ist die Figur geradlinig, so kann man den Umfang auch bezeichnen als die Summe der Seiten. Man kann diese Summe durch eine Zahl angeben oder durch eine Strecke darstellen. Im ersteren Fall mißt man jede Seite und addiert die Ergebnisse, im letzteren legt man auf einer geraden

Linie die einzelnen Seiten aneinander, so daß sie eine einzige Strecke bilden (**Addition von Strecken**).

Übungen: Führe solche Addition von Strecken an den gemessenen und gezeichneten Strecken aus, im letzteren Fall unter Benutzung eines Papierstreifens (Meßstreifens).

Ergebnis: Wenn alle Schüler eine Strecke von gleicher Länge zeichnen und eine andere Strecke von wiederum gleicher Länge addieren, so erhalten sie gleich lange Strecken als Ergebnis. Daraus erhellt der

Grundsatz: Gleiches zu Gleichem addiert gibt Gleiches.

§ 9. Sind zwei Strecken ungleich lang, so kann man ihren **Unterschied** (ihre **Differenz**) bestimmen, indem man ihre Maßzahlen subtrahiert oder die beiden Strecken so aufeinander legt, daß die einen Endpunkte zusammenfallen (**Subtraktion von Strecken**).

Übungen: Führe solche Subtraktionen an den gemessenen oder gezeichneten Strecken aus.

Grundsatz: Gleiches von Gleichem subtrahiert gibt Gleiches.

§ 10. Sind die zu addierenden Strecken gleich lang wie die Seiten eines Quadrats, so vereinfachen sich Rechnung und Zeichnung; aus der Addition wird die **Multiplikation**, aus der Summe das **Produkt**.

Übungen: Bestimme in dieser Weise den Umfang des Quadrats und führe sonstige Multiplikationen aus.

Grundsatz: Gleiches mit Gleichem multipliziert gibt Gleiches.

§ 11. Soll ein bestimmter Teil einer Strecke bestimmt werden, so erhält man ihn durch Division der Maßzahl der Strecke oder dadurch, daß man die Strecke selbst in die vorgeschriebene Anzahl gleicher Teile zerlegt (**Division von Strecken**).

Übungen: 1) Bestimme aus dem Umfang eines Quadrats seine Seite (zeichnerisch zunächst durch Ausprobieren mit einem Meßstreifen).

2) Bestimme aus dem Umfang eines Rechtecks und der einen Seite die andere.

Grundsatz: Gleiches durch Gleiches dividiert gibt Gleiches.

§ 12. Bei im Raum befindlichen Geraden oder Strecken kommt es auch noch auf die Lage an; es lassen sich **wagerecht liegende, senkrecht stehende** und **schief stehende** unterscheiden.

Übungen: Suche solche Geraden an den betrachteten Körpern und im Schulzimmer auf, und zwar nicht bloß sichtbare, sondern auch gedachte.

§ 13. Wichtig ist ferner die gegenseitige Lage zweier Geraden. Zwei Gerade, die nicht einer Ebene angehören, heißen windschief. Zwei Gerade, die in einer Ebene liegen, können nicht mehr als einen Punkt (den Schnittpunkt) gemeinsam haben, ohne ganz zusammenzufallen. Eine Linie kann man sich nämlich auch entstanden denken durch Bewegung eines Punktes, und zwar eine gerade Linie durch Bewegung eines Punktes in derselben Richtung. Ist nun außer dem Ausgangspunkt noch ein zweiter Punkt als Ziel gegeben, nach dem sich der erstere in gerader Linie bewegen soll, so ist damit die einzuschlagende Richtung bestimmt. Daher gilt der

Grundsatz: Durch zwei Punkte ist eine Gerade bestimmt — oder: Durch zwei Punkte läßt sich nur eine Gerade legen.

Übungen: Gib windschiefe Geraden an den untersuchten Körpern an und zeige bei den andern Geraden die sie enthaltenden Ebenen.

§ 14. Wie durch Bewegung eines Punktes eine Linie, so kann durch Bewegung einer Linie eine Fläche und durch Bewegung einer Fläche ein Körper entstehen. Nur in besonderen Fällen ist die Bahn einer bewegten Linie wieder eine Linie und die Bahn einer bewegten Fläche wieder eine Fläche.

Die Lehre von solchen gerad- und krummlinigen Gebilden, die in einer und derselben Ebene liegen, heißt ebene Geometrie oder Planimetrie; die Lehre von den Gebilden im Raume heißt körperliche Geometrie oder Stereometrie.

Erster Abschnitt.

Von den Winkeln.

A. Drehung einer Strecke um einen der beiden Endpunkte.

§ 15. Dreht eine Strecke sich um einen ihrer beiden Endpunkte, bis sie in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt, so beschreibt sie selbst eine Kreisfläche und der sich bewegende Endpunkt eine Kreislinie. Der feste Punkt (M), um den sich die Strecke dreht, heißt Mittelpunkt, der unveränderliche Abstand (MA, MB) eines jeden Punktes der Kreislinie vom Mittelpunkt heißt Halbmesser oder Radius.

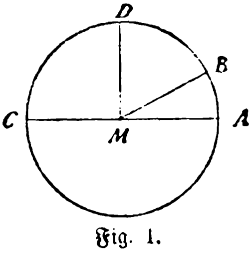

Fig. 1.

Irgend ein Punkt der Ebene liegt innerhalb des Kreises, auf der Kreislinie oder außerhalb des Kreises, je nachdem sein Abstand vom Mittelpunkt kleiner, ebenso groß oder größer als der Radius ist.

Übungen: Zeichne mit Hülfe des Zirkels Kreise, deren Halbmesser eine vorgeschriebene Länge haben; zeichne und miß alsdann den Abstand beliebiger Punkte der Ebene vom Mittelpunkt.

§ 16. Kehrt die sich drehende Strecke nicht in die ursprüngliche Lage zurück, führt sie also keine volle Umdrehung aus, so beschreibt der sich bewegende Endpunkt einen Kreisbogen ($\overset{\frown}{AB}$), bei einer halben Umdrehung einen Halbkreis ($\overset{\frown}{AC}$), bei einer viertel Umdrehung einen Viertelkreis ($\overset{\frown}{AD}$).

Dreht sich der ganze Kreis um den Mittelpunkt, so bewegt sich die Kreislinie auf sich selbst; dreht sich ein einzelner Bogen um den Mittelpunkt, so bewegt er sich auf der Kreislinie. (Hier liegt also der Fall vor, daß die Bahn einer bewegten Linie keine Fläche, sondern wieder eine Linie ist.) Bogenstücke, die bei einer solchen Drehung genau aufeinanderfallen, sind gleich lang.

Übungen: Zeichne Kreisbogen einzeln oder als Teile von ganzen Kreisen, auch, so gut es geht, Halb- und Viertelkreise. Wie kann man Halbkreise genau zeichnen?

§ 17. Die ganze Kreislinie pflegt man in 360 gleiche Teile, also in 360 gleiche Bogenstücke (den Halbkreis in 180, den Viertelkreis in 90) zu teilen. Jeden dieser Bogen nennt man einen Bogengrad. (Den Bogengrad teilt man weiter in 60 Bogenminuten und jede Bogenminute in 60 Bogensekunden.)

Übungen: 1) Schätze die Länge der in § 16 gezeichneten Bogen (nach Ergänzung zu einem vollen Kreise durch Vergleichen mit dem letzteren) in Bogengraden.

2) Wieviel Bogenminuten oder Bogensekunden enthält der volle Kreis, der Halb- und Viertelkreis?

3) Sind die Bogengrade gleich groß, die die Spitzen des großen und des kleinen Uhrzeigers beschreiben?

4) Wieviel Bogengrade beschreibt die Spitze des Stundenzeigers in 1, 2, 5, $\frac{1}{2}$, $9\frac{1}{2}$, 12 Stunden, in 1, 2, 4 Tagen?

5) Wieviel Bogengrade beschreibt die Spitze des Minutenzeigers in 1, 2, 6, $\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{2}$, 15, 30, 60 Minuten, in $1\frac{1}{4}$, 2, 5 Stunden?

6) Vergleiche die Bogengrade, die die Spitze des Stundenzeigers beschreibt, mit den Bogengraden, die ein anderer Punkt des Stundenzeigers gleichzeitig beschreibt, nach Zahl und Größe.

B. Drehung eines Strahls um seinen Endpunkt.

§ 18. **Dreht sich ein Strahl um seinen Endpunkt, so beschreibt er einen Winkel.** Winkel sind also überall da vorhanden, wo zwei gerade Linien sich schneiden, denn man kann dort die eine Gerade stets durch Drehung um den Schnittpunkt in die Lage der andern bringen. Ein Winkel (∢) wird daher gebildet von zwei Strahlen, die von demselben Punkte ausgehen; die beiden Strahlen heißen die Schenkel, ihr Ausgangspunkt der Scheitel des Winkels. Der Winkel, dessen Scheitel A und dessen Schenkel AB und AC sind, wird durch BAC oder CAB oder auch nur durch A oder durch einen zwischen die Schenkel gesetzten kleinen griechischen Buchstaben (z. B. α) bezeichnet.

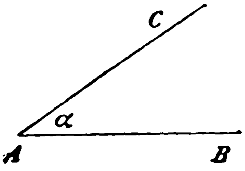

Fig. 2.

Die Größe eines Winkels ist unabhängig von der Länge der Schenkel, da eine Verkürzung oder Verlängerung der Schenkel an der auszuführenden Drehung nichts ändert.

Zwei Winkel sind gleich, wenn sie sich so aufeinanderlegen lassen, daß ihre Schenkel sich decken.

Übungen: Gib an den früher untersuchten Figuren Winkel in den richtigen Bezeichnungen an.

§ 19. Wenn ein Strahl bei der Drehung um seinen Endpunkt A einen Winkel beschreibt, so beschreibt irgend ein Punkt B des Strahls hierbei einen Kreisbogen. Wenn der Strahl sich nun um zwei gleiche Winkel BAF und FAG gedreht hat, so sind auch die von B durchlaufenen Bogen BF und FG gleich; denn, wenn man den Winkel BAF durch Drehung um A mit dem Winkel FAG zur Deckung bringt, so fallen auch die Bogen aufeinander. Da der ganze so entstandene Winkel BAG aus den gleichen Teilen BAF und FAG zusammengesetzt ist, so ist er doppelt so groß als der Winkel BAF, und auch der zugehörige Bogen BG ist doppelt so groß als der Bogen BF. Ebenso gehört auch zu einem dreimal so großen Winkel ein dreimal so großer Bogen usw.

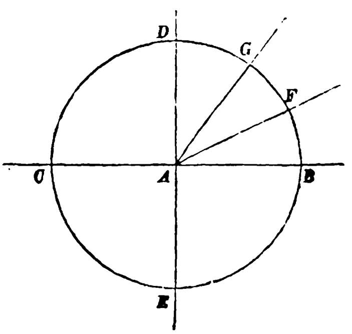

Fig. 3.

Man wendet daher bei den Winkeln dieselbe Einteilung an wie beim Kreise und teilt den **vollen Winkel**, d. h. den Winkel, der durch eine volle Umdrehung entsteht, in 360 **Winkelgrade** (°), den Winkelgrad in 60 **Winkelminuten** (′) und die Winkelminute in 60 **Winkelsekunden** (″). Jeder Winkel enthält also ebenso viele Grade, Minuten und Sekunden als der zugehörige Kreisbogen.

Übungen: 1) Miß die früher gezeichneten Winkel mit dem Winkelmesser (Transporteur) und zeichne Winkel in vorgeschriebener Größe.

2) Was für Winkel legt der Stundenzeiger einer Uhr in 1, 3, $\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, 9, 12 Stunden zurück?

3) Was für Winkel beschreibt der Minutenzeiger einer Uhr in 1, 2, 5, 8, 10, 15, 25, 30, 40, 45, 60 Minuten?

4) Welchen Winkel bilden Stunden- und Minutenzeiger um 6, 8, $9\frac{1}{2}$, 10, $11\frac{1}{2}$ Uhr Vormittags und um $1\frac{1}{2}$, 3, 6, $8\frac{1}{2}$ Uhr Nachmittags? Die Stellung der Zeiger ist zu zeichnen.

5) Welchen Winkel bilden Stunden- und Minutenzeiger miteinander um 7^{15}, 2^{45}, 4^{28}, 12^{16}, 11^{58}?

Anleitung. Bestimme die Winkel, die der Stunden- und der Minutenzeiger beschrieben haben, seitdem sie zuletzt senkrecht nach oben zeigten; dann ergibt sich der gesuchte Winkel durch Subtraktion.

§ 20. Ein Winkel (BAC), der durch eine halbe Umdrehung entsteht, dessen Schenkel (AB und AC) also in die entgegengesetzten Richtungen einer Geraden fallen, heißt ein **gestreckter** oder **flacher** Winkel. Ein Winkel, der durch eine Viertelumdrehung entsteht, der also die Hälfte eines gestreckten Winkels ausmacht, heißt ein **Rechter** (R).

Alle gestreckten und folglich auch alle rechten Winkel sind einander gleich; die ersteren betragen 180°, die letzteren 90°.

Ist von den vier Winkeln, die zwei gerade Linien (BC und DE) bilden, einer ein Rechter, so sind es auch die übrigen. — Wenn zwei gerade Linien sich unter rechten Winkeln schneiden, so sagt man, sie stehen **aufeinander senkrecht** ($\perp$), oder die eine ist eine **Senkrechte** oder ein **Lot** auf der andern.

Ein Winkel, der kleiner als ein gestreckter oder zwei Rechte ist, heißt **hohl** (**konkav**), und zwar **spitz**, wenn er kleiner als ein Rechter, **stumpf**, wenn er größer ist. Ein Winkel, der größer als ein gestreckter ist, heißt **überstumpf** oder **erhaben** (**konvex**). — Die spitzen und stumpfen Winkel werden, im Gegensatz zum Rechten, **schiefe** Winkel genannt.

Übungen: 1) Zeichne einen vollen, gestreckten, rechten Winkel, spitze, stumpfe, überstumpfe Winkel.

2) Ordne die früher gezeichneten und gemessenen Winkel den einzelnen Arten zu.

§ 21. 1) In einer ebenen Figur nennt man die dem Innern zugewandten Winkel zwischen den Seiten die **Winkel der Figur**. Eine Figur hat ebensoviel Winkel wie Seiten.

Bringt man kongruente Vielecke zur Deckung, so fallen auch die gleichliegenden Winkel aufeinander. **In kongruenten Figuren sind also sowohl die gleichliegenden Seiten wie die gleichliegenden Winkel gleich.**

2) *Addieren und subtrahieren lassen sich Winkel, indem man sie* so neben- oder aufeinanderlegt, daß sie den Scheitel und einen Schenkel gemeinsam haben, in entsprechender Weise auch multiplizieren und dividieren.

3) **Wenn zwei Winkel zusammen zwei Rechte (180°) betragen, so heißt der eine das Supplement des andern. Betragen zwei Winkel zusammen einen Rechten (90°), so heißt der eine das Komplement des andern. Ist ein Winkel α° groß, so ist sein Supplement $180^\circ - \alpha^\circ$, sein Komplement $90^\circ - \alpha^\circ$.**

Übungen: 1) Führe Additionen und Subtraktionen von Winkeln aus mit Benutzung des Winkelmessers.

2) Bestimme insbesondere die Summe der Winkel in den gezeichneten Figuren.

3) Führe Multiplikationen und Divisionen von Winkeln aus, gleichfalls unter Benutzung des Winkelmessers.

4) Wie groß ist das Supplement folgender Winkel: 18°, 63°, 138°; 24° 36′, 146° 19′ 22″.

5) Wie groß ist das Komplement folgender Winkel: 27°, 56°; 19° 42′, 42° 57′ 23″.

6) Was für ein Winkel ist das Supplement eines stumpfen, rechten, spitzen Winkels?

7) Was gilt von den Supplementen gleicher Winkel, was von den Komplementen gleicher Winkel?

8) Was für Supplemente (Komplemente) haben zwei ungleiche Winkel insbesondere der größere von beiden?

9) Was für einen Winkel schließen die Lote ein, die auf den Schenkeln eines Winkels α im Scheitel nach derselben Seite errichtet sind?

10) Was für einen Winkel bilden die Schenkel eines Winkels α, wenn man sie um den Scheitel nach derselben Richtung gleich weit dreht?

C. Drehung einer Geraden um einen ihrer Punkte.

§ 22. Dreht sich eine Gerade um einen ihrer Punkte, so entstehen vier hohle Winkel, die paarweise nebeneinander oder einander gegenüber liegen. Die ersteren heißen **Nebenwinkel**, die letzteren **Scheitelwinkel**.

Erklärung: Zwei Winkel heißen Nebenwinkel, wenn sie den Scheitelpunkt und einen Schenkel gemeinsam haben und die andern Schenkel in die entgegengesetzten Richtungen einer und derselben Geraden fallen. — Scheitelwinkel heißen zwei Winkel, wenn die Schenkel des einen die Verlängerungen der Schenkel des anderen sind.

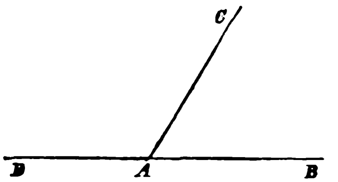

Fig. 4.

§ 23. Zwei Nebenwinkel (wie die Winkel BAC und DAC) machen zusammen einen gestreckten Winkel aus, betragen also zusammen 180° oder ebensoviel wie zwei Rechte. Es gilt also der

Lehrsatz: Nebenwinkel betragen zusammen zwei Rechte.

Folgerung: 1) Ist ein Winkel α°, so ist sein Nebenwinkel $180^\circ - \alpha^\circ$.

2) Gleiche Winkel haben gleiche Nebenwinkel.

§ 24. Zwei Scheitelwinkel werden durch dieselbe Drehung gemessen, sind also gleich.

Lehrsatz: Scheitelwinkel sind einander gleich.

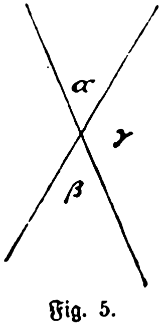

Fig. 5.

Besonderer Beweis: Die Scheitelwinkel α und β haben beide den Winkel γ zum Nebenwinkel. Es ist daher α sowohl wie β gleich $180^\circ - \gamma$, daher $\alpha = \beta$.

Folgerung: Gleiche Winkel haben gleiche Scheitelwinkel.

§ 25. **Übungen:** 1) Wie beschaffen ist der Nebenwinkel eines spitzen, eines stumpfen und eines rechten Winkels?

2) Was für Nebenwinkel haben zwei ungleiche Winkel?

3) Was ist von zwei Nebenwinkeln auszusagen, die gleich groß sind?

4) Wieviel Paare von Nebenwinkeln und Scheitelwinkeln entstehen an zwei sich schneidenden Geraden?

5) Welche Lage haben die Halbierungslinien a) zweier Nebenwinkel, b) zweier Scheitelwinkel zueinander?

6) Wie zerlegt das Lot, das man auf der Halbierungslinie eines Winkels im Scheitel errichtet, dessen Nebenwinkel?

7) Wie zerlegt die Halbierungslinie eines Winkels verlängert den Scheitelwinkel?

D. Von den Winkeln an Parallelen.

§ 26. Eine Gerade L sei um den Punkt B drehbar. Um ihre Lage zu einer zweiten Geraden G zu untersuchen, sei von B aus durch diese letztere die Gerade M gezogen. Es entstehen dann bei B ebenso wie bei A vier Winkel, die zu zweien Nebenwinkel oder Scheitelwinkel sind. Neue Winkelarten erhält man, wenn man Winkel an verschiedenen Schnittpunkten betrachtet. Zu diesem Zweck sind zunächst innere (β_4, β_3, α_1, α_2) und äußere (β_1, β_2, α_4, α_3) Winkel zu unterscheiden, und es heißen dann

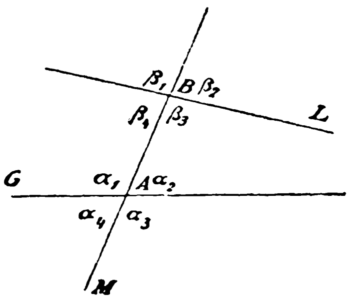

Fig. 6.

1) Gegenwinkel: ein innerer und ein äußerer Winkel an derselben Seite der schneidenden Linie (L), wie α_1 und β_1;

2) Wechselwinkel: zwei innere oder zwei äußere Winkel an verschiedenen Seiten der schneidenden Linie, wie α_1 und β_3 oder α_4 und β_2;

3) Ergänzungswinkel: zwei innere oder zwei äußere an derselben Seite der schneidenden Linie, wie α_1 und β_4 oder α_4 und β_1;

[4) Konjugierte Winkel: ein innerer und ein äußerer Winkel an verschiedenen Seiten der schneidenden Linie, wie α_1 und β_2].

Für die Anwendungen ist die vierte Gruppe entbehrlich.

Anmerkung: Für die Auffindung der Winkel ist folgende praktische Regel zweckmäßig: Die Gegenwinkel liegen von den beiden Schnittpunkten aus nach derselben Richtung, die Wechselwinkel nach entgegengesetzten Richtungen, die Ergänzungswinkel nach zusammenlaufenden oder auseinanderlaufenden Richtungen.

§ 27. Bei der Drehung der Geraden L um B ändern sich die β genannten Winkel beständig. Schreibt man aber einem von ihnen, z. B. β_2, eine bestimmte Größe vor, so sind auch die drei anderen damit bestimmt, da $\beta_4 = \beta_2$ ist und β_1 sowohl wie β_3 den Winkel β_2 zu 2 R ergänzen.

Besonders beachtenswert ist nun der Fall, wo β_2 gleich seinem Gegenwinkel α_2 wird (Fig. 7). Es wird nämlich dann auch $\beta_4 = \alpha_4$, da gleiche Winkel gleiche Scheitelwinkel haben, und sowohl $\beta_1 = \alpha_1$, als auch $\beta_3 = \alpha_3$, da zu gleichen Winkeln auch gleiche Nebenwinkel gehören. Es sind also auch die übrigen Gegenwinkel einander gleich, und denkt man sich die Gerade M zwischen A und B zerschnitten, so kann man demnach das untere Linienkreuz durch Verschieben an L entlang mit dem oberen zur Deckung bringen. Dann fällt aber $\sphericalangle\ \alpha_4$ auf β_4 und wird Scheitelwinkel zu β_2, daher $\alpha_4 = \beta_2$ und ebenso $\alpha_1 = \beta_3$, $\alpha_2 = \beta_4$, $\alpha_3 = \beta_1$, d. h. auch die Wechselwinkel sind einander gleich. Und ferner wird α_4 Nebenwinkel zu β_1, daher $\alpha_4 + \beta_1 = 2\ R$, ebenso $\alpha_1 + \beta_4 = 2\ R$, $\alpha_2 + \beta_3 = 2\ R$, $\alpha_3 + \beta_2 = 2\ R$, d. h. die Ergänzungswinkel betragen zusammen zwei Rechte. Es ergibt sich also der

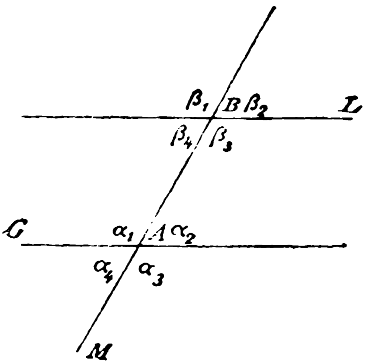

Fig. 7.

Lehrsatz: Ist ein Paar Gegenwinkel gleich, so sind es auch die übrigen, und die Wechselwinkel sind gleich und die Ergänzungswinkel betragen zusammen zwei Rechte.

Zusätze: 1) Ist ein Paar Wechselwinkel gleich, so sind es auch die übrigen, und die Gegenwinkel sind gleich und die Ergänzungswinkel betragen zusammen zwei Rechte.

Denn, wenn $\alpha_4 = \beta_2$ ist, so ist auch $\alpha_1 = \beta_1$, da gleiche Winkel gleiche Nebenwinkel haben, und damit gilt der vorige Lehrsatz.

2) Beträgt ein Paar Ergänzungswinkel zwei Rechte, so gilt dies auch von den übrigen und die Gegenwinkel wie die Wechselwinkel sind gleich.

Denn, wenn α_1 den Winkel β_4 zu $2R$ ergänzt, so muß $\alpha_1 = \beta_1$ sein, da β_1 gleichfalls β_4 zu $2\ R$ ergänzt. Daher gilt auch in diesem Falle der vorige Lehrsatz.

§ 28. Erklärung: Gerade Linien, die sich, auch noch so weit verlängert, nicht schneiden, heißen parallel.

Lehrsätze: 1) Sind zwei Gegenwinkel gleich, so sind die geschnittenen Geraden parallel.

2) Sind zwei Wechselwinkel gleich, so sind die geschnittenen Geraden parallel.

3) Betragen zwei Ergänzungswinkel zusammen zwei Rechte, so sind die geschnittenen Geraden parallel.

Beweis: 1) Man denke sich die rechts von M gelegene Halbebene um die Mitte von AB gedreht, bis AB auf BA fällt. Wird nun $\alpha_2 = \beta_2$ vorausgesetzt, so ist auch (nach § 27), $\alpha_4 = \beta_3$, $\alpha_1 = \beta_2$, $\beta_4 = \alpha_3$, $\beta_1 = \alpha_2$, und die rechten Hälften von L und G fallen mit den linken vollständig zusammen. Hätten also L und G rechts einen Punkt gemeinsam, so müßten sie auch links einen solchen gemein haben, oder die beiden Geraden hätten zwei Schnittpunkte, was nicht möglich ist. Demnach haben L und G keinen Schnittpunkt oder sind parallel.

2) und 3) Nach § 27, Zusatz 1 und 2 ist in diesen Fällen die Voraussetzung für Lehrsatz 1 erfüllt.

Bemerkung: Die Gerade G läßt sich daher in die Lage der Geraden L bringen, indem man sie so an der Geraden M entlang bewegt, daß z. B. $\sphericalangle\ \alpha_2$ unverändert bleibt. Eine solche Bewegung einer Geraden, bei der sie ihrer Anfangslage dauernd parallel bleibt, soll Verschiebung genannt werden.

§ 29. Grundsatz: Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden, läßt sich zu ihr nur eine Parallele ziehen.

Lehrsätze: 1) Gegenwinkel an Parallelen sind gleich.

2) Wechselwinkel an Parallelen sind gleich.

3) Ergänzungswinkel an Parallelen betragen zusammen zwei Rechte.

Beweis. Wird $L \parallel G$ vorausgesetzt, so läßt sich die Gerade G nach oben verschieben, bis sie durch B geht; sie bleibt dabei zu ihrer Anfangslage parallel. Da es aber durch B zu G nur eine Parallele gibt, so muß G alsdann mit L zusammenfallen. α_2 deckt sich daher mit β_2. Aus $\alpha_2 = \beta_2$ folgt aber nach § 27 die Behauptung.

§ 30. Verschiebt man beide Schenkel eines Winkels (α), so sind die Winkel an dem neuen Schnittpunkt teils dem ursprünglichen Winkel gleich (α_1, α_3), teils ergänzen sie ihn zu 180° (α_2, α_4). Der Beweis kann leicht, z. B. mit Hülfe des Winkels β, geführt werden und bestätigt den