

**BERGMANN-SCHAEFER**  
**LEHRBUCH DER EXPERIMENTALPHYSIK**  
**BAND III**  
**OPTIK**



**BERGMANN-SCHAEFER**  
**LEHRBUCH**  
**DER EXPERIMENTALPHYSIK**  
ZUM GEBRAUCH BEI AKADEMISCHEN  
VORLESUNGEN UND ZUM SELBSTSTUDIUM

**Band III**

**Optik**

Mit 505 Abbildungen und 1 Ausschlagtafel  
5. unveränderte Auflage

Von

**Prof. Dr. phil. F. Matossi †**  
Universität Freiburg i. Br.



1972

WALTER DE GRUYTER · BERLIN · NEW YORK

©

Copyright 1955, 1958, 1961, 1964, 1966, 1971 by Walter de Gruyter & Co., vorm. G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung, Georg Reimer, Karl J. Trübner, Veit & Comp., Berlin 30, Genthiner Str. 13 — Alle Rechte, auch die des auszugsweisen Nachdrucks, der photomechanischen Wiedergabe, der Herstellung von Mikrofilmen und der Übersetzung, vorbehalten — Printed in Germany — Satz und Druck: Walter de Gruyter & Co., Berlin 30.  
Einband: U. Hanisch, Berlin-Zehlendorf

ISBN 3 11 003937 0

## Aus dem Vorwort zur 1. Auflage

Hiermit legen wir den Fachkollegen den ersten Teil des dritten Bandes des Lehrbuches der Experimentalphysik vor; er behandelt die sog. klassische Optik, d. h. diejenigen Erscheinungen, die durch die Annahme einer wellenförmigen Ausbreitung des Lichtes (Undulationstheorie, speziell die elektromagnetische Interpretation derselben) erklärbar sind. Die geometrische Optik wurde mitaufgenommen, da sie als Grenzfall der Wellenoptik für hinreichend kleine Wellenlängen aufgefaßt werden kann. Wir hoffen, dem Leser einen Eindruck von der Schönheit und der außerordentlichen Leistungsfähigkeit dieser Anschauung vermittelt zu haben. Andererseits haben wir von Anfang an betont, daß es zahlreiche optische Erscheinungen gibt, namentlich diejenigen, bei denen Licht mit Materie in Wechselwirkung tritt (Emission, Absorption, Wärmestrahlung, lichtelektrischer Effekt, Fluoreszenz, Phosphoreszenz, Zeeman- und Stark-Effekt usw.), die sicher nicht durch die Undulationstheorie erklärt werden können. Diese Erscheinungen können vielmehr nur durch die Annahme erklärt werden, daß das Licht einen korpuskularen Charakter besitzt; die besondere Form dieser Korpuskulartheorie ist durch die Quantentheorie bestimmt.

Die allgemeinen Grundsätze, auf denen unsere Darstellung aufgebaut ist, entsprechen den im Vorwort zum ersten Bande ausführlich dargelegten, so daß darauf verwiesen werden darf.

Wetzlar und Köln, im Herbst 1955

*Ludwig Bergmann*  
*Clemens Schaefer*

## Aus dem Vorwort zur 2. Auflage

Die erste Auflage ist im allgemeinen freundlich besprochen worden, und wir möchten gleich hier für alle Abänderungs- und Verbesserungsvorschläge unseren aufrichtigen Dank aussprechen. Nach reiflicher Überlegung erwies es sich jedoch als unmöglich, allen Wünschen gerecht zu werden, da verschiedene Kritiken diametral entgegengesetzte Wünsche äußerten. . . . Aus einer solchen Divergenz der Wünsche haben wir geglaubt schließen zu können, daß wir im allgemeinen den richtigen Mittelweg gegangen sind. Manche Kritiker haben ein wesentlich stärkeres Eingehen in Details gewünscht z. B. bei den modernen Methoden der Messung der Lichtgeschwindigkeit, die gegenüber den klassischen Verfahren zu wenig hervorgehoben seien. Derartige Forderungen . . . verkennen, wie uns scheint, den Charakter eines Lehrbuches. Ein solches muß sich auf die Darstellung des Grundlegenden beschränken und darf sich nicht in Einzelheiten verlieren. Wo die Grenze zu ziehen ist, wird freilich immer Ansichtssache bleiben.

Wetzlar und Köln, im Herbst 1958

*Ludwig Bergmann  
Clemens Schaefer*

## Aus dem Vorwort zur 3. Auflage

An der Haltung des Bandes ist nichts geändert worden. . . .

Daß die neue Auflage auf dem Titelblatt auch als „vermehrte“ bezeichnet wird, brauchte an sich keine Verbesserung darzustellen; deshalb möchte ich kurz andeuten, welche Gründe mich dazu bestimmt haben. In den bisherigen Auflagen waren in den Nummern 51, 52, 53 einige elektrooptische und magnetooptische Erscheinungen etwas unsystematisch behandelt. Ich habe mich daher entschlossen, in einer besonderen Nummer 53 die wichtigsten dieser Phänomene zusammenzufassen, was dann von selbst dazu führte, den Zeeman- und Stark-Effekt zu erörtern; bei diesen beiden Effekten ist im Grunde die Gültigkeitsgrenze der klassischen Physik erreicht bzw. überschritten. Außerdem schien es mir richtig, ein Kapitel VI (Relativitätstheorie) hinzuzufügen, das ursprünglich für den 2. Halbband (III, 2) bestimmt war. Da aber die Relativitätstheorie doch die Krönung der klassischen Physik darstellt, erschien Bergmann und mir die Aufnahme in Bd. III, 1 sachlich richtiger.

Das ganze Manuskript ist dann von Herrn Dr. Hans Krüger (Wetzlar) noch einmal kritisch durchgearbeitet, und schließlich von uns beiden zusammen durchdiskutiert worden. Herrn Dr. Krüger bin ich daher zu ganz besonderem Danke verpflichtet.

Köln, im Herbst 1961

*Clemens Schaefer*

## Vorwort zur 4. Auflage

Nachdem sich Herr Cl. Schaefer entschlossen hat, sich von der aktiven Mitarbeit am Bergmann-Schaefer'schen Lehrbuch zurückzuziehen, haben Herr H. Gobrecht und der Unterzeichnete die Aufgabe übernommen, das Werk zu bearbeiten und fortzuführen. Als erster Teil dieser Neubearbeitung erscheint nun die „Optik“ in erweiterter vierter Auflage. Ich bin der Aufforderung zur Bearbeitung des III. Bandes um so lieber nachgekommen, als ich mich mit der Grundhaltung dieses Lehrbuches als einem solchen für Anfänger, das auch unabhängig von Vorlesungen benutzt werden kann, im Einklang weiß.

Leitgedanke dieser Bearbeitung war, den bisherigen Charakter des Lehrbuchs beizubehalten. Das bedeutet zunächst eingehende Darstellung elementarer Grundlagen, dabei aber gleichzeitig Hinführung zu mathematischer Durchdringung und zu neueren Problemen an Hand geeigneter Beispiele und gelegentlich selbst Vertiefung in Einzelheiten, um auch dem, der die Physik nur als Hilfswissenschaft braucht, genügend Kenntnisse mitzugeben. Schließlich bedeutet es auch Vermittlung eines Gefühls dafür, daß die Physik sich entwickelt hat und nicht als fertiges Lehrgebäude anzusehen ist.

Der jetzt vorgelegte Band III enthält zunächst (in den Kapiteln I—V und IX) den Inhalt des bisherigen Bands III<sub>1</sub>. Dieser wurde einer sorgfältigen Durchsicht unterzogen, wobei der ursprüngliche Text, wenn auch mit zahlreichen kleineren Änderungen und Ergänzungen beibehalten wurde. Zu den kleineren Ergänzungen gehören unter anderem Abschnitte über Relaxationsdispersion, Kosselsche Rillenplatte, Minimum-Strahlkennzeichnung, Sagnacschen Versuch. Als größere Ergänzung ist nur ein Abschnitt über „Messungen an Farben“ zu nennen. Hinzu kommt nun der Abschluß der „Optik“ durch die Korpuskular- oder Quantenoptik. Neu aufgenommen sind ferner Literaturhinweise zum vertieften Studium und zum Nachweis einiger neuerer Originalarbeiten, die im Text durch (*Lit*) gekennzeichnet sind, sowie ein deutsch-englisches Fachwörterverzeichnis.

Die ursprünglich für Band III<sub>2</sub> beabsichtigte Darstellung der Atomphysik ist abgetrennt worden; sie wird in allgemeinerem Rahmen in einem Band IV („Aufbau der Materie“) Platz finden. Daß trotzdem Motive aus dem zukünftigen Band IV anklingen, war weder zu vermeiden noch erscheint es unerwünscht.

Mein Dank gilt in erster Linie Herrn Professor Dr. Cl. Schaefer für mehrere Unterredungen und dafür, daß er großzügig ein Manuskript aus seiner und Bergmanns Hand zur Verfügung stellte, das als Grundlage für die Nummern 56 bis 71 dienen und vielfach wörtlich übernommen werden konnte.

Für kritisches und konstruktives Korrekturlesen bin ich zu besonderem Dank verpflichtet den Herren Professor Dr. H. Gobrecht, Dozent Dr. G. Koppelman, Dozent Dr. R. Seiwert (alle in Berlin) und — last not least — meiner Frau.

Freiburg i. Br., im Frühjahr 1966

*Frank Matossi*



# Inhaltsübersicht

## Optik

### A. Wellenoptik

#### I. Kapitel. Geometrische Optik

1. Allgemeine Vorbemerkungen; Historisches; Grundbegriffe .....	1
2. Die geradlinige Ausbreitung des Lichtes; Schatten .....	4
3. Die Reflexion des Lichtes; ebene Spiegel und ihre Anwendungen .....	7
4. Gekrümmte Spiegel; Konkav- und Konvex-Spiegel .....	13
5. Brechung des Lichtes; Totalreflexion .....	24
6. Brechung des Lichtes beim Durchgang durch Prismen; Spektrometer und Refraktometer ...	36
7. Brechung des Lichtes an einer Kugelfläche .....	47
8. Brechung und Abbildung durch ein zentriertes System brechender Kugelflächen .....	58
9. Abbildung durch Linsen .....	66
10. Die Abbildungsfehler der Linsen .....	84
11. Die Strahlenbegrenzung, die Wirkung von Blenden .....	96
12. Das Auge und die optischen Instrumente .....	100
13. Der Fermatsche Satz; das Eikonal; der Satz von Malus .....	126

#### II. Kapitel. Photometrie

14. Photometrische Grundbegriffe, allgemeine Definitionen .....	130
15. Normallichtquellen, Photometer .....	138
16. Helligkeitsempfindlichkeit (Farbenempfindlichkeit) des Auges; mechanisches Lichtäqui- valent .....	147
17. Helligkeitsverhältnisse bei den optischen Instrumenten .....	150

#### III. Kapitel. Dispersion und Absorption des Lichtes

18. Messung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes .....	156
19. Phasengeschwindigkeit, Gruppengeschwindigkeit, Frontgeschwindigkeit .....	161
20. Die Dispersion des Lichtes. I. Normale Dispersion .....	166
21. Achromatische und geradsichtige Prismen; chromatische Aberration .....	173
22. Ultrarote (infrarote) und ultraviolette Strahlen .....	178
23. Absorption der Strahlung .....	184
24. Dispersion des Lichtes. II. Anomale Dispersion .....	189
25. Theorie der Dispersion und Absorption für schwach absorbierende Substanzen; Anwen- dungen .....	196
26. Dispersion und Absorption der Metalle (stark absorbierende Stoffe) .....	208
27. Spektralanalyse; Emissions- und Absorptionsspektren; Dopplereffekt; Spektralapparate ...	215

**IV. Kapitel. Interferenz und Beugung**

28. Allgemeines über Interferenz von Lichtquellen; Kohärenz und Inkohärenz .....	226
29. Fresnelscher Spiegelversuch und Varianten .....	234
30. Interferenzerscheinungen an dünnen Schichten, Farben dünner Blättchen; Kurven gleicher Dicke und gleicher Neigung .....	239
31. Vielstrahlinterferenz; Interferenzspektroskopie .....	251
32. Interferenzen an zwei dicken Planparallelplatten; Brewstersche Streifen .....	262
33. Stehende Lichtwellen; Farbenphotographie nach Lippmann .....	264
34. Lichtschwebungen .....	267
35. Grunderscheinungen der Beugung; Beugung an Spalt, rechteckiger und kreisförmiger Öffnung .....	269
36. Das Auflösungsvermögen optischer Instrumente (Fernrohr, Auge, Mikroskop, Prisma) .....	279
37. Beugung durch mehrere kongruente, regelmäßig angeordnete Öffnungen; Youngscher Interferenzversuch; Beugungsgitter; Stufengitter; Ultraschallwellengitter .....	283
38. Beugung an zwei- und dreidimensionalen Gittern; Röntgenstrahlbeugung .....	295
39. Bildentstehung im Mikroskop nach E. Abbe; Phasenkontrastverfahren nach Zernike; Schlierenverfahren .....	305
40. Beugung an vielen unregelmäßig angeordneten Öffnungen oder Teilchen; Theorie des Himmelsblau .....	318

**V. Kapitel. Polarisation und Doppelbrechung des Lichtes**

41. Polarisation des Lichtes durch Reflexion und gewöhnliche Brechung .....	324
42. Theorie der Reflexion, Brechung und Polarisation; Fresnelsche Formeln .....	332
43. Polarisation des Lichtes bei Totalreflexion; Herstellung von elliptisch- und zirkularpolarisiertem Licht .....	338
44. Polarisation des Lichtes bei Metallreflexion .....	348
45. Die Doppelbrechung .....	351
46. Doppelbrechung und Polarisation .....	366
47. Zweiachsige Kristalle .....	372
48. Polarisatoren: Nicolsches Prisma, Glan-Thompson-Prisma, Turmalinplatte, Polarisationsfilter, Wollaston-Prisma; Polarisationsphotometer .....	375
49. Interferenzerscheinungen in parallelem polarisiertem Licht .....	380
50. Interferenzerscheinungen im konvergenten polarisierten Licht .....	390
51. Akzidentelle Doppelbrechung in isotropen Körpern .....	394
52. Drehung der Schwingungsebene polarisierten Lichtes (zirkulare Doppelbrechung) .....	397
53. Magneto- und elektrooptische Phänomene .....	409

**Anhang**

54. Optik der Atmosphäre .....	419
55. Messungen an Farben .....	426

**B. Quantenoptik****VI. Kapitel. Die Gesetze der Wärmestrahlung**

56. Temperatur- und Lumineszenzstrahlung .....	437
57. Definition und Grundtatsachen .....	438
58. Das Kirchhoffsche Gesetz .....	443
59. Der schwarze Körper .....	446
60. Das Stefan-Boltzmannsche Gesetz .....	450

61. Das Wiensche Verschiebungsgesetz .....	454
62. Die Spektralgleichungen von Rayleigh-Jeans, Wien und Planck; Eingreifen der Quanten- hypothese .....	457
63. Strahlung nichtschwarzer Körper .....	463
64. Sichtbare Strahlung; Folgerungen für die Leuchttechnik .....	468
65. Bemerkungen über die Quantentheorie der spezifischen Wärme .....	473

**VII. Kapitel. Der korpuskulare Charakter des Lichts**

66. Der lichtelektrische Effekt .....	474
67. Einsteins korpuskulare Theorie des Lichts .....	480
68. Prüfung der Einsteinschen Theorie mit Röntgenstrahlen .....	483
69. Anwendung lichtelektrischer Erscheinungen .....	487
70. Eigenschaften des Photons .....	491
71. Compton-Effekt; Mößbauer-Effekt; Raman-Effekt .....	494
72. Das Linienspektrum des Wasserstoffs .....	507
73. Einsteins Ableitung des Strahlungsgesetzes; Schwankungserscheinungen .....	513
74. Strahlungsverstärkung durch induzierte Emission .....	517

**VIII. Kapitel. Wellencharakter der Materie**

75. Elektronenbeugung .....	521
76. Elektronenoptik .....	526
77. Die Heisenbergsche Unbestimmtheitsbeziehung .....	534

**C. Relativitätstheorie**

**IX. Kapitel.**

78. Das Relativitätsprinzip der Mechanik (Galileisches Relativitätsprinzip) .....	540
79. Galileisches Relativitätsprinzip und Elektrodynamik .....	542
80. Der Michelsonsche Versuch; die Lorentz-Kontraktion .....	545
81. Die Einsteinsche Lösung des Problems; das Relativitätsprinzip der Elektrodynamik .....	549
82. Invarianz der Gleichungen der Elektrodynamik und der Mechanik gegenüber der Lorentz- Transformation .....	559
83. Energie und Masse .....	564
84. Überblick über den Gedankenkreis der allgemeinen Relativitätstheorie .....	567

<b>Literaturverzeichnis</b> .....	573
<b>Wörterverzeichnis (deutsch-englisch)</b> .....	575
<b>Namenverzeichnis</b> .....	581
<b>Sachverzeichnis</b> .....	584



# A. Wellenoptik

## I. Kapitel

### Geometrische Optik

#### 1. Allgemeine Vorbemerkungen; Historisches; Grundbegriffe

Die von unserem Sinnesorgan „Auge“ wahrgenommene Empfindung nennen wir im Sprachgebrauch des täglichen Lebens „Licht“. Das Erkennen unserer Umgebung ist nur dadurch möglich, daß von den Gegenständen außerhalb von uns „etwas“ in unser Auge dringt und auf der Netzhaut desselben Nervenreize auslöst; auch dieses „Etwas“ wird als „Licht“ bezeichnet. Man erkennt, daß hier das Wort „Licht“ in verschiedenem Sinne gebraucht wird: im ersten subjektiven (physiologischen) Sinne ist „Licht“ der Inbegriff der durch das Auge vermittelten Sinnesempfindungen, im zweiten objektiven (physikalischen) Sinne dagegen verstehen wir darunter den Vorgang in der Außenwelt, der die Netzhaut des Auges erregt. Das Wort „Licht“ werden wir in diesem Bande i. a. nur im letzteren Sinne benutzen, wir treiben „physikalische Optik“ zum Unterschiede von der „physiologischen Optik“, auf die wir nur gelegentlich eingehen werden.

Auf die physikalische Optik wurden wir bereits in der Elektrizitätslehre (Band II) bei der Lehre von den elektromagnetischen Wellen geführt. Es wurde dort gezeigt, daß diese Wellen sich im leeren Raume, unabhängig von ihrer Wellenlänge, mit der gleichen Geschwindigkeit wie das Licht ausbreiten, daß die Erscheinungen der Reflexion, Brechung, Interferenz und Beugung der elektrischen Wellen sich genau so abspielen, wie man es auch vom Licht weiß, worauf wir später eingehen werden. Daraus wurde bereits damals geschlossen, daß die Lichtausbreitung eine Wellenausbreitung sein müsse und daß die Lichtwellen elektromagnetischer Natur seien. Die enge Beziehung zwischen Elektrodynamik und Optik wurde auch dadurch bekräftigt, daß z. B. eine elektrische Größe (die Dielektrizitätskonstante) mit einer optischen Größe (dem Brechungsquotienten) quantitativ zusammenhängt. Aus dieser „elektromagnetischen Lichttheorie“ folgern wir zunächst, daß von den elektromagnetischen Wellen, die praktisch von der Wellenlänge „Null“ bis zur Wellenlänge „unendlich“ reichen, ein bestimmter Wellenbereich das Auge erregt, d. h. den Eindruck von Licht (im physiologischen Sinne) hervorruft. Dies ist nicht so zu verstehen, als ob dieser Wellenbereich eine besondere Eigenschaft hätte, es ist vielmehr eine Eigenschaft des Auges, nur auf diesen Wellenbereich anzusprechen, (die zu erklären eine Aufgabe der physiologischen Optik ist). Vom Standpunkte der physikalischen Optik dagegen können wir keinen qualitativen Unterschied zwischen dem „sichtbaren“ Wellenbereich und dem „unsichtbaren“ Bereiche anerkennen<sup>1)</sup>; wir betrachten daher grundsätzlich den Gesamtbereich der elektromagnetischen Wellen als Gegenstand der physikalischen Optik, die wir somit nicht auf Licht im engeren Sinne des Wortes beschränken. Dies ist genau dasselbe Verfahren, das wir auch in der Akustik befolgt haben: Neben dem „Hörschall“ haben wir als physikalisch gleichwertig auch den „Infraschall“ und „Ultra-

<sup>1)</sup> Vor einem Mißverständnis, das die kurze Bezeichnung „sichtbarer Bereich“ oder „sichtbare Strahlen“ usw. hervorrufen könnte, muß gewarnt werden: „sichtbar“ sind überhaupt keine elektromagnetischen Wellen.

schall“ behandelt (Band I). — Die Wellentheorie des Lichtes hat außerordentliche Erfolge und Leistungen bei der Erklärung bekannter und in der Voraussage noch unbekannter optischer Erscheinungen aufzuweisen. Trotzdem muß gleich hier betont werden, daß durch die Undulationstheorie des Lichtes sicher nicht alle optischen Erscheinungen erklärt werden können. Es sind dies vor allem diejenigen, bei denen Licht mit Materie in Wechselwirkung tritt (Emission, Absorption, Fluoreszenz, Phosphoreszenz, Streuung usw.). Zur Erklärung dieser Phänomene muß angenommen werden, daß das Licht einen korpuskularen Charakter besitzt, daß es aus bestimmten „Quanten“, sog. „Photonen“, besteht. Dies scheint ein vollkommener Widerspruch zur Wellenauffassung zu sein; denn bei einer Wellenausbreitung verteilt sich die Gesamtenergie gleichmäßig auf die einzelnen Elemente der Wellenfläche, sie „verdünnt“ sich also um so mehr, je weiter man von der Lichtquelle entfernt ist; umgekehrt behält eine Korpuskel, ein Lichtquant oder Photon, seine Energie während der Fortpflanzung unverändert bei, wie eine materielle Partikel (Gewehrkuugel) ihre kinetische Energie. Wie dieser Gegensatz, den man wohl auch als „Dualismus“ bezeichnet, überbrückt werden kann, wird später (in der Quantenoptik) ausführlich zu erörtern sein; dort müssen auch die Tatsachen selbst genau besprochen werden. —

Es ist eine merkwürdige Erscheinung, daß die Theorie des Lichtes im Laufe der Zeit zwischen den beiden Polen — Korpuskulartheorie und Wellentheorie — hin und her geschwankt hat. Die erste Theorie des Lichtes nämlich, die von I. Newton herrührt (1669), war eine Korpuskulartheorie<sup>1)</sup>. Newton stellte sich vor, daß von den Lichtquellen kleine Korpuskeln ausgesandt würden, die sich mit sehr großer Geschwindigkeit geradlinig ausbreiten und entweder direkt das Auge treffen oder nachdem sie von anderen Körpern reflektiert oder gebrochen worden sind. Diese Auffassung erklärt also auf einfachste Weise die geradlinige Ausbreitung des Lichtes und vermag auch die Erscheinung der Reflexion und Brechung wiederzugeben. Sie fand aber unübersteigbare Schwierigkeiten bei der Erklärung der Interferenzerscheinungen, d. h. des Phänomens, daß unter Umständen Licht zu Licht hinzugefügt Dunkelheit ergibt. So entwickelte sich allmählich durch die Arbeiten von Chr. Huygens (1677), Th. Young (1807) und Aug. Fresnel (1815) die Undulationstheorie des Lichtes in ihrer ersten Form, die die Lichtwellen als „elastische“ Wellen in einem das Weltall erfüllenden Medium, dem sog. Lichtäther, auffaßte; diese Theorie mündete schließlich in die von Faraday und Maxwell inaugurierte „elektromagnetische Lichttheorie“ ein, die wir in großen Zügen in Band II besprochen haben. Die Wellentheorie vermag die Erscheinungen der Interferenz ohne Schwierigkeit zu erklären, aber ebenso Reflexion und Brechung; sie vermag auch zu zeigen, daß im allgemeinen die Lichtfortpflanzung geradlinig geschieht. Freilich zeigt die Wellentheorie darüber hinaus, daß auch Abweichungen von der Geradlinigkeit vorkommen, die man als „Beugung“ bezeichnet (aus der Allgemeinen Wellenlehre, die in Band I ausführlich dargestellt wurde, sind diese Erscheinungen uns ja bereits bekannt). Während aber früher die Antithese Welle oder Korpuskel bestand, hat die heutige Physik die Aufgabe vor sich, zu erklären, wie Welle und Korpuskel gleichzeitig miteinander bestehen können.

In diesem ersten Kapitel brauchen wir uns um diese tiefer liegenden Fragen nicht zu kümmern. Denn wir beschränken uns hier auf den Fall der geradlinigen Ausbreitung, der Reflexion und der Brechung des Lichtes, die von beiden Theorien gleich gut erklärt werden können. In der Korpuskulartheorie bezeichnet man die Bahnen der Lichtteilchen als Strahlen; aber auch die Wellentheorie kann diesen Begriff benutzen, dem sie nur eine andere Deutung gibt: Sie versteht unter Strahlen die Normalen auf der Wellenfläche. So können wir, ohne auf feinere Einzelheiten einzugehen, den Teil der

<sup>1)</sup> Es sei aber gleich hier darauf aufmerksam gemacht, daß die moderne Form der Korpuskulartheorie des Lichtes etwas anderes als die Newtonsche Theorie ist.

Optik aufbauen, in dem nur geradlinige Ausbreitung, die Gesetze der Reflexion und Brechung und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit benutzt werden; außerdem wird noch Unabhängigkeit der einzelnen Strahlen vorausgesetzt. Dieses so bestimmte Teilgebiet der Optik wird als „geometrische Optik“ oder besser als „Strahlenoptik“ bezeichnet. Wir werden trotzdem auch in diesem Kapitel von der Wellenauffassung Gebrauch machen, um uns kurz und präzise ausdrücken zu können: Wir sprechen z. B. von der Wellenlänge des roten oder grünen Lichtes usw.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen gehen wir jetzt zur Besprechung einiger Grundbegriffe über.

Die Körper, die Licht aussenden, nennen wir **Lichtquellen**. Dabei unterscheidet man zwischen **Selbstleuchtern** und **Nichtselbstleuchtern**, je nachdem der betreffende Körper selbst die Quelle des von ihm ausgehenden Lichtes ist oder erst infolge Bestrahlung durch einen Selbstleuchter zu einer Lichtquelle wird, indem er das ihm zugestrahlte Licht durch ungerichtete „diffuse“ Zurückwerfung wieder ausstrahlt. Zu den Selbstleuchtern gehören z. B. die Sonne, die Fixsterne sowie alle Körper, die durch Erhitzen zum Leuchten gebracht werden (Kerzenflamme, Gasglühlicht, elektrische Glühlampe, elektrisches Bogenlicht), ferner durch elektrische Entladungen zum Leuchten angeregte Gase und die Phosphoreszenzstoffe. Zu den Nichtselbstleuchtern gehören alle Körper, die wir zwar sehen können, die aber selbst kein Eigenlicht aussenden, z. B. ein Stück weißen Papiers, eine Wolke; auch der Mond und die Planeten sind Nichtselbstleuchter, die von der Sonne bestrahlt werden.

Die von den Lichtquellen (direkt oder indirekt) ausgesandte Strahlung ist verschiedenartig: Manche Lichtquellen senden einen großen kontinuierlichen Wellenbereich aus, der fast immer über die Grenzen der sog. sichtbaren Strahlung hinausreicht; manche liefern nur einzelne Wellenlängen oder Gruppen von solchen. Die sichtbare Strahlung selbst empfinden wir entweder als „farblos“ oder „weiß“ — dann sprechen wir kurz von „weißem“ Licht und „weißen“ Lichtquellen — oder aber als „farbig“ — entsprechend reden wir dann von „farbigen“ Lichtern und Quellen. Welche verschiedenen physikalischen Vorgänge diesen beiden Arten von Empfindungen zugeordnet sind, muß später erörtert werden.

Die verschiedenen Körper unserer Umwelt kann man in durchsichtige, durchscheinende und undurchsichtige Stoffe einteilen. Durchsichtige Körper (Luft, Glas, Wasser usw.) lassen das Licht merklich ungeschwächt hindurchgehen, so daß man z. B. die Gestalt anderer Körper durch sie hindurch erkennen kann. Die undurchsichtigen Körper dagegen absorbieren das Licht bereits in dünnen Schichten nahezu vollständig, so daß praktisch kein Licht durch sie hindurchdringt; dies ist z. B. der Fall bei Metallen, Holz, Hartgummi, schwarzem Papier usw. Diese Unterscheidung ist jedoch fließend und beruht keineswegs auf einem absolut gegensätzlichen Verhalten der „durchsichtigen“ und „undurchsichtigen“ Körper; vielmehr sind die im gewöhnlichen Sprachgebrauch als durchsichtig bezeichneten Körper (z. B. Wasser) in sehr dicker Schicht undurchsichtig. Daher herrscht in großen Meerestiefen nächtliches Dunkel, weil eine mehrere Kilometer dicke Wasserschicht praktisch alles Licht absorbiert. Andererseits lassen undurchsichtige Stoffe, wenn man sie nur in hinreichend dünner Schicht herstellt, Licht hindurch. Z. B. erscheinen Blattgold oder Blattsilber in Dicken von  $\frac{1}{20000}$  mm in der Durchsicht grün oder bläulich. Auch ist der Fall häufig, daß ein Stoff z. B. für sichtbares Licht undurchsichtig, für längere elektromagnetische Wellen von einigen cm dagegen vollkommen durchlässig ist und umgekehrt; der erstere Fall trifft z. B. für Hartgummi und schwarzes Papier zu, der zweite für elektrolytische Lösungen (z. B.  $H_2SO_4$ -Lösung), die für elektrische Wellen undurchsichtig sind.

Durchscheinende Körper (z. B. Milchglas, Seidenpapier) lassen zwar Licht durch, zerstreuen es aber gleichzeitig nach allen Richtungen, so daß man durch sie hindurch die Gestalt anderer Körper nicht erkennen kann.

Zu beachten ist, daß alle Lichtquellen tatsächlich eine endliche Ausdehnung haben. Es ist jedoch häufig bequem und zulässig, die endliche Größe einer Lichtquelle zu vernachlässigen und von einem „Lichtpunkt“ zu sprechen, indem man darunter eine sehr kleine leuchtende Fläche versteht. Experimentell kann man eine punktförmige Lichtquelle annähernd dadurch herstellen, daß man eine sehr kleine kreisrunde Öffnung intensiv von der Rückseite beleuchtet, oder indem man das an einer verspiegelten Kugelfläche reflektierte Sonnenlicht benutzt.

Da wir — gleichgültig welche Theorie des Lichtes wir annehmen — den Begriff des Lichtstrahles benutzen dürfen, seien noch zwei Bezeichnungen eingeführt, die wir im folgenden stets gebrauchen werden. Die Gesamtheit von Lichtstrahlen, die von einem Punkte aus divergieren, heißt ein **Strahlenbüschel**<sup>1)</sup>, die Gesamtheit paralleler Lichtstrahlen, die also überall einen endlichen konstanten Querschnitt besitzt, bezeichnen wir als **Strahlenbündel**<sup>1)</sup>. Ferner ist zu beachten, daß der Verlauf der Strahlen von der Fortpflanzungsrichtung unabhängig ist; ein (geometrisch) gezeichneter Strahlenverlauf gilt auch für die entgegengesetzte Strahlenrichtung (**Satz von der Umkehrbarkeit des Lichtweges**).

Unter dem vorhin schon erwähnten Satze von der Unabhängigkeit der einzelnen Strahlen und Strahlenbüschel verstehen wir die Tatsache, daß Strahlen beliebiger Herkunft sich durchkreuzen können ohne sich gegenseitig zu stören: Jeder Strahl verläuft so, als ob die anderen nicht da wären.

## 2. Die geradlinige Ausbreitung des Lichtes; Schatten

Fällt in ein völlig verdunkeltes Zimmer durch eine kleine Öffnung direktes Sonnenlicht, so kann man die Geradlinigkeit eines einfallenden Lichtbündels direkt beobachten, wenn die Luft kleine schwebende Teilchen (Rauch, Staub usw.) enthält. Da diese vom einfallenden Licht beleuchtet werden, lassen sie den Weg des Lichtes erkennen. Man sieht natürlich nicht das Licht selbst, sondern nur die vom Licht beleuchteten Teilchen, die in ihrer Gesamtheit das Lichtbündel sichtbar machen. Ebenso zeigen die von der Sonne durch ein Loch in den Wolken in die darunter befindliche trübe, Wasserdampf enthaltende Luftschicht einfallenden Lichtstrahlen die geradlinige Ausbreitung. —

Auf ihr beruht die schon von Levi Ben Gerson (1321) erwähnte **Lochkamera**. Diese besteht aus einem Kasten (Abb. 1), der in seiner Vorderwand ein feines Loch  $O$  und als

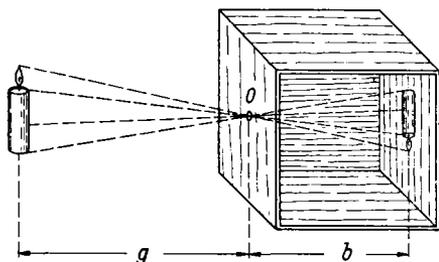


Abb. 1. Entstehung eines Bildes in der Lochkamera

Rückwand eine **Mattscheibe** besitzt. Befindet sich vor dem Loch ein leuchtender Körper, z. B. eine Kerze oder eine Landschaft, so erblickt man auf der Mattscheibe ein umgekehrtes Bild des Gegenstandes. Dieses kommt, wie Abb. 1 zeigt, dadurch zustande, daß jeder Punkt des Gegenstandes (Kerze in Abb. 1) ein von der Öffnung  $O$  begrenztes sehr schmales Lichtbündel in den Kasten eintreten läßt, das auf der Mattscheibe einen kleinen Lichtfleck erzeugt, dessen Helligkeit derjenigen des den Strahl aussendenden Punktes entspricht. Indem so jeder Punkt

des Gegenstandes sein Licht gesondert nach einer anderen Stelle der Mattscheibe entsendet, setzt sich durch stetige Aneinanderreihung der vielen hellen Flecke ein Bild des Gegenstandes zusammen. Die Schärfe dieses Bildes sollte bei streng gerad-

<sup>1)</sup> Diese Bezeichnungen stimmen nicht mit denen der Geometrie überein.

liniger Ausbreitung des Lichtes um so größer sein, je kleiner die Öffnung  $O$  ist. Dies ist, wenn man die Öffnung  $O$  nicht zu klein macht, wirklich der Fall; über die Abweichungen vgl. den Schluß dieser Nummer. Nach Abb. 1 hängt die Größe des Bildes auf der Mattscheibe von dem Abstand Lochebene — Mattscheibe ab. Das Bild ist um so größer, aber auch um so lichtschwächer, je weiter die Mattscheibe von  $O$  entfernt ist. Bezeichnet  $G$  die Größe des Gegenstandes,  $B$  die des Bildes und bedeuten  $g$  und  $b$  die Abstände von Gegenstand und Bild von der Lochebene (Abb. 1), so besteht die Beziehung:

$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g}.$$

Das Verhältnis  $B/G$  heißt *Abbildungsmaßstab*. Bringt man an Stelle der Mattscheibe eine photographische Platte, so kann man eine Lochkamera zum Photographieren benutzen, wobei man aber große Belichtungszeiten verwenden muß. Denn es ist ja schon ohne die genauere Betrachtung der Intensitätsverhältnisse klar (vgl. Nr. 14 u. 17), daß eine kleine Lochblende nicht so viel Strahlungsenergie aufnehmen kann wie etwa ein Objektiv einer normalen Kamera.

Solange die Öffnung  $O$  klein ist gegenüber der Struktur des Gegenstandes, spielt ihre Form (ob rund oder eckig) keine Rolle. Hierfür bietet sich in der Natur ein schönes Beispiel in den runden Sonnenbildchen, die man häufig auf dem schattigen Waldboden unter einem Laubbaum beobachtet. Sie entstehen dadurch, daß die vielen unregelmäßig gestalteten Lücken zwischen den Blättern des Baumes wie kleine Öffnungen wirken und auf dem Boden kleine Bilder der Sonnenscheibe erzeugen. Bei einer partiellen Sonnenfinsternis dagegen erhält man sichelförmige Bilder der Sonne.

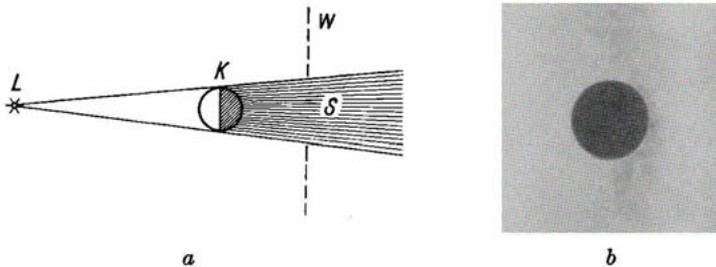


Abb. 2. Schattenbildung hinter einer Kugel bei punktförmiger Lichtquelle  
a) Strahlenverlauf      b) Bild des Schattens

Die Lochkamera bildet übrigens ein gutes Beispiel für die Unabhängigkeit der sich in der Öffnung  $O$  durchkreuzenden Strahlenbüschel; bestände diese nicht, so könnte offenbar kein vernünftiges Bild zustande kommen. — Vom Standpunkt der Wellentheorie bedeutet dies, daß die von den verschiedenen Stellen ausgehenden Wellen sich durchkreuzen ohne sich zu stören, d. h. ungestörte Superposition (vgl. Bd. I).

Auf der geradlinigen Ausbreitung des Lichts beruhen auch die *Schattenerscheinungen*. Bringt man vor einen leuchtenden Lichtpunkt  $L$  (Krater einer Bogenlampe) in einiger Entfernung einen undurchsichtigen Körper  $K$  (Abb. 2a), z. B. eine Kugel, so wird dieser nur auf der der Lichtquelle zugewandten Hälfte beleuchtet, während die andere Hälfte dunkel bleibt. Hinter der Kugel bildet sich ein Schattenraum  $S$  aus, der von den Strahlen begrenzt wird, die die Kugel berühren und der die Gestalt eines abgestumpften Kegels hat. Bringt man hinter die Kugel eine weiße Wand  $W$ , so entsteht auf dieser ein Schatten des Körpers (Abb. 2b), der von einer gleichmäßig erhellten Fläche umgeben ist und die Umriss des schattenwerfenden Körpers erkennen läßt. Im Falle der schattenwerfenden Kugel hat der Schatten, wenn das Licht sich geradlinig ausbreitet, da dann eine Zentralprojektion vorliegt, die Gestalt eines Kegelschnitts, je nach der Stellung der Wand zur Kegelachse; steht sie senkrecht dazu, wie in Abb. 2a, so liefert die Kugel einen kreisförmigen Schatten (Abb. 2b); die geometrische Gestalt

des Schattens ist also ebenfalls ein Beweis für die Geradlinigkeit der Ausbreitung. — Wird der Körper, z. B. wieder eine Kugel  $K$ , von zwei punktförmigen Lichtquellen beleuchtet (Abb. 3a), so entstehen hinter dem Körper drei verschiedene Schattenräume. Der Raum  $H_1$  wird nur von  $L_1$ , der Raum  $H_2$  nur von  $L_2$  beleuchtet, während der Raum  $S$  überhaupt kein Licht bekommt. Die nur teilweise beleuchteten Räume  $H_1$  und  $H_2$  liegen im Halbschatten, während der Raum  $S$  den Kernschatten bildet. Auf einem in den Schattenraum gebrachten weißen Schirm  $W$  erhält man das Bild von Abb. 3 b, aus dem man deutlich die verschiedenen Schattenräume erkennt. — Wird schließlich der schattenwerfende Körper von einer flächenhaften Lichtquelle  $F$

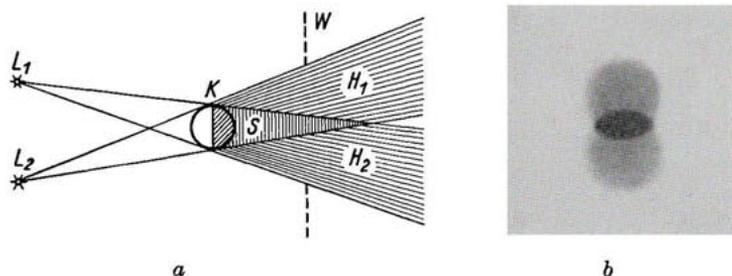


Abb. 3. Schattenbildung hinter einer Kugel bei zwei punktförmigen Lichtquellen  
a) Strahlenverlauf      b) Bild des Schattens

beleuchtet (Abb. 4a), so muß man für jeden Punkt der Lichtquelle den Schattenkegel entwerfen und ihre gemeinsame Wirkung hinter dem Körper durch Summierung feststellen. Es zeigt sich dann, daß sich hinter dem Körper ein Kernschatten  $S$  ausbildet, der keinerlei Licht erhält; dieser Kernschatten ist von einem Halbschatten  $H$  umgeben, der nach außen allmählich in den vollerleuchteten Raum und nach innen allmählich in

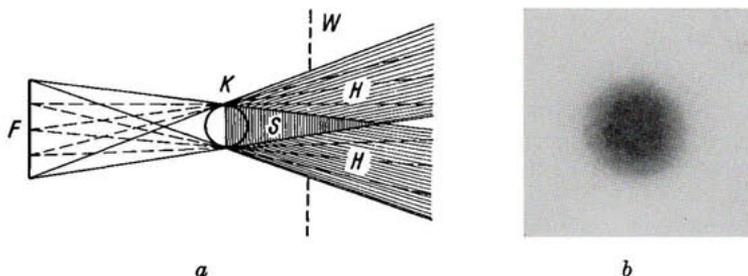


Abb. 4. Schattenbildung hinter einer Kugel bei flächenhafter Lichtquelle  
a) Strahlenverlauf      b) Bild des Schattens

den Kernschatten übergeht (Abb. 4b). In diesem Halbschatten findet also ein stetiger Übergang von voller Helligkeit zu voller Dunkelheit statt. Der Kernschatten ist daher nur dicht hinter dem Körper scharf begrenzt und bekommt, je weiter man sich von dem schattenwerfenden Körper entfernt, eine immer unschärfere Begrenzung. Ist, wie in Abb. 4, der Querschnitt des schattenwerfenden Körpers kleiner als der der Lichtquelle, so entsteht in großer Entfernung hinter dem Körper kein Kernschatten mehr, sondern nur noch Halbschatten.

Im Sonnenlicht ist der Kernschatten einer Kugel etwa 105mal so lang wie der Kugeldurchmesser. Dies folgt aus der Beziehung

$$\frac{\text{Schattenlänge}}{\text{Sonnentfernung}} \cong \frac{\text{Kugeldurchmesser}}{\text{Sonnendurchmesser}}$$

Die Abb. 4a gibt gleichzeitig die Verhältnisse wieder, die bei einer Sonnen- oder Mondfinsternis auftreten. Stellt  $F$  die Leuchtfläche der Sonne und  $K$  die Erde dar, so entsteht eine Mondfinsternis, wenn der Mond in den Kernschatten hinter der Erde eintritt, und zwar ist die Finsternis total oder partiell, je nachdem die ganze Mondfläche oder nur ein Teil derselben im Schattenraum verdunkelt wird. Ist dagegen  $K$  der Mond, so entsteht eine Sonnenfinsternis auf der Erde, wenn letztere in den Schattenraum hinter dem Mond gelangt. Da der Durchmesser der Erde (13754,8 km) fast viermal größer als der des Mondes (3480 km) ist, entsteht für diejenigen Orte der Erde, die vom Kernschatten getroffen werden, eine totale Sonnenfinsternis, während für alle die Orte, die im Halbschatten liegen, nur eine partielle Finsternis eintritt, d. h. es bleibt für sie noch ein mehr oder minder großer sichelförmiger Teil der Sonnenscheibe sichtbar. Ist schließlich der Mond zur Zeit der Sonnenfinsternis soweit von der Erde entfernt, daß die Spitze des Kernschattens diese nicht mehr trifft, so entsteht eine ringförmige Sonnenfinsternis.

Die vorangehenden Darlegungen über die geradlinige Ausbreitung des Lichtes und das Zustandekommen von Schatten gelten in Strenge nur, wenn die Hindernisse bzw. Öffnungen groß gegen die Wellenlänge des Lichtes sind. In allen anderen Fällen, in denen die Lichtwellenlänge und die linearen Dimensionen der Hindernisse und Öffnungen vergleichbar werden, treten die Erscheinungen der Lichtbeugung, d. h. Abweichungen von der Geradlinigkeit auf, die wir in Nr. 35 behandeln werden. Z. B. wird bei immer stärkerer Verkleinerung der Öffnung der Lochkamera von einer gewissen Stelle ab das Bild nicht mehr schärfer, sondern diffuser. In diesen Fällen ist von Geradlinigkeit der Lichtausbreitung keine Rede mehr, und der Begriff der Lichtstrahlen versagt dann vollkommen. Die geometrische Optik sieht aber von den Beugungerscheinungen ab und arbeitet nur mit Lichtstrahlen.

### 3. Die Reflexion des Lichtes; ebene Spiegel und ihre Anwendung

Fällt ein paralleles Strahlenbündel auf die Oberfläche eines Körpers, so wird es von dieser mehr oder weniger stark zurückgeworfen; man nennt diese Erscheinung **Reflexion**. Dabei erfährt das auffallende Licht eine Richtungsänderung, die i. a. für die

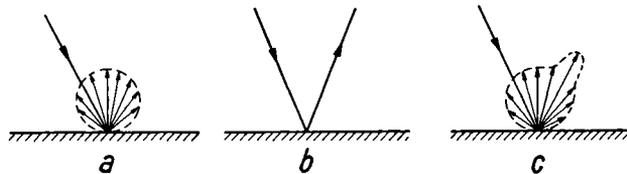


Abb. 5. Reflexion des Lichtes

a) diffus; b) regulär; c) diffus und regulär

verschiedenen Strahlen eines Lichtbündels ganz verschieden ist, da diese auf verschiedene und ganz verschieden orientierte Stellen der Oberfläche auffallen<sup>1)</sup>. In diesem Falle wird selbst ein kleines Oberflächenelement des Körpers zum Ausgangspunkt einer diffusen Strahlung (Abb. 5 a). Das betreffende Oberflächenelement verhält sich also wie ein Selbstleuchter, ohne einer zu sein, und so ist es zu erklären, daß es sichtbar wird. **Diffuse Reflexion** oder **Remission** zeigt z. B. eine weiße Gipsfläche, die daher in der Farbe des auffallenden Lichtes erscheint, bei Belichtung mit Sonnenlicht also weiß. Ebenso erscheint eine von der Sonne beschienene Wolke weiß; auch sie verhält sich wie ein Selbstleuchter. Ist die Remission vollkommen diffus, so erscheint die Fläche, aus allen Richtungen betrachtet, gleich hell.

Anders liegen die Verhältnisse, wenn ein Lichtbündel auf eine ebene Glasplatte, eine polierte Metallfläche oder eine vorderseitig versilberte Glasplatte fällt. Man be-

<sup>1)</sup> In den Abb. 5 ist das einfallende Bündel, das natürlich einen endlichen Querschnitt hat und als aus unendlich vielen „Strahlen“ bestehend anzusehen ist, durch einen Strahl repräsentiert, in Abb. 5b auch das regulär reflektierte Bündel.

obachtet dann, daß das Lichtbündel nur in einer ganz bestimmten Richtung, die von der Orientierung der Platte zum Lichtstrahl abhängt, reflektiert wird (Abb. 5 b). Wir bezeichnen diesen Fall als **reguläre Reflexion** oder **Spiegelung**. Zwischen den Grenzfällen der regulären und der diffusen Reflexion bestehen alle möglichen Übergänge. Z. B. zeigt Abb. 5 c, wie ein Lichtbündel an einer halbmatten Fläche zum Teil regulär, zum Teil diffus reflektiert wird. Maßgebend dafür ist die Beschaffenheit der Körperoberfläche, die man durch Angabe ihres „Streuungsvermögens“ kennzeichnet; letzteres ist gleich Null bei der regulären und gleich Eins bei der vollkommen diffusen Reflexion.

Ein Spiegel, der das Streuvermögen Null besäße, würde überhaupt nicht sichtbar sein; daß man ihn sieht, beruht immer auf dem Vorhandensein kleiner Rauigkeiten, die eine partielle Diffusion des Lichtes erzeugen, die Fläche also als Selbstleuchter erscheinen lassen. — Übrigens hat das „Streuungsvermögen“ einer Fläche für die verschiedenen Wellenlängen nicht den gleichen Wert. Je größer die Wellenlänge, desto kleiner wird es, d. h. die Reflexion nähert sich bei Vergrößerung der Wellenlänge des verwendeten Lichtes immer mehr der ideal regulären Reflexion an. Eine und dieselbe Fläche kann also sehr kleine Wellenlängen völlig diffus und sehr große völlig regulär reflektieren.

Wir beschäftigen uns im folgenden mit der regulären Reflexion. Untersucht man die gegenseitige Zuordnung von einfallendem Strahl, reflektiertem Strahl und Lage der

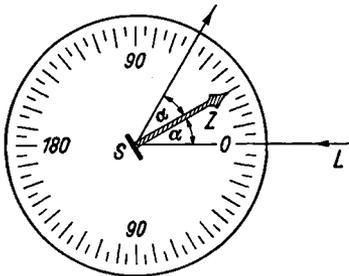


Abb. 6. Nachweis des Reflexionsgesetzes

Ein senkrecht auf einen Spiegel fallender Lichtstrahl wird also in sich selbst zurückgeworfen. Zum Nachweis des Reflexionsgesetzes kann die in Abb. 6 skizzierte Anordnung dienen. Im Mittelpunkt einer mit Gradeinteilung versehenen größeren Scheibe ist ein kleiner ebener Spiegel  $S$  drehbar angebracht. Der Spiegel trägt senkrecht zu seiner Fläche einen Zeiger  $Z$ , der das Einfallslot darstellt. Läßt man aus der Richtung  $LS$  ein schmales Lichtbündel, über die Scheibe streifend, auf den Spiegel einfallen, so daß sich sein Weg auf der Scheibe als helle Lichtlinie abzeichnet, so ist bei jeder Stellung des Spiegels der Winkel  $\alpha$  zwischen einfallendem Strahl und Einfallslot gleich dem Winkel zwischen reflektiertem Strahl und Einfallslot. Diese Anordnung läßt gleichzeitig folgendes erkennen: Wird der Spiegel  $S$  aus einer bestimmten Stellung um den Winkel  $\delta$  verdreht, so dreht sich der reflektierte Strahl um den doppelten Winkel  $2\delta$ ; denn es ändern sich sowohl der Einfallswinkel als auch der Reflexionswinkel gleichzeitig um  $\delta$ . Man macht von der Richtungsänderung des reflektierten Strahles bei Drehung eines Spiegels eine vielseitige Anwendung bei der Messung kleiner Drehwinkel z. B. beim Spiegelgalvanometer (Poggendorffsche Spiegelablesung, 1872).

**Die Entstehung von Bildern am ebenen Spiegel.** In Abb. 7 befindet sich eine punktförmige Lichtquelle  $L$  in der Entfernung  $a$  vor einem ebenen Spiegel  $S$ . Wir zeichnen eine Anzahl Strahlen  $LP_1, LP_2, \dots$  von  $L$  nach dem Spiegel und konstruieren nach dem Reflexionsgesetz die reflektierten Strahlen. Verlängern wir diese rückwärts über den Spiegel hinaus, so schneiden sie sich in einem Punkt  $L'$  hinter dem Spiegel, der dieselbe Entfernung  $a$  vom Spiegel hat wie die Lichtquelle  $L$ . In Abb. 7 ist z. B.  $\triangle LOP_1 = \triangle L'OP_1$ , da nach dem Reflexionsgesetz  $\sphericalangle LP_1O = \sphericalangle L'P_1O$ ; dasselbe gilt für jeden anderen Strahl. Das Auge verlängert die Strahlen rückwärts bis zu ihrem Schnittpunkte  $L'$ , der also für das Auge die Eigenschaft einer Lichtquelle zu haben scheint, nämlich nach allen

Richtungen hin Strahlen auszusenden. Man nennt daher  $L'$  — ebenso in allen gleichartigen Fällen — das „Bild“ des wirklichen Gegenstandes (der Lichtquelle)  $L$ . Im besonderen nennt man hier, wo die Strahlen sich nicht wirklich in  $L'$  schneiden, sondern erst nach Rückwärtsverlängerung, das Bild „virtuell“ oder „scheinbar“. Virtuelle Bilder können im Gegensatz zu „reellen“ Bildern, in denen die Strahlen sich wirklich schneiden, nicht auf einem Schirm aufgefangen werden.

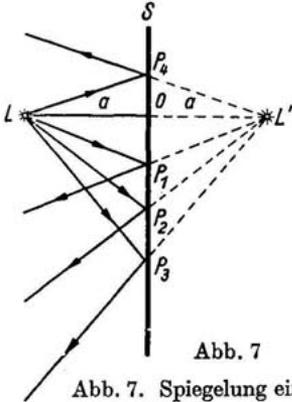


Abb. 7

Abb. 7. Spiegelung einer punktförmigen Lichtquelle an einem ebenen Spiegel

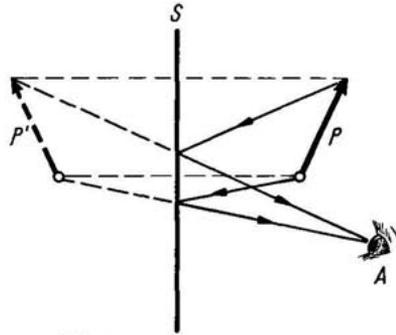


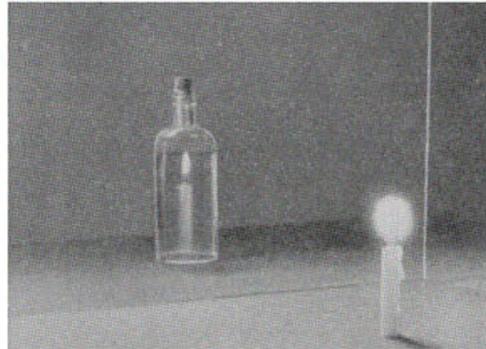
Abb. 8

Abb. 8. Spiegelung eines Gegenstandes  $P$  an einem ebenen Spiegel

Man findet bei der Spiegelung die Lage des virtuellen Bildes eines Punktes, indem man von diesem das Lot auf die Spiegelfläche fällt und dieses um sich selbst verlängert. Auf diese Weise kann man, wie Abb. 8 für einen Pfeil  $P$  zeigt, die Lage des virtuellen Bildes eines ausgedehnten Gegenstandes konstruieren; Bildgröße und Gegenstandsgröße

Abb. 9. Spiegelung einer brennenden Kerze an einer Glasplatte

Das Spiegelbild liegt ebenso weit hinter der Glasplatte, wie die im Vordergrund direkt sichtbare Kerze vor der Platte liegt. Die Flasche steht hinter der Glasplatte am Ort des Spiegelbildes, so daß der Eindruck erweckt wird, als ob die Kerze in der mit Wasser gefüllten Flasche brenne



sind dabei stets gleich. Nach Abb. 8 ist die dem Spiegel zugewandte Seite des Gegenstandes im Bild nach der anderen Seite, also auf den gegen den Spiegel schauenden Beobachter hingewandt. Infolgedessen ist auch rechts und links, vom Standpunkte des Beobachters beurteilt, im Bilde vertauscht; eigentlich ist aber im Bilde dagegen vorn und hinten vertauscht. Dies kann man leicht feststellen, wenn man z. B. in einem Spiegel seine rechte Hand betrachtet; sie erscheint im Spiegel als linke Hand. Gegenstand und Spiegelbild lassen sich also niemals zur Deckung bringen; sie sind also nicht gleich oder kongruent, sondern nur spiegelbildlich gleich. — Von der symmetrischen Lage des Spiegelbildes zu seinem Gegenstand und damit von der Richtigkeit des Reflexionsgesetzes kann man sich durch den in Abb. 9 widergegebenen Versuch überzeugen. Als Spiegel dient eine ebene Glasplatte, durch die man einen

Gegenstand auch hinter der Spiegelebene erkennen kann. Man stellt vor diese eine brennende Kerze und hinter dieselbe an den Ort ihres Spiegelbildes ein mit Wasser gefülltes Gefäß. Dann gewinnt man den Eindruck, als ob die Kerze in dem Gefäß unter Wasser brenne. Auf diese Weise werden häufig optische Täuschungen (z. B. Gespenstersehen) erzeugt, wenn Glasplatte und Gegenstand so aufgestellt sind, daß sie selbst vom Beschauer nicht gesehen werden können.

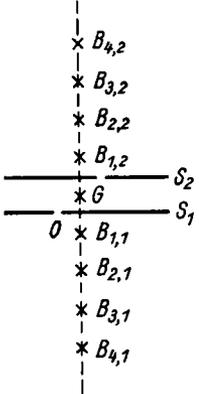


Abb. 10. Mehrfachspiegelung an zwei parallelen Spiegeln

Da die vom Spiegel in Abb. 7 zurückgeworfenen Strahlen so verlaufen, als ob sie von einer hinter dem Spiegel befindlichen Lichtquelle  $L'$  ausgesandt würden, kann man das Spiegelbild  $L'$  an einer zweiten Spiegelfläche nochmals spiegeln usw. Stellt man z. B. zwei ebene Spiegel  $S_1$  und  $S_2$  parallel zueinander auf und zwischen sie einen Gegenstand  $G$  (Abb. 10), so erhält man außer den beiden Spiegelbildern erster Ordnung  $B_{1,1}$  und  $B_{1,2}$  (die erste Indexziffer soll die Ordnungszahl, die zweite den Spiegel angeben) noch eine beliebig große Zahl von Spiegelbildern höherer Ordnung, von denen die zweiten, dritten und vierten Ordnung in Abb. 10 gezeichnet sind. Man kann diese Bilder gut beobachten, wenn man in einem der Spiegel (etwa  $S_1$ ) bei  $O$  eine kleine Öffnung anbringt und durch diese nach dem anderen Spiegel schaut. —

Bei dem Winkelspiegel sind zwei ebene Spiegel  $S_1$  und  $S_2$  unter einem Winkel  $\alpha$  gegeneinander geneigt. In Abb. 11 ist für  $\alpha = 72^\circ$  der Strahlenverlauf gezeichnet, der für ein bei  $O$  befindliches Auge  $A$  vier Spiegelbilder von dem Gegenstand  $G$  liefert, und zwar die Spiegelbilder erster Ordnung  $B_{1,1}$  am Spiegel  $S_1$  und  $B_{1,2}$  am Spiegel  $S_2$ , sowie die Spiegelbilder zweiter Ordnung  $B_{2,1}$  und  $B_{2,2}$ . Mehr Bilder können nicht auftreten. Rechnet man den Gegenstand  $G$  als fünftes Bild hinzu, so sieht das Auge den Gegenstand so oft, wie der Winkel  $72^\circ$  im ganzen Kreisumfang von  $360^\circ$  enthalten ist. Allgemein sieht man also in einem Winkelspiegel vom Winkel  $\alpha$  insgesamt  $n = \frac{360}{\alpha}$  Bilder (den Gegenstand mit eingerechnet). Wird  $\alpha = 0$ , so wird  $n = \infty$ , d. h. wir haben den bereits oben erledigten Fall unendlich vieler Spiegelbilder bei parallel gestellten Spiegeln. Wie man übrigens aus Abb. 11 sieht, liegen Gegenstand und sämtliche Spiegelbilder auf einem Kreis um den Schnittpunkt  $S$  der beiden Spiegelebenen mit  $GS$  als Radius. Eine endliche Zahl von Spiegelbildern ergibt sich nur, wenn  $\alpha$  ein Teiler von  $360^\circ$  ist. In allen anderen Fällen zeigt der Versuch, daß man unendlich viele Spiegelbilder sieht,

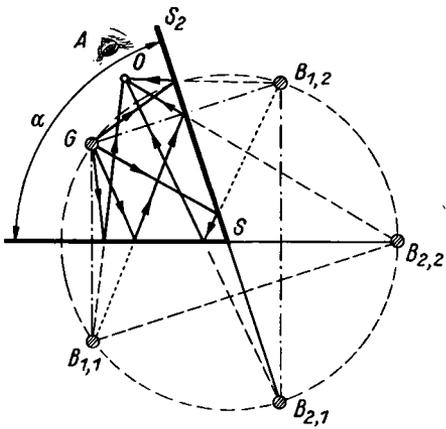


Abb. 11. Mehrfachspiegelung an einem Winkelspiegel von  $72^\circ$

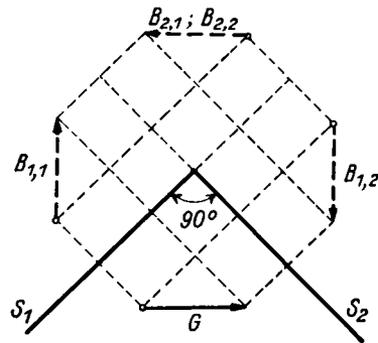


Abb. 12. Spiegelung an einem rechtwinkligen Winkelspiegel

vorausgesetzt, daß die Spiegel unendlich groß sind. — Auf dem Prinzip des Winkelspiegels beruht das von D. Brewster (1817) erfundene **Kaleidoskop**. Dieses besteht aus zwei Spiegelstreifen, die unter einem Winkel von  $60^\circ$  in einem innen geschwärtzten Rohr stecken. An einem Ende des Rohres befindet sich eine kleine Öffnung zum Hineinblicken, am anderen Ende zwischen einer Glasplatte und einer Mattscheibe eine Anzahl farbiger Glasstückchen, Perlen usw. Beim Hineinblicken sieht man diese Gegenstände mit ihren Spiegelbildern zu einem sechsfachen Stern angeordnet, dessen Muster sich beim Schütteln immer wieder verändert.

Bei einem rechtwinkligen Winkelspiegel ( $\alpha = 90^\circ$ ) entstehen drei Spiegelbilder (ohne den Gegenstand). Sie sind in Abb. 12 gezeichnet, wobei als Gegenstand ein Pfeil gewählt ist. Blickt man von vorn in einen solchen Winkelspiegel mit vertikaler Winkelkante, so erscheint das mittlere Spiegelbild genau wie in einem gewöhnlichen einfachen Spiegel, nur mit dem Unterschiede, daß jetzt rechts und links nicht mehr vertauscht sind. Man sieht also ein naturgetreues Bild und kein Spiegelbild in dem vorhin erwähnten Sinne<sup>1)</sup>.

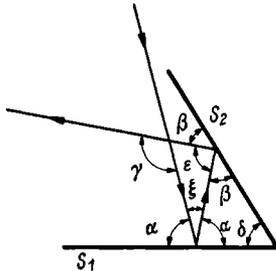


Abb. 13. Reflexion eines Lichtstrahles an zwei unter einem Winkel  $\delta$  gegeneinander geneigten Spiegeln

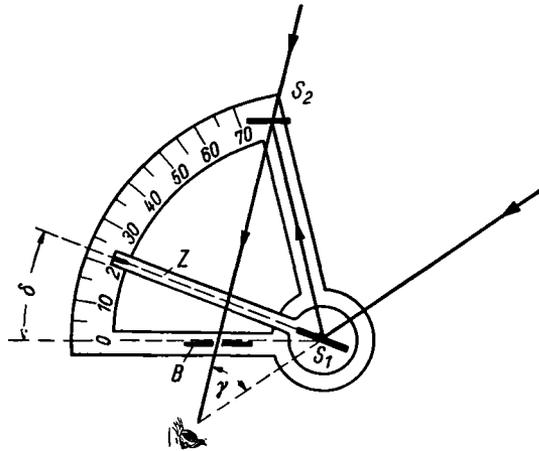


Abb. 14. Prinzip des Spiegelsextanten

Wird (Abb. 13) ein Lichtstrahl an zwei unter einem Winkel  $\delta$  gegeneinander geneigten Spiegeln  $S_1$  und  $S_2$  zweimal reflektiert, so gilt der Satz, daß der Winkel  $\gamma$ , um den der Strahl aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt wird, gleich dem doppelten Neigungswinkel der beiden Spiegel gegeneinander ist. Wie man aus Abb. 13 abliest, gelten die Beziehungen:

$$\gamma = \varepsilon + \xi; \quad \varepsilon = 180^\circ - 2\beta; \quad \xi = 180^\circ - 2\alpha; \quad \alpha + \beta = 180^\circ - \delta,$$

so daß wir erhalten:

$$\gamma = 180^\circ - 2\beta + 180^\circ - 2\alpha = 360^\circ - 2(\alpha + \beta) = 2\delta.$$

Von diesem Satz wird in der Meßtechnik verschiedentlich Gebrauch gemacht. Wählt man z. B.  $\delta = 45^\circ$ , so stehen einfallender und ausfallender Strahl aufeinander senkrecht. Ein solcher Winkelspiegel wird in der Geodäsie dazu gebraucht, um zwei zueinander senkrechte Richtungen abzustecken. Man hält dazu den Winkelspiegel so, daß man über ihn hinwegsehend, die eine Richtung im Auge hat; durch Hineinblicken in den Spiegel sieht man dann gleichzeitig in die dazu senkrechte Richtung. — Eine weitere

<sup>1)</sup> Das folgt daraus, daß nach Ausweis der Abb. 12 das Bild  $B_{2,1}$  (bzw.  $B_{2,2}$ ) durch eine Drehung des Gegenstandes  $G$  um die Spiegelkante erhalten wird. Bei horizontaler Spiegelkante sind aus dem gleichen Grunde oben und unten vertauscht.

Anwendung ist der von I. Newton (1742) erdachte und von J. Hadley (1751) ausgeführte Spiegelsextant, den Abb. 14 im Aufblick zeigt. Im Mittelpunkte eines Kreissektors ist ein kleiner Spiegel  $S_1$  drehbar so angebracht, daß seine Ebene senkrecht auf der des Kreissektors steht. An dem Spiegel ist ein Zeiger  $Z$  befestigt, der die Verdrehung des Spiegels auf einer am Umfang des Kreissektors angebrachten Gradteilung abzulesen gestattet. Gegenüber  $S_1$  ist ein zweiter Spiegel  $S_2$ , nur in seiner unteren Hälfte versilbert, fest angebracht, so daß seine Ebene dann parallel der von  $S_1$  steht, wenn der Zeiger  $Z$  auf den Nullpunkt der Teilung weist. Blickt man nun durch die Öffnung einer Blende  $B$  (einen sog. Diopter), oder ein an dessen Stelle befestigtes kleines Fernrohr durch den unbelegten Teil von  $S_2$  nach einem fernen Gegenstand, so kann man gleichzeitig über den spiegelnden Teil von  $S_2$  und den Drehspiegel  $S_1$  nach einer zweiten

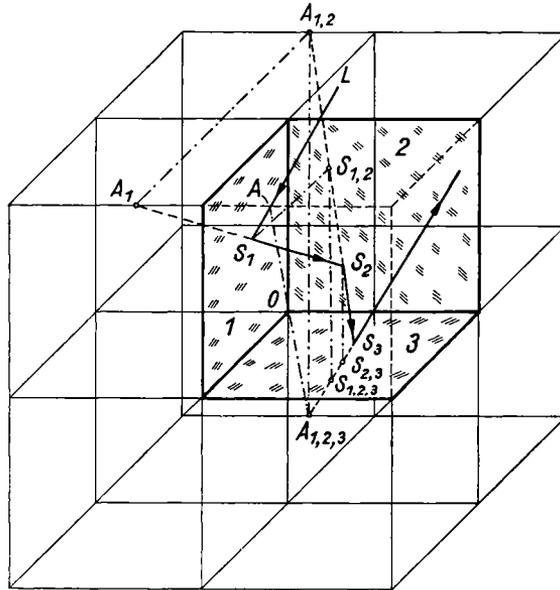


Abb. 15. Strahlenverlauf in einem Zentralspiegel

Richtung visieren. Der Winkel  $\gamma$  zwischen diesen beiden Richtungen ist dann nach dem Obigen gleich dem doppelten Wert des auf der Teilung abgelesenen Winkels  $\delta$ . Der besondere Vorteil des Sextanten — der Name rührt daher, daß die Gradeinteilung nur ein Sechstel des Kreisumfanges zu sein braucht, um Winkel bis zu  $120^\circ$  zu messen — besteht darin, daß er keine feste Aufstellung benötigt, sondern frei in der Hand gehalten werden kann. Deshalb wird er in der Seefahrt dazu benutzt, um von Bord des Schiffes aus Sonnen- und Sternhöhen zu messen, aus denen sich die geographische Breite<sup>1)</sup> des Schiffsortes ergibt. — Ordnet man drei Spiegel so an, daß sie die Ecke eines Würfels darstellen, so erhält man den sog. Zentralspiegel (A. Beck, 1887). Bei diesem wird jeder in die Spiegelecke einfallende Lichtstrahl nach dreimaliger Reflexion um insgesamt  $180^\circ$  abgelenkt, so daß der aus dem Spiegelsystem herauskommende Strahl stets parallel zum einfallenden Strahl verläuft.

In Abb. 15 ist ein Zentralspiegel gezeichnet, der aus den drei Flächen (1), (2) und (3) besteht, die in dem Punkt 0 zusammenstoßen. In diese Spiegelecke falle ein von  $L$  (von oben) kommender Lichtstrahl so ein, daß er die obere vordere Würfelfkante im Punkt  $A$  schneidet. Der Strahl trifft die

<sup>1)</sup> Zur Bestimmung der geographischen Länge (z. B. relativ zum Meridian von Greenwich) dient die Differenz zwischen der Greenwicher Lokalzeit und der des Schiffes; vier Zeitminuten entsprechen dabei  $1^\circ$  Längendifferenz.

Spiegelfläche (1) in  $S_1$ . Wir finden den reflektierten Strahl, indem wir  $A$  an (1) spiegeln und den Spiegelpunkt  $A_1$  mit  $S_1$  verbinden. Die Verlängerung von  $A_1S_1$  trifft den Spiegel (2) in  $S_2$ . Um den von (2) reflektierten Strahl zu erhalten, kann man entweder  $A_1$  an Fläche (2) spiegeln und den so gewonnenen Spiegelpunkt  $A_{1,2}$  mit  $S_2$  verbinden oder man kann den Spiegelpunkt  $S_{1,2}$  von  $S_1$  an der Fläche 2 konstruieren und mit  $S_2$  verbinden. Die Verlängerung der Verbindungslinie  $S_2A_{1,2}$  oder  $S_2S_{1,2}$  trifft den Spiegel (3) in  $S_3$ . Der von dieser Fläche reflektierte Strahl muß von dem Punkt  $A_{1,2,3}$ , dem Spiegelpunkt von  $A_1$ , an der Fläche (3), herkommen. Statt dessen kann man auch  $S_3$  mit dem Spiegelpunkt  $S_{2,3}$  von  $S_2$  an der Fläche (3) oder mit  $S_{1,2,3}$  dem Spiegelpunkt von  $S_{1,2}$  an der gleichen Fläche verbinden. Der Punkt  $A_{1,2,3}$  stellt also das Spiegelbild von  $A$  am Zentralspiegel dar, und zwar geht die Verbindungslinie dieser beiden Punkte durch den Eckpunkt  $O$  des Spiegelsystems, wie man ohne weiteres aus der Konstruktion in Abb. 15 folgert. Es wird also jedes in der Ecke des Spiegelsystems einfallende Lichtbündel in der gleichen Richtung zurückreflektiert.

Man benutzt daher Zentralspiegel als Rückstrahler für Warnzwecke. Z. B. bestehen die bei den Verkehrszeichen, an Kraftwagen und an den Tretpedalen der Fahrräder befindlichen Rückstrahler aus einer Vielzahl von mosaikartig zusammengesetzten Zentralspiegeln. Vgl. auch den Tripelspiegel S. 44.

Schließlich sei noch erwähnt, daß man in der Längenmeßtechnik sowie beim Ablesen von Zeigerausschlägen bei Meßinstrumenten zur Vermeidung der Parallaxe (Band I) auf Glasspiegel gravierte Skalen benutzt. Wenn man den anzuvisierenden Objektpunkt entweder mit seinem eigenen Spiegelbild oder mit dem des Auges zur Deckung bringt, hat man die Gewähr dafür, daß die Visierlinie auf der Teilung senkrecht steht.

#### 4. Gekrümmte Spiegel; Konkav- und Konvexspiegel

Da man jedes hinreichend kleine Flächenelement einer gekrümmten Fläche als eben betrachten kann, darf man auch bei gekrümmten Spiegeln das Gesetz der ebenen Reflexion anwenden.

Wir betrachten im allgemeinen nur sphärische Spiegel; darunter versteht man solche, die die Gestalt einer Kugelkalotte haben, also einen Teil einer Kugelfläche bilden. Ist die innere Seite der Kalotte verspiegelt, so haben wir es mit einem Hohl- oder Konkavspiegel zu tun, während Spiegel mit nach außen gewölbter Reflexionsfläche Wölb- oder Konvexspiegel genannt werden. Abb. 16 stellt einen ebenen Schnitt durch einen solchen Kugelspiegel dar; der Punkt  $S$  der Kalotte wird als Scheitelpunkt bezeichnet, die Verbindung von  $S$  mit dem Kugelzentrum  $M$  heißt die Hauptachse des Spiegels, die von  $M$  nach den einzelnen Punkten des Spiegels gezogenen Geraden (z. B.  $MA$ ) sind Radien und daher die Normalen der Kugelfläche. Wir betrachten zunächst Strahlen, die parallel der Hauptachse auf den Spiegel auffallen; ein solcher treffe ihn in  $A$ , die Spiegelnormale ist  $AM$ , der Winkel, den der Strahl mit der Normale bildet, sei  $\beta$ ; dann wird der reflektierte Strahl unter dem gleichen Winkel  $\beta$  in die Richtung  $AF$  reflektiert. Da die Normale  $AM$  die Hauptachse auch unter dem Winkel  $\beta$  trifft, ist das Dreieck  $MAF$  gleichschenkelig, und daraus folgt unmittelbar, daß

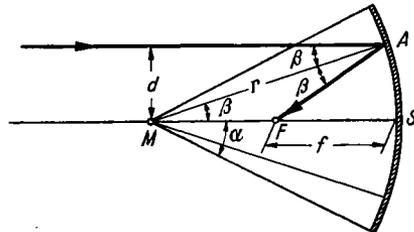


Abb. 16. Zur Definition des Brennpunktes eines Hohlspiegels

$$MF = FA = \frac{MA}{2 \cos \beta} = \frac{r}{2 \cos \beta} \text{ ist.}$$

Da nach Abb. 16  $\sin \beta = \frac{d}{r}$  ist, wenn  $d$  den senkrechten Abstand des einfallenden Parallelstrahls von der Hauptachse bedeutet, so wird  $\beta$  um so kleiner, je kleiner  $d$  ist, d. h. je mehr der einfallende Strahl der Hauptachse benachbart ist. Wenn wir uns also auf der Achse sehr benachbarte Strahlen, sog. „paraxiale“ Strahlen beschränken,

so ist  $\beta$  klein und  $\cos \beta \approx 1$ , d. h. die Schnittweite aller Paraxialstrahlen mit der Achse ist unabhängig von  $\beta$ , d. h. alle der Hauptachse hinreichend benachbarten Parallelstrahlen schneiden sich in einem Punkte  $F$ , den man als den **Brennpunkt** bezeichnet: der Abstand des Brennpunktes vom Scheitel  $S$  des Spiegels heißt die **Brennweite**  $f$ ; für  $f$  ergibt sich also aus der vorstehenden Gleichung:

$$f = \frac{1}{2} r,$$

d. h. die Brennweite eines sphärischen Spiegels ist gleich dem halben Kugelradius.

Bezeichnet man den Winkel  $\alpha$  (Abb. 16), den ein vom Spiegelmittelpunkt nach der Spiegelbegrenzung gezogener Radius mit der Spiegelachse bildet, als Öffnungswinkel des Spiegels, so erkennt man, daß der maximale Wert von  $\beta$  gerade gleich  $\alpha$  ist, und daher kann man auch sagen: **Fällt auf einen sphärischen Hohlspiegel mit hinreichend kleinem Öffnungswinkel ein achsenparalleles Strahlenbündel, so werden alle Strahlen in einem Brennpunkt vereinigt, der den Abstand vom Scheitelpunkt zum Krümmungsmittelpunkt gerade halbiert.**

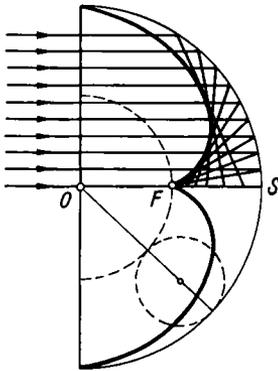


Abb. 17. Entstehung der Katakaustik am Hohlspiegel

Es folgt aus der obigen Darlegung, daß keineswegs alle achsenparallelen Strahlen sich in einem Punkte vereinigen, sondern nur die „Paraxialstrahlen“, da die „Schnittweite“  $SF$  i. a. von  $\beta$ , d. h. vom Abstand der einfallenden Parallelstrahlen von der Achse abhängt; je weiter der Strahl von der Achse entfernt ist, um so kleiner die Schnittweite.

Läßt man daher die Bedingung eines kleinen Öffnungswinkels fallen, so vereinigen sich von allen zur Achse parallel einfallenden Strahlen nur die innersten im Brennpunkte, während die achsenferneren Strahlen die Achse näher am Scheitelpunkt schneiden (Abb. 17). Man nennt diese Abweichung die **sphärische Aberration**. Die Gesamtheit der am Spiegel reflektierten Strahlen wird von einer „Brennfläche“ eingehüllt, deren Schnitt mit einer durch die Achse gelegten Ebene die **Katakaustik** ergibt; ihre Spitze liegt im Brennpunkt des Spiegels. Die Katakaustik ist eine Epizykloide, die entsteht, wenn man einen Kreis vom Radius  $f/2$  auf einem um den Spiegelmittelpunkt  $O$  beschriebenen Kreis mit dem Radius  $f$  abrollt; die Epizykloide ist dann die Bahn desjenigen Punktes des kleinen Kreises, der den großen Kreis ursprünglich in  $F$  berührt. Man kann (Abb. 18) die Katakaustik sichtbar machen, indem man paralleles Licht in einen blanken Metallring fallen läßt. Abb. 19 zeigt bei demselben Metallring den Verlauf von 7 isolierten parallel zur Achse einfallenden Strahlen.

Die sphärische Aberration verhindert also i. a. die Benutzung weit geöffneter sphärischer Hohlspiegel. Für manche Zwecke ist daher ein Parabolspiegel vorzuziehen, dessen Fläche durch Rotation einer Parabel um ihre Achse entstanden gedacht werden kann. Abb. 20 zeigt einen Achsenschnitt durch einen Parabolspiegel  $P$ , gleichzeitig ist eine Anzahl zur Achse paralleler Strahlen gezeichnet, die auf den Spiegel auffallen. Da bei einer Parabel die Normale den Winkel zwischen einem beliebigen achsenparallelen Strahl und dem zugehörigen Brennstrahl halbiert, wird jeder zur Achse parallel einfallende Strahl nach dem Brennpunkt  $F$  reflektiert. Wenn also ein achsenparalleles Strahlenbündel auf einen Parabolspiegel auffällt, so gehen die reflektierten Strahlen sämtlich durch den Brennpunkt des Spiegels. Wegen der Umkehrbarkeit des Strahlenganges kann man auch sagen: Bringt man eine möglichst punktförmige Lichtquelle in den Brennpunkt eines Parabolspiegels, so verlassen die von der Lichtquelle ausgehenden Strahlen den Spiegel als achsenparalleles Strahlenbündel. Man verwendet daher Parabolspiegel z. B. bei Scheinwerfern, Blinkgeräten usw., bei denen es auf gute „Bündelung“ der Strahlen ankommt; auch bei Spiegelfernrohren (s. Nr. 12) werden sie verwendet. Ein sphärischer Hohlspiegel würde für Scheinwerfer usw. unzweckmäßig sein.

Wir wollen die Krümmung der Parabel im Scheitelpunkt  $S$  durch den Radius  $R_0$  des Krümmungskreises an dieser Stelle ersetzen; dieser Radius ist gleich der doppelten Brennweite der Parabel ( $R_0 = 2f$ ). In Abb. 21 ist der Krümmungskreis mit dem genannten Radius ( $= SM$ ) an die Parabel im Punkte  $S$  konstruiert; man sieht daraus, daß für hinreichend kleinen Öffnungswinkel der Kugelspiegel sich praktisch nicht von einem Parabolspiegel unterscheidet.

Elliptische Zylinderspiegel werden z. B. benutzt, um eine Lichtquelle unter Ausnutzung aller von ihr ausgehender Strahlung in ein zu bestrahlendes Gefäß abzubilden.

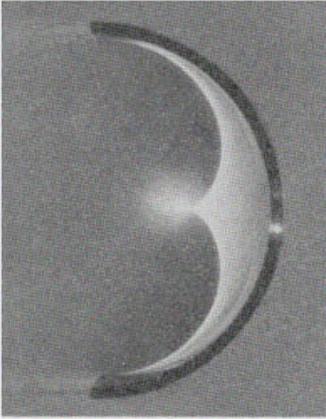


Abb. 18. Katakaustik

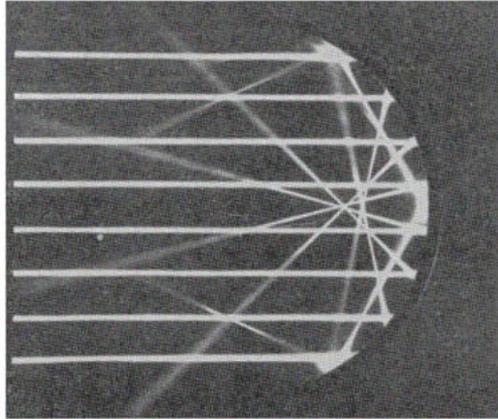


Abb. 19. Verlauf von acht parallel zur Achse in einen Hohlspiegel einfallenden Lichtstrahlen

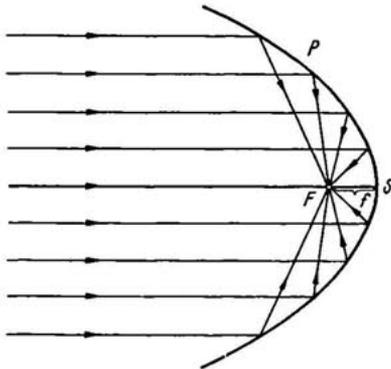


Abb. 20. Einfall eines parallelen Strahlenbündels in einen Parabolspiegel

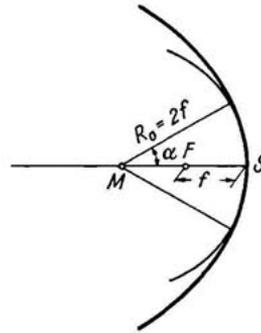


Abb. 21. Ersatz der Parabelkrümmung im Scheitelpunkt durch einen Krümmungskreis

Wir betrachten nun an Hand der Abb. 22 den Verlauf eines Strahles, der von einem außerhalb des Spiegelmittelpunktes  $M$  auf der Achse liegenden Punkt  $G$  auf den sphärischen Spiegel fällt, diesen in  $A$  trifft und nach dem Punkt  $B$  auf der Achse reflektiert wird. Dann folgt aus den Dreiecken  $GAM$  und  $MAB$  nach dem Sinussatz:

$$\frac{\sin \beta}{\sin (\pi - \alpha)} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{MG}{AG} = \frac{MB}{AB}.$$

Dafür können wir, da für paraxiale Strahlen (d. h. für kleine Winkel  $\alpha$  und  $\beta$ )  $AG = SG = g$  und  $AB = SB = b$  ist, schreiben:

$$\frac{g - r}{g} = \frac{r - b}{b} \quad \text{oder:} \quad \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r}.$$

Da der Krümmungsradius  $r$  gleich der doppelten Brennweite  $f$  des Spiegels ist, erhalten wir statt dessen:

$$(1) \quad \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Das, was wir hier für einen von  $G$  ausgehenden Strahl abgeleitet haben, gilt natürlich auch für alle anderen von diesem Punkt auf den Spiegel treffenden Strahlen, soweit diese ein paraxiales Strahlenbündel bilden (Abb. 23). Man kann daher ganz allgemein sagen:

Alle Strahlen, die von einem Achsenpunkt herkommen (homozentrische Strahlen) und unter kleinem Einfallswinkel auf einen Hohlspiegel treffen, gehen nach der Reflexion wieder durch einen einzigen Punkt, welcher auf der zu dem ersten Punkt gehörenden Achse liegt; die Strahlen bleiben also auch nach der Spiegelung homozentrisch.

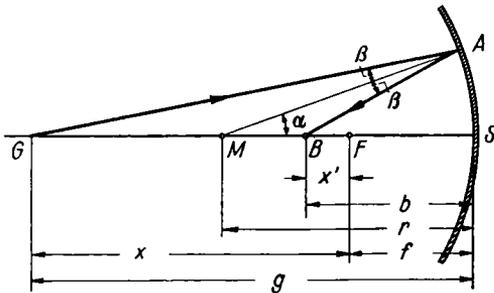


Abb. 22. Zur Ableitung der Abbildungsgleichung beim Hohlspiegel

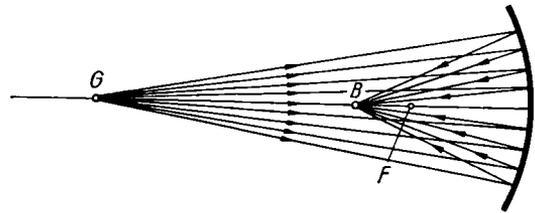


Abb. 23. Einfall eines homozentrischen Strahlenbündels in einen Hohlspiegel

Wir nennen den Abstand  $g$  des Punktes  $G$  vom Spiegel die Gegenstandsweite, den Abstand  $b$  des Bildpunktes  $B$  vom Spiegel die Bildweite. Die Größen  $g$ ,  $b$ , sowie  $r$  und  $f$  betrachten wir als algebraische Größen, die positive und negative Werte annehmen können. Wir setzen (willkürlich) fest, daß positiven Werten der physikalische Sachverhalt entspricht, daß sie alle vor dem Hohlspiegel liegen. Bei einem Hohlspiegel liegt es in der Natur der Sache, daß  $g$ ,  $r$ ,  $f$  positiv sein müssen; die Bildweite  $b$  kann aber nach Gl. (1) positiv und negativ ausfallen; das letztere entspricht dann dem Falle, daß das Bild hinter dem Spiegel liegt, worauf wir weiter unten genauer eingehen werden. Der Sinn unserer Festsetzungen ist der, daß Gl. (1) für alle Fälle gilt; man kann also (1) in Worten folgendermaßen aussprechen: Die Summe der reziproken Werte von Gegenstandsweite und Bildweite ist gleich dem reziproken Wert der Brennweite.

Es ist ferner üblich, die durch den Gegenstandspunkt  $G$ , Bildpunkt  $B$  und Brennpunkt  $F$  senkrecht zur Hauptachse des Spiegels gelegten Ebenen als Gegenstands- oder Dingebene, Bild- und Brennebene zu bezeichnen.

Da die Größen  $1/g$  bzw.  $1/b$  ein Maß für den Öffnungswinkel des von  $G$  kommenden bzw. nach  $B$  hingehenden Strahlenbündels sind, bezeichnet man diese Werte häufig als die Konvergenz  $A_G$  bzw.  $A_B$  des Gegenstands- und Bildpunktes. Nennt man ferner die reziproke Brennweite  $1/f$  die Stärke  $S$  des Hohlspiegels, so kann man Gl. (1) auch schreiben:

$$(1a) \quad A_G + A_B = S,$$

d. h. die Summe der Konvergenzen von Gegenstandspunkt und Bildpunkt ist gleich der Stärke des Hohlspiegels.

Es ist üblich, die Stärke eines Hohlspiegels in **Dioptrien** anzugeben, indem man die Brennweite in Metern rechnet. Ein Hohlspiegel hat also die Stärke 1 Dioptrie, wenn seine Brennweite 1 m, d. h. sein Krümmungsradius 2 m, ist.

Bezeichnet man als Maß der Gegenstandsweite die Entfernung  $x$  des Punktes  $G$  in Abb. 22 vom Brennpunkt  $F$  statt vom Scheitel  $S$  des Spiegels und als Maß der Bildweite die Entfernung  $x'$  des Bildpunktes  $B$  ebenfalls vom Brennpunkt  $F$ , so daß die Beziehungen gelten:

$$(1b) \quad g = x + f, \quad b = x' + f,$$

so erhalten wir an Stelle von Gleichung (1):

$$\frac{1}{x+f} + \frac{1}{x'+f} = \frac{1}{f},$$

woraus eine zweite, von Newton angegebene, ebenfalls allgemein gültige Hohlspiegelgleichung

$$(2) \quad x \cdot x' = f^2$$

folgt, die wir auch in der Form

$$(2a) \quad (g - f)(b - f) = f^2$$

schreiben können. Aus den Gleichungen (1) oder (2) läßt sich zu jeder Gegenstandsweite  $g$  bei gegebener Brennweite  $f$  die Bildweite  $b$  und umgekehrt berechnen sowie aus  $g$  und  $b$  die Brennweite  $f$  bestimmen. Es gelten dafür die Beziehungen:

$$(3) \quad b = \frac{gf}{g-f}; \quad g = \frac{bf}{b-f}; \quad f = \frac{gb}{g+b},$$

$$(3a) \quad x' = \frac{f^2}{x}; \quad x = \frac{f^2}{x'}; \quad f = \sqrt{x \cdot x'}.$$

Die durch die Gl. (1) und (2) bzw. (2a) gegebenen funktionalen Zusammenhänge zwischen den Größen  $g, b$  oder  $x, x'$  einerseits und  $f$  andererseits können wir in folgender Weise graphisch darstellen: In einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit den Achsen  $x$  und  $x'$  stellt Gl. (2) eine gleichseitige Hyperbel dar (Abb. 24). Der eine ihrer Scheitelpunkte hat die Koordinaten  $(+f, +f)$ , der andere die Koordinaten  $(-f, -f)$ . Legen wir durch letzteren ein dem ersten paralleles Koordinatenkreuz mit den Achsen  $g$  und  $b$ , so gibt dieselbe Hyperbel die Gl. (1) wieder. Aus Abb. 24 lesen wir z. B. ab, daß, wenn  $g$  aus dem Unendlichen nach  $+f$  wandert, d. h. wenn der Gegenstandspunkt sich aus dem Unendlichen nach dem Brennpunkt verschiebt, die Bildweite  $b$  sich von  $+f$  nach  $+\infty$  verändert. Mit anderen Worten: Aus dem Unendlichen

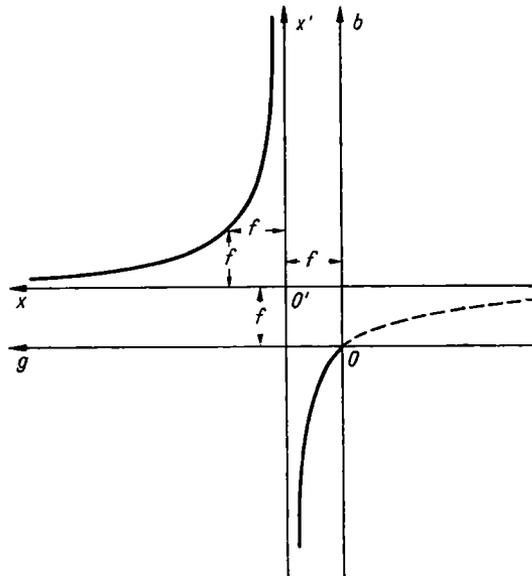


Abb. 24. Graphische Darstellung der Abbildungsgleichung beim Hohlspiegel

kommende Strahlen vereinigen sich im Brennpunkte, und aus dem Brennpunkt kommende Strahlen verlaufen als parallele Strahlenbündel nach dem Unendlichen. Für jeden zwischen  $+\infty$  und  $+f$  liegenden Gegenstandspunkt liegt der Bildpunkt ebenfalls vor dem Hohlspiegel zwischen  $+f$  und  $+\infty$ . Rückt aber der Gegenstandspunkt zwischen Brennpunkt und Scheitel-

punkt des Spiegels, d. h. liegt  $g$  zwischen  $+f$  und  $0$ , so gilt der ausgezogene Teil des rechten Hyperbelastes, d. h. es wird sowohl  $x'$  wie auch  $b$  negativ, der Bildpunkt liegt hinter dem Spiegel. In diesem Fall kann er nur virtuell sein, wie z. B. aus der Abb. 25 zu erkennen ist, in der die von  $G$  auf den Spiegel fallenden Strahlen so reflektiert werden, als ob sie von dem Punkt  $B$  kämen; wie aus Abb. 24 ersichtlich, rückt dabei das virtuelle Bild dem Spiegel um so näher, je dichter der Gegenstandspunkt an den Spiegel heranrückt. Da nur positive Werte von  $g$  möglich sind, d. h.  $x$  nicht kleiner als  $-f$  werden kann, hat von dem unteren Hyperbelast nur der ausgezogene Teil physikalische Bedeutung.

Um graphisch aus Gegenstandsweite  $g$  und Bildweite  $b$  die zugehörige Brennweite  $f$  zu ermitteln, kann man folgendermaßen verfahren (Abb. 26): Man trägt rechtwinklig zueinander  $g$  und  $b$  ab, verbindet die Endpunkte durch eine Gerade und zieht vom Anfangspunkt  $O$  unter  $45^\circ$  eine zweite Gerade, die die erwähnte Gerade in dem Punkt  $P$  trifft. Fällt man sodann von  $P$  auf die beiden Strecken  $g$  und  $b$  die Lote, so haben diese die gesuchte Länge  $f$ . Denn man liest aus Abb. 26 sofort ab, daß  $(g - f) : f = f : (b - f)$  ist, was gerade der Gl.(2a) entspricht. Ebenso kann man, wenn  $f$  und

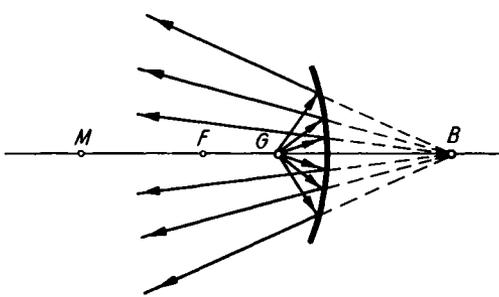


Abb. 25. Verlauf der von einem Punkt  $G$  zwischen Brennpunkt und Hohlspiegel ausgehenden Strahlen

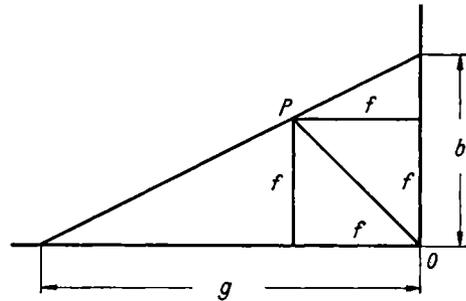


Abb. 26. Graphische Ermittlung von Brennweite  $f$ , aus Gegenstandsweite  $g$  und Bildweite  $b$

einer der Werte  $b$  oder  $g$  gegeben sind, den dritten Wert graphisch ermitteln, indem man zunächst ein Quadrat mit der Seite  $f$  zeichnet, längs einer Seite entweder  $b$  oder  $g$  abträgt und von dem so erhaltenen Endpunkt eine Gerade nach der nächsten Ecke (Punkt  $P$ ) des Quadrates zieht; diese schneidet dann auf der anderen Quadratseite (bzw. ihrer Verlängerung) die gesuchte Größe ab.

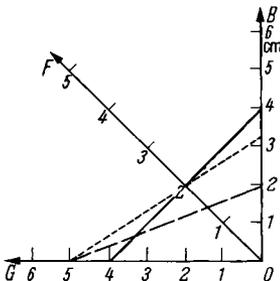


Abb. 27. Nomogramm zur Bestimmung von Brennweiten, Bildweiten oder Gegenstandsweiten

Beispiele: —————  $g = 4, b = 4, f = 2$   
 - - - - -  $g = 5, b = 2, f = 1,43$   
 .....  $g = 5, b = 3,3, f = 2$

Diese Konstruktion liefert ein einfaches Beispiel für ein „Nomogramm“: Drei Skalen  $G, F, B$  (Abb. 27) unter Winkeln von je  $45^\circ$  sind in geeignete Intervalle geteilt, die bei Anlegung eines Lineals durch je einen Punkt zweier Skalen den zugehörigen Punkt auf der dritten Skala ablesen lassen, wobei natürlich die Genauigkeit durch die Feinheit der Teilung beschränkt ist.

Bisher haben wir einen auf der Achse des Hohlspiegels liegenden Punkt  $G$  abgebildet; jetzt wollen wir zeigen, wie das Bild eines ausgedehnten Gegenstandes, z. B. des in Abb. 28 gezeichneten Pfeiles  $GG'$ , zustande kommt. Aus dem Vorhergehenden

wissen wir, daß ein achsenparalleler Strahl nach dem Brennpunkt des Spiegels, daß ein durch den Brennpunkt gehender Strahl als achsenparalleler Strahl reflektiert und daß jeder durch den Spiegelmittelpunkt  $M$  gehende Strahl in sich selbst zurückgeworfen wird sowie daß schließlich ein den Spiegel im Scheitelpunkt treffender Strahl vor und nach der Reflexion mit der Achse gleiche Winkel bildet. Ziehen wir diese vier Strahlen von Punkt  $G'$  in Abb. 28 a aus, (sie sind durch die Ziffern 1—4 bezeichnet), so schneiden sie sich in einem Punkte  $B'$ , der somit das (in diesem Fall reelle) Bild von  $G'$  darstellt. Da der Bildpunkt  $B$  von  $G$  auf der Achse des Spiegels liegen muß, stellt das Lot von  $B'$  auf die Achse das Bild von  $GG'$  dar.

Natürlich sind zu dieser Bildkonstruktion nur 2 von den 4 ausgezeichneten Strahlen notwendig; dies zeigt z. B. für einen speziellen Fall Abb. 28 b. In dieser befindet sich der Gegenstand in der Entfernung  $g = 2f$  vor dem Spiegel; dann entsteht an der gleichen Stelle  $b = 2f$  das reelle umgekehrte Bild in der gleichen Größe wie der Gegenstand.

Wir erhalten also bei der Anordnung nach Abb. 28 a und 28 b vom Gegenstand  $GG'$  ein reelles umgekehrtes Bild.

Für das Verhältnis von Bildgröße zur Gegenstandsgröße, das man als Abbildungsmaßstab  $v$  oder auch als Lateralvergrößerung bezeichnet, folgt aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke  $SBB'$  und  $SGG'$  (Abb. 28 a) die Beziehung:

$$(4) \quad v = \frac{BB'}{GG'} = \frac{b}{g};$$

hierfür kann man unter Benutzung von (3 a) auch schreiben:

$$(4a) \quad v = \frac{f}{g-f} = \frac{b-f}{f}.$$

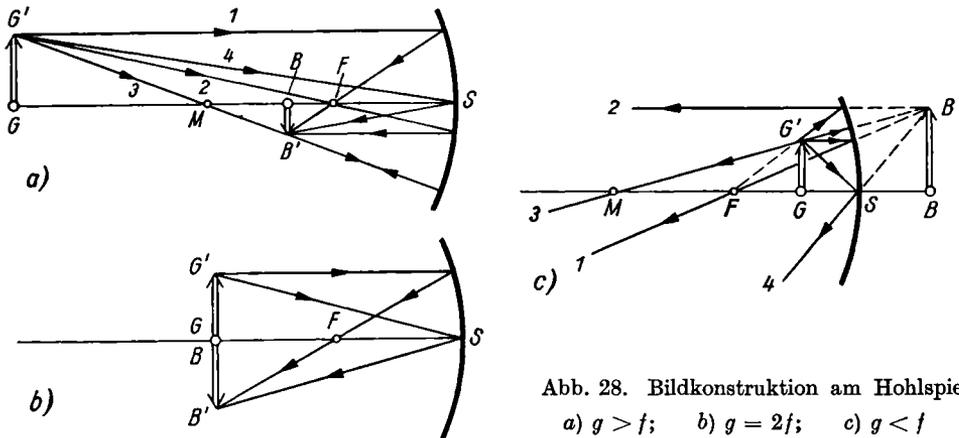


Abb. 28. Bildkonstruktion am Hohlspiegel  
 a)  $g > f$ ; b)  $g = 2f$ ; c)  $g < f$

Aus (4) folgt, daß  $v$  gleichfalls positive und negative Werte annehmen kann; sind  $g$  und  $b$  beide positiv, so ist es auch  $v$ , d. h. ein positives  $v$  entspricht dem Falle, daß ein umgekehrtes Bild entsteht. In der Abb. 28 a ist  $0 < v < 1$ , während in Abb. 28 b  $v = +1$  ist. Anders ist es im Fall der Abb. 28 c. Hier ist der Fall dargestellt, daß sich der Gegenstand zwischen Brennpunkt und Spiegel befindet. Dann entsteht hinter dem Spiegel in der Entfernung  $|b|$  ein aufrechtes, vergrößertes, aber virtuelles Bild;  $b$  selbst ist  $< 0$ . Für den Abbildungsmaßstab gelten auch hier die Gl. (4) und (4a);  $v$  ist also hier selbst negativ, aber absolut genommen größer als 1, da das Bild aufrecht und vergrößert ist.

Man kann dies auch aus Abb. 28c entnehmen, wobei zu beachten ist, daß in der Figur die auftretenden Strecken alle positiv zu nehmen sind. Es folgt nämlich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $SBB'$  und  $SGG'$ :

$$(4b) \quad |v| = \frac{BB'}{GG'} = \frac{|b|}{g} = \frac{f}{g-f} = \frac{|b|-f}{f}.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $MBB'$  und  $MGG'$  enthält man ferner:

$$\frac{|b|}{g} = \frac{r+|b|}{r-g} = \frac{2f+|b|}{2f-g}.$$

Aus dieser Gleichung folgt der Reihe nach

$$2f \cdot |b| - |b| \cdot g = 2fg + |b| \cdot g,$$

oder:

$$f \cdot |b| = fg + |b| \cdot g$$

und schließlich:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{|b|}.$$

Setzt man hier statt  $-|b|$  den (negativen) Wert  $b$  ein, so folgt wieder die alte Abbildungsgleichung (1):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

wie es sein muß.

An Hand der Figuren von Abb. 28 können wir zusammenfassend sagen:

Rückt der Gegenstand aus der Entfernung  $g = \infty$  immer näher an den Hohlspiegel heran, so rückt sein reelles Bild, von der Stelle  $b = f$  beginnend, immer weiter vom Spiegel ab. Dabei wächst der Abbildungsmaßstab zunächst von 0 bis  $+1$ , wenn der Gegenstand sich dem Spiegel von  $g = \infty$  bis  $g = r = 2f$  nähert, und dann weiter bis  $+\infty$ , wenn der Gegenstand bis in die Brennebene ( $g = f$ ) rückt, wobei  $b = \infty$  wird. Sobald der Gegenstand die Brennebene überschreitet, springt das reelle und

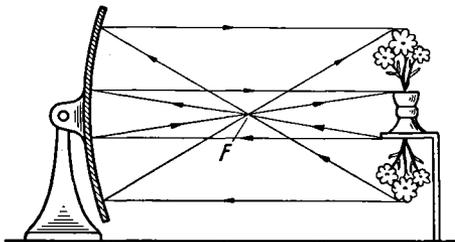


Abb. 29. Demonstrationsversuch zum Nachweis des von einem Hohlspiegel erzeugten reellen Bildes

bisher relativ zum Gegenstand umgekehrte Bild von  $+\infty$  nach  $-\infty$  und wird virtuell und aufrecht. Bei weiterer Annäherung des Gegenstandes an den Spiegel nähert sich auch von der andern Seite das virtuelle Bild dem Spiegel. Dabei ändert sich der Abbildungsmaßstab von  $-\infty$  bis  $-1$ , wenn der Gegenstand bis unmittelbar an den Spiegel herangeführt wird.

Einen Überblick über die gegenseitige Lage von Gegenstand und Bild beim Hohlspiegel gibt die Tabelle auf S. 21.

Experimentell lassen sich diese Verhältnisse einfach verfolgen, indem man als Gegenstand eine Glühlampe vor dem Hohlspiegel verschiebt und das Bild auf einer Mattscheibe auffängt. Ein Demonstrationsversuch ist in Abb. 29 wiedergegeben. Im Abstand der doppelten Brennweite befindet sich vor einem Hohlspiegel eine leere Blumenvase und unterhalb derselben ist verdeckt für den in den Spiegel blickenden

Beobachter ein Blumenstrauß in umgekehrter Lage aufgehängt. Von diesem entwirft der Spiegel über der Vase ein reelles Bild in natürlicher Größe, so daß der Betrachter den Eindruck gewinnt, als ob sich der Blumenstrauß in der Vase befände. Natürlich wird die Täuschung sofort bemerkt, wenn das Auge so weit verschoben wird, daß die Verbindungslinie Auge-Bild nicht mehr den Spiegel trifft.

Gegenstandsort	Bildort	Bildart
zwischen Unendlich u. Spiegel- mittelpunkt	zwischen Brennebene und Spiegelmittelpunkt	reell, umgekehrt, verkleinert; $0 \leq v \leq +1$
im Spiegelmittelpunkt	im Spiegelmittelpunkt	reell, umgekehrt, gleich groß; $v = +1$
zwischen Spiegelmittelpunkt u. Brennebene	zwischen Spiegelmittelpunkt u. Unendlich	reell, umgekehrt, vergrößert; $1 \leq v \leq \infty$
zwischen Brennebene u. Scheitel- punkt	zwischen minus Unendlich und Scheitelpunkt	virtuell, aufrecht, vergrößert; $-\infty \leq v \leq -1.$

Wir haben bisher die Abbildung eines Gegenstandes durch einen Hohlspiegel nur längs der Hauptachse mittels paraxialer Strahlenbündel vorgenommen. Wir können aber von jedem Punkt des Gegenstandes durch den Krümmungsmittelpunkt  $M$  des Spiegels eine Nebenachse zeichnen, z. B.  $G_1S_1, G_2S_2, G'_1S'_1, G'_2S'_2$  in Abb. 30, und längs

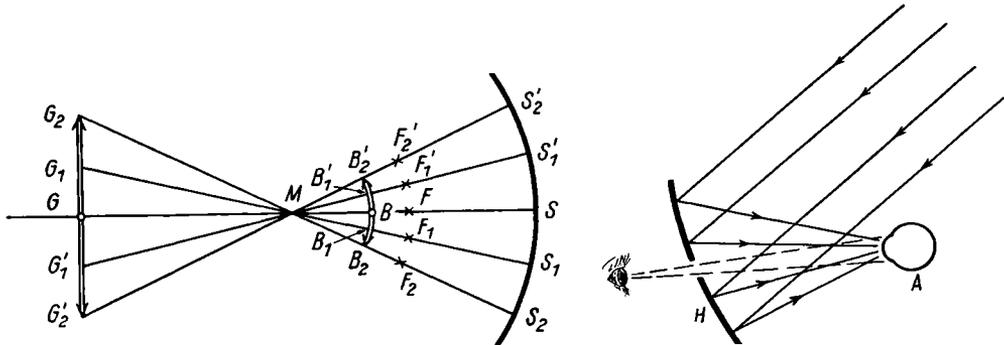


Abb. 30. Einfluß der sphärischen Aberration bei der Abbildung durch einen Hohlspiegel

Abb. 31. Der Hohlspiegel als Augenspiegel

jeder Nebenachse den betreffenden Gegenstandspunkt durch ein zu dieser Achse paraxiales Strahlenbündel abbilden. Wir erhalten dann eine Reihe von Bildpunkten  $B_1, B_2, B'_1, B'_2$ , die, wie man erkennt, keineswegs auf einer Geraden senkrecht zur Hauptachse, sondern (angenähert) auf einem Kreisbogen liegen: Das Bild  $B_2BB'_2$  des zur Hauptachse senkrechten geraden Gegenstandes  $G_2GG'_2$  ist gekrümmt. Je weiter entfernt sich ein Gegenstandspunkt seitlich von der Hauptachse befindet, um so mehr rückt sein Bildpunkt vom Spiegel aus der Bildebene heraus, welche durch den Bildpunkt auf der Hauptachse bestimmt ist. Entwirft man daher das reelle Bild auf einer Mattscheibe, um es sichtbar zu machen, so wird stets nur der mittlere Teil des Bildes scharf abgebildet, während die seitlichen Teile verschwommen erscheinen. Statt eines seitlichen Bildpunktes entsteht auf der Mattscheibe ein kleiner Zerstreungskreis, da sich die Strahlen des abbildenden Bündels erst hinter der Mattscheibe in einem Punkt vereinigen. Hier zeigt sich im Gegensatz zu der sphärischen Aberration (S. 14),

die bei Abbildung eines punktförmigen Gegenstands mit weit geöffneten Bündeln auftritt, eine andere Art von „Abbildungsfehler“, eine Bildwölbung bei Abbildung eines ebenen ausgedehnten Gegenstands mit paraxialen Strahlen (vgl. Nr. 7 u. 10).

Außer der Verwendung in Beleuchtungsanlagen zur Erzeugung eines parallelen oder eines konvergenten Lichtbüschels (z. B. bei einem Mikroskopspiegel) hat der Hohlspiegel als abbildendes System eine wichtige Anwendung in den Spiegelteleskopen gefunden, auf die wir in Abschnitt 12 näher eingehen. In der Augenheilkunde besteht der

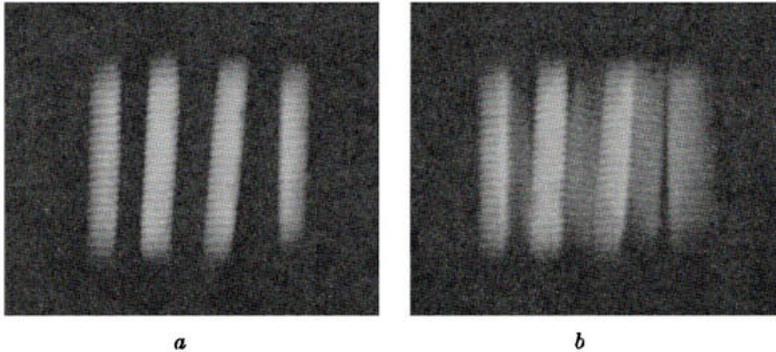


Abb. 32. Abbildung der Wendeln einer Projektionsglühlampe (a) in die Lücken zwischen den einzelnen Wendeln (b)

zuerst von H. v. Helmholtz (1851) angegebene Augenspiegel (in den späteren Ausführungen) aus einem Hohlspiegel  $H$  von etwa 10 cm Durchmesser und etwa 25 cm Brennweite, der in seinem Scheitelpunkt eine Öffnung von etwa 1 cm Durchmesser hat (Abb. 31). Indem der Arzt durch diese Öffnung nach dem zu untersuchenden Auge  $A$  blickt, kann er dieses durch geeignete Haltung des Spiegels gleichzeitig intensiv be-

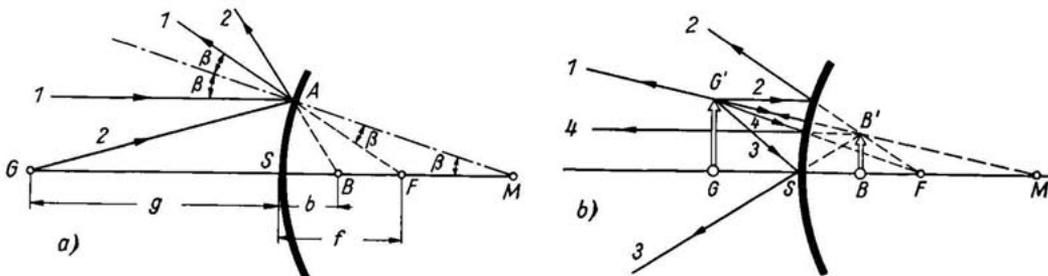


Abb. 33. Reflexion am sphärischen Wölbspiegel  
a) Zur Definition von Bild- und Brennpunkt; b) Bildkonstruktion

leuchten, ohne selbst geblendet zu werden. Auf diese Weise ist es möglich, innere Teile des Auges, namentlich die hintere Wand und den das Auge ausfüllenden Glaskörper, deutlich zu sehen und zu untersuchen. — Bei modernen mit einer Glühlampe als Lichtquelle ausgestatteten Projektionsapparaten benutzt man einen Hohlspiegel, um die einzelnen Wendeln der Glühlampe in die dazwischen liegenden Lücken abzubilden (Abb. 32), wodurch die Helligkeit beträchtlich gesteigert wird.

Zum Schluß gehen wir noch kurz auf die sphärischen **Konvex-** oder **Wölbspiegel** ein, bei denen die nach außen gewölbte Fläche als Spiegel dient. Ein auf einen solchen Spiegel fallender achsenparalleler Strahl (1 in Abb. 33a) wird so reflektiert, als ob er

von einem hinter dem Spiegel liegenden, also virtuellen Brennpunkt  $F$  herkäme. Der Abstand des Brennpunktes vom Scheitelpunkt  $S$  des Spiegels heißt wieder die Brennweite  $f$ , wobei wir aber beachten müssen, daß diese hinter dem Spiegel liegt und somit negativ anzusetzen ist. Aus der Gleichschenkeligkeit des Dreiecks  $MFA$  folgt wieder, daß  $f = \frac{r}{2}$  ist. Ein von einem Gegenstandspunkt  $G$  auf der Spiegelachse ausgehender Strahl (2 in Abb. 33a) wird so reflektiert, als ob er von einem ebenfalls hinter dem Spiegel zwischen Brennpunkt und Scheitelpunkt liegenden virtuellen Bildpunkt  $B$  herkomme. Auch die Bildweite  $b$  hat einen negativen Wert. In Abb. 33b ist die Bildkonstruktion für einen Gegenstand  $GG'$  wiedergegeben. Von  $G'$  aus ist erstens ein Strahl 1 nach dem Spiegelmittelpunkt  $M$  hin gezeichnet, der in sich selbst reflektiert wird, zweitens ein zur Achse parallel verlaufender Strahl 2, der nach Reflexion vom Brennpunkt  $F$  herzukommen scheint, drittens ein nach dem Scheitelpunkt  $S$  gerichteter Strahl 3, der mit der Achse vor und nach der Reflexion gleiche Winkel bildet, und viertens ein nach dem Brennpunkt  $F$  gerichteter Strahl, der parallel zur Achse reflektiert wird. Die rückseitigen Verlängerungen dieser vier Strahlen schneiden sich im Bildpunkt  $B'$ ; natürlich sind nur zwei von diesen Strahlen notwendig zur Konstruktion. Wir erhalten also von dem Gegenstand ein aufrechtes, verkleinertes, virtuelles Bild. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $SBB'$  und  $SGG'$  folgt für den Abbildungsmaßstab  $v$  und seinen Absolutbetrag  $|v|$ :

$$(5) \quad |v| = \frac{BB'}{GG'} = \frac{|b|}{g} \quad ; \quad v = \frac{b}{g} = -\frac{|b|}{g}.$$

Dabei bedeutet das negative Vorzeichen, daß jetzt das Bild die gleiche Richtung wie der Gegenstand hat (d. h.  $v < 0$ ). Aus der Ähnlichkeit der beiden anderen Dreiecke  $MBB'$  und  $MGG'$  in Abb. 33b folgt ferner:

$$(5a) \quad |v| = \frac{|b|}{g} = \frac{MB}{MG} = \frac{2|f| - |b|}{2|f| + g}.$$

Aus den Gl. (5) und (5a) findet man als Abbildungsgleichung für den Wölbspiegel wieder die alte Beziehung (1):

$$(1) \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}.$$

Würde man — statt  $f, g, b$  als algebraische Größen zu betrachten — unter  $f, g, b$  die Absolutbeträge verstehen, so erhielte man eine andere Abbildungsgleichung, nämlich:

$$(5b) \quad -\frac{1}{f} = \frac{1}{g} - \frac{1}{b},$$

die sich zuweilen in elementaren Lehrbüchern findet; der Leser muß also stets prüfen, was gemeint ist. Unsere Darstellung hat den Vorzug, daß in allen Fällen Gl. (1) erhalten bleibt.

Setzt man nach (1a) auch hier

$$g = x + f, \quad b = x' + f,$$

so gilt natürlich auch die Newtonsche Form der Abbildungsgleichung unverändert:

$$(5c) \quad xx' = f^2.$$

Den durch die Abbildungsgleichungen (1) und (5c) gegebenen funktionalen Zusammenhang zwischen  $g, b$  bzw.  $x, x'$  und  $f$  stellt Abb. 34 dar, die in vollkommener Analogie zur Abb. 24 auf S. 17 steht. Man erkennt, daß nur der ausgezogene Teil der Hyperbel für die Abbildungsverhältnisse beim Konvexspiegel in Frage kommt.

Bewegt sich beim Konvexspiegel der Gegenstand vom Unendlichen her auf den Spiegel zu, so wandert sein virtuelles Bild vom Brennpunkt nach dem Spiegel, wobei sich der Abbildungsmaßstab von 0 bis  $-1$  ändert. Ein Konvexspiegel liefert also stets nur verkleinerte virtuelle Bilder.

Sphärische Konvexspiegel dienen oft dazu, dem Fahrer eines Kraftwagens ein verkleinertes Bild der Vorgänge hinter seinem Fahrzeug zu liefern.

Sowohl für den Konkav- als auch Konvexspiegel gilt übrigens, daß bei einer Bewegung des Gegenstandes auf den Spiegel zu oder von ihm fort das Bild sich stets in der entgegengesetzten Richtung verschiebt. Daher spricht man von einer rückläufigen Abbildung.

Ähnlich wie bei den Hohlspiegeln der parabolisch gekrümmte Spiegel eine ausgezeichnete Rolle spielt, kommt bei den Wölbspiegeln dem hyperbolisch gekrümmten Spiegel eine gewisse Bedeutung

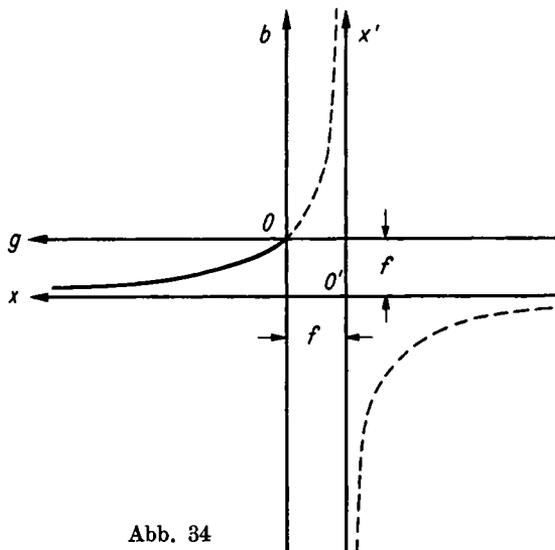


Abb. 34

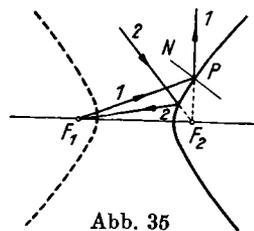


Abb. 35

Abb. 34. Graphische Darstellung der Abbildungsgleichung beim Konvexspiegel

Abb. 35. Reflexion am hyperbolischen Konvexspiegel

zu. Bekanntlich wird der Winkel zwischen zwei von einem Hyperbelpunkt  $P$  nach den beiden Brennpunkten  $F_1$  und  $F_2$  gezogenen Brennstrahlen von der Normalen  $N$  in diesem Punkt  $P$  halbiert (Abb. 35). Es wird daher jeder vom Brennpunkt  $F_1$  nach dem gegenüber liegenden Hyperbelast gerichtete Strahl 1 von diesem so reflektiert, als ob er von dem andern Brennpunkt  $F_2$  herkomme, und umgekehrt wird jeder nach dem Brennpunkt  $F_2$  gerichtete Strahl 2 zum Brennpunkt  $F_1$  gespiegelt. Man kann daher mit einem hyperbolischen Konvexspiegel, dessen Fläche man sich durch Rotation eines Hyperbelastes um die Hyperbelachse entstanden zu denken hat, die Konvergenz eines auf den Spiegel fallenden Strahlenbüschels verkleinern, ohne daß dabei die Homozentrität des Büschels gestört wird, d. h. sämtliche Strahlen gehen nach der Spiegelung wieder durch einen Punkt. Über die Verwendung hyperbolischer Konvexspiegel beim Spiegelfernrohr siehe Nr. 12.

## 5. Die Brechung des Lichtes; Totalreflexion

Fällt Licht auf die Trennungsfäche zweier durchsichtiger Körper (z. B. aus Luft in Glas oder Wasser), so wird nur ein Teil in das erste Medium zurückgeworfen, während der übrige Teil in das zweite Medium eindringt; dabei erleidet bei schrägem Auftreffen auf die Grenzflächen der Strahl eine Richtungsänderung beim Übertritt in das andere Medium, die sogenannte **Brechung**.

Ähnlich wie bei der Reflexion kann man auch hier zwischen einer diffusen und einer regulären Brechung unterscheiden, je nachdem die Trennungsfäche rauh oder glatt ist. Bei der diffusen Brechung wird die in das zweite Medium eindringende Lichtenergie mehr oder weniger nach allen Richtungen gebrochen, während bei der regulären

Brechung die Richtung des eindringenden Lichtstrahles eine ganz bestimmte ist, die nur von der Richtung des einfallenden Strahles und der Natur der beiden Medien abhängt.

Von der Tatsache der Brechung beim Eintritt von Licht aus Luft in Wasser kann man sich durch einfache Versuche überzeugen. Legt man z. B. auf den Boden eines leeren Gefäßes mit undurchsichtigen Wänden eine Münze und blickt in einer solchen Richtung schräg in das Gefäß, daß die Münze gerade durch die Seitenwand verdeckt

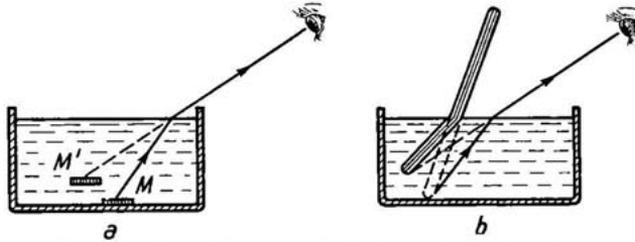


Abb. 36. Versuche zum Nachweis der Lichtbrechung

- a) scheinbare Hebung einer im Wasser liegenden Münze  
b) scheinbare Knickung eines schräg ins Wasser getauchten Stabes

wird, so wird sie sofort sichtbar, wenn man Wasser in das Gefäß gießt (Abb. 36 a): die von der Münze kommenden Lichtstrahlen werden beim Austritt aus dem Wasser gebrochen und gelangen dadurch in das Auge; dieses sieht die Münze  $M$  in der Lage  $M'$ , d. h. in der Verlängerung der ins Auge gelangenden Strahlen, also etwas gehoben (vgl. S. 53). Aus demselben Grunde erscheint ein schräg ins Wasser getauchter Stab an der Eintrittsstelle geknickt (Abb. 36 b).

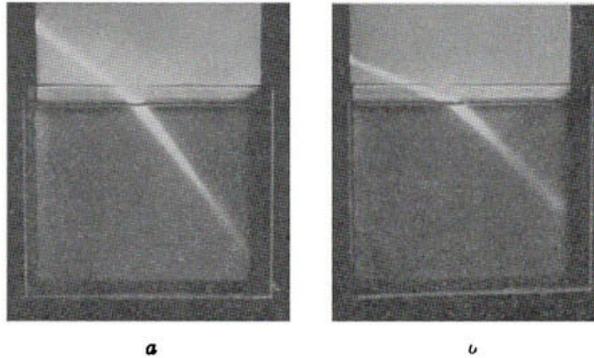


Abb. 37. Brechung eines Lichtstrahles beim Übergang von Luft in Wasser  
a) Einfallswinkel =  $52^\circ$ ; b) Einfallswinkel =  $67^\circ$

Um die Gesetzmäßigkeit der Lichtbrechung zu finden, lassen wir ein schmales Lichtbündel schräg auf eine Wasseroberfläche im Inneren eines schmalen Glastroges fallen und verfolgen die Richtung der Lichtstrahlen in Luft und Wasser in der Weise, daß wir vertikal in das Wasser eine Mattscheibe stellen, auf der das Licht seinen Weg als helle Linie aufzeichnet (Abb. 37). Statt dessen kann man auch nach J. Tyndall Luft und Wasser durch Zusatz von Rauch bzw. Milch etwas trüben und so den Weg des Lichtes sichtbar machen. Man beobachtet, daß die Richtung des Strahles beim Eintritt in das Wasser eine Knickung erfährt und (in dem betrachteten Falle) zum Einfallslot hingebrochen wird, und zwar werden die Strahlen um so mehr von ihrer ursprünglichen

Richtung abgelenkt, je schräger sie auf die Grenzfläche fallen (Abb. 37b). Gleichzeitig liegen einfallender Strahl, Einfallslot und gebrochener Strahl in einer Ebene. Bezeichnen wir den Winkel des einfallenden Strahles mit dem Lot als den Einfallswinkel  $\alpha$ , und den Winkel, den der gebrochene Strahl mit dem Lot bildet, als Brechungswinkel  $\beta$ , so gilt das von W. Snellius (1620) aufgefundene Brechungsgesetz: Der Sinus des Einfallswinkels steht zum Sinus des Brechungswinkels in einem konstanten Verhältnis, das nur von der Natur der beiden Medien abhängt.

Es gilt also die Gleichung:

$$(6) \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_{21} = \text{Const.}$$

Die Konstante  $n_{21}$  heißt die **Brechzahl** (auch Brechungsindex, Brechungsexponent, Brechungsquotient) des Mediums 2 in bezug auf das Medium 1. Beim Übergang von Luft in Wasser ist  $n_{21}$  annähernd  $\frac{4}{3}$ , beim Übergang von Luft nach gewöhnlichem

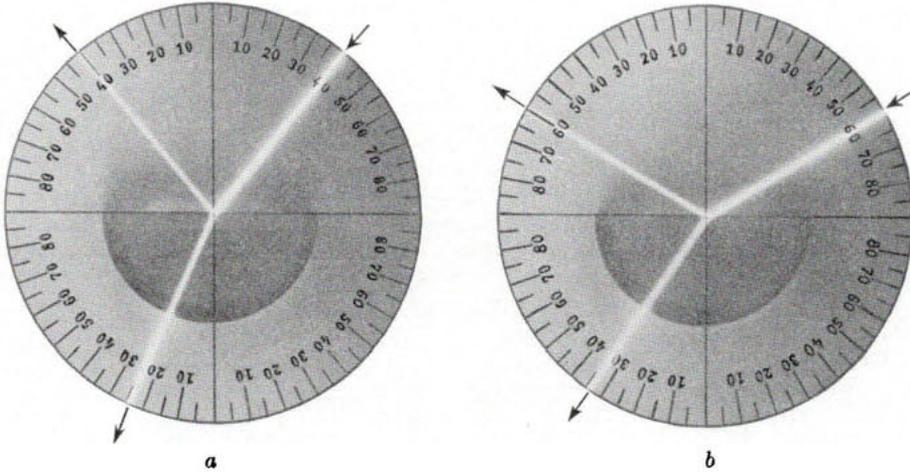


Abb. 38. Brechung und Reflexion eines Lichtstrahles beim Übergang von Luft nach Glas

- a) Einfallswinkel  $\alpha = 40^\circ$ ; Brechungswinkel  $\beta = 24,5^\circ$   
 b) Einfallswinkel  $\alpha = 60^\circ$ ; Brechungswinkel  $\beta = 34^\circ$

Spiegelglas hat  $n_{21}$  etwa den Wert  $\frac{3}{2}$ . Abb. 38 zeigt die Brechung des Lichtes beim schrägen Eintritt in ein Stück Glas, und zwar für die beiden Einfallswinkel  $40^\circ$  und  $60^\circ$ ; als zugehörige Brechungswinkel entnimmt man aus den Aufnahmen  $24,5^\circ$  und  $34^\circ$ : dies liefert nach dem Brechungsgesetz (6) für  $n_{21}$  den Wert 1,55. Damit der Lichtstrahl beim Austritt aus dem Glas nach Luft keine erneute Brechung erfährt, hat das Glasstück halbkreisförmige Gestalt. Alle Strahlen befinden sich in der gemeinsamen „Einfallsebene“.

Wie bereits in Band I in der allgemeinen Wellenlehre gezeigt, ist die Ursache für die Brechung einer Welle die Änderung ihrer Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Der Brechungsquotient stellt, wie wir dort gezeigt haben, direkt das Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in den beiden Medien dar. Bezeichnen wir diese mit  $c_1$  und  $c_2$ , so können wir schreiben:

$$(7) \quad n_{21} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Da es nach dem Satze von der Umkehrbarkeit des Lichtweges gleichgültig ist, ob der Lichtstrahl vom Medium 1 nach 2 oder umgekehrt von 2 nach 1 läuft, können wir auch schreiben

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{c_2}{c_1} = n_{12},$$

wobei jetzt  $\beta$  den Einfallswinkel im Medium 2,  $\alpha$  den Brechungswinkel im Medium 1 und  $n_{12}$  den Brechungsquotienten des Mediums 1 in bezug auf 2 bedeuten. (Natürlich wird bei der Strahlungsumkehr der Strahl vom Einfallslot weggebrochen, wenn er vorher aufs Lot zugebrochen wurde.) Es gilt also

$$n_{12} = \frac{1}{n_{21}}.$$

Man nennt  $n_{12}$  bzw.  $n_{21}$  genauer die relativen Brechungsquotienten der beiden Stoffe im Gegensatz zu dem absoluten Brechungsquotienten eines Stoffes, der sich auf den Eintritt des Lichtes aus dem Vakuum in den betreffenden Stoff bezieht. In diesem Falle gilt:

$$\frac{c_0}{c_1} = n_{10} = n_1 \quad \text{und} \quad \frac{c_0}{c_2} = n_{20} = n_2;$$

da man das Vakuum als das normale Bezugsmedium betrachtet, läßt man den Index „0“ fort und schreibt die absoluten Brechungsquotienten nur mit einem Index. Aus den beiden letzten Gleichungen folgt durch Division und Berücksichtigung von (7):

$$(8) \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21};$$

d. h. der relative Brechungsquotient  $n_{21}$  zweier Stoffe 1 und 2 ist gleich dem Quotienten der absoluten Brechungsquotienten beider Stoffe. Hat man, wie das meistens der Fall ist, den relativen Brechungsquotienten eines Mediums gegen Luft gemessen — er sei  $n_{xL}$  —, so kann man nach Gl. (8) seinen absoluten Brechungsquotienten  $n_x$  ermitteln, wenn man den absoluten Brechungsquotienten der Luft  $n_L$  kennt. Es ist dann

$$n_x = n_{xL} \cdot n_L.$$

Nun ist, wie wir auf S. 40 experimentell noch zeigen werden, der absolute Brechungsquotient der Luft  $n_L = 1,000292$ , so daß die gegen Luft gemessenen Werte der relativen Brechzahlen nur wenig von den absoluten abweichen.

In der folgenden Tabelle sind die Brechungsquotienten einer Anzahl Stoffe zusammengestellt. Sie gelten für das Licht der gelben Natriumlinie (D-Linie). Diese Angabe ist erforderlich, da die Brechzahl, wie wir in Nr. 20 noch zeigen werden, von der Farbe (Schwingungszahl) des Lichtes abhängt.

Tab. 1. Absolute Brechungsquotienten einiger Stoffe für Na-Licht bei 20° C

<b>Feste Stoffe:</b>		<b>Flüssigkeiten:</b>	
Eis . . . . .	1,31	Wasser . . . . .	1,3330
Lithiumfluorid . . . . .	1,3915	Äthylalkohol . . . . .	1,3618
Flußspat . . . . .	1,4338	Leinöl . . . . .	1,486
Sylvin . . . . .	1,4903	Benzol . . . . .	1,5012
Steinsalz . . . . .	1,5443	Zedernöl . . . . .	1,505
Casiumjodid . . . . .	1,7899	Kassiaöl . . . . .	1,605
<b>Optische Gläser:</b>		Schwefelkohlenstoff . . . . .	1,6276
Borkron BK 1 . . . . .	1,5100	Monobromnaphthalin . . . . .	1,6582
Schwerkron SK 1 . . . . .	1,6102	Methylenjodid . . . . .	1,7417
Flint F 3 . . . . .	1,6128	<b>Gase: (0° C, Atmosphärendruck)</b>	
Schwerflint SF 4 . . . . .	1,7550	Sauerstoff . . . . .	1,000271
schwerstes Flint . . . . .	1,9	Stickstoff . . . . .	1,000298
Quarzglas . . . . .	1,4588	Kohlendioxyd . . . . .	1,00449
Plexiglas . . . . .	1,50.. 1,52	Stickoxydul . . . . .	1,000516
Diamant . . . . .	2,4173	Luft . . . . .	1,000292

Man nennt einen Stoff optisch dichter (optisch dünner) als einen anderen, wenn sein absoluter Brechungsquotient größer (kleiner) ist als der des andern; die optische Dichte ist jedoch nicht mit der (stofflichen) Dichte zu verwechseln.

Zum Beispiel hat Wasser trotz seiner größeren stofflichen Dichte eine kleinere Brechzahl als das spezifisch leichtere Benzol. Bei ein und demselben Stoff wächst allerdings die Brechzahl mit der Dichte des Stoffes; wird diese also z. B. durch Druck erhöht, so steigt auch die Brechzahl an.

Die Gl. (6) oder (7), die das Brechungsgesetz aussprechen, kann man unter Berücksichtigung von (8) in der Form schreiben:

$$(9) \quad n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta = \text{Const.}$$

Da man wegen der Umkehrbarkeit des Lichtweges auch den Winkel  $\alpha$  als Brechungswinkel bezeichnen kann, läßt sich das Brechungsgesetz in folgender Form aussprechen: **Das Produkt aus Brechungsquotient und Sinus des Brechungswinkels ist bei der Brechung unveränderlich.**

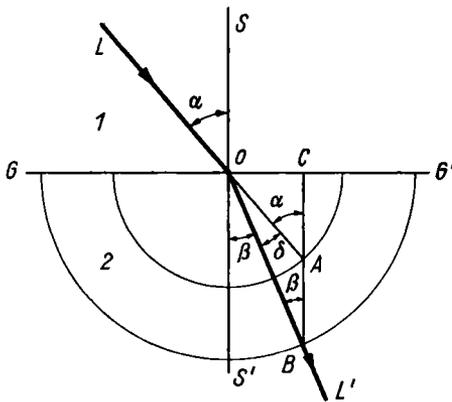


Abb. 39. Geometrische Ermittlung des gebrochenen Strahles

Abb. 40. Diagramm zur Ermittlung des gebrochenen Strahles beim Übergang von Luft nach Stoffen mit den Brechzahlen zwischen 1 und 2

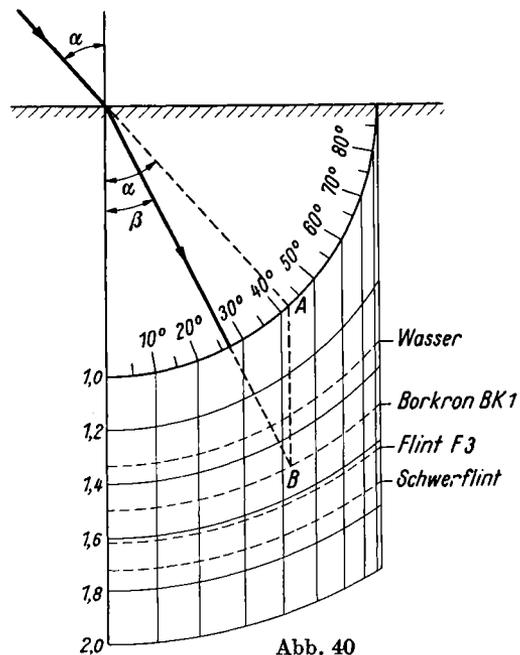


Abb. 40

Das Produkt  $n \sin \alpha$  heißt nach E. Abbe (1873) die **numerische Apertur** des Strahles gegen das Einfallslot. Das Brechungsgesetz sagt also aus, daß die **numerische Apertur bei der Brechung eines Lichtstrahls unverändert bleibt**. Auf diese Weise ist das Brechungsgesetz in Form einer sog. optischen Invariante dargestellt, indem der Wert der numerischen Apertur  $n \sin \alpha$  bei beliebig vielen aufeinanderfolgenden Brechungen unverändert bleibt.

Rein formal schließt Gl. (9), d. h. das Brechungsgesetz, auch das Reflexionsgesetz in sich; man hat nur  $n_2 = -n_1$  zu setzen und erhält dann das Reflexionsgesetz in der Form  $\beta = -\alpha$ ; das Minuszeichen rührt davon her, daß  $\beta$  im ersten Medium auf der anderen Seite des Lotes liegt wie  $\alpha$ ; diese Bemerkung gilt für alle Reflexionsprobleme, worauf wir später noch zurückkommen werden.

Wir zeigen zunächst, wie man die Richtung eines gebrochenen Strahles zu einem vorgegebenen einfallenden Strahl geometrisch ermitteln kann. In Abb. 39 falle im Punkte  $O$  ein Lichtstrahl  $LO$  auf die ebene Grenzfläche  $GG'$  zwischen zwei Medien 1 und 2 auf. Wir errichten in  $O$  das Einfallslot  $SS'$  und schlagen um  $O$  im Medium 2 zwei Kreise, deren Radienverhältnis gleich dem relativen Brechungsquotienten  $n_{2,1}$  des Mediums 2 gegen Medium 1 ist (in der Fig. ist 2 als das optisch dichtere Medium angenommen). Die Verlängerung des einfallenden Strahls schneidet den kleineren Kreis in  $A$ . Von hier fallen wir das Lot  $AC$  auf die Grenzfläche  $GG'$  und verlängern dasselbe rück-

wärts bis zum Schnittpunkt  $B$  mit dem größeren Kreise. Dann gibt die Verbindung  $OB$  die Richtung des gebrochenen Strahles im Medium 2 wieder. Es ist nämlich

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin CAO}{\sin CBO} = \frac{CO}{AO} : \frac{CO}{BO} = \frac{BO}{AO} = n_{2,1},$$

was zu beweisen war. Ist umgekehrt der aus dem (dichteren) Medium 2 kommende Strahl  $L'O$  gegeben, so fällt man von  $B$  das Lot auf die Grenzfläche  $GG'$ , das den kleineren Kreis in  $A$  schneidet. Die Verlängerung von  $AO$  über  $O$  hinaus liefert dann den in das (dünnere) Medium gebrochenen Strahl.

Abb. 40 gibt ein auf Grund dieser Konstruktion gezeichnetes Diagramm wieder, aus dem man sofort für den Übergang von Luft zu einem Stoff mit den Brechzahlen 1 bis 2 oder umgekehrt den gebrochenen Strahl finden kann.

Nach Abb. 39 ist die Ablenkung  $\delta$ , die ein Strahl durch die Brechung erfährt, durch

$$(10) \quad \delta = \alpha - \beta$$

gegeben. Aus dem Brechungsgesetz (6) folgt  $\sin \alpha = n_{21} \sin \beta$  und weiter

$$\sin \alpha - \sin \beta = (n_{21} - 1) \sin \beta.$$

Nach dem Additionstheorem der trigonometrischen Funktionen ist diese Gleichung identisch mit der folgenden:

$$2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = (n_{21} - 1) \sin \beta,$$

woraus sich ergibt:

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{n_{21} - 1}{2} \frac{\sin \beta}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}.$$

Da  $\beta$  mit zunehmendem  $\alpha$  wächst, ist die Ablenkung  $\delta$  des Lichtes um so größer, je größer der Einfallswinkel  $\alpha$  ist. —

Beim Übergang von einem optisch dünneren zu einem optisch dichteren Medium wird der Lichtstrahl stets zum Einfallslot hin gebrochen, da der relative Brechungsquotient  $n_{2,1}$  dann größer als 1 ist; umgekehrt ist es, wenn Licht aus einem optisch dichteren Medium 1, z. B. Wasser oder Glas, in ein optisch dünneres Medium 2, z. B. Luft, übertritt. Dann findet eine Brechung vom Einfallslot weg statt (Strahl 1 und 2 in Abb. 41). Der Brechungswinkel ist nach dem Brechungsgesetz (6) gegeben durch:

$$\sin \beta = n_{12} \sin \alpha,$$

wobei jetzt  $n_{12} = \frac{n_1}{n_2} > 1$ , d. h.  $n_1 > n_2$  ist. Nun ist aber der größte Wert, den  $\sin \beta$  überhaupt annehmen kann, gleich 1, wenn nämlich  $\beta$  gleich  $90^\circ$  wird. In diesem Falle tritt der in das dünnere Medium gebrochene Strahl streifend zur Grenzfläche in dieses ein (Strahl 3 in Abb. 41). Der zugehörige Einfallswinkel  $\alpha_g$  im dichteren Medium ist dann durch die Gleichung

$$(11) \quad \sin \alpha_g = \frac{1}{n_{12}} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$$

gegeben. Einfallswinkeln  $\alpha$ , die größer als der durch Gl. (11) definierte **Grenzwinkel**  $\alpha_g$  sind, entspricht kein reeller Brechungswinkel  $\beta$  mehr; daher kann ein Übertritt des Lichtes in das dünnere Medium nicht mehr erfolgen. Das Licht wird vielmehr an der Grenzfläche regulär reflektiert, und zwar mit seiner vollen Intensität (Strahl 4 in Abb. 41). Man bezeichnet daher diesen zuerst von J. Kepler (1611) beobachteten Vorgang als **Totalreflexion**. Wir können also sagen:

**Totalreflexion tritt stets dann ein, wenn Licht aus einem optisch dichteren Medium auf die Grenzfläche eines optisch dünneren fällt und der Einfallswinkel größer als der durch die Gleichung  $\sin \alpha_g = n_{1,2}$  bestimmte Grenzwinkel ist.**

Wir müssen uns hier mit dieser empirischen Feststellung begnügen. Auf die feineren Vorgänge bei der Totalreflexion kommen wir in Kap. V, Nr. 43 zurück.

Beim Übergang von Wasser nach Luft ist  $\sin \alpha_g = \frac{3}{4}$ , d. h.  $\alpha = 48^\circ 35'$ . Abb. 42 zeigt für diesen Fall den in der vorangehenden Abb. 41 schematisch dargestellten Strahlenverlauf experimentell: Einige Zentimeter unter der Wasseroberfläche befindet sich eine (in der Abb. verdeckte) Lichtquelle, die durch mehrere Schlitzblenden einige scharf begrenzte Strahlenbündel schräg gegen die Wasseroberfläche strahlt. Von diesen werden nur die, deren Einfallswinkel kleiner als der Grenzwinkel von  $48^\circ 35'$  ist, in den Luftraum hineingebrochen, während die anderen in das Wasser zurück totalreflektiert werden. Man sieht in der Abb. 42 auch deutlich die weit größere Intensität der totalreflektierten Strahlen gegenüber den normalreflektierten. — Abb. 43

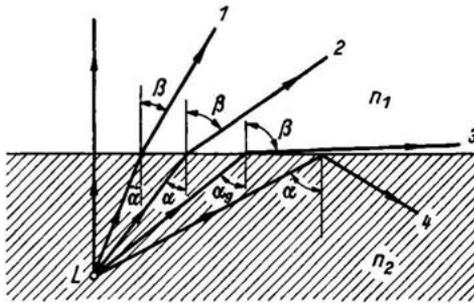


Abb. 41

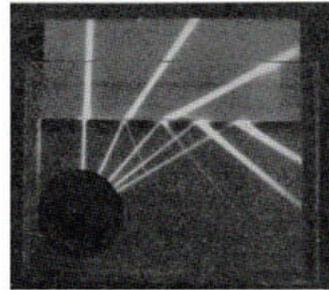


Abb. 42

Abb. 41. Brechung und Totalreflexion beim Übergang des Lichtes von einem dichteren in ein dünneres Medium

Abb. 42. Versuchsanordnung zum Nachweis der Brechung und Totalreflexion an der Grenzfläche Wasser—Luft. Die Lichtquelle befindet sich links unten im Wasser in einer mit Schlitzblenden versehenen Dose

zeigt den Übergang des Lichtes von Glas nach Luft. Bei den Einfallswinkeln  $30^\circ$  und  $40^\circ$  findet sowohl Brechung als auch Reflexion statt, bei den Einfallswinkeln  $50^\circ$  und  $60^\circ$  haben wir bereits totale Reflexion. Der Grenzwinkel liegt bei dem benutzten Glase mit  $n = 1,55$  bei  $40,5^\circ$ . — Blickt man schräg von unten gegen eine Wasseroberfläche unter einem Einfallswinkel, der größer ist als der Grenzwinkel der Totalreflexion, so kann man nicht durch die Wasseroberfläche hindurchsehen; diese erscheint vollkommen spiegelnd. Aus dem Wasser heraus kann man nur innerhalb des durch den Grenzwinkel der Totalreflexion gegebenen räumlichen Winkels sehen. Abb. 44a zeigt, wie ein unter Wasser befindliches Auge eines Schwimmers die Außenwelt erblickt: Er sieht sie — natürlich verzerrt! — innerhalb eines Kegels, dessen halber Öffnungswinkel gleich dem Grenzwinkel ist; außerhalb des Kegels sieht er nur totalreflektiertes Licht, z. B. den Grund des Bassins, in dem er sich befindet. — Ein leuchtender Punkt unmittelbar oberhalb der Wasserfläche strahlt in den Außenraum gleichmäßig nach allen Richtungen, im Wasser dagegen nur innerhalb eines Kegels, dessen halber Öffnungswinkel gleich dem Grenzwinkel ist (Abb. 44b).

Der in Abb. 44a dargestellte Fall, daß Licht von einem optisch dichteren Medium nach einem optisch dünneren strahlt, tritt regelmäßig beim Gebrauch eines Mikroskops

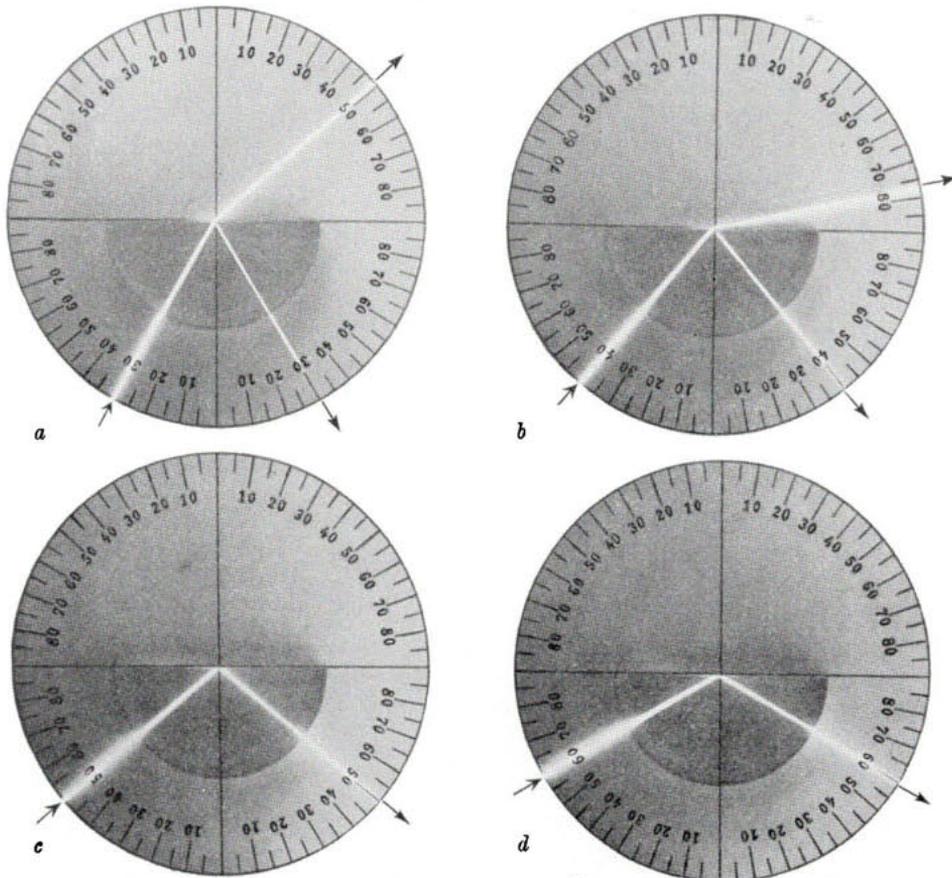


Abb. 43. Brechung und Reflexion des Lichtes beim Übergang von Glas nach Luft  
 a, b) Einfallswinkel  $30^\circ$  bzw.  $40^\circ$  kleiner als Grenzwinkel  $40,5^\circ$  ergibt Brechung und Reflexion;  
 c, d) Einfallswinkel  $50^\circ$  bzw.  $60^\circ$  größer als Grenzwinkel  $40,5^\circ$  ergibt Totalreflexion

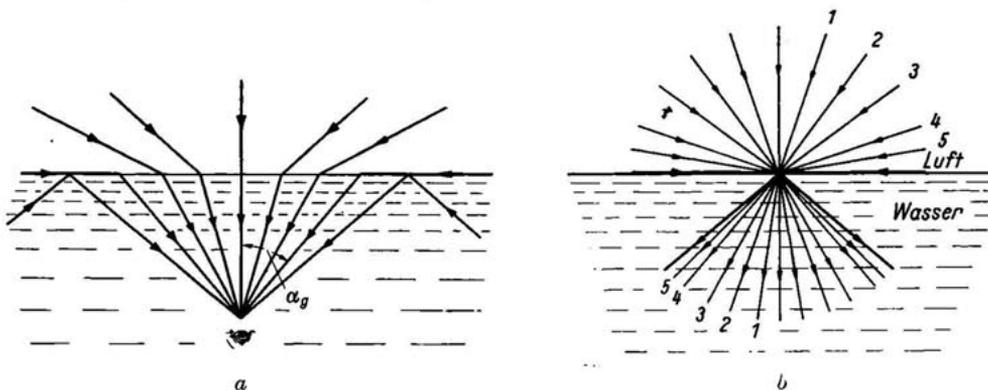


Abb. 44. Zur Brechung des Lichtes beim Übergang von Luft nach Wasser  
 a) Ein unter Wasser befindliches Auge sieht innerhalb eines durch den Grenzwinkel der Totalreflexion gegebenen Winkels ( $2 \cdot 48^\circ 30' = 97^\circ$ ) die ganze, natürlich verzerrte Außenwelt  
 b) Von einem leuchtenden Punkt unmittelbar oberhalb der Wasseroberfläche tritt das Licht in das Wasser nur innerhalb eines Kegels, dessen halber Öffnungswinkel gleich dem Grenzwinkel der Totalreflexion ( $48^\circ 30'$ ) ist

auf. Denn das von einem Punkte  $P$  des beleuchteten Präparates kommende Licht verläuft, bevor es in die Frontlinse des Mikroskop-Objektivs eintritt, zunächst durch das Deckglas mit dem absoluten Brechungsquotienten  $n = 1,515$  und dann durch eine Luftschicht. Dabei kann wegen der Totalreflexion an der Grenze zwischen Glas und Luft nur ein Strahlenbüschel austreten, dessen äußerster Strahl einen Winkel von  $41,5^\circ$  mit dem Einfallslot einschließt (Abb. 45a). Bringt man aber zwischen Deckglas und Frontlinse noch eine Wasserschicht, so vergrößert sich dieser Winkel auf  $61,5^\circ$  (Abb. 45b), während bei Verwendung von Öl, das den gleichen Brechungsquotienten

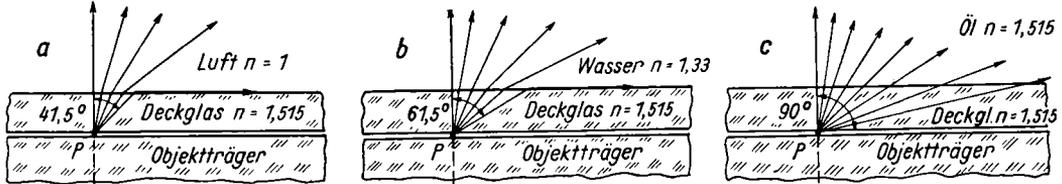


Abb. 45. Strahlenverlauf durch das Deckglas eines mikroskopischen Präparates

a) Deckglas grenzt an Luft, numerische Apertur = 1; b) Deckglas grenzt an Wasser, numerische Apertur = 1,33; c) Deckglas grenzt an Öl gleicher Brechzahl, numerische Apertur = 1,515

wie das Deckglas hat, der Winkel sogar  $90^\circ$  wird (Abb. 45c). Dies hat zur Folge, daß viel mehr Licht in das Objektiv gelangt, also die Helligkeit des Bildes erheblich gesteigert wird. (Über die weitergehende Bedeutung dieser sog. „Immersion“ s. Nr. 12.) In den in Abb. 45 dargestellten drei Fällen sind die numerischen Aperturen der äußersten noch austretenden Strahlen der Reihe nach

$$1,515 \sin 41,5^\circ = 1; \quad 1,515 \sin 61,5^\circ = 1,33 \text{ und } 1,515 \sin 90^\circ = 1,515,$$

d. h. gleich den absoluten Brechungsquotienten, der auf das Deckglas gebrachten Stoffe.

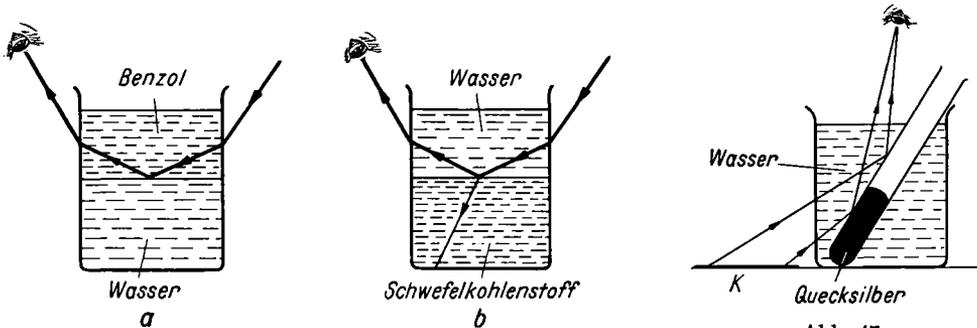


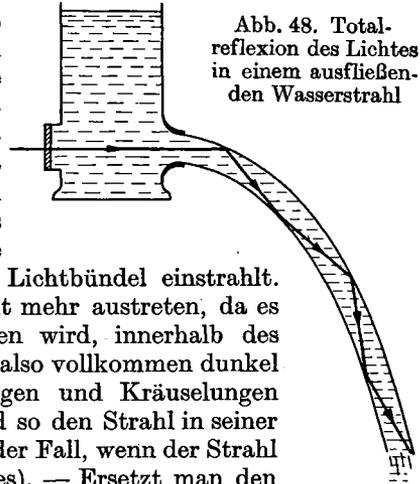
Abb. 46. Demonstration von totaler (a) und partieller (b) Reflexion

Abb. 47. Eine durch Totalreflexion an der Grenze Wasser-Luft gespiegelte weiße Fläche  $K$  erscheint heller als bei Spiegelung an reinem Quecksilber

Den quantitativen Unterschied zwischen totaler und partieller Reflexion zeigen folgende Versuche: In ein Becherglas gießt man etwas Wasser ( $n = 1,33$ ) und schichtet darüber Benzol ( $n = 1,496$ ), in ein zweites Becherglas bringt man Schwefelkohlenstoff ( $n = 1,618$ ) und darüber Wasser (Abb. 46). Blickt man schräg von oben auf die Trennungsfläche der beiden Flüssigkeiten, so sieht man im ersten Falle (Abb. 46a) infolge der totalen Reflexion eine in lebhaftem Silberglanz erscheinende Fläche, während im zweiten Falle (Abb. 46b) die Grenzfläche zwischen Schwefelkohlenstoff und Wasser nur einen matten Glanz zeigt, da die Strahlen an ihr nur partiell gespiegelt werden. — Stellt man ein zum Teil mit Quecksilber gefülltes Reagenzglas schräg in ein mit

Wasser gefülltes Becherglas (Abb. 47) und blickt von oben darauf, so sieht man bei richtiger Neigung des Reagenzglases das von einer weißen Kartonfläche  $K$  in das Glas fallende Licht an der Luft im Reagenzglas total-reflektiert. Diese Reflexion ist vollständiger als die an Quecksilber; man erkennt das deutlich daran, daß der mit Quecksilber gefüllte Teil des Reagenzglases grau im Vergleich zu dem oberen totalreflektierenden Teil erscheint. Gießt man Wasser in das Reagenzglas, so verschwindet der Silberglanz, soweit das Wasser steigt.

Auch die Tatsache, daß Luftblasen im Wasser wie silberglänzende Perlen erscheinen, ist eine Folge der Totalreflexion. Fällt dagegen Licht auf die Grenzfläche zweier Medien mit gleichen Brechungsquotienten, so findet weder Brechung noch Reflexion statt; das Licht geht vielmehr ungebrochen hindurch. Man kann daher einen (blasenfreien) Glasstab, den man in eine Flüssigkeit von gleicher Brechzahl, z. B. Zedernholzöl (oder besser in eine Lösung von Chloralhydrat in etwas Glycerin) taucht, überhaupt nicht mehr sehen. — Besonders effektiv läßt sich nach J. D. Colladon (1841) die Totalreflexion des Lichtes zeigen, wenn man (Abb. 48) in die Achse eines ausfließenden Wasserstrahles ein intensives Lichtbündel einstrahlt. Das Licht kann dann aus dem Wasserstrahl nicht mehr austreten, da es infolge wiederholter totaler Reflexion gezwungen wird, innerhalb des Strahles diesem zu folgen. Der Wasserstrahl würde also vollkommen dunkel sein, wenn nicht die Oberfläche kleine Störungen und Kräuselungen aufwiese, durch die das Licht austreten kann, und so den Strahl in seiner ganzen Länge leuchtend macht; dies ist besonders der Fall, wenn der Strahl sich in Tropfen aufgelöst hat (Fontaines lumineuses). — Ersetzt man den Wasserstrahl durch einen gebogenen Glasstab, so kann man durch diesen Licht von einer Lichtquelle nach einem anderen Punkt, z. B. unter das Präparat in einem Mikroskop, auch über mehrere Krümmungen hinwegleiten. — Dieses Prinzip ist neuerdings in der sog. Fiber- (oder Faser-) Optik sehr vollkommen durchgeführt worden, indem Licht durch sehr dünne Fasern fortgeleitet wird (Faserdurchmesser einige  $\mu$  bis 1 mm).



Daß schließlich auch eine Totalreflexion des Lichtes an der Grenze zwischen zwei Gaschichten verschiedener Dichte stattfindet, kann man in der Weise zeigen, daß man ein schmales Lichtbündel schräg von unten gegen die Öffnung eines flachen, innen geschwärzten Kastens richtet. Heizt man nun die Luft in dem Kasten (z. B. elektrisch) auf, so wird das Lichtbündel an der Grenze zwischen heißer und kalter Luft total-reflektiert. In der Natur tritt Totalreflexion des Lichtes häufig an den über stark erhitztem Boden lagernden Luftmassen ein. Wir kommen auf die Vorgänge der Luftspiegelung in Nr. 54 zurück.

Beim schrägen Durchgang durch eine planparallele Glasplatte erleidet ein Lichtbündel eine zweifache Brechung (Abb. 49a). Beim Eintritt in das Glas wird es zum Einfallslot hin, beim Austritt aus der Platte vom Einfallslot weg gebrochen. Im Glas läuft das Lichtbündel ebenso wie in der Luft geradlinig. Da schon aus Symmetriegründen der Einfallswinkel gleich dem Austrittswinkel ist, erfährt das Lichtbündel beim Durchgang durch eine planparallele Platte keine Richtungsänderung, sondern nur eine Parallelverschiebung  $\Delta$ , die um so größer ist, je größer die Plattendicke  $d$ , der Brechungsquotient  $n$  und der Einfallswinkel  $\alpha$  ist. Aus Abb. 49b findet man

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{\Delta}{AB} \quad ; \quad AB = \frac{d}{\cos \beta},$$



Eine planparallele Platte kann in verschiedener Weise zur Messung der Brechzahl des Stoffes, aus dem sie besteht, verwendet werden. Nach Duc de Chaulnes (1767) stellt man zum Beispiel mit Hilfe eines Mikroskopes, dessen Verschiebung längs der optischen Achse mikrometrisch gemessen werden kann, zunächst auf eine Marke  $M$ , zum Beispiel einen Strich auf einem Objektträger, scharf ein (Abb. 51 a). Dann bringt man zwischen  $M$  und Mikroskop die planparallele Platte. Dadurch erscheint  $M$  in die Höhe gehoben nach  $M'$  (vgl. S. 53). Um wieder ein scharfes Bild zu erhalten, muß man das Mikroskop um die Strecke  $MM' = a$  anheben, die gleich der Strecke  $BC$  ist. Ist  $d$  die Dicke der Platte, so ist

$$\tan \alpha = AD : (d - a) \quad \text{und} \quad \tan \beta = \frac{AD}{d}.$$

Unter der Voraussetzung, daß die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  und damit auch  $AD$  gegen  $d$  klein sind, so daß der Tangens der Winkel gleich ihrem Sinus gesetzt werden kann, erhält man:

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{d}{d - a}.$$

Für Platten der Dicke  $d = 1$  cm läßt sich  $n$  bis auf eine Einheit der dritten Dezimale genau messen.

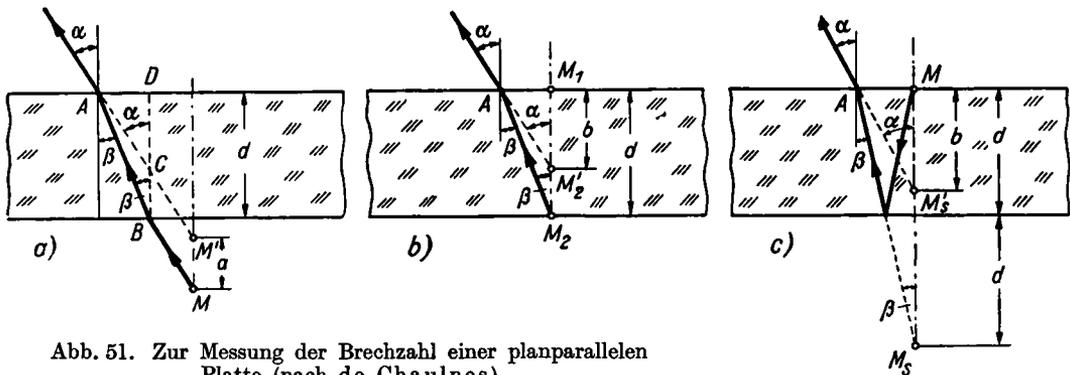


Abb. 51. Zur Messung der Brechzahl einer planparallelen Platte (nach de Chaulnes)

Dieses Verfahren kann in zweierlei Weise variiert werden. Bringt man auf der oberen und der unteren Seite der Platte je eine Marke  $M_1$  und  $M_2$  an und stellt nacheinander das Mikroskop auf beide Marken ein, so ist dazu eine Verschiebung  $b$  des Mikroskopes notwendig, da die Marke  $M_2$  nach der Stelle  $M'_2$  gehoben erscheint (Abb. 51 b). Für die Brechzahl  $n$  der Platte gilt dann (wieder unter den gleichen Voraussetzungen):

$$n = \frac{d}{b}.$$

Bringt man schließlich auf der Oberfläche der Platte eine helle Marke an, die man schräg von oben beleuchtet, und stellt das Mikroskop einmal direkt auf die Marke  $M$  und dann auf ihr an der unteren Plattenfläche gespiegeltes Bild  $M_s$  ein, das von  $M$  den Abstand  $2d$  hat und scheinbar bei  $M'_s$  liegt (Abb. 51 c), so ist wieder eine Verschiebung  $b$  des Mikroskopes erforderlich, und es gilt jetzt:

$$n = \frac{2d}{b}.$$

Ein weiteres Verfahren (von A. Pfund) verwendet die Erscheinung der Totalreflexion. Beleuchtet man durch eine planparallele Platte hindurch einen auf ihrer Rückseite angebrachten weißen Fleck  $P$  aus Papier oder weißer Farbe möglichst punktförmig und recht intensiv, so tritt das diffus in die Platte zurückgestrahlte Licht nur bis zum Grenzwinkel der Totalreflexion aus der Platte wieder aus, während es vom Grenzwinkel der totalen Reflexion ab zwischen der Vorder- und Rückseite der Platte hin und her totalreflektiert wird (Abb. 52 a). Bestäubt man die Rückseite der Platte mit einem feinen Pulver, z. B. Bärlappsaamen, so zeichnen sich die Reflexionsstellen, die dem Grenzwinkel der totalen Reflexion entsprechen, durch plötzliche Zunahme der Helligkeit ab, wie die photographische Aufnahme Abb. 52 b zeigt, bei der der zentrale Fleck zur Vermeidung einer Überbelichtung abgeblendet ist. Statt der erwarteten Intensitätsstufen beobachtet man hier aber helle und dunkle Ringe Infolge der Bestäubung sind die wirklichen Verhältnisse wesentlich weniger einfach, als unsere elementare Darstellung annimmt.

Wie man aus der Abb. 52 a abliest, gelten die Beziehungen:

$$\sin \alpha_g = \frac{r_1/2}{PR'} \quad \text{und} \quad \cos \alpha_g = \frac{d}{PR'}$$

so daß wir erhalten:

$$\sin \alpha_g = \frac{r_1}{2d} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_g}.$$

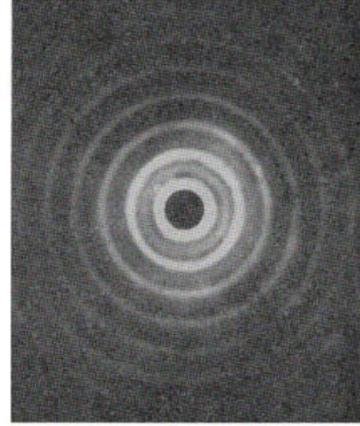
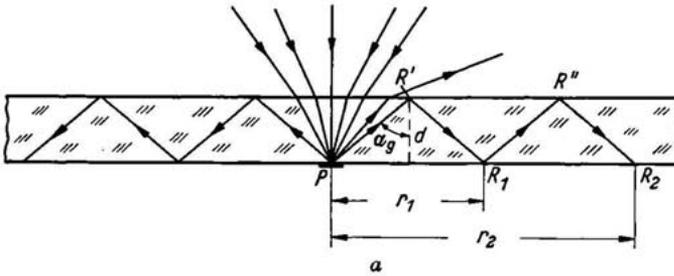


Abb. 52. Messung der Brechzahl einer planparallelen Glasplatte mittels Totalreflexion (nach A. H. Pfund)

- a) Strahlenverlauf in der Platte  
 b) Aufnahme der auf der bestäubten Platte durch Totalreflexion sichtbar werdenden Ringe mit den Radien  $r_1, r_2, \dots$ . Der zentrale Lichtfleck in der Mitte ist abgedeckt; der innerste Ring mit dem Radius  $r_1$  ist stark überstrahlt

Nun ist aber nach Gl. (11)  $\sin \alpha_g = \frac{1}{n}$ ; dies liefert nach einiger Umrechnung:

$$n = \frac{\sqrt{r_1^2 + 4d^2}}{r_1},$$

wenn  $r_1$  der Radius des ersten Ringes ist; wenn  $r_k$  den Radius des  $k$ -ten Ringes bezeichnet, folgt allgemeiner:

$$n = \frac{\sqrt{r_k^2 + (2kd)^2}}{r_k}.$$

Durch Ausmessen der Kreisradien läßt sich also der Brechungsquotient des Glases bestimmen.

## 6. Brechung des Lichtes beim Durchgang durch Prismen; Spektrometer und Refraktometer

In der Optik versteht man unter einem Prisma einen von zwei ebenen, polierten, gegeneinander geneigten Flächen ( $ABED$  und  $CBEF$  in Abb. 53) begrenzten Körper aus Glas oder einem anderen durchsichtigen Material. Als brechende Kante des Prismas wird die Gerade bezeichnet, in der sich die genannten Flächen schneiden ( $BE$  in der Abbildung); der an dieser Kante liegende Prismenwinkel heißt der brechende Winkel, die der brechenden Kante gegenüberliegende dritte Fläche ( $ACFD$  in der Abb. 53) die Basis; ein auf der brechenden Kante senkrecht stehender Schnitt durch das Prisma wird Hauptschnitt genannt.

Wir betrachten den Strahlengang in der Ebene eines Hauptschnittes, der mit der Papierebene zusammenfallen möge (Abb. 54a). Zu dem bei  $A$  auf das Prisma mit dem brechenden Winkel  $\varepsilon$  unter dem Einfallswinkel  $\alpha_1$  einfallenden Strahl  $LA$  konstruieren

wir nach dem Brechungsgesetz den im Prisma verlaufenden Strahl, der bei  $B$  die zweite Prismenfläche trifft und hier vom Einfallslot weg eine zweite Brechung in den Außenraum hinein erfährt. Um die Ablenkung  $\delta$  zwischen dem einfallenden Strahl  $LA$  und dem austretenden Strahl  $BL'$  zu finden, verlängern wir beide Strahlen bis zum Schnittpunkt  $C$ . Als Außenwinkel am Dreieck  $ABC$  ist dann:

$$\delta = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2 .$$

Ferner ist, wie aus dem Dreieck  $ABD$  folgt:

$$\varepsilon = \beta_1 + \beta_2 ,$$

so daß wir erhalten:

$$(14) \quad \delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \varepsilon .$$

Nach dem Brechungsgesetz bestehen die Gleichungen:

$$\sin \alpha_1 = n \sin \beta_1 \quad \text{und} \quad \sin \alpha_2 = n \sin \beta_2 .$$

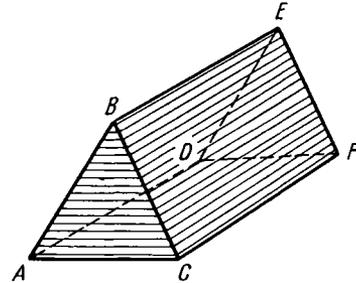


Abb. 53. Ansicht eines Prismas

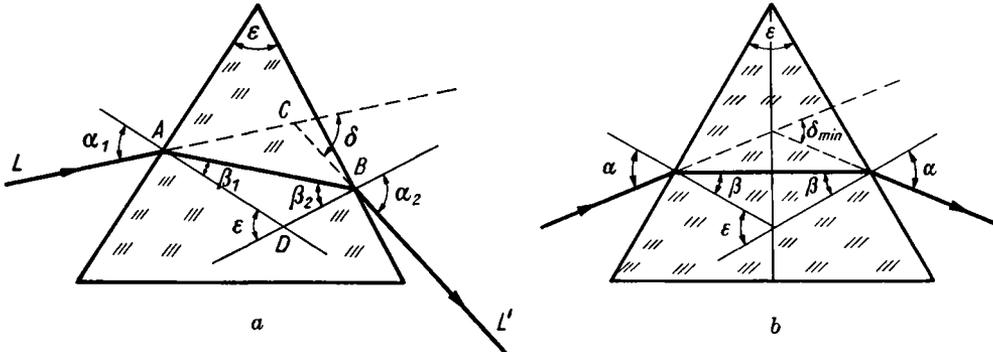


Abb. 54. Strahlenverlauf durch ein Prisma

a) bei beliebigem Einfallswinkel

b) im Minimum der Ablenkung

Wir können also schreiben:

$$\sin \alpha_2 = n \sin (\varepsilon - \beta_1) = n \sin \varepsilon \cos \beta_1 - n \cos \varepsilon \sin \beta_1 = \sin \varepsilon \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} - \cos \varepsilon \sin \alpha_1 ,$$

und erhalten damit für die totale Ablenkung nach (14):

$$(14a) \quad \delta = \alpha_1 + \arcsin [\sin \varepsilon \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} - \cos \varepsilon \sin \alpha_1] - \varepsilon ,$$

eine Beziehung, die es ermöglicht, zu jedem Einfallswinkel bei gegebenem Prisma die gesamte Ablenkung  $\delta$  zu bestimmen.

Wir fragen nach dem kleinsten Wert der Ablenkung  $\delta$  bei gegebenem  $n$  und Prismenwinkel  $\varepsilon$  in Abhängigkeit vom Einfallswinkel  $\alpha_1$ . Man hat zu diesem Zwecke

die Ableitung  $\frac{d\delta}{d\alpha_1}$  zu bilden und gleich Null zu setzen.

Die elementare Rechnung verläuft folgendermaßen: Es ist nach (14):

$$\frac{d\delta}{d\alpha_1} = 1 + \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = 0 .$$

Für  $\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1}$  können wir schreiben:

$$\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = \frac{d\alpha_2}{d\beta_2} \cdot \frac{d\beta_2}{d\beta_1} \cdot \frac{d\beta_1}{d\alpha_1} .$$

Aus dem Brechungsgesetz  $\sin \alpha_2 = n \sin \beta_2$  folgt durch Differentiation nach  $\beta_2$ :

$$\cos \alpha_2 \frac{d\alpha_2}{d\beta_2} = n \cos \beta_2 \quad \text{und daher} \quad \frac{d\alpha_2}{d\beta_2} = n \frac{\cos \beta_2}{\cos \alpha_2}.$$

Ebenso finden wir aus  $\sin \alpha_1 = n \sin \beta_1$  durch Differentiation nach  $\alpha_1$ :

$$\frac{d\beta_1}{d\alpha_1} = \frac{1}{n} \frac{\cos \alpha_1}{\cos \beta_1}.$$

Schließlich liefert die Beziehung  $\varepsilon = \beta_1 + \beta_2$ :

$$\frac{d\beta_2}{d\beta_1} = -1.$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung für  $\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1}$  ein, so erhalten wir:

$$\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = -\frac{\cos \alpha_1 \cos \beta_2}{\cos \beta_1 \cos \alpha_2},$$

also schließlich:

$$\frac{d\delta}{d\alpha_1} = 1 + \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = 1 - \frac{\cos \alpha_1 \cos \beta_2}{\cos \beta_1 \cos \alpha_2} = 0.$$

Damit also ein Extremwert der Ablenkung  $\delta$  eintritt, muß

$$\frac{\cos \alpha_1}{\cos \beta_1} = \frac{\cos \alpha_2}{\cos \beta_2}$$

sein. Indem man hier noch mit Hilfe des Brechungsgesetzes alles durch  $n$ ,  $\sin \alpha_1$  und  $\sin \alpha_2$  ausdrückt, gewinnt man die Gleichung:

$$(n^2 - 1) (\sin^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_2) = 0.$$

Da natürlich  $n \neq 1$  und die Winkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  zwischen  $0$  und  $\frac{\pi}{2}$  liegen müssen, folgt daraus die Bedingung  $\alpha_1 = \alpha_2$ . Daß wirklich ein Minimum von  $\delta$  vorliegt, zeigt die Untersuchung des zweiten Differentialquotienten  $\frac{d^2\delta}{d^2\alpha_1}$ , der positiv ist.

Wir können also sagen:

Bei einem Prisma erreicht die Ablenkung eines Lichtstrahles ihren kleinsten Wert, wenn Eintritts- und Austrittswinkel gleich sind, d. h. wenn der Strahl das Prisma symmetrisch durchläuft, wobei der im Prisma verlaufende Strahl senkrecht auf der Winkelhalbierenden des brechenden Winkels steht (Abb. 54b).

Dreht man das Prisma um eine zu seiner brechenden Kante parallele Achse (Abb. 55), so daß der Einfallswinkel von Null an langsam wächst, so wandert der abgelenkte Strahl entgegengesetzt zu dieser Drehrichtung nach der Prismenkante zu, bleibt dann einen Augenblick stehen, um dann rückläufig zu werden. Während also der Einfallswinkel dauernd zunimmt, wird der Ablenkungswinkel zunächst kleiner, erreicht ein Minimum für  $\alpha_1 = \alpha_2$  und wächst dann wieder.

Wie aus Abb. 54b folgt, ist bei symmetrischem Durchgang

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} (\delta_{\min} + \varepsilon) \quad \text{und} \quad \beta_1 = \frac{1}{2} \varepsilon,$$

so daß das Brechungsgesetz die Form annimmt:

$$(15) \quad n = \frac{\sin^{1/2} (\delta_{\min} + \varepsilon)}{\sin^{1/2} \varepsilon}.$$

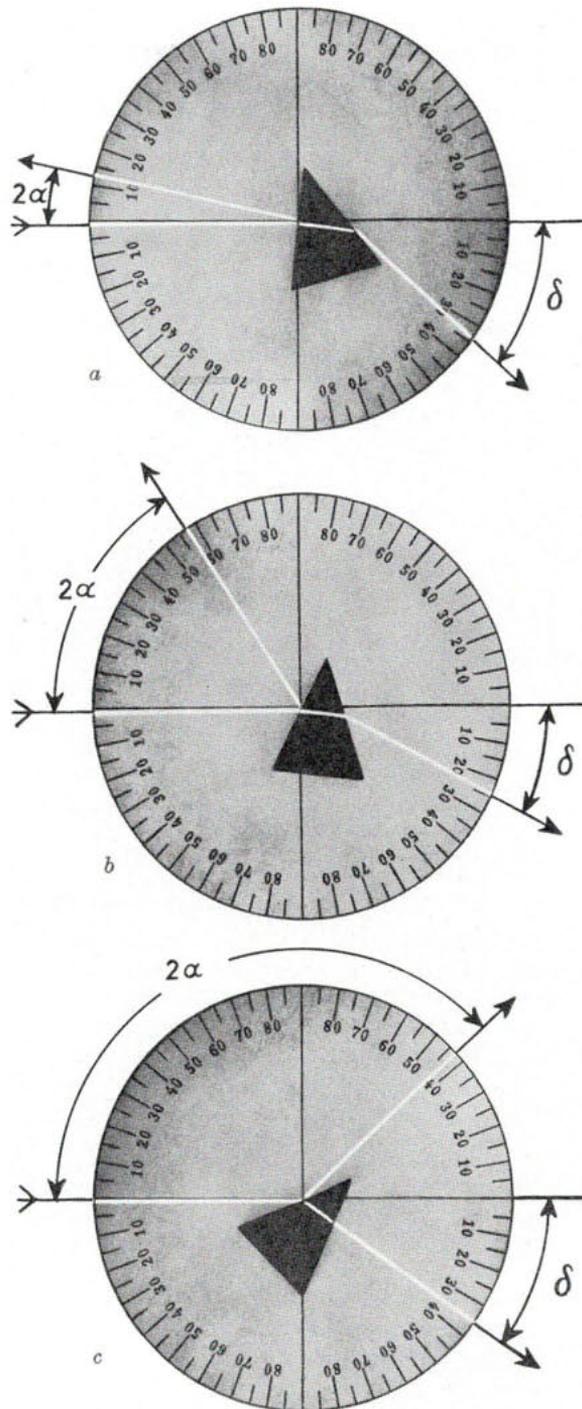


Abb. 55. Brechung des Lichtes in einem Glasprisma bei wechselndem Einfallswinkel  $\alpha$   
 a)  $\alpha = 6,5^\circ$ ,  $\delta = 34^\circ$     b)  $\alpha = 28,5^\circ$ ,  $\delta = 25^\circ$  (Minimum der Ablenkung)    c)  $\alpha = 68,5^\circ$ ,  $\delta = 35^\circ$

Mißt man daher den brechenden Winkel  $\varepsilon$  sowie das Minimum der Ablenkung  $\delta_{\min}$ , das sich sehr scharf einstellen läßt, so kann man nach Gl. (15) den Brechungsquotienten des Prismenmaterials bestimmen (J. Fraunhofer, 1817). Auch die Brechzahl von Flüssigkeiten läßt sich so bestimmen, indem man letztere in ein Hohlprisma füllt, dessen brechende Flächen durch ebene Glasplatten mit parallelen Flächen, die ja selbst keine Ablenkung erzeugen, gebildet werden.

Aus Gl. (15) ergibt sich schließlich für ein gegebenes Prisma das Minimum der Ablenkung zu:

$$(15a) \quad \delta_{\min} = 2 \operatorname{arc} \sin \left( n \sin \frac{\varepsilon}{2} \right) - \varepsilon.$$

Das Brechungsvermögen von Luft und anderen Gasen kann man ebenfalls mit einem Hohlprisma nachweisen. Entfernt man mit einer Luftpumpe aus demselben die Luft, während ein Lichtstrahl hindurchgeht, so erfährt dieser eine geringe Ablenkung nach der Prismenkante zu, die sich auf einer mehrere Meter entfernten Skala nachweisen läßt. In diesem Fall ist der relative Brechungsindex der Prismensubstanz  $n_{\text{vak}}/n_{\text{Luft}} < 1$ , und das bedeutet nach Gl. (15) oder (15a)  $\delta_{\min} < 0$ .

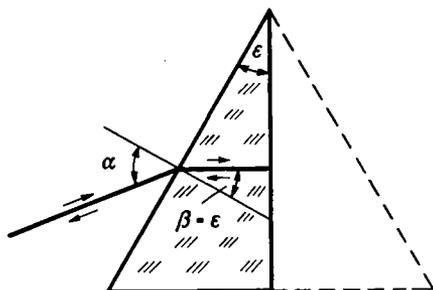


Abb. 56. Abbesches Prisma, bei dem der einfallende Strahl im Minimum der Ablenkung nach Reflexion an der Kathetenfläche in sich selbst zurückkehrt

Das Fraunhofersche Verfahren wurde von E. Abbe (1874) folgendermaßen verändert: Halbiert man das Prisma der Abb. 54b, so entsteht ein rechtwinkliges Prisma gemäß Abb. 56. Stellt man nun das Prisma so, daß der in das Prisma eintretende Strahl an der Rückseite des Prismas in sich selbst reflektiert wird, so kehrt er nach dem Ausgangspunkt zurück. Bei dieser Anordnung ist, wie man aus Abb. 56 entnimmt, der Brechungswinkel  $\beta = \varepsilon$ . Mißt man daher für diese Prismenstellung den Eintrittswinkel  $\alpha$  und den Prismenwinkel  $\varepsilon$ , so ist einfach:

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \varepsilon}.$$

Neben dem Vorteil der sehr einfachen Durchführung dieser Messung hat das Abbesche Verfahren den weiteren Vorzug, daß unter sonst gleichen Umständen für das Prisma nur die Hälfte des Materials wie beim Fraunhoferschen Verfahren benötigt wird.

Für Prismen mit sehr kleinem brechendem Winkel  $\varepsilon$  ist für Strahlen, die unter kleinem Einfallswinkel  $\alpha$  auffallen, die Ablenkung  $\delta$  unabhängig von  $\alpha$  und stets dem brechenden Winkel proportional. Für kleine Einfallswinkel  $\alpha$  und entsprechend kleine Brechungswinkel  $\beta$  kann man nämlich das Brechungsgesetz in der Form  $\alpha_1 = n \beta_1$  bzw.  $\alpha_2 = n \beta_2$  schreiben. Damit nimmt Gl. (14) die Gestalt an:

$$(14b) \quad \delta = n(\beta_1 + \beta_2) - \varepsilon = (n - 1)\varepsilon,$$

aus der in der Tat hervorgeht, daß die Ablenkung  $\delta$  proportional dem brechenden Winkel  $\varepsilon$  und unabhängig von  $\alpha$  ist.

Zur genauen Bestimmung der Winkel bei derartigen Messungen dient das **Spektrometer** (Abb. 57). An einer vertikalen Achse ist ein horizontal gelagerter Teilkreis  $K$  drehbar angebracht, der in seiner Mitte ein kleines Tischchen  $T$  mit Prisma  $P$  trägt. Ein horizontal liegendes Fernrohr  $F$  ist an einem seitlichen Arm  $A$  so befestigt, daß es nach der Achse hinzielt, um die es mittels des Armes  $A$  gedreht werden kann. An einem mit der Achse fest verbundenen zweiten Arm  $B$  ist das ebenfalls nach der Achse hingerrichtete Spalt- oder Kollimatorrohr  $S$  angebracht. Es enthält an seinem hinteren Ende einen in seiner Breite verstellbaren vertikalen beleuchteten Spalt  $Sp$  und an seinem anderen Ende eine Sammellinse, in deren Brennebene sich der Spalt befindet, so daß die von einem Punkte des Spaltes ausgehenden Strahlen die Linse als parallele

Strahlenbündel verlassen. Dadurch wird erreicht, daß der Spalt gewissermaßen im Unendlichen liegt; er wird dann mit dem auf unendlich gestellten Fernrohr  $F$  scharf gesehen. Fernrohr und Spaltrohr stehen in einer Richtung, wenn das Bild des Spaltes mit dem im Fernrohrkular angebrachten Fadenkreuz zusammenfällt. Stellt man auf das Tischchen  $T$  ein Prisma, so muß man das Fernrohr zur Seite drehen, um den abgelenkten Strahl und damit das Spaltbild wieder mit dem Fadenkreuz zur Deckung zu bringen. Sowohl die Fernrohr-Verdrehung als auch die Drehung des Tischchens läßt sich an dem Teilkreis  $K$  mittels Nonien sehr genau ablesen.

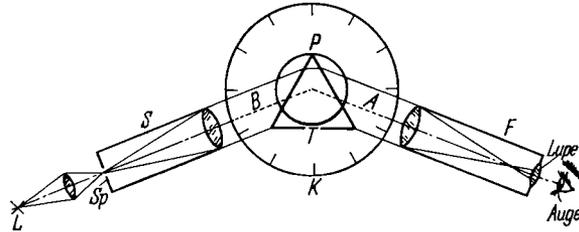


Abb. 57. Spektrometer, schematisch

Wir haben bisher stets nur den Weg eines einzelnen Strahles betrachtet; in Wirklichkeit haben wir es aber stets mit einem Lichtbündel von endlichem Durchmesser zu tun. Fällt ein Lichtbündel mit kreisförmigem Querschnitt vom Durchmesser  $d$  auf die Grenzfläche eines optisch dichteren Mediums schräg auf, so wird sein Durchmesser nach der Brechung in der Brechungsebene auf  $d'$  vergrößert, wie man sofort aus der Abb. 58 erkennt. Umgekehrt wird beim Übergang von einem optisch dichteren Medium zu einem dünneren der Lichtbündeldurchmesser in der Brechungsebene verkleinert. Dagegen tritt in der zur Brechungsebene senkrechten Richtung keine Querschnittsveränderung auf. Betrachtet man z. B. (Abb. 59a) durch ein Prisma eine an der Stelle  $B$  befindliche kreisrunde Lochblende, die von einfarbigem (monochromatischem) Licht<sup>1)</sup> beleuchtet wird, so erscheint sie dem bei  $A$  befindlichen Auge in Gestalt einer Ellipse, deren größere Achse senkrecht zur Prismenkante liegt. Vertauscht man Lochblende und Auge, d. h. blickt man in der umgekehrten Richtung durch das Prisma, so sieht man an Stelle der kreisrunden Lochblende eine Ellipse, deren große Achse parallel zur Prismenkante liegt. Wie Abb. 59b zeigt, kann man diesen Effekt durch geeignete Hintereinanderstellung mehrerer Prismen verstärken und dabei gleichzeitig erreichen, daß die Strahlenrichtung nur eine seitliche Versetzung erfährt.

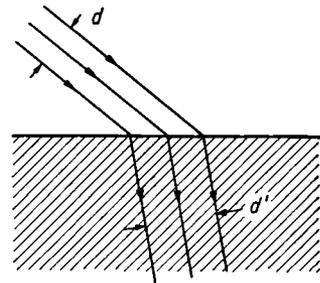


Abb. 58.  
Verbreiterung des Querschnittes eines Lichtbündels in der Brechungsebene bei Eintritt in ein optisch dichteres Medium

Ersetzt man die Lochblende durch einen schmalen Spalt, dessen Richtung parallel der Prismenkante verläuft, so erscheint dieser breiter oder schmaler je nach der Richtung, in der man bei dem in Abb. 59a gezeichneten Strahlenverlauf durch das Prisma blickt; letzteres wirkt also in der zu seiner brechenden Kante senkrechten Richtung

<sup>1)</sup> Bei weißem Licht tritt bei allen Brechungsvorgängen eine Zerlegung (Dispersion) des Lichtes in seine Spektralfarben ein. Davon sehen wir hier und bei den folgenden Versuchen bewußt ab, indem wir nur einfarbiges Licht, z. B. das gelbe Natriumlicht, verwenden. Auf die Dispersion des Lichtes gehen wir in Nr. 20 näher ein.

vergrößernd oder verkleinernd. Diese Erscheinung tritt um so stärker hervor, je flacher das Lichtbündel in das Prisma einfällt; sie ist jedoch nicht vorhanden, wie man leicht erkennt, im Falle der minimalen Strahlenablenkung, d. h. bei symmetrischem Strahlenverlauf durch das Prisma.

Eine große Bedeutung haben in der praktischen Optik Prismen erlangt, deren Hauptschnitt ein rechtwinkliges (meist gleichschenkliges) Dreieck darstellt. Läßt man (Abb. 60) Licht senkrecht zu einer Kathetenfläche eintreten, so wird es an der Hypothenusenfläche total reflektiert, da der Grenzwinkel der totalen Re-

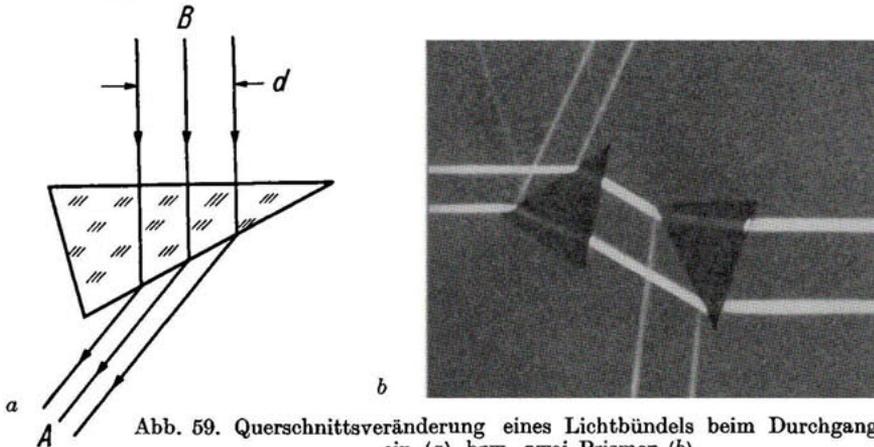


Abb. 59. Querschnittsveränderung eines Lichtbündels beim Durchgang durch ein (a) bzw. zwei Prismen (b)

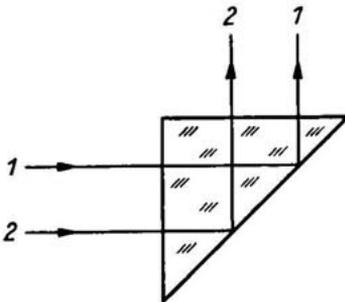


Abb. 60. Totalreflektierendes Prisma

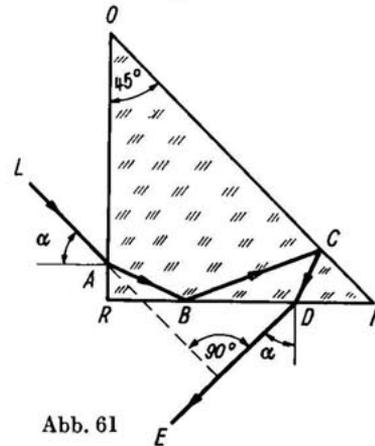


Abb. 61

Abb. 61. Prisma für geodätische Zwecke zum Abstecken rechter Winkel

flexion in diesem Falle kleiner als  $45^\circ$  ist. Der Lichtaustritt erfolgt dann senkrecht aus der anderen Kathetenfläche. Man kann daher ein solches **totalreflektierendes Prisma** statt eines ebenen Oberflächenspiegels benutzen, was in geeigneten Fällen von Vorteil sein kann.

Für geodätische Zwecke wird das gleichschenkelig-rechtwinklige Prisma zum Abstecken rechter Winkel mit dem von K. M. v. Bauernfeind (1851) vorgeschlagenen Strahlengang (Abb. 61) benutzt. Der schräg unter dem Winkel  $\alpha$  in eine Kathetenfläche eintretende Strahl  $LA$  wird an der anderen Kathetenfläche bei  $B$  totalreflektiert, darauf an der verspiegelten Hypothenusenfläche bei  $C$  zum zweitenmal reflektiert und verläßt bei  $D$  das Prisma. Bis auf die zweimalige Brechung bei  $A$  und  $D$  stellt das Prisma einen mit Glas ausgefüllten Winkelspiegel von  $45^\circ$  dar. Infolgedessen bilden die Strahlen  $AB$  und  $CD$  miteinander einen rechten Winkel. Da der Prismenwinkel bei  $R$

ein rechter Winkel ist, ist der Einfallswinkel  $\alpha$  bei  $A$  gleich dem Ausfallswinkel  $\alpha$  bei  $D$ , so daß also auch die Strahlen  $LA$  und  $DE$  einen rechten Winkel bilden. Indem man also ein längs  $ED$  direkt anvisiertes Objekt mit dem durch das Prisma in Richtung  $AL$  gesehenen zur Deckung bringt, kann man im Gelände rechte Winkel abstecken. Dabei bleibt der Strahlenverlauf erhalten, auch wenn man das Prisma um seine Kante bei  $R$  um kleine Winkel verdreht.

Läßt man ein Strahlenbündel senkrecht auf die Hypothenusenfläche eines rechtwinklig-gleichschenkligen Prismas fallen, so wird es zweimal um  $90^\circ$  an den beiden Kathetenflächen totalreflektiert, so daß der Strahlenweg insgesamt um  $180^\circ$  geknickt wird. Dabei vertauschen die beiden in Abb. 62 gezeichneten Strahlen ihre gegenseitige Lage zueinander, so daß das Bild eines Gegenstandes (Pfeil in Abb. 62) um  $180^\circ$  verdreht wird. — Fügt man (Abb. 63) in den Strahlengang ein zweites identisches, um die Strahlrichtung durch  $90^\circ$  gedrehtes Prisma hinzu, so erhält man das Porrosche Um-

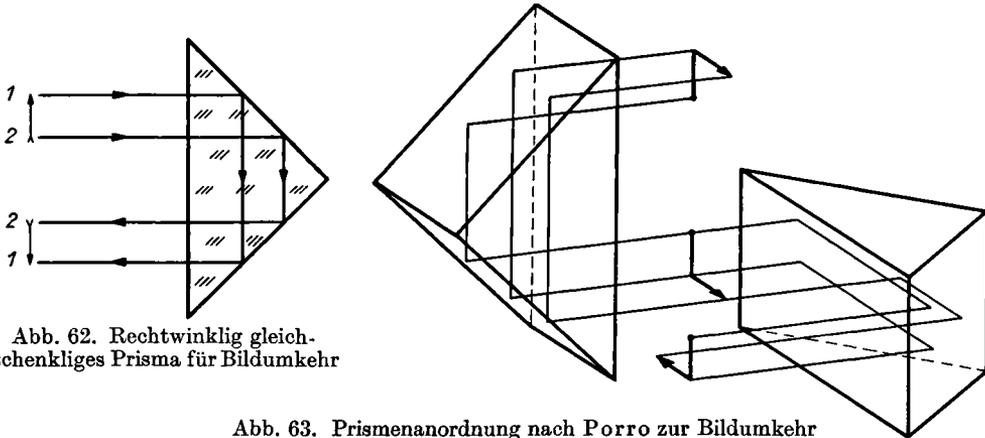


Abb. 62. Rechtwinklig gleichschenkliges Prisma für Bildumkehr

Abb. 63. Prismenanordnung nach Porro zur Bildumkehr

kehrprisma (J. Porro 1848); bei diesem findet infolge der viermaligen Totalreflexion um je  $90^\circ$  eine Drehung des Strahlenbündels um seine Achse durch  $360^\circ$  statt, so daß rechts und links sowie oben und unten vertauscht werden, wobei die Strahlrichtung nur eine Parallelverschiebung erfährt. Man benutzt daher eine solche Prismenkombination zur Bildumkehrung in den sog. Prismenfeldstechern (s. Nr. 12).

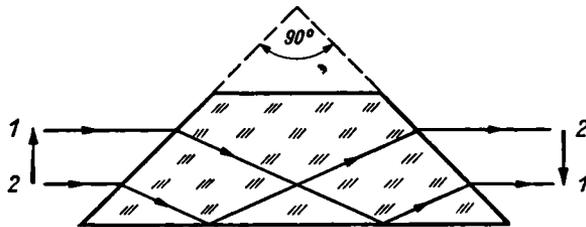


Abb. 64. Umkehrprisma nach Amici

Eine weitere Anwendung des gleichschenkelig-rechtwinkligen Prismas zeigt Abb. 64. Ein parallel zur Hypothenusenfläche, also mit einem Einfallswinkel von  $45^\circ$  auf eine Kathetenfläche fallender Strahl wird in dem Prisma zur Hypothenusenfläche gebrochen, dort totalreflektiert und verläßt dann die andere Kathetenfläche nach nochmaliger Brechung wieder in der ursprünglichen Richtung, jedoch mit einer gewissen Parallelverschiebung. Blickt man daher parallel zur Hypothenusenfläche durch ein solches Prisma, so ist das Bild, das man sieht, höhen- oder seitenverkehrt, je nachdem die Hypothenusenfläche waagrecht oder senkrecht steht. Man benutzt daher dieses von G. B. Amici (1823) angegebene Umkehr- oder Wendepisma bei vielen optischen Geräten zu einer Bildumkehr; dem Prisma gibt man meistens die Gestalt eines gleichschenkeligen Trapezes (Abb. 64). Bringt man nach J. L. Delaborne (1838) zwei solcher Prismen hintereinander, aber um  $90^\circ$  in der Strahlrichtung gegeneinander verdreht an, so erhält man wieder eine Vorrichtung, die den Strahlengang um seine Richtung durch  $360^\circ$  dreht. —

Ein weiteres in der Geodäsie und in der Optik viel gebrauchtes Prisma ist das von Goulier (1865) angegebene **Pentagonal-Prisma**, das im wesentlichen einen mit Glas ausgefüllten Winkel-

spiegel von  $45^\circ$  darstellt (Abb. 65). Die zu den Seiten  $BC$  und  $DE$  des Hauptschnittes senkrechten Flächen sind versilbert. Ein durch die zu  $AB$  senkrechte Fläche eintretender Strahl tritt nach zweifacher Reflexion genau senkrecht zu seiner ursprünglichen Richtung durch die zu  $AE$  senkrechte Fläche aus. Diese Strahlablenkung um  $90^\circ$  ist unabhängig von einer Drehung des Prismas um seine Kanten, so lange der Winkel bei  $A$  genau  $90^\circ$  ist.

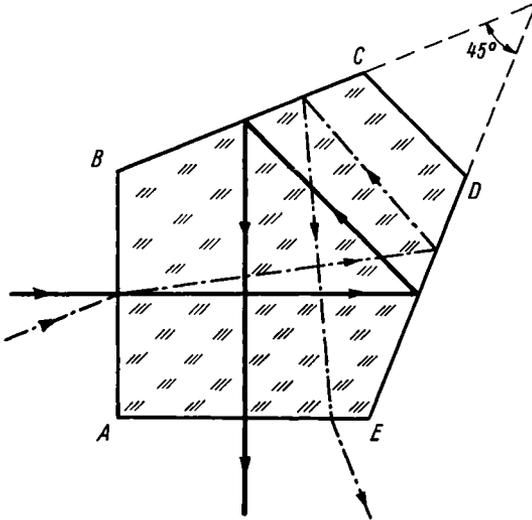


Abb. 65. Pentagonalprisma nach Goulier

tatsächlichen Austrittspunktes  $F$  in bezug auf den Scheitel  $O$  des Tripelspiegels. Damit ist gezeigt, daß der Strahl  $FL'$  parallel zum einfallenden Strahl  $LE$  den Tripelspiegel verläßt. Der Tripelspiegel wird daher ähnlich wie der auf S. 12 erwähnte Zentralspiegel für Signal- und Warnzwecke benutzt. Wir können uns den Tripelspiegel aus dem Zentralspiegel entstanden denken, indem wir letzteren mit Glas ausfüllen.

Als letztes Prisma besprechen wir noch kurz den Tripelspiegel. Dieser entsteht, wenn man von einem genau rechtwinklig geschliffenen Glaswürfel eine Ecke abschneidet, so daß die Schnittfläche mit den drei an der betreffenden Würfecke zusammenstoßenden Flächen gleiche Winkel bildet (Abb. 66a). Fällt in eine solche Würfecke durch die Schnittfläche ein Strahlenbündel ein, so wird dieses nach dreimaliger Totalreflexion an den drei Würfelwänden, und zwar in den Punkten  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$ , parallel zu seiner Einfallsrichtung wieder zurückreflektiert (Abb. 66b). Um dies zu übersehen, spiegeln wir den Tripelspiegel zunächst an der Fläche  $AOC$ , an der der einfallende Strahl zum erstenmal reflektiert wird. Wir erhalten das Spiegelbild  $AB'CO$ , das wir an der zweiten Reflexionsebene  $BOC$  in die Lage  $A'CB'O$  und schließlich an der dritten Reflexionsebene in die Lage  $A'B'C'O$  spiegeln. Dann liegt die Fläche  $A'B'C'$  parallel zur Fläche  $ABC$ . Ein bei  $E$  in den Tripelspiegel einfallender Strahl  $LE$  würde also die planparallele Platte in  $F'$  verlassen, ohne dabei eine Knickung zu erleiden.  $F'$  ist aber der Spiegelpunkt des

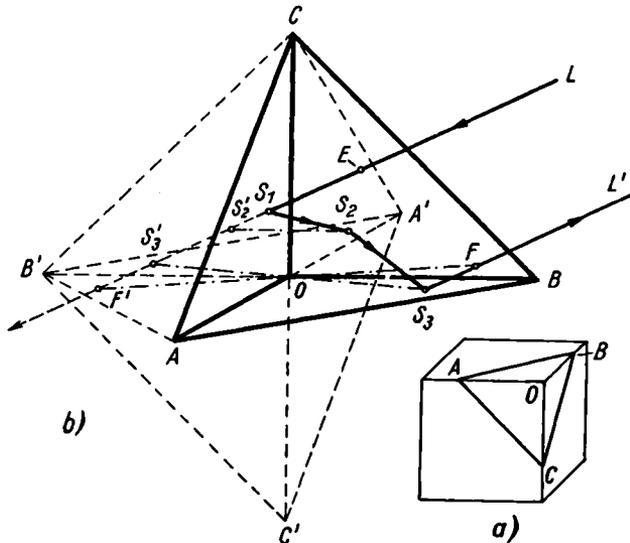


Abb. 66. Tripelspiegel

- a) Entstehung des Tripelspiegels als abgeschnittene Ecke eines Glaswürfels  
 b) Strahlverlauf im Tripelspiegel. ( $S'_2$  ist Spiegelpunkt von  $S_2$  an Fläche  $AOC$ ;  $S'_3$  ist Spiegelpunkt von  $S_3$  in bezug auf  $O$ )

Auf dem Grundgedanken, daß sich nach Gl. (11)  $\sin \alpha_g = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$  aus dem Grenzwinkel der Totalreflexion  $\alpha_g$  das Verhältnis der Brechzahlen  $\frac{n_2}{n_1}$  der beiden aneinander grenzenden Medien bestimmen läßt, beruhen die sog. **Refraktometer**. Wir besprechen im folgenden die gebräuchlichsten Ausführungsformen.

Bei dem Refraktometer nach C. Pulfrich (1887) ist auf einem als Hilfsmedium benutzten Glaswürfel  $G$  von hoher Brechzahl ein Glaszylinder  $Z$  aufgekittet, in den die zu untersuchende Flüssigkeit, die einen kleineren Brechungsquotienten als das Glas  $G$  haben muß, gefüllt wird (Abb. 67). Läßt man dann monochromatisches Licht (z. B. von einem Natriumbrenner) streifend auf die Grenzfläche zwischen Glaswürfel und Flüssigkeit auffallen, so daß der Einfallswinkel  $90^\circ$  ist, so wird es unter dem Grenzwinkel  $\beta_g$  in das Glas hineingebrochen und gelangt nach nochmaliger Brechung beim Austritt aus dem Glaswürfel in Luft unter dem Winkel  $\alpha$  in das Fernrohr  $F$ . Die unter kleinerem Winkel als  $90^\circ$  einfallenden Strahlen, z. B. der in Abb. 67 strich-punktierte Strahl, gelangen natürlich ebenfalls in das Fernrohr. Der Strahl, der genau unter dem Winkel  $\beta_g$  in das Glas eintritt, bildet daher die Grenze zwischen Hell und Dunkel im Gesichtsfeld des Fernrohres, auf die man das im Okular angebrachte Fadenskreuz einstellt; der Winkel  $\alpha$  läßt sich an dem Teilkreis  $T$  ablesen. Bezeichnen wir die Medien Luft, Glas und Flüssigkeit der Reihe nach mit 1, 2 und 3, so ist nach dem Brechungsgesetz für den aus Glas in Luft austretenden Strahl

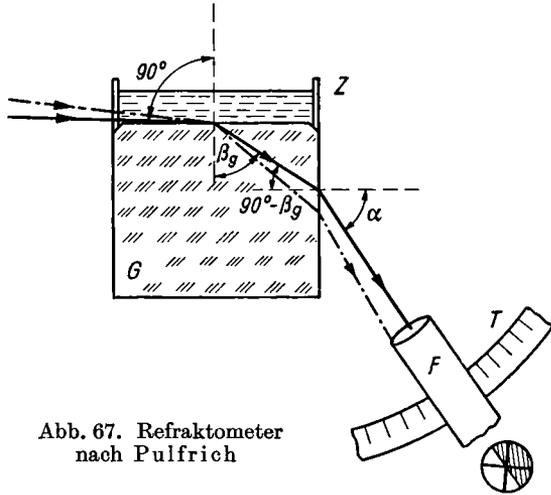


Abb. 67. Refraktometer nach Pulfrich

$$\frac{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \beta_g \right)}{\sin \alpha} = \frac{\cos \beta_g}{\sin \alpha} = \frac{n_1}{n_2}, \text{ also } \cos \beta_g = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha .$$

Für den Grenzwinkel  $\beta_g$  gilt ferner Gl. (11), die wir jetzt folgendermaßen schreiben müssen:

$$\sin \beta_g = \frac{n_3}{n_2} .$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich nach einfacher Rechnung:

$$\frac{n_3}{n_1} = \sqrt{\left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 - \sin^2 \alpha} ,$$

oder in etwas anderer Schreibweise:

$$n_{31} = \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \alpha} .$$

$n_{31}$  ist aber der gesuchte relative Brechungsquotient der Flüssigkeit gegen Luft, während  $n_{21}$  der relative Brechungsquotient des Glaswürfels gegen Luft ist; diesen ermittelt man ein für allemal, indem man als Flüssigkeit Wasser mit  $n_{31} = 1,333$  verwendet. Will man statt einer Flüssigkeit die Brechzahl eines festen Körpers bestimmen,

so klebt man ihn auf die obere Fläche des Glaswürfels mit einem Tropfen Flüssigkeit von größerem Brechungsquotienten, z. B. Monobromnaphthalin, auf. Bei den üblichen Ausführungsformen dieses Refraktometers wird  $n_{21}$  entweder gleich 1,755 oder 1,622 gewählt; die zu untersuchenden Flüssigkeiten können also Brechzahlen bis zu diesem Werte haben.

Zur Bestimmung der Brechzahl von Kristallplatten in Abhängigkeit von ihrer Orientierung dient das Kristallrefraktometer von C. Pulfrich, das von E. Abbe (1890) modifiziert wurde; es unterscheidet sich von dem Pulfrich-Refraktometer nur dadurch, daß an Stelle des Glaswürfels  $G$  eine um eine vertikale Achse  $A$  in sich drehbare Glashalbkugel  $K$  mit genau horizontal liegender Planfläche benutzt wird (Abb. 68). Der zu untersuchende Kristallschnitt  $P$  wird auf die Planfläche mit einer stärker brechenden Flüssigkeit aufgeklebt und der Winkel  $\beta_g$  direkt mit dem Fernrohr an dem Teilkreis  $T$  abgelesen. Dreht man dann die Halbkugel um die vertikale Achse  $A$  so läßt sich der Brechungsquotient der Kristallplatte für die verschiedenen in der Schnittebene liegenden Richtungen ermitteln.

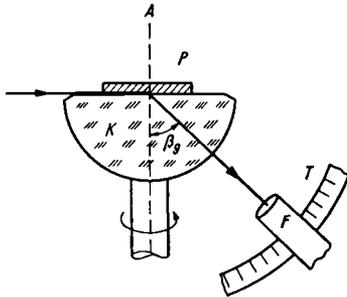


Abb. 68. Kristallrefraktometer nach Pulfrich

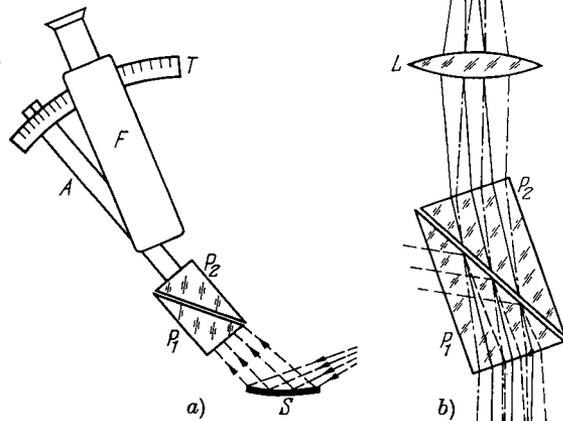


Abb. 69. Refraktometer nach Abbe  
a) Aufbau b) Strahlenverlauf

Schließlich ist in Abb. 69 das häufig benutzte Abbesche Refraktometer wiedergegeben. Das von einer monochromatischen Lichtquelle (Natriumbrenner) kommende Licht fällt über einen Hohlspiegel  $S$  als konvergentes Strahlenbündel auf ein Doppelprisma, das aus zwei rechtwinkligen Prismen  $P_1$  und  $P_2$  aus schwerem Flintglas mit hoher Brechzahl besteht. Zwischen die beiden Prismen wird die zu untersuchende Flüssigkeit, deren Brechzahl kleiner als die des Prismenglases sein muß, als planparallele Schicht gebracht. Beim Auftreffen auf diese Flüssigkeitsschicht durchsetzen nur jene aus dem dichteren Medium (Prisma  $P_1$ ) kommenden Strahlen die Flüssigkeit, die unter einem Winkel auffallen, der kleiner als der Grenzwinkel der totalen Reflexion ist (strichpunktierte Strahlen in Abb. 69 b). Der letzte Strahl, der noch in die Flüssigkeit eindringt, ist der unter dem Grenzwinkel auffallende (in Abb. 69 b ausgezogen). Alle folgenden Strahlen (gestrichelt) werden an der Flüssigkeitsschicht totalreflektiert. Aus dem Prisma  $P_2$  tritt also nur Licht rechts von dem ausgezogenen Strahl, der Raum links davon ist dunkel. Zur Beobachtung der Trennungslinie zwischen hellem und dunklem Winkelraum dient das Fernrohr  $F$ , das im Okular ein Fadenkreuz besitzt. Das Fernrohr ist mit einer Teilung  $T$  fest verbunden, während das Doppelprisma mit dem Arm  $A$  gegen das Fernrohr drehbar ist; dadurch kann der Einfallswinkel des Lichtes so lange variiert werden, bis der Grenzwinkel der Totalreflexion erreicht ist; dann verdunkelt sich das Gesichtsfeld im Fernrohr von einer Seite her, und man stellt die Grenzlinie zwischen Hell und Dunkel auf den Schnittpunkt des Fadenkreuzes ein. Auf der

Teilung  $T$  sind nicht die Grenzwinkel, sondern direkt die Brechzahlen aufgetragen. — Auch feste Körper lassen sich mit diesem Refraktometer untersuchen: Man nimmt zu diesem Zwecke das Prisma  $P_1$  ab und klebt den festen Körper mit einer stärker brechenden Flüssigkeit gegen die Hypothenusenfläche des Prismas  $P_2$ .

## 7. Brechung des Lichtes an einer Kugelfläche

1. **Abbildung eines leuchtenden Punktes.** Wir denken uns zwei Medien 1 und 2 mit den Brechungsquotienten  $n_1$  und  $n_2$  durch eine Kugelfläche mit dem Radius  $r$  voneinander getrennt. Wir zeigen zunächst, wie man zu einem auf die Kugelfläche auffallenden Strahl den gebrochenen Strahl findet; denn im Gegensatz zu einer ebenen Trennungsfäche, bei der alle untereinander parallelen Strahlen den gleichen Einfallswinkel- und Brechungswinkel haben, ist dies bei einer kugelförmigen Trennungsfäche natürlich nicht der Fall. Von K. Weierstrass rührt folgende Konstruktion

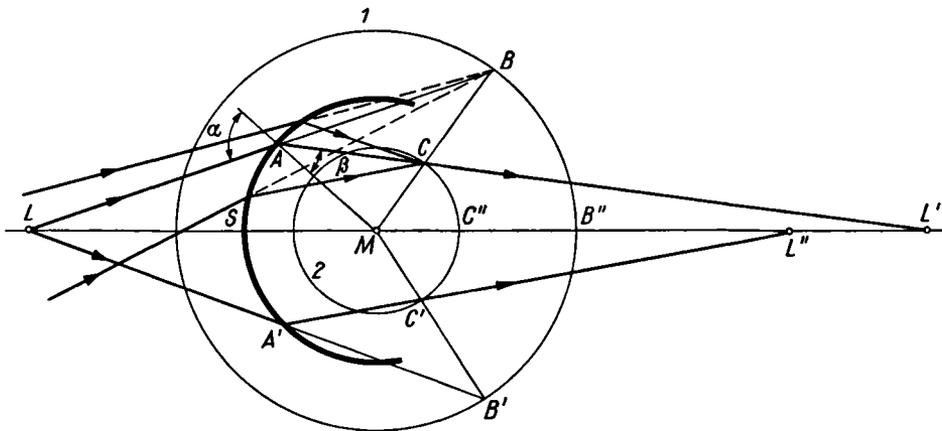


Abb. 70. Konstruktion des an einer Kugelfläche gebrochenen Lichtstrahles (nach Weierstrass)

her (Abb. 70): Man zeichnet um den Mittelpunkt der Kugelfläche zwei Hilfskugeln 1 und 2 mit den Radien  $r_1 = \frac{n_2}{n_1} r$  und  $r_2 = \frac{n_1}{n_2} r$ , wobei  $n_2$  die Brechzahl des von der Kugelfläche mit dem Radius  $r$  eingeschlossenen Mediums 2 und  $n_1$  die Brechzahl des die Kugelfläche umgebenden Mediums 1 ist. Den von  $L$  aus einfallenden, die Kugelfläche bei  $A$  treffenden Strahl verlängert man bis zum Schnittpunkt  $B$  mit der Kugel 1;  $B$  verbindet man mit dem Kugelmittelpunkt  $M$ ; diese Verbindungslinie schneidet die Kugel 2 in  $C$ . Dann gibt die Gerade  $AC$  die Richtung des gebrochenen Strahles  $AL'$  an. Es sind nämlich die beiden Dreiecke  $AMB$  und  $AMC$  einander ähnlich, da sie den Winkel  $AMB$  gemeinsam haben und die diesen Winkel einschließenden Seiten in gleichem Verhältnis stehen; denn es ist  $\frac{AM}{MC} = \frac{BM}{AM} = \frac{n_2}{n_1}$ . Dann ist also  $\sphericalangle ACM = \sphericalangle BAM = \alpha$ , und nach dem Sinussatz folgt:

$$\frac{\sin ACM}{\sin CAM} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{AM}{CM} = \frac{n_2}{n_1},$$

woraus sich ergibt, daß  $\beta$  der zum Einfallswinkel  $\alpha$  zugehörige Brechungswinkel ist. Konstruiert man so zu allen von einem leuchtenden Punkt  $L$  kommenden Strahlen die gebrochenen, so findet man, daß diese sich keineswegs wieder in einem Punkte

schneiden; dies zeigt z. B. der in Abb. 70 gezeichnete Strahl  $LA'C'$ , der den senkrecht auf die Kugelfläche fallenden und daher ungebrochenen Strahl  $LSM$  in  $L''$ , statt wie der Strahl  $LAC$  in  $L'$  schneidet.

Aus der Weierstrassschen Konstruktion folgt aber, daß alle nach dem Punkt  $B$  hinzielenden Strahlen sich nach der Brechung im Punkte  $C$  schneiden müssen. Nach dem Gesetz von der Umkehrbarkeit des Lichtweges bedeutet dies aber, daß alle von Punkt  $C$  im zweiten Medium ausgehenden Strahlen so gebrochen werden, als ob sie sämtlich vom Punkte  $B$  herkämen, m. a. W.: zu dem reellen Gegenstandspunkt  $C$  gehört der virtuelle Bildpunkt  $B$ , bzw. zu dem virtuellen Gegenstandspunkt  $B$  existiert ein reeller Bildpunkt  $C$ . In Abb. 70 sind drei von  $C$  ausgehende Strahlen gezeichnet, die bei ihrer Rückwärtsverlängerung sämtlich nach der Brechung durch  $B$  hindurchgehen;  $C$  und  $B$  sind „konjugierte Punkte“, und zwar für beliebig weit geöffnete Strahlenbündel. Deshalb heißen  $C$  und  $B$  aberrationsfreie Punkte der Kugel. Es ist wesentlich, sich klar zu machen, daß zu jedem Punkte, z. B.  $C'$ ,  $C''$ , ... in Abb. 70, auf der Hilfskugel 2, die gemäß Konstruktion innerhalb der brechenden Kugel mit dem Brechungsquotienten  $n_2$  liegen, je ein zugehöriger aberrationsfreier Punkt  $B'$   $B''$  ... auf der Hilfskugel 1, d. h. außerhalb der brechenden Kugel, gehört. In Abb. 71 ist dies für die Punkte  $C''$  und  $B''$  noch einmal ausgeführt: Ein von  $C''$  ausgehendes, beliebig weit geöffnetes Strahlenbündel wird so gebrochen, als ob es von  $B''$  herkäme. Da hier  $n_2 > n_1$  angenommen ist, ist das von  $C''$  ausgehende stark divergente Bündel durch die Brechung in das von  $B''$  ausgehende weniger divergente Bündel übergeführt worden.

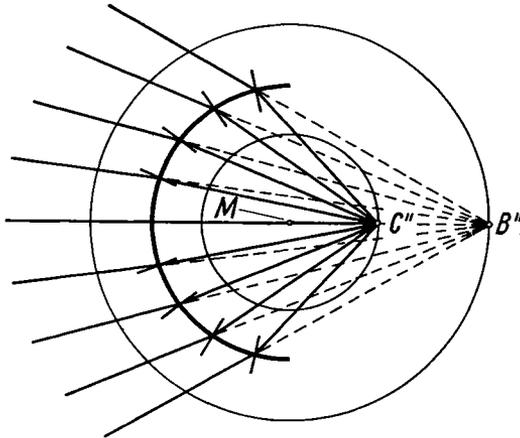


Abb. 71. Zur Erklärung der aberrationsfreien Punkte ( $C''$  und  $B''$ ) bei der Lichtbrechung an einer Kugelfläche

beliebig weit geöffnetes Strahlenbündel wird so gebrochen, als ob es von  $B''$  herkäme. Da hier  $n_2 > n_1$  angenommen ist, ist das von  $C''$  ausgehende stark divergente Bündel durch die Brechung in das von  $B''$  ausgehende weniger divergente Bündel übergeführt worden.

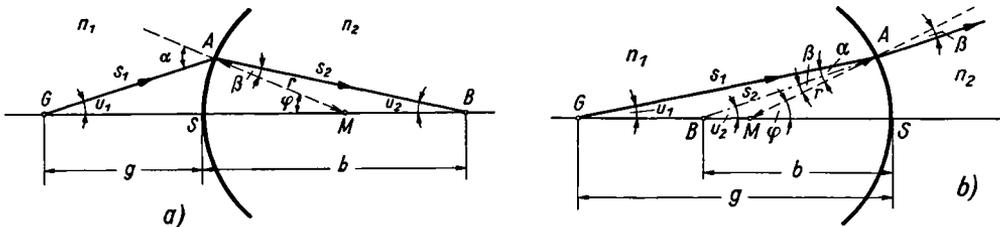


Abb. 72. Abbildung eines Achsenpunktes  $G$  durch eine konvexe (a) bzw. konkave (b) brechende Kugelfläche

Abb. 72 stellt nochmals zwei Meridianschnitte durch eine brechende Kugelfläche dar, wobei  $n_2 > n_1$ , also das Medium auf der rechten Seite optisch dichter ist als das auf der linken Seite der brechenden Fläche. Im Falle der Abb. 72a haben wir es für einen im Medium 1 befindlichen Beobachter mit einer konvexen, in Abb. 72b mit einer konkaven Trennungsfäche zu tun. Im Medium 1 befindet sich ein leuchtender Punkt  $G$ , den wir mit dem Kugelzentrum  $M$  verbinden. Die Verbindungslinie bzw.

ihre Verlängerung über  $M$  hinaus schneidet die Kugelfläche im Scheitelpunkte  $S$ . Wir nennen  $BM$  die optische Achse. Ein von  $G$  unter dem Winkel  $u_1$  gegen die Achse ausgehender Strahl schneidet im Falle der Abb. 72a nach Brechung an der Kugelfläche bei  $A$  die Achse in einem im Medium 2 liegenden reellen Punkt  $B$ , dem Bildpunkt von  $G$ ; im Falle der Abb. 72b dagegen wird der Strahl so in das zweite Medium hereingebrochen, daß seine rückwärtige Verlängerung die optische Achse in dem virtuellen, im Medium 1 liegenden Bildpunkt  $B$  schneidet. Wir nennen den Abstand  $GS$  des Punktes  $G$  vom Scheitel der Fläche die Gegenstandsweite  $g$  und den Abstand des Bildpunktes von  $S$  die Bildweite  $b$ ; beide Größen werden auch häufig als Scheitel- oder Schnittweiten bezeichnet. Über das Vorzeichen der angegebenen Größen treffen wir folgende Verabredung: Bei allen unseren Verabredungen verlaufe die Lichtrichtung stets von links nach rechts. Der Radius  $r$  der brechenden Fläche sei positiv, wenn diese nach der Seite, von welcher das Licht vom Gegenstandsraum her einfällt, konvex ist; ist die Fläche konkav, wird  $r$  negativ angesetzt. Die Gegenstandsweite  $g$  und die Bildweite  $b$  werden stets vom Scheitelpunkt der Fläche aus gezählt, und zwar  $g$  positiv nach links,  $b$  positiv nach rechts. Die Strahlängen  $s_1$  und  $s_2$  werden in demselben Sinne wie  $g$  und  $b$  gerechnet. Wir zählen ferner die Richtung eines Gegenstandes senkrecht zur Achse positiv nach oben und die eines Bildes positiv nach unten<sup>1)</sup>).

Aus den Abb. 72a und 72b finden wir auf Grund des Sinussatzes, den wir auf die Dreiecke  $GAM$  und  $BAM$  anwenden:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} = \frac{GM}{GA} \quad \text{und} \quad \frac{\sin \beta}{\sin \varphi} = \frac{BM}{BA}.$$

Nach dem Brechungsgesetz ist aber  $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$ , so daß sich aus obigen Gl. nach Erweiterung mit  $n_1$  bzw.  $n_2$  ergibt:

$$n_1 \frac{GM}{GA} = n_2 \frac{BM}{BA}.$$

Wie man aus der Abb. 72a entnimmt, ist aber  $GM = g + r$  und  $BM = b - r$ ; setzen wir ferner  $GA = s_1$  und  $BA = s_2$ , so erhalten wir:

$$(16) \quad n_1 \cdot \frac{g+r}{s_1} = n_2 \cdot \frac{b-r}{s_2}.$$

Benutzen wir Abb. 72b, so haben wir

$GM = g - |r| = g + r$ ,  $BM = |b| - |r| = r - b$  und  $AB = |s_2| = -s_2$  zu setzen und erhalten dann dieselbe Gleichung.

<sup>1)</sup> Diese Vorzeichenwahl wird in der Optik als das anschauliche System bezeichnet; sie ist natürlich eine willkürliche und wurde deswegen gewählt, weil bei den elementaren Abbildungsvorgängen die Objekte reell vor den abbildenden Systemen (bei unserer Darstellung also links) sich befinden, die Gegenstandsweite also positiv von der ersten abbildenden Fläche aus gerechnet wird, und weil bei der Sammellinse mit positiver Brennweite das Bild eine zum Objekt umgekehrte Lage aufweist. Im Gegensatz dazu findet man in vielen Lehrbüchern und besonders in der rechnenden Optik das sog. rationale System, bei dem alle Strecken positiv im Sinne der Lichtbewegung und negativ im entgegengesetzten Sinne gerechnet werden. In diesem Fall wird dann auch ein dem Objekt gleichgerichtetes Bild als positiv bezeichnet. In diesem System hat dann sowohl die Sammellinse wie auch die Zerstreuungslinse eine positive und eine negative Brennweite, während bei dem von uns benutzten anschaulichen System eine Sammellinse stets positive und eine Zerstreuungslinse stets negative Brennweiten erhält. Beide Systeme haben ihre Vorteile und Nachteile, eine vollkommene Einigung wird sich daher kaum erreichen lassen. Der Leser tut daher gut, wenn er sich bei Benutzung anderer Werke zuerst über die in ihnen benutzte Vorzeichenwahl orientiert, damit das Verständnis des Stoffes nicht an der Tücke der Vorzeichen scheitert.

<sup>2)</sup> Zu beachten ist dabei, daß wir hier die Vorzeichen für Bildweite, Brennweiten, Krümmungsradien umgekehrt wählen wie bei den Hohlspiegeln.