GESCHICHTE
DER
ELEMENTAR-MATHEMATIK

IN SYSTEMATISCHER DARSTELLUNG
MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG
DER FACHWÖRTER

VON

DR. JOHANNES TROPFKE
OBERSTUDIENDIREKTOR AN DER KIRSCHNER-SCHULE ZU BERLIN

ZWEITER BAND

ALLGEMEINE ARITHMETIK

DRITTE, VERBESSERTE UND VERMEHRTE AUFLAGE

BERLIN UND LEIPZIG 1933
WALTER DE GRUYTER & CO.
VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG / J. GUTTENTAG, VERLAGSBUCHHANDLUNG / GEORG REIMER / KARL J. TRÜBNER / VEIT & COMP.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.
Berlin W 10, Genthiner Straße 38.

Archiv-Nr. 12 28 33

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig

Vorwort.

Die am Schluß eines jeden Bandes angehängte Vergleichstafel der Seiten- und Anmerkungszahlen der zweiten und dritten Auflage ermöglicht die Benutzung des großen Namen- und Sachverzeichnisses am Ende des Band VII der zweiten Auflage.

Der letzte Band der dritten Auflage wird ein neues vervollständigtes Namen- und Sachverzeichnis aller Bände bringen.

Weihnachten 1931 starb Heinrich Wieleitner, seit drei Jahrzehnten mein treuer Berater und Freund; die gesamte mathematisch-historische Forschung leidet an dem schweren Verlust. Für ihn halfen bei der Drucklegung dieses Bandes seine jungen Mitarbeiter Kurt Vogel-München und Jos. E. Hofmann-Nördlingen. Bereitwilligst hatte sich J. Ruska wieder zur Verfügung gestellt, so belastet er mit seinen eigenen Arbeiten auch ist. Dieser vielseitigen, wertvollen Unterstützung wäre das Gelingen zu danken.

Berlin, Januar 1933.

Der Verfasser.

Inhalt.

Allgemeine Arithmetik.

ALLGEMEINE ARITHMETIK

A. Die algebraische Ausdrucksweise.

I. Allgemeiner Überblick.

Keine Wissenschaft kann sich eines so mächtigen Hilfsmittels rühmen, wie es die Mathematik in der Algebra besitzt. Die Philosophie versuchte ihr nachzuahmen; doch trotz der Beteiligung des Großmeisters LEIBNIZ blieb ihre Formelsprache in den Kinderschuhen. Nur der Chemie glückte es, in ihren Konstitutionsausdrücken dem Vorbilde etwas nahezukommen. Während aber die chemische Formel uns allein eine Anschauung des inneren Zusammenhangs für den durch sie dargestellten Stoff liefert, also uns nur einen Tatbestand vorführt, erfand sich die Mathematik Operationszeichen, die der Formel gleichsam Leben einhauchen und sie zu dem edlen Werkzeug machten, das in der Hand des genialen Mathematikers den Meißel zu staunenswerten Wunderwerken bildet. Aber dieser Meißel ist nicht das tote Eisenstück des technischen Künstlers; eigenes Leben birgt er und wirkt, selbst geschaffen, auf das Schaffende befruchtend zurück. Wie plötzlich wuchs die Lehre des Unendlichen nach tausendjähriger, langsamer Entwicklung, die oft einem Stillstand gleichkam, zu glänzenden, alles überstrahlenden Leistungen empor, als ein LEIBNIZ ihr den Algorithmus der Differential- und Integralrechnung erdachte! Wie oft wurde die Frage aufgeworfen, was für Erfolge die Altmeister griechischer Mathematik zu verzeichnen gehabt hätten, wenn sie im Besitz unserer Ziffern- und Formelsprache gewesen wären! Nichts regt den Geschichtsforscher mehr an, als die Betrachtung der allmählichen Entwicklung solcher Hilfsmittel, die der menschliche Geist ersann, um sich der in unzugänglicher Erhabenheit thronenden, dem Irdischen in ihrer ganzen Fülle stets verborgenen Wahrheit zu nähern. Langsam, nur sehr langsam sind diese Hilfsmittel dem Menschen zu dem geworden, was sie ihm heute sind. Unzählig vieler Feilenstriche hatte es bedurft, manche plötzlich auftretende Scharte mußte wieder ausgewetzt werden, bis der Mathematiker die schneidige Waffe in der Hand hatte, mit der er einen siegreichen Angriff auf die sich ihm entgegenstellenden Probleme machen konnte.

Die Geschichte der algebraischen Sprache und Schrift liefert uns durchaus kein einheitliches Bild. Eine Zusammenfassung unbewußter und bewußter Neuerungen, scheint auch sie unter dem großen Gesetz der Lebewesen zu stehen, dem Prinzip vom Überleben des Tüchtigeren. Praktische Neuerungen verschaffen sich von selbst Geltung, ungeeignete sinken nach längerem oder kürzerem Gebrauch in die Vergessenheit zurück. Die Gewohnheit ist der größte Gegner des Fortschritts. Wie hartnäckig war der Kampf, ehe die Dezimalteilung zur Geltung kam, ehe die Proportionsform durch die Gleichung verdrängt wurde, ehe die indisch-arabische Ziffer, der allgemeine Buchstabe eine Weltmathematik einleiten konnte!

Überblicken wir die Geschichte der algebraischen Ausdrucksweise in großen Zügen, so können wir im wesentlichen drei Stufen der Entwicklung unterscheiden, die freilich ineinander übergreifen: die rhetorische, die synkopierte und die symbolische Algebra.[1]

In der ersten Periode herrscht das Wort. Die Rechnung wird ohne Benutzung von Zeichen auseinandergesetzt; nur öfters wiederkehrende Redewendungen bilden sich als Fachausdrücke heraus. Auf dieser untersten Stufe stehen die Griechen bis in die ersten Jahrhunderte n. Chr., die Ostaraber, die Perser, die Westaraber bis zum dreizehnten Jahrhundert, die mittelalterlichen Mathematiker, wie LEONARDO von Pisa († 1250?), JORDANUS NEMORARIUS († 1237?) und ihre Schüler bis zu REGIOMONTANUS (1436—1476). Bei den Arabern wird die Vermeidung jeglichen Zeichens so weit getrieben, daß selbst die Zahlen durch Worte ersetzt werden.[2]

Der Übergang zur nächsten Periode liegt auf der Hand. Häufig gebrauchte Ausdrücke werden im Text abgekürzt; die gewählten Abkürzungen entziehen sich jedoch noch nicht dem Satzbau. Der bedeutendste Vertreter dieser Entwicklungstufe ist der griechische Arithmetiker DIOPHANTOS von Alexandria (zweite Hälfte des dritten Jahrhunderts n. Chr.); die Ἀριθμητικά[I 124] sind zugleich das einzige Werk aus der älteren uns erhaltenen Literatur. Seine großartigen Leistungen erscheinen fast unvermittelt in der Geschichte der Algebra; über Arbeiten von Vorgängern, die uns die Entstehung der Diophantischen Schreibart und Methode erklären könnten, schweigt die

[1] NESSELMANN[I 316], S. 302. — [2] Vgl. F. WOEPCKE, *Recherches sur l'histoire des sciences math. chez les orientaux*, Journal Asiat. 4_5, 1854, S. 349—350, auch selbständig, Paris 1855, S. 2. In Tabellen jeder Art, magischen Quadraten u. ä. wenden dagegen die Araber die Ziffern oder die semitisch-griechischen Buchstabensymbole an.

Überlieferung und läßt den Vermutungen über die Bildung einer Algebra in Griechenland freien Spielraum.[3] Für die unbekannte Zahl (*πλῆθος μονάδων ἄλογον* = unbestimmte Menge von Einheiten), den *ἀριθμός* an sich, schreibt DIOPHANT ein Zeichen, ähnlich einem Schlußsigma mit einem Merkstrich ς′, im Plural ςς̃; es steht dies ς′ demnach an der Stelle des heutigen x. Nach einigen soll ein Schlußsigma darum genommen worden sein, weil es der einzige griechische Buchstabe ist, der nicht beim Zahlenschreiben von den Griechen benutzt wurde, also allein von allen noch zur Verfügung stand. Nach anderen — und dies dürfte die ansprechendere Erklärung sein — ist ς′ kein Schlußsigma, sondern eine Ligatur für *αρ*, die ersten beiden Buchstaben des Wortes *ἀριθμός*.[4] Konstante Größen drückt DIOPHANT nicht durch die einfachen Zahlen allein aus, sondern fügt ihnen die Benennung „Einheiten" (*μονάδες*, abgekürzt μ°) hinzu. So liest man ςς̃ $\bar{\iota}$ modern als $10x$, ςς̃ $\overline{\iota\alpha}$ als $11x$, μ° $\bar{\lambda}$ als 30, μ° $\overline{\iota\varepsilon}$ als 15. Die Koeffizienten werden nachgestellt. Beachtenswert ist, daß erstens diese Abkürzungen nicht durchgängig benutzt, sondern hin und wieder auch ausgeschrieben werden, zweitens, daß sie

[3] Vergleiche auch den griechischen, wohl in Ägypten entstandenen Papyrus Michigan 620, der Fragmente dreier algebraischen Aufgaben — Gleichungen mit mehreren Unbekannten (s. Bd. III, B. 3) — enthält, die ein noch etwas schärferes symbolartiges algebraisches Rechnen zeigen. Es steht noch nicht fest, ob dieser Papyrus vor- oder nachdiophantisch ist. FR. E. ROBBINS, *P. Mich. 620: A series of arithmetical problems*, Class. philology, 24, 1929, S. 321 bis 329; — L. C. KARPINSKY and FR. E. ROBBINS, *The introduction of algebraic equations in Greece*; Science 70 (1929), S. 311—314. — K. VOGEL, *Die algebraischen Probleme der P. Mich. 620.* Class. philology 25, 1930, S. 373—375; *Eine neue Quelle ältester griechischer Algebra*, Z. math. nat. Unt. 62 (1931), S. 266—271. — Vgl. ferner den Wiener Papyrus 19996. H. GERSTINGER, H. OELLACHER, K. VOGEL, *Eine stereometrische Aufgabensammlung im Papyrus Graecus Vindobonensis* 19996. Griech. liter. Papyri I. Papyrussammlung Nationalbibl. Wien. Wien 1932. — Diese Papyrusstückchen sind um so wichtiger, als sie uns wirklich die Originalschreibart der damaligen Zeit überliefern. Bei den erhaltenen Diophanthandschriften (die älteste, Madrid, stammt aus dem 13. Jahrhundert) weiß man nie genau, ob sie uns die streng originale Zeichenschrift des DIOPHANT wirklich wiedergeben. In den 1000 Jahren kann von Abschrift zu Abschrift Abweichung sich eingeschlichen oder absichtlich hineingebracht sein. Das ς-ähnliche Zeichen für *ἀριθμός* hat im P. Mich. 620 einen kleinen schrägen Strich ς̀ oben rechts; ohne diesen heißt es *δραχμή* und bedeutet dann wie das gleichzeitig auftretende *μονάδες* die bekannten Einheiten. Statt des diophantischen *ἴσοι εἰσίν* wird *γίγνεται* benutzt und mit / abgekürzt, so daß geradezu von einem Gleichheitszeichen gesprochen werden kann. Dasselbe Zeichen hat auch der Wiener Papyrus 19996; hier finden sich noch Zeichen für *γίνεται* (= es ergibt sich) und *λοιπόν* (Rest). — [4] T. L. HEATH, *Diophantus of Alexandria*[1 124], cap. III, S. 32—37.

durch rechts oben darangeschriebene Endungen dem Satzbau gemäß dekliniert werden können. Sie besitzen folglich nicht den Charakter von Symbolen, sondern sind die nur angedeuteten Fachwörter selbst. Als Beispiel sei die Gleichung $10x + 30 = 11x + 15$ angeführt, die bei Diophant folgendermaßen aussieht:

ςς$^{\text{οἰ}}$ ἄρα ι μ$^{\text{ο}}$ λ ἴσοι εἰσὶν ςς$^{\text{οῖς}}$ $\overline{\text{ια}}$ μονάσι $\overline{\text{ιε}}$,[5]

wörtlich übersetzt: „also 10 Zahlen (und) 30 Einheiten sind gleich 11 Zahlen (und) 15 Einheiten". Hier zeigt uns ςς$^{\text{οἰ}}$ und ςς$^{\text{οῖς}}$ die Biegung, *μονάσι* das ausgeschriebene Wort statt μ$^{\text{ο}}$. Das Wort „und" ist weggelassen, so daß einfaches Aneinanderschreiben zweier Größen die Rechnungsart des Addierens andeutet, wie schon bei den Stammbrüchen des Ahmes (vgl. Bd. I, S. 150—154). Das abkürzende *ις* (= *ἴσος*, gleich) wird oft geradezu als Gleichheitszeichen benutzt.

Andere Diophantische Abkürzungen sind δ$^{\text{υ}}$ (= *δύναμις*, Quadrat) für x^2, κ$^{\text{υ}}$ (= *κύβος*, Würfel) für x^3, δδ$^{\text{υ}}$ (= *δυναμοδύναμις*)[6] für x^4, δκ$^{\text{υ}}$ (= *δυναμόκυβος*) für x^5, κκ$^{\text{υ}}$ (= *κυβόκυβος*) für x^6. Für Brüche sind besondere Bezeichnungen vorhanden. Den Stammbruch der unbekannten Zahl $\frac{1}{x}$ nennt Diophant *ἀριθμοστόν*; ähnlich bezeichnet er $\frac{1}{x^2}$ mit *δυναμοστόν* usf., $\frac{1}{x^6}$ mit *κυβοκυβοστόν*. Als Symbol dient eine χ-ähnliche Ligatur, so daß δ$^{\text{υχ}}$ die Abkürzung für $\frac{1}{x^2}$ darstellt und etwa $\frac{300}{x^2}$ durch δ$^{\text{υχ}}$ $\bar{\tau}$, ähnlich $\frac{8}{x}$ durch ς′χ$\bar{\eta}$ ausgedrückt wird. Die Subtraktion wird durch das Wort *λείψει* (*λεῖψις*, das Negative; Gegensatz *ὕπαρξις*, das Positive) angegeben; abgekürzt wird *λείψει* (bzw. *λείψας* oder *λιπόν*) meistens durch ein ψ, und zwar ein umgekehrtes ⋔, so daß es nicht mit der Zahl ψ′ = 700 verwechselt werden kann. Dies Zeichen läßt sich vielleicht auch als eine Ligatur für λι erklären, deren Benutzung schon für Heron (um 100 v. Chr.) wahrscheinlich gemacht wird.[7] Die Notwendigkeit, eine Multiplikation anzudeuten, fällt weg, da nur Zahlenkoeffizienten auftreten. Die

---

[5] Nach Nesselmann[1316], S. 301; etwas abweichend Diophantus, ed. Tannery[1124], Leipzig 1893, S. 80. — [6] Dies schon bei Heron (erstes Jahrhundert v. Chr.?). — *Vermessungslehre*, ed. Schöne[1308], S. 48, Z. 11, 19, 21 — festzustellende Auftreten des Wortes *δυναμοδύναμις*, das über die dreidimensionale Geometrie hinausführt, läßt leise Andeutungen über die frühere Bildung einer griechischen Algebra erkennen. — [7] Heron, *Vermessungslehre*[1308], S. 156, Z. 8 u. 10 und die Anmerkung. Vgl. P. Tannery, *Sur le symbole de soustraction chez les Grecs*, Bibl. math. 5_3, 1904, S. 5—8.

Division wird mit dem Worte ἐν μορίῳ oder μορίου (μόριον = Teil, Bruch) vorgeschrieben. Die Zeile

$$\delta^{\bar{v}}\ \bar{\zeta}\ \lambda\epsilon\acute{\iota}\psi\epsilon\iota\ \varsigma\bar{\varsigma}\ \overline{\varkappa\delta}\ \mu o\varrho\acute{\iota}o\upsilon\ \delta^{\bar{v}}\ \bar{\alpha}\ \mu^{\circ}\ \overline{\iota\beta}\ \lambda\epsilon\acute{\iota}\psi\epsilon\iota\ \varsigma\bar{\varsigma}\ \bar{\zeta},$$ [8]

wo $\bar{\zeta} = 7,\ \overline{\varkappa\delta} = 24,\ \bar{\alpha} = 1,\ \overline{\iota\beta} = 12,$

deckt sich sonach mit unserem algebraischen Bruch:

$$\frac{7x^2 - 24x}{x^2 + 12 - 7x}.$$

Abgesehen von diesen Kürzungen sind bei Diophant sämtliche algebraischen Herleitungen und Operationen ausführlich mit Worten beschrieben.

Diophants Algebra steht nicht mehr im Anfangsstadium der Entwicklung, so wenig wir auch von einer vordiophantischen Algebra wissen; im Keime bahnt sich eine echte Zeichensprache an. Leider fehlten nach Diophant führende Geister, die auf seinen Bahnen fortschritten. Die Araber, denen sonst in der Mathematik eine so hohe Rolle zufiel, blieben, selbst nachdem sie Diophants Werk kennen gelernt hatten — um 970 n. Chr. verfaßte Abu 'lwafā' (940—998, Bagdad) einen Kommentar dazu[9] —, beinahe durchgängig bei ihrer rein rethorischen Form stehen. Nur eine arabische, anonyme Schrift in lateinischer Übersetzung ist bekannt, die für x^2, x und die Konstanten Buchstabenabkürzungen (c = census = x^2; r = radix = x; d = dragma[3] = Münze, Konstante) benutzt; die gleichzeitige Verwendung eines Punktes bei negativen Zahlen und die Schreibung der Brüche verrät indischen Einschlag (vgl. S. 11).[10]

[8] Nesselmann[I 316], S. 299; Diophantus, Lib. IV, Aufg. 42, ed. Tannery[I 124], S. 286. — [9] Nesselmann[I 316], S. 274. — [10] B. Boncompagni, *Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese*, Roma 1851, S. 36ff.; F. Woepcke, *Recherches*[II 2], Journ. Asiat. 4_5, 1854, S. 373f. „*In scribendo enim haec regula teneatur, numero censuum littera c, numero radicum littera r, deorsum virgulas habentes, subterius apponantur. Dragma vero sine litteris virgulas habeant, quotiens haec sine diminutione proponuntur. Verbi gratia, duo census, tres radices, 4 dragmae sic figurentur* $\begin{smallmatrix}2 & 3 & 4\\ \underline{c} & \underline{r} & \underline{d}\end{smallmatrix}$. *Duae tertiae census, tres quartae radicis, quatuor quintae unius dragmae hoc modo figurentur*

$$\begin{matrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5\\ \underline{c} & \underline{r} & \underline{d}\end{matrix}$$

(Beim Schreiben möge folgende Regel behalten werden, der Zahl der x^2 werde der Buchstabe c, der Zahl der Wurzeln der Buchstabe r, unterstrichen, darunter beigefügt werden, dragma können Striche ohne Buchstaben erhalten, so oft solche Aufgaben ohne Subtraktion gestellt werden. Beispiele: $2x^2 + 3x + 4$ und $\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{4}{5}d$. Tritt Subtraktion auf, so benutzt der

Eine andere anonyme persische Handschrift aus dem 15. Jahrhundert bildet in genauer Nachahmung DIOPHANTS Potenzsymbole bis x^{10}, bzw. x^{-10}.[11] Die Araber wurden maßgebend für diejenigen, die unmittelbar oder mittelbar aus ihren Arbeiten schöpften, wie für LEONARDO von Pisa (1228, *Liber abbaci*), JORDANUS NEMORARIUS († 1237?), ja bis zu den Zeiten REGIOMONTANS (1436—1476). Erst im fünfzehnten Jahrhundert wird der Schritt wieder getan, den wir über ein Jahrtausend früher bei DIOPHANT vollzogen sahen. Langsam stellen sich immer gebräuchlicher werdende Abkürzungen ein. Ganz allmählich macht sich aber auch ein neues Prinzip geltend und leitet damit die dritte Entwicklungsstufe ein: es erscheinen symbolartige Zeichen. Bei LUCA PACIOLI (1494) wird für plus und minus $\tilde{p}$ und $\tilde{m}$ gebraucht, und dieselben Abkürzungen galten noch lange nach ihm in Italien und Frankreich; in Deutschland aber treten die Zeichen + und — auf, zum erstenmal in Handschriften aus der Zeit um 1480 und im Druck bei JOHANNES WIDMAN von Eger (Rechenbuch 1489[I 200]) (siehe S. 15). Ebenso spielen in der deutschen Behandlungsform der Algebra, die unter dem Namen der *Coß* bekannt ist, eigenartige Potenzsymbole, die die italienischen Fachausdrücke, bzw. Abkürzungen ersetzen, eine Hauptrolle (vgl. Potenzlehre). Ihre Erfinder und Benutzer sind sich des Wertes einer solchen Neuerung wohl bewußt und empfehlen angelegentlichst[12] den Gebrauch dieser sogenannten *Charaktere.*[13] Die

---

Verfasser daruntergesetzte Punkte: „*duo census minus tribus radicibus, duo census minus quatuor dragmis, quinque radices minus duobus censibus, quinque radices minus quatuor dragmis sic notantur*

$$\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 5 & 5 \\ \underline{c} & \underline{c} & \underline{r} & \underline{r} \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ \underset{\cdot}{r} & \underset{\cdot}{d} & \underset{\cdot}{c} & \underset{\cdot}{d} \end{array}$$

Beispiele: $2x^2 - 3x$, $2x^2 - 4$, $5x - 2x^2$, $5x - 4$. Vgl. auch CANTOR, 1^3, S. 803—804. Möglich ist auch, daß der lateinische Übersetzer diese Neuerungen erst hineingebracht hat. — [11] F. WOEPCKE, *Recherches*[II 2], S. 374—380. — [12] M. STIFEL, einer der bekanntesten Vertreter der *Coß* (1486/87 Eßlingen — 1567 Jena), fordert geradezu seinen Leser auf, bei der Lektüre der *Ars magna*[74] des Italieners CARDANO, des damals bedeutendsten algebraischen Werkes, die hier gebräuchliche Ausdrucksweise in die „cossischen" Zeichen umzusetzen: *Assuescas, signa eius, quibus ipse utitur, transfigurare ad signa nostra. Quamvis enim signa quibus ipse utitur, uetustiora sint nostris, tamen nostra signa* (*meo quidem iudicio*) *illis sunt commodiora* (Gewöhne dich daran, die von ihm gebrauchten Zeichen in die unsrigen umzusetzen. Wenn auch seine Zeichen die älteren sind, so sind doch die unsrigen, wenigstens meiner Meinung nach, die bequemeren); *Arithmetica integra*, 1544[123], Appendix, S. 306, Z. 14f. — [13] CHR. RUDOLFF, *Coß* von 1525[835], Buch I, Kap. 5, Bl. Dij r⁰: Lernt im Bd. III, Anh. I gegebene Übersicht zeigt, wie sich nach und nach unsere modernen Zeichen und Schreibarten einstellten. Das große Verdienst des französischen Mathematikers Fr. Vieta (1540—1603; Paris, Staatsbeamter) ist es, in Gleichungen auch statt der Zahlenkoeffizienten Buchstaben eingeführt zu haben (siehe S. 46, 53), die eine wesentliche Zusammenziehung allgemeinerer Herleitungen ermöglichten. Bis zum siebzehnten Jahrhundert ist die langatmige Ausdrucksweise älterer Schriftsteller noch nicht ganz überwunden. Wesentliche Fortschritte verdankt die algebraische Schreibart den Engländern Th. Harriot (1560—1621) und W. Oughtred (1574—1660; Landpfarrer). Erst in Descartes (1596—1650), Leibniz (1646—1716), Newton (1642—1727) und Euler (1707—1783) erscheint der Gipfel erklommen. Eine Algebra ist geschaffen, die es gestattet, ohne ein verbindendes Wort mathematische Gedankengänge in einer jedem Fachmann verständlichen Form vorzuführen: die mathematische, internationale Kurzschrift ist endlich erfunden.

Wir haben in kurzen Strichen diejenige Entwicklung der Algebra verfolgt, die in gerader Linie bis zur Gegenwart führt. Wir hätten bei rein geschichtlicher Behandlung des Stoffes noch auf andere Versuche, algebraisches Rechnen zu erfinden, einzugehen gehabt. Diese Versuche, wie diejenigen der gelehrten Inder oder der späteren Westaraber, blieben durchaus nicht in den Anfängen stecken, sondern brachten es sogar bis zum Ausbau einer symbolischen Algebra, der sich freilich eine Weiterentwicklung bis auf die Jetztzeit nicht anschloß. Schon bei dem ältesten Kulturvolk, den Ägyptern, kann man die Benutzung mathematischer Hieroglyphen nachweisen, allerdings immer in dem Sinne, daß sie Wortbedeutung haben und auch in nicht mathematischen Texten vorkommen, so daß man schließlich doch nur von einer „rhetorischen“ Algebra sprechen kann. Im Papyrus Rhind (Bd. I, S. 72 f.), der ein altägyptisches mathematisches Lehrbuch, nach noch älteren Vorlagen von einem Schreiber Ahmes ausgearbeitet (etwa aus dem siebzehnten bis zwanzigsten Jahrhundert v. Chr.), enthält, werden u. a. schon Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten behandelt. Die Hieroglyphe für das Wort „Unbekannte“ 'ḥ', gelesen etwa *acha*, früher *hau* (= Haufen), wird wie unser x verwendet. Ein Schriftzeichen, das ausschreitende Beine darstellt, gilt als Zeichen der Addition, wenn die Beine in der Richtung der abgebildeten Tier- und Menschenköpfe zu gehen scheinen (eigentlich das Verbum ‚herein-

die zalen der coſs ausſprechen vnnd durch ire charakter erkennen vnd ſchreiben; vgl. ferner Stifels Neubearbeitung der Rudolffschen Coß[1338], Königsberg i. Pr. 1553, Bl. 62 v°.

gehen'),[14] bei entgegengesetzter Richtung als Zeichen der Subtraktion.[15] Ferner ist ein Wortzeichen für die Gleichheit,[16] ein solches für die Differenz,[17] in anderen Papyri sogar eines für die Quadratwurzel[18] nachzuweisen. Auch die Methodik hat schon einen hohen Stand: den Lösungen der einzelnen Aufgaben wird eine Ausrechnung (Beweis, Probe: *ššm·t,* gelesen etwa *seschmet*) beigefügt.[19] Noch weiter hinauf, bis in das dritte Jahrtausend v. Chr., reichen altbabylonische Funde, Tontäfelchen mit Zahlentabellen und Rechnungen, auf denen man Zeichen für die vier Rechenoperationen, Ideogramme für Quadrat und Cubus, für Nenner, für Resultat deuten kann.[20] Keilschrifttäfelchen aus derselben fernen Zeit,[21] enthalten Aufgaben, deren rechnerische Durchführungen Zahlenfolgen zeigen, wie wir sie bei der Lösung quadratischer Gleichungen hinschreiben.

Zu einer wirklichen Algebra gelangten die Inder. Unsere geschichtliche Kenntnis der indischen Mathematik setzt bedeutend später ein als man allgemein glaubt. Es ist sehr wahrscheinlich (vgl. Bd. I, S. 24—26), daß die indische Mathematik in der Hauptsache auf griechischer Mathematik aufgebaut ist; die Kenntnis Diophantischer Algebra kann bestimmt nachgewiesen werden. Die Überlieferung ist allerdings für Griechenland bei dem großen Niedergang der mathematischen Wissenschaft in den nachchristlichen Jahrhunderten sehr dürftig; sogar bei DIOPHANT beklagen wir den Verlust eines erheblichen Teils seiner Schriften. Somit kann man nicht genau wissen, wie weit die Inder griechische Mathematik übernahmen und wo ihre eigenen Fortschritte einsetzen. Griechische Mathematik drang übrigens auch bis China, fand dort sogar viel früher fruchtbaren Boden als in Indien. Manches mag dann auch von dort wieder nach Indien zurückgeflossen sein; war doch der Handelsverkehr schon im Altertum ein ausgedehnterer, als man gewöhnlich annimmt.

[14] Nur in einem Beispiel, Aufgabe Nr. 28; sonst wird die Addition durch einfaches Nebeneinandersetzen ausgedrückt. Vgl. K. VOGEL, *Grundlagen*[I 154a] S. 12. — [15] EISENLOHR[I 381], S. 22—23. — [16] Ein *m* in der Bedeutung ‚ist soviel wie' EISENLOHR[I 381], S. 23, K. VOGEL[I 154a], S. 9, Anm. 35. — [17] EISENLOHR[I 381], S. 26. — [18] Berliner Papyrus 6619. Vgl. H. v. SCHACK-SCHACKENBURG, Z. f. ägypt. Sprach- und Altertumskunde 38, 1900, S. 135f.; ferner im Kahunfragment VIII, 40[I 921] und wiederholt im Papyrus Moskau, vgl. W. W. STRUVE, *Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau*, Quellen und Studien A 1, Berlin 1930, S. 31. — [19] Vgl. VOGEL, *Grundlagen*[I 154a], S. 10. — [20] H. V. HILPRECHT, *The Babylonian Expedition*[I 1], S. 23—24. Vgl. G. REISNER, Sitzgsb. Ak. Wiss. Berlin 1896, S. 425/6; M. SIMON, *Geschichte der Mathematik im Altertum in Verbindung mit antiker Kulturgeschichte*, Berlin 1909, S. 114. — [21] O. NEUGEBAUER, *Beiträge zur Geschichte der babylonischen Arithmetik.* Quellen und Studien B 1, 1930, S. 120—130.

Die chinesischen Zeitdatierungen dürften wohl aber noch nicht außer allem Zweifel stehen.

Die Hauptvertreter der Glanzperiode der indischen Mathematik sind Āryabhaṭa (geb. 476 n. Chr.) und Brahmagupta (geb. 598 n. Chr.). Āryabhaṭa nennt die bekannte Größe *rūpakā* (Rupie; mit Zeichen versehene Münzen), die unbekannte *gulikā* (Kügelchen).[22] Bei Brahmagupta heißt die letztere allgemein: *yāvat tāvat* (*quantum tantum*),[23] ein Ausdruck, der schon in der älteren indischen Mathematik nachweisbar ist;[24] die Anfangssilben *rū* und *yā* dienen nun unmittelbar als Symbole. Die Addition geschieht durch einfaches Aneinandersetzen der *rū* und *yā*, die Subtraktion durch ein dem Subtrahendus übergesetztes Pünktchen. Hierbei sieht man sofort den ungeheuren Fortschritt gegenüber der Diophantischen Algebra. Während Diophant nur mit Differenzen, die einen positiven Wert ergeben, rechnet, wird das indische Pünktchen direkt zum Kennzeichen einer rein negativen Zahl, so daß hier also zum erstenmal in der Geschichte der Mathematik der Gegensatz zwischen Positiv und Negativ in Zeichen umgesetzt ist. Auch für die Potenzen der unbekannten Größe sind Abkürzungen vorhanden. *Varga* ist im Indischen ein Ausdruck für eine Gruppe gleichartiger Dinge, dann im besonderen für Quadrat, bzw. Quadratzahl (griech. *δύναμις*); *ghana* heißt Körper (griech. *κύβος*).[25] Die Anfangssilben dieser Wörter dienen dem indischen Mathematiker als Potenzsymbole. Er bildet die Reihe

$$\begin{aligned} va &= x^2, & va\ gha &= x^6,\\ gha &= x^3, & va\ va\ gha\ gh\bar{a}ta &= x^7,\\ va\ va &= x^4, & va\ va\ va &= x^8,\\ va\ gha\ gh\bar{a}ta &= x^5, & gha\ gha &= x^9.\end{aligned}$$ [26]

Dabei tritt ein weiterer wesentlicher Unterschied gegen Diophant hervor. Die Kombination der Bezeichnungen für die 2. und 3. Potenz ist bei diesem *δυναμόκυβος* und gleichwertig mit der 5. Potenz; bei den Indern ist jedoch *va gha* die 6. Potenz. Der Grieche addiert, wie wir heute sagen, die Exponenten, der Inder multipliziert sie. Es

22 Āryabhaṭa, ed. L. Rodet[1109], S. 403, Strophe XXX, S. 427—429. — 23 Brahmagupta, *Cuṭṭaca*, ch. XVIII, sect. III, ed. Colebrooke[1111], S. 344. Der indische Fachausdruck *yāvat tāvat* ist bis jetzt bei keinem arabischen Mathematiker als von den Indern übernommen nachweisbar; im Arabischen ist dieses Wortpaar überhaupt nicht üblich. Vgl. Ruska[1137], S. 60. — 24 Etwa 300 n. Chr. B. Datta, *The Jaina School*[1550], S. 119. — 25 Bhāskara, *Līlāvatī*, ch. II, sect. II, ed. Colebrooke[1111], S. 8, Anm. 5, S. 10, Anm. 1. — 26 Daselbst[1111], S. 10, Anm. 3. Die vollen Wörter will B. Datta[1550] auch schon um 300 n. Chr. nachweisen können. *The Jaina School*[1550], S. 137 u.

bedarf im Indischen erst des besonderen Zusatzes *ghāta*, wie in $x^5 = va\ gha\ ghāta$, um die Addition zu bewirken (vgl. S. 134).

Ein Zeichen der Multiplikation ist in *bhā* (*bhāvita*, das Hervorgebrachte), das dem Multiplikator nachgesetzt wird, vorhanden. Als Wurzelzeichen wird der Anfangsbuchstabe *c* des Wortes *caranī*[520] (= irrational) benutzt, so daß *ru* 3 *c* 450 *c* 75 *c* 54 die Summe $3 + \sqrt{450} + \sqrt{75} + \sqrt{54}$ und *c* 18 *c* $\dot{3}$ die Differenz $\sqrt{18} - \sqrt{3}$ bedeutet.[27] Mehrere Unbekannte werden durch die Farbwörter unterschieden; so wird die zweite bei Brahmagupta mit *kā* (*kālaka*, die schwarze), die dritte mit *nī* (*nīlaka*, die blaue), die vierte mit *pī* (*pītaka*, die gelbe) usw. bezeichnet.[28] Ein Gleichheitszeichen fehlt, wenn auch ein entsprechender Fachausdruck (*tulyau*, im Gleichgewicht sein) zuweilen gebraucht wird. Die Gleichheit wird angedeutet durch einfaches Übereinandersetzen der beiden Glieder der Gleichung. Unsere Rechnung:

$$1. \qquad 10x - 8 = x^2 + 1$$
$$2. \qquad -9 = x^2 - 10x$$

schreibt Brahmagupta:[29]

$$1. \begin{cases} y\bar{a}\ va\ 0\ y\bar{a}\ 10\ r\bar{u}\ \dot{8} \\ y\bar{a}\ va\ 1\ y\bar{a}\ 0\ r\bar{u}\ 1 \end{cases}, \text{ d. h. } 0x^2 + 10x - 8 = 1x^2 + 0x + 1$$

und:

$$2. \begin{cases} \qquad\qquad r\bar{u}\ \dot{9} \\ y\bar{a}\ va\ 1\ y\bar{a}\ \dot{1}0 \end{cases}, \text{ d. h. } \qquad -9 = 1x^2 - 10x.$$

Ein Beispiel mit mehreren Unbekannten lautet bei ihm:[30]

$$\begin{matrix} y\bar{a}\ 197\ k\bar{a}\ \dot{1}644\ n\bar{\imath}\ \dot{1}\ r\bar{u}\ 0 \\ y\bar{a}\ 0\ k\bar{a}\ 0\ n\bar{\imath}\ 0\ r\bar{u}\ 6302, \end{matrix}$$

modern:

$$197x - 1644y - z + 0 = 0x + 0y + 0z + 6302.$$

Noch weitere Fortschritte in der algebraischen Schreibweise finden sich in dem sogenannten Rechenbuch von Bakhshāli.[31] Man hielt dies auf Birkenrinde hergestellte Schriftstück früher für viel älter; die erhaltene Abschrift sollte aus dem siebenten bis neunten Jahrhundert stammen, nach der Sprache und dem Versmaß glaubte

27 Brahmagupta[1111], cap. 12, S. 342. — 28 Brahmagupta[1111], *Ganita*, ch. XVIII, sect. V, S. 348, Anm. 1, S. 355; Bhāskara, *Vījaganita*[1111], ch. I, sect. IV, S. 139, Anm. 1. Wahrscheinlich stammt die Benutzung der Farbenbezeichnungen aus China. — 29 Brahmagupta, *Cuttaca*, ch. XVIII, sect. IV, 49, ed. Colebrooke[1111], S. 346—347. — 30 Cap. XVIII, sect. V, Nr. 55[1111], S. 352; G. R. Kaye, *Indian mathematics*[1122], Tafel 26—(α), Nr. 4. — 31 R. Hoernle[1115], 17, Bombay 1888, S. 33—48, 275—279. B. Datta, *The Bakhshālī Mathematics*[1117], S. 1—60.

man neben anderen Gründen die Entstehung der Urschrift auf das dritte nachchristliche Jahrhundert ansetzen zu dürfen. Neuere Forscher (G. R. KAYE, vgl. I, S. 23—26) entnehmen vor allem aus der fortgeschrittenen algebraischen Form unter Widerlegung der früher vorgebrachten Schlußfolgerungen, daß es nicht vor dem zwölften Jahrhundert entstanden sein kann.

In der Wiedergabe der im Rechenbuch von Bakhshāli auftretenden Rechnungen erkennen wir den Beginn eines Überganges von der synkopierten zur symbolischen Algebra. Gruppen zusammengehöriger Zahlen, die wir heute in Klammern einschließen, werden durch ein geradliniges Rechteck eingerahmt. Als Gleichheitszeichen dient die Silbe *pha* (Anfang des entsprechenden Wortes *phalain* = gleich) oder *dṛ* (von *dṛśya* = gibt)[32]; dadurch wird es möglich, Gleichungen nicht in zwei Zeilen, wie bei BRAHMAGUPTA, sondern in eine Zeile zu schreiben. Die Addition wird durch *yu* (von *yuta*), die Subtraktion durch ein unserem Pluszeichen ähnliches Kreuz (wahrscheinlich ein *k* statt *ka* von *kanita* oder *kṣaya* = vermindert), die Division durch *bhâ* (von *bhâga* oder *bhâjita* = geteilt) angedeutet. Einfaches Aneinandersetzen der Zahlen oder der Zusatz *gu* (von *guṇa* oder *guṇita* = vervielfältigt)[33] bezeichnet die Multiplikation. Erinnern wir uns der Bd. I, S. 159 erwähnten indischen Art, Brüche zu schreiben, so können wir die Ausdrücke

$$\boxed{\begin{array}{ccc} 5 & 7 & \\ 1 & 1 & \textit{yu} \end{array}}\ \textit{pha}\ 12 \quad \text{und} \quad \boxed{\begin{array}{cc} 5 & 32 \\ 8 & 1 \end{array}}\ \textit{pha}\ 20$$ [34]

ferner

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & \textit{bhâ}\ 36 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2+ & 3 & 4+ & 5 & \end{array}\right|$$ [35]

entziffern und lesen sie als $\frac{5}{1}+\frac{7}{1}=12$, bzw. $\frac{5}{8}\cdot\frac{32}{1}=20$ und $\frac{36}{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})(1+\frac{1}{5})}$. Für die Einheit wird *rūpa*, für die unbekannte Zahl *śūnya* gebraucht. *Śūnya* bedeutet das Leere; wir lernten es als indisches Fachwort für die Ziffer Null (vgl. Bd. I, S. 9) kennen. Der Inder will also die Stelle der Unbekannten so lange leer gelassen haben, bis sie durch Ausrechnen gefunden ist. Nur folgerichtig erscheint uns demnach auch das Symbol, das für die unbekannte Zahl in der Regel eintritt, ein kleiner Kreis, der zugleich auch als Zifferzeichen für die Null gebraucht wird.[36] Wurzelzeichen ist *mū* (von *mula* = Pflanzenwurzel).

32 B. DATTA[I 117], S. 29. — 33 B. DATTA[I 117], S. 39. — 34 HOERNLE[I 115], S. 34, rechts Z. 19, S. 35, links Z. 39. — 35 B. DATTA[I 117], S. 40 Anm. — 36 B. DATTA[I 117], S. 23f.

$\left|\begin{array}{ccc} \bigcirc & 5 & \\ 1 & 1 & \textit{yu mū} \end{array}\right|$ ist zu lesen als $\sqrt{x+5}$ [37] und

$\left|\begin{array}{cccc} 11 & 5 & \textit{yu mū} & 4 \\ 1 & 1 & & 1 \end{array}\right|$ $\left|\begin{array}{cccc} 11 & 7^{+} & \textit{mū} & 2 \\ 1 & 1 & & 1 \end{array}\right|$

als $\sqrt{11+5} = 4$ und $\sqrt{11-7} = 2$. [38]

Bei mehreren Unbekannten wird nicht die Farbbezeichnung benutzt, sondern die Ordnungszahlen *pra* (von *prathama* = erste), *dvi* (von *dvitīya* = zweite), *tṛ* (von *tṛtīya* = dritte), *ca* (von *caturtha* = vierte) und *pañc* (von *pañcama* = fünfte).[39]

Es wurde bereits erwähnt (S. 4, 7), daß die Araber die symbolische Algebra der Inder nicht übernahmen, sondern zur alten rhetorischen Form zurückkehrten. Erst in verhältnismäßig später Zeit begannen westarabische Gelehrte, einen höheren Standpunkt einzunehmen. Die Entwicklung dieser neuen Zeichensprache ist noch nicht geschichtlich verfolgt; wir sehen sie in ziemlicher Vollkommenheit bei dem Andalusier Alqalaṣādī († 1477 oder 1486) verwertet. Ein uns erhaltenes Werk *Aufhebung des Schleiers der Wissenschaft des Ġubār* (*Ġubār*, Staub, hier im Sinne von „Rechnen", vgl. Bd. I, S. 28, 33f.) zeigt Zeichen für die Unbekannte mit ihren Potenzen, für die Quadratwurzel, für die Subtraktion u. a. m. In der Benutzung eines Gleichheitszeichens und einer Schreibart für Proportionen, die ähnlich der unsrigen ist, in der Erfassung des Exponentenbegriffes geht Alqalaṣādī sogar über die Inder hinaus.[40]

2. Geschichte der modernen Zeichen und Symbole.

Die zuletzt geschilderten Entwicklungsepochen der Algebra trugen zu ihrem modernen Ausbau nichts bei. Die heutige Form der algebraischen Symbolik nimmt ihren Anfang erst im fünfzehnten Jahrhundert. Ihre Ausbildung ging verhältnismäßig langsam vor sich. Die in Bd. III, Anh. I beigefügte Zusammenstellung wird am besten imstande sein, dieses allmähliche Wachstum zu veranschaulichen; sie gibt uns in geschichtlicher Folge das erste Auftreten der einzelnen Zeichen, Symbole usw., über die dann im besonderen an den angeführten Stellen gesprochen wird. Demselben Zweck soll auch eine in Bd. III, Anh. II gegebene Sammlung charakteristischer Aufgaben aus Werken der verschiedensten bedeutenderen Mathematiker dienen.

37 B. Datta[I 117], S. 68. — 38 B. Datta[I 117], S, 41, Anm. 1. — 39 B. Datta[I 117], S. 25. — 40 Vgl. F. Woepcke, *Recherches*[II 2], S. 352—353, 364.

Das größte Verdienst um die einheitliche Festsetzung der mathematischen Symbole hat LEIBNIZ:[41] er erkannte scharf und klar, von welcher Bedeutung geschickt gewählte Zeichen sind, und schuf selbst eine große Reihe von ihnen, deren Entwicklung und immer bessere Formgebung wir in seinen Schriften historisch deutlich verfolgen können.

Die neu gegründeten mathematischen Zeitschriften[42] sorgten in Deutschland für Vereinheitlichung und allgemeine Annahme der geeignetsten Symbole; die ausländischen Mathematiker schlossen sich mehr oder weniger schnell an, so daß die algebraische Zeichenschrift international wurde.

Der Ursprung der Zeichen + und — liegt im Dunkeln. Das Pluszeichen tritt in dem Rechenbuch[1200] des JOHANNES WIDMAN aus Eger (Leipzig, 1489; unpaginiert, Blatt I (6) r⁰) zuerst im Druck auf. Es wechselt hier das Zeichen + beliebig mit dem Wort „und“ ab; der Preisangabe 9 fl $\frac{1}{3}$ vñ $\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{5}$ Schilling folgt unmittelbar die Ausführung der Addition $\frac{1}{3}$ vñ $\frac{1}{4}$ vñ $\frac{1}{5}$. Ja das Pluszeichen erscheint auch da, wo gar keine Addition vorliegt, wie in der Überschrift (Blatt o (7) r⁰): Regula augmenti + decrementi. Zwei Seiten nach der zuerst hervorgehobenen Stelle (also Blatt I (7) r⁰) wird das Minuszeichen benutzt; es wird erklärt mit: was — ist dz ist minus. Dabei wird auch die Definition des + nachgeholt: das + das ist mer. Das Wort plus selbst kommt bei WIDMAN überhaupt nicht vor, minus außer an der angeführten Stelle nur noch einmal, wo es kaum im Sinne von unserem Minuszeichen steht. Im Bamberger Rechenbuch[1407] fehlt auch das Wort plus; minus erscheint aber wiederholt in unserer Bedeutung (z. B. Bl. (23) v⁰, (24) r⁰). Die Verwendung der Zeichen + und — macht in den aufgestellten Rechnungen den Eindruck, als ob diese aus der kaufmännischen Praxis hervorgegangen seien und Übergewicht und Untergewicht andeuteten. So heißt 3 Czentner — 11 lb, 3 Cz. + 50 lb (Blatt I (7) r⁰), daß an vollen 3 Zentnern 11 ℔ fehlen, bzw. 50 ℔ über 3 Zentner zuviel sind.

Das Zusammenziehen einer ganzen Reihe solcher Ausdrücke läßt die Geschicklichkeit WIDMANs erkennen, mit diesen Zeichen zu rechnen; der freie Gebrauch in verschiedenen anderen Aufgaben verrät geradezu, daß ihm das + nicht mehr einen Wortersatz oder,

---

41 FL. CAJORI, *Leibniz, The Master-builder of Mathematical Notations*, Isis 7, 1925, S. 412—429; D. MAHNKE, *Leibniz als Begründer der symbolischen Mathematik*, Isis 9, 1927, S. 279—293. — 42 *Acta Eruditorum*, Leipzig 1708, S. 271; *Monitum de characteribus algebraicis. Miscellanea Berolinensia*, Berlin 1710, S. 155—160. Der letztere Artikel stammt von LEIBNIZ selbst.

in Gemeinschaft mit dem —, nur eine kaufmännische Bezeichnung darstellt, sondern beide Zeichen ihm bereits wirkliche Symbole geworden sind. So stellt er in einer späteren Aufgabe (Blatt o (7) v⁰) die Frage, wieviel Pfund Anis jemand gekauft hatte, der bei einem Preise von 12 ₰ für das Pfund 37 ₰ von seiner Barschaft übrig behält, bei einem Preise von 15 ₰ aber 44 ₰ zu wenig besitzt, und schreibt vor: So machß nach der Regel also subtrahir 12 von 15 pleyben 3 vnd das ist der teyler darnach addir + vnd — zcu sam wirt 81 die dividir mit 3 kummen 27 lb. In einer anderen Aufgabe (Blatt pij r⁰, vgl. Bd. III, Anh. II, Nr. 41[a]) wird der Wert von 6 Eyern — 2 Pfennigen mit dem ebenso großen Wert von 4 Pfennigen + 1 Ey verglichen, um daraus den Preis eines Eies zu berechnen. Widman schreckt also selbst vor negativem Gelde nicht zurück. Die Verwendung des Minuszeichens erscheint oft ganz modern, wie in den beiden Beispielen: Jtm̃ drey gesellen teylñ 100 fl vñ der erst sol habñ $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ vnd der ander $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$ Und der drit $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$ (Bl. B (2) v⁰ unten); 18 — ℞ von 164 (Bl. D (7) v⁰, Z. 14).

Bei der Abfassung seines Rechenbuches hat Widman nachweislich eine Reihe von Manuskripten benutzt,[43] die noch heute in dem Sammelbande der Dresdener Bibliothek C. 80 vorhanden sind. Unter diesen befindet sich eine deutsche Algebra, geschrieben im Jahre 1481,[44] in der bereits das Minuszeichen (gelesen minner) auftritt,[45] statt des Pluszeichens aber das Wort vnd gebraucht wird (vgl. Tafel S. 17 und Bd. III, Anh. II, Nr. 37[a]). Minner wird hier schon in streng algebraischem Sinne als Vorzeichenwort, nicht nur als Rechenzeichen verwendet. So wird bei dem Beispiel, modern geschrieben, $(3-2x)\cdot(6x+5)$ das Ergebnis $18x-12x^2+15-10x$ zusammengefaßt in

$18x$ und 15 minner $12x^2$ und minner $10x$ [46]

(für x und x^2 erscheinen die Zeichen der Tafel S. 141). Auch das Zeichen — wird in diesem algebraischen Sinne verwertet, tritt dann aber zuweilen hinter das zu bezeichnende Glied. So lautet z. B. eine Rechnung[47] in heutige Schreibart übertragen (stund zeigt wie unser *mal* die Multiplikation an, vgl. Bd. I, S. 105):

$3x^2$ vnd $5x$ stund $2x^2 - 4x$ szo sprich $3x^2$ stund $2x^2$ macht $6x^4$ vnd sprich $5x$ stund $2x^2$ macht $10x^3$ vnd sprich $4x$ das ist — stund

[43] E. Wappler, *Zur Geschichte der deutschen Algebra im fünfzehnten Jahrhundert.* Programm, Zwickau 1887, S. 5 ff. — [44] E. Wappler, Abh. Gesch. Math. 9[1482], 1899, S. 539, Fußnote 3. — [45] Wappler, Programm[43], S. 4, Z. 27. — [46] Daselbst Z. 29. — [47] Codex Dresden 80, fol 368 v⁰, Z. 7 v. u., von Wappler, a. a. O. nicht abgedruckt.

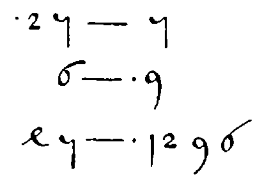
1. Ältestes Minuszeichen.
Dresd. C. 80. Deutsche Algebra, fol. 368′
(um 1486)

$15 - 22x$

2. Ältestes Pluszeichen.
Dresd. C. 80. Lat. Algebra, fol. 350′
(um 1486)

$x^3 + 2x^2$

3. Ältestes Wurzelzeichen.
Dresd. C. 80, fol. 292′ (Rand)
(um 1486)



$\sqrt{25} - 5$

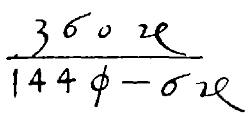
$6 - \sqrt{9}$

$45 - \sqrt{1296}$

4. Dresd. C. 80.
Lateinische Algebra, fol. 352′

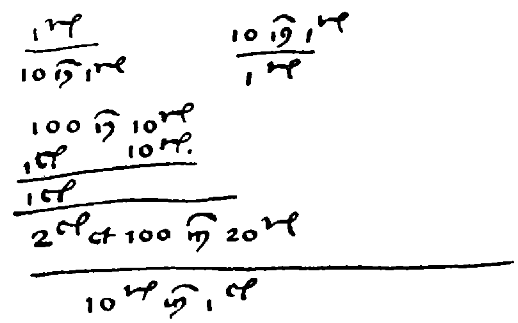
$10 - x$

Zusatz von Widman.
5. Dresd. C. 80, fol. 349′
(um 1486)



$$\frac{360x}{144 - 6x}$$

6. Rechnungen von Regiomontanus (Briefe um 1460).
Handschrift, Nürnberg, fol. 23



$$\frac{x}{10 - x} \qquad \frac{10 - x}{x}$$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{100 - 10x}{x^2 - 10x}}{x^2}}{\dfrac{2x^2 + 100 - 20x}{10x - x^2}}$$

$3x^2$ macht $12x^3$ — vnd macht aber $4x$ stund $5x$ daz ist $20x^2$ — macht alß $6x^4$ vnd $10x^3$ minner $12x^3$ vnd (!) $20x^2$ zeuch ein von dem andern so bleybet $6x^4 - 2x^3$ vnnd minner $20x^2$.
Es wird also gerechnet:

$$\begin{array}{c}
(3x^2 + 5x)\cdot(2x^2 - 4x) \\
3x^2\cdot 2x^2 = 6x^4 \\
5x\ \cdot 2x^2 = 10x^3 \\
-\,4x\ \cdot 3x^2 = 12x^3\,- \\
(-)\ 4x\cdot 5x\ = 20x^2\,- \\
\hline
6x^4 + 10x^3 - 12x^3 - 20x^2 \\
6x^4 - 2x^3 + - 20x^2.
\end{array}$$

In einer in demselben Dresdener Sammelband C. 80 vorhandenen lateinischen Algebra ist nicht nur der Gebrauch des Minuszeichens, sondern auch der des Pluszeichens nachweisbar[48] (vgl. Bd. III, Anh. II, Nr. 38), und zwar werden + und — fast ausschließlich als Rechenzeichen benutzt. Nur selten ersetzt das + einmal das Wort *et* im Text.[49] Umgekehrt wird aber noch sehr häufig das Wort *et* als Rechenzeichen ausgeschrieben.[50] Das Wort *minus* wird nie benutzt; wenn das Zeichen — nicht gewählt wird, werden Umschreibungen mit Formen von *subtrahere* und *reliquum* o. ä. verwendet.

Eigenhändige Zusätze WIDMANS am Rande oder auf freien Seiten zu beiden Abhandlungen zeigen seine Gewandtheit, mit beiden Zeichen in algebraischen Summen und Differenzen cossischer Größen (vgl. S. 16) zu rechnen. Unter Zugrundelegung dieser Schriften hat WIDMAN an der Universität Leipzig Vorlesungen über Algebra gehalten. Eine Leipziger Handschrift (Codex Lips. 1470) stellt das Kollegienheft eines seiner Hörer aus dem Jahre 1486 dar, wie die oft auffallende Übereinstimmung der beiden Handschriften beweist.[51]

In einer älteren Münchener Handschrift (Nr. 14908) aus der Mitte des fünfzehnten Jahrhunderts werden die Zeichen + und — noch nicht gebraucht. Eine in diesem Sammelbande enthaltene deutsche Algebra *Regule de la cosa secundum 6 capitula*, die anscheinend nach italienischem Vorbild gearbeitet wurde, verwendet die Wörter vnd[52] und mynder,[53] zuweilen minus[54] an Stelle der Zeichen + und

48 WAPPLER[43], S. 13f. — 49 Z. B. WAPPLER[43], S. 15, Z. 4 v. u.: + *a* ℞ *subtrahere*; Z. 2 v. u.: + sunt $\frac{25}{36}$; S. 16, Z. 6 u. ä. — 50 Z. B. WAPPLER[43], S. 13, Z. 27: ʒʒ + 6 ʒ *et* 9 ϕ; S. 15, Z. 1: ʒ *et* ʒʒ u. ä. — 51 E. WAPPLER, *Zur Geschichte der Mathematik*, Z. Math. Phys. 45, 1900, Hist.-lit. Abt. S. 7. — 52 Ed. M. CURTZE[337], Abh. Gesch. Math. 7, 1895, S. 50, Z. 22, S. 53, Z. 5, S. 57, Z. 15 u. ö. — 53 Daselbst S. 52, Z. 21 u. ö. — 54 Daselbst S. 55, Z. 8 u. ö.

—, ebenso ein angeschlossenes deutsches Schriftstück, das die Unterschrift eines Frater FRIDERICUS (1461) trägt.[55] Hingegen sind in einer späteren Wiener Handschrift (Nr. 5277) *Regulę cosę uel Algobrę* (um 1500), die CHR. RUDOLFF danach für seine Algebra von 1525[835] ausgiebig benutzte, die Zeichen + und — schon so abstrakte Rechenzeichen, daß die Multiplikationsregel für algebraische Binome einfach in der Form gefaßt wird:[56]

+ per + vel — per — ſurgit +
+ p — vel — p + crescit —,

d. i. + mal + oder — mal — gibt +; + mal — oder — mal + gibt —.

REGIOMONTANUS (1436—1476), der in seinen Briefen schon eine ziemlich stark ausgebildete symbolische Schreibweise verwendet, behält bei vorkommenden algebraischen Rechnungen das Wort *et* bei; *minus* ersetzt er durch ein verschnörkeltes *m̃*, das fast wie *ig* zu lesen ist (vgl. Tafel S. 17 und Bd. III, Anh. II, Nr. 36[c]).

Genaueres über die Zeichen + und — erfahren wir auch nicht aus einem Rechenbuch des Wiener Universitätsprofessors GEORG VON PEURBACH (1423—1461), das, vielfach handschriftlich verbreitet, im Jahre 1492 zum erstenmal zum Druck kam und sehr viel Neuauflagen erlebte. Zwar läßt PEURBACH bei Auseinandersetzung der Regula falsi Bemerkungen fallen, die man dahin deuten kann, daß er die Kenntnis eines Additions- und Subtraktionszeichens hat; so fordert er an einer Stelle, daß man eine Zahl hinschreibe *cum signo denotante ipsum (numerum) fuisse additum vel diminutum* (mit einem Zeichen, welches anzeigt, daß die Zahl selbst addiert oder subtrahiert werde) oder *cum signo additionis vel diminutionis*,[57] ohne indes diese Zeichen selbst zu benutzen. Aber es ist außerordentlich zweifelhaft, ob das Originalbemerkungen PEURBACHs sind. Man kann annehmen, daß hier spätere Zusätze vorliegen, die ein Herausgeber des PEURBACHschen Buches sich erlaubt hat; einmal fehlen nämlich in verschiedenen Auflagen diese Bemerkungen gänzlich, dann ist die gebrauchte Redewendung die beliebte Ausdrucksweise in verschiedenen Rechenbüchern des beginnenden sechzehnten Jahrhunderts, als die Zeichen + und — längst benutzt würden.

[55] Daselbst S. 50, Z. 7, 4. — [56] Codex 5277[751], fol. 2 Mitte. — [57] Nach P. TREUTLEIN, *Die deutsche Coß*, Abh. Gesch. Math. 2, 1879, S. 29; Verfasser hat verschiedene Ausgaben des PEURBACHschen Rechenbuches eingesehen, ohne die von TREUTLEIN angeführten Bemerkungen zu finden. J. W. L. GLAISHER, *On the early history of the signs + and —*[1306a], Messenger of Math. 51, 1921, § 134—136, S. 95 stellt fest, daß es sich um die Ausgabe Wittenberg 1536 handelt.

Sonach läßt sich nur behaupten, daß im zweitletzten Jahrzehnt des fünfzehnten Jahrhunderts unsere modernen Zeichen + und − in Gebrauch kamen; hinzugefügt kann werden, daß sie deutsche Erfindungen sind.

Der Italiener LEONARDO von Pisa (1228, *Liber abbaci*) verwendet das Wort *et* beim Addieren[58] und *minus* beim Subtrahieren bereits ganz fachgemäß. Er sagt z. B.: *radix de 4 et ex radice de 13* (scil. compositum) für $\sqrt{4} + \sqrt{13}$, *radix de 4, minus de radice de 13* für $\sqrt{4} - \sqrt{13}$,[59] oder kürzer: *Si uis multiplicare radicem de 5, et radicem radicis de 10 per radicem de 6 et radicem radicis 12* (Wenn du multiplizieren willst $\sqrt{5} + \sqrt[4]{10}$ mit $\sqrt{6} + \sqrt[4]{12}$).[60] (Siehe auch Bd. III, Anh. II, Nr. 26[c]). Nach ihm erschienen in Italien und in Werken, die aus italienischen Quellen schöpften, ausschließlich die Wörter *plus* und *minus*. N. CHUQUET (Lyon und Paris; † um 1500) benutzte in seinem *Triparty* (1484, Manuskript[119]) die überstrichenen Anfangsbuchstaben p̃, m̃;[61] ebenso verfuhr LUCA PACIOLI in der *Summa* von 1494,[62] während WIDMAN, wie oben erwähnt, längst + und − in seinem Rechenbuch eingeführt hatte. Andere deutsche Rechenmeister ahmten WIDMAN nach und verhalfen in ihrem Lande diesen Zeichen zu immer weiterer Verbreitung; so GRAMMATEUS[158a] 1518, der deutsche Bearbeiter des INITIUS ALGEBRAS um 1524,[63] RUDOLFF 1525 (*Coß*)[835], STIFEL (1544[123], 1545[1421], 1553[1338]) u. a. Das Rechenbuch von GRAMMATEUS (1518[158a]) ist das älteste gedruckte, das das algebraische Rechnen mit beiden Zeichen lehrt. Dieselbe Rolle spielt für Holland, allerdings 20 Jahre später, eine Arithmetik von GIEL VAN DER HOECKE.[64]

---

[58] An einer Stelle erscheint *plus*, aber nicht als Fachwort; *Scritti* I[130], S. 411, Z. 7 f.: *Multiplicaui 1 plus de $\frac{2}{3}$ unius numeri per unum plus de $\frac{3}{4}$ eiusdem; et prouenerunt 73 ...: ergo uis multiplicare $\frac{2}{3}$ rei, uno addito, per $\frac{3}{4}$ rei plus uno ...* (Ich habe 1, vermehrt um $\frac{2}{3}$ einer Zahl, multipliziert mit 1, vermehrt um $\frac{3}{4}$ derselben Zahl, und es ergeben sich 73 ...: also mußt du multiplizieren $\frac{2}{3}x + 1$ mit $\frac{3}{4}x + 1$ ...); auch S. 414, Z. 28. — [59] Daselbst I, S. 357 unten. — [60] S. 369, Z. 13 v. u. — [61] *Le Triparty*[119], z. B. S. 655 ff. — [62] *Summa*[118] I, dist. VIII, tract. I, fol. 112 v°. — [63] *Die Algebra des Initius Algebras: Algebrae Arabis Arithmetici viri clarissimi Liber ad Ylem geometrum magistrum suum*, herausgeg. von M. CURTZE, Abh. Gesch. Math. 13, 1902. — Die lateinische kurze Urschrift wurde wahrscheinlich von ANDREAS ALEXANDER vor 1524 deutsch bearbeitet. Vgl. G. ENESTRÖM, *Ein verschollener Cossist aus dem Anfang des 16. Jahrhunderts*, Bibl. Math. 3_3, 1902, S. 355—360. — A. a. O., S. 500: ... vnd werden solche quantitet eigentlich verzeichnet mit der affirmirung und negierung, daß ist mit dem *signo minus* und *plus* dann so einem Zeichen wird zugesetzt das Zeichen +, bedeut, das sie ist *quantitas addita*, wird aber dem *signo* zugeschrieben das Zeichen −, bedeutet, das es ist *quantitas diminuta*. — [64] Een sonderlinghe excellent Boeck, Antwerpen 1537. Vgl. D. E. SMITH, *Rara arithmetica*[117], S. 183 ff.

In England benutzt ROBERT RECORDE 1557[65] zuerst die neuen Zeichen. Erst OUGHTRED 1631[I 680] und HARRIOT 1631[66] verhalfen ihnen aber zur allgemeinen Anerkennung. In Frankreich war hierfür von Bedeutung der Pariser Nachdruck[67] (1551) der kleinen Algebra, die JOHANNES SCHEYBL seinen 6 ersten Büchern EUKLIDS von 1550 anschloß;[68] doch gaben den Ausschlag für die endgültige Annahme erst die Druckschriften von RAMUS (1555,[69] 1569[I 989]) und VIETA (1579[I 1097], 1591[70] u. später).

In Portugal fanden sie Eingang durch ein Algebrabuch des aus Deutschland gebürtigen MARCO AUREL 1552,[71] in Italien 1608 durch den deutschen Jesuit CHR. CLAVIUS,[72] dem B. CAVALIERI 1647 folgte.[73]

Mit großer Zähigkeit hielt sich das italienische *p*, *m* bis zum 17. Jahrhundert. CARDANO (1501—1576), dessen *Ars magna* 1545[74] in einer deutschen Stadt, Nürnberg, gedruckt wurde, der auf seinen großen Reisen auch Deutschland besucht hatte, verwendet nur *p*: und *m*:,[74] ebenso sein bekannter Gegner TARTAGLIA[I 59] (1500 Brescia — 1557 Venedig), nur daß des letzteren ℘[74a] etwas verschnörkeltere Linienführung hat. Sogar BOMBELLI folgt in seiner *Algebra* von 1572[75] noch der Schreibart seiner älteren Landsleute, die auch bis nach Portugal gedrungen war,[76] wo der gelehrte PEDRO NÚÑEZ (1502—1578) an der Universität Coimbra wirkte (siehe die Beispiele in Bd. III, Anh. II, 54). In JOH. BUTEOS *Logistica* (Lyon 1559)[I 75] wird auch immer noch P, M benutzt.

65 *The whetstone of witte* (Wetzstein des Witzes), London 1557)[137]. — 66 *Artis analyticae praxis*, London 1631. — 67 *Algebrae compendiosa facilisque descriptio, qua depromuntur magna Arithmetices miracula*, Paris 1551. — 68 *Euclidis Megarensis ... sex libri priores de Geometricis principijs Graece et Latine ... Algebrae porro regulae, propter numerorum exempla passim propositionibus adiecta, his libris praemissae sunt, eadenque demonstratae*, Basel 1550. — 69 *Arithmeticae libri tres*, Paris 1555. — 70 *In artem analyticem isagoge*, Turonis 1591. — 71 *Libro primero de Arithmetica Algebratica*, Valencia 1552. Vgl. FL. CAJORI, *A History of notations.* Vol. I. *Notations in elementary mathematics*, Chicago-London 1928, S. 160, Anm. 1. — 72 *Algebra Christophori Clavii Bambergensis e societate Jesv*, Romae 1608. Das Imprimatur ist vom 1. X. 1607, das Vorwort Idus Martii 1608. — 73 *Exercitationes geometricae sex*, Bononiae 1647. — 74 *Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus*, Nürnberg 1545[280], auch in der Ausgabe von 1570, während in den *Opera*, Lugd. 1663, IV[I 558], S. 221—302, $\tilde{p}$. und $\tilde{m}$. gebraucht wird. — 74a *Gen. Tratt.* I, Teil 2, fol. 85 v⁰ u. ö. Dasselbe Zeichen wird auch als Münzbezeichnung (pizzoli) gebraucht (*Tratt.* I, Teil 1, fol. 36 r⁰ u. o.). — 75 *L'Algebra*, Bologna 1572 (1579 nur Titelauflage). Vgl. H. WIELEITNER[293], S. 78, Anm. 3. — 76 PEDRO NUÑEZ, *Libro de algebra en arithmetica y geometria*, Anvers 1567.

Über die Entstehung der Zeichen + und — sind die verschiedensten Vermutungen im Umlauf.[77] Aus den italienischen Zeichen $\tilde{p}$ und $\tilde{m}$ können sie sich nicht gut gebildet haben, wenngleich in dem $\tilde{m}$ einiger Verfasser der horizontale Strich stark hervorgehoben und mit dem *m* zur Verschmelzung gebracht erscheint. Schwieriger wäre jedenfalls das + aus dem p zu erklären. Als Beleg könnten immerhin die Widmanschen Definitionen: das + das ist mer, und: was — ist das ist minus herangezogen werden. Näher liegt die Annahme, daß das Additionskreuz aus einer Ligatur für *et* entstanden ist. In nichtmathematischen Schriften aus dem vierzehnten und fünfzehnten Jahrhundert findet sich vielfach an Stelle des *et* ein Zeichen, das einem umgekehrten t ähnlich ist.[78] Vgl. auch S. 17, 6 die Ligatur für *et*. In einem aus Deutschland stammenden mathematischen Manuskript von 1456 sieht das für plus gebrauchte Wort *et* schon fast wie + aus.[79] — Das Minuszeichen, das naturgemäß mit dem Pluszeichen verwandt ist, soll durch Weglassen des Vertikalstriches künstlich gebildet worden sein. Diese Hypothese hat etwas Gezwungenes an sich; es ist nicht ausgeschlossen, daß das Minuszeichen eine eigene Entstehungsgeschichte hat. In kaufmännischen Kreisen des 15. Jahrhunderts war es bei Gewichtsangaben und übrigens auch bei Preisangaben üblich, die nächsthöhere runde Zahl zu nennen und die vorhandene Abweichung mit dem Worte minus daneben zu setzen; so heißt es z. B. im Bamberger Rechenbuch von 1483[I 407]: 4 Ztr. minus 9 ℔ statt des ungefügeren 3 Ztr. 91 ℔. Eine Aufgabe lautet (in heutigem Deutsch): Ein Sack Pfeffer wiegt $2\frac{1}{2}$ Ztr. *minus* 9 ℔ und kostet je 1 ℔ 8 Schilling *minus* 3 Heller; man soll für den Sack $3\frac{3}{4}$ ℔ abziehen. Was kostet das alles?[80] Wog nun eine Warensendung nicht ganz 4 Ztr., sondern 9 ℔ weniger, so mag man dies auf der Kiste oder in dem Begleitschreiben durch 4 Ztr. — 9 ℔ angedeutet haben, wobei der Strich zunächst rein als Trennungsstrich aufzufassen ist. Wir können hier die Widmanschen Ausdrücke (S. 15): 3 Czentner — 11 lb usw. zum Vergleich heranziehen. Da alle kaufmännische Praxis aus Italien stammt, ja auch die von deutschen Kaufleuten gehandelten Waren vielfach von Italien aus eingeführt wurden, so könnte man mit demselben Recht solche Bezeichnungen wie *4 Z — 9 Pf* auch als italienische Sitte vermuten, und

---

77 Cantor, 2^2, S. 230ff. u. S. 320. — 78 Vgl. W. Wattenbach, *Anleitung zur lateinischen Paläographie*[I 193], 4. Aufl., Leipzig 1886, Anhang S. 14. — 79 D. E. Smith, *Rara arithmetica*[I 17], S. 456, Z. 3—4. — 80 Bamberger Rechenbuch[I 407], Bl. (24) r°.

dann liegt wieder der Gedanke nicht fern, daß der Strich ein Überbleibsel des $\tilde{m}$ ist und dieses durch die in der Regel nicht wissenschaftlich gebildeten deutschen Kaufleute schließlich in einen einfachen Strich aufgelöst wurde. Einer gleichen Erklärung des Pluszeichens, das WIDMAN in obigen Ausdrücken ganz ähnlich gebraucht, widerspräche, daß bei ihm das $+$, wie wir gesehen haben, an anderen Stellen geradezu für „et" und „und" verwendet wird. In der von WIDMAN benutzten lateinischen Algebra des Dresdener Manuskriptenbandes C. 80 kommt $+$ für „et" so häufig vor, daß die Entstehung des $+$ aus „et" nahezu sichergestellt ist.[81]

Mit allen derartigen Erklärungsversuchen muß man sehr vorsichtig sein. Mögen auch geschichtliche Ableitungen bei einigen Zeichen gelungen sein, wie bei dem Prozentzeichen $^0/_0$ (I, S. 201), bei dem Wurzelhaken (vgl. diesen) usw., so ist zweifellos die Mehrzahl der algebraischen Zeichen ein Ergebnis willkürlicher Erfindung, und es ist meist müßig, hinterher die Frage zu stellen, was sich der Erfinder und die ersten Benutzer dabei gedacht haben. Die Zeit ist vorüber — zum mindesten seit Erfindung des Buchdruckes —, daß sich solche Symbole gleichsam unbewußt, etwa aus Anfangsbuchstaben der zugehörigen Operation, allmählich entwickeln; dazu nimmt vom sechzehnten Jahrhundert an die Algebra selbst einen zu raschen Aufschwung.

In den Schriften von J. FAULHABER (1580—1635, Ulm) und seinen Schülern werden dem Minuszeichen Punkte zur besseren Unterscheidung von einem Gedankenstrich zugesetzt $\div$, 1525,[82] erstmalig bei RIESE[I 203], in der späteren englischen Schule umgekehrt dem Divisionsdoppelpunkt ein Strich zwischengeschoben, da der einfache Doppelpunkt als Proportionssymbol (siehe dieses) benutzt wird. So erscheint bei J. PELL[83] (S. 30), dann bei W. JONES 1706 in seiner *Synopsis palmariorum matheseos* dasselbe Zeichen $\div$ für die Division,[84] das bei FAULHABER für die Subtraktion galt.

Das Minuszeichen $\sim$, das P. HÉRIGONE[I 47] im *Cursus mathematicus* von 1634 benutzt, hat sich nicht fortgeerbt.

---

[81] So WAPPLER[43], S. 21, Z. 4 v. u.: *pro lucro + lucri lucro*; S. 21, Z. 18: + *remanet valor 1 cosae*; besonders S. 17 unten. — [82] Vgl. J. W. L. GLAISHER, The Mess. of Math. 51, 1922[I 1306a], S. 36. Solche und andere Abarten rühren meist von der mangelhaften Einrichtung der Druckereien oder von Flüchtigkeiten bei der Korrektur her. — [83] Vgl. WALLIS, *Algebra*[1682]; *Opera math.* Vol. II[1682], S. 138. — [84] *Synopsis*[87], S. 177 u.: $b\,a^{\frac{1}{n}} \div c\,a^{\frac{1}{n}} = \frac{b}{c}$.

Das Doppelzeichen $\pm$ erscheint erstmalig bei GIRARD († 1632, Niederlande) in seinen *Tables* 1626,[85] allerdings noch mit dem Zwischenwort *ou*:

$$\begin{matrix} + \\ ou \\ - \end{matrix}$$

OUGHTRED (*Clavis mathematicae* 1631[I 680]) läßt auch dieses fort und schreibt (vgl. S. 36) z. B. die Lösung einer quadratischen Gleichung:

$$\frac{Z}{2}\,{}^{+}_{-}\,\sqrt{}\,q : \frac{Zq}{4} - Æ : = A\,.$$

Ihm folgt 1655 Wallis[86], 1706 W. JONES in der *Synopsis palmariorum matheseos.*[87] Verbreitung fand das $\pm$ besonders durch F. W. v. OPPEL (1746),[88] der es *signum ambiguitatis* nennt, und A. CAGNOLI (1786, *Trigonométrie*).[89] VIETA (1540—1603) verstand unter $a = b$[90] sowohl $a - b$ als auch $b - a$, je nachdem $a > b$ oder $a < b$ ist. Ihm folgten DESCARTES (1638),[91] FERMAT (1638),[92] GIRARD (1629, *Tabulae sinuum*[85] usw.), VAN SCHOOTEN (1649),[93] BARTHOLINUS (1651)[94] u. a. Den absoluten Wert einer Größe kennzeichnet 1841 WEIERSTRASS mit $|x|$.[95] Zuweilen setzte DESCARTES (1637, *Géométrie*), wenn er das Vorzeichen eines Gleichungsgliedes unentschieden lassen wollte, diesem einen einfachen Punkt vor. In der Originalausgabe der *Géométrie*[96] schreibt er:

---

85 Holländische Ausgabe, s'Gravenhage 1629, Bl. K (7) v⁰[I 347]. A. v. BRAUNMÜHL, *Die Entwicklung der Zeichen- und Formelsprache in der Trigonometrie*, Bibl. math. 1_3, 1900, S. 66. — 86 Vgl. *Algebra*[I 682] cap. 19; *Arithmetica infinitorum* (1655)[108], prop. CXI. — 87 W. JONES, *Synopsis palmariorum matheseos: or, a new introduction to the mathematics*, London 1706, z. B. S. 119, 128 usw. — 88 FR. W. VON OPPEL, *Analysis triangulorum*, Dresd. et Lips. 1746. — 89 A. CAGNOLI, *Trigonometria piana e sferica*, Paris 1786; zugleich französisch *Traité de Trigonométrie rectiligne et sphérique*, traduit par N. M. CHOMPRÉ. — 90 *Isagoge*, 1591[70], Bl. 2 v⁰. — 91 *Œuvres*, 2, Paris 1898[I 843], S. 426. — 92 *Œuvres*[I 782], II, S. 157. — 93 DESCARTES, *Geometria*, lat. Übersetzung von F. VAN SCHOOTEN, mit Erläuterungen, Leiden 1649, Anhang S. 330. Weitere Ausgaben, vermehrt und mit Zusätzen von SCHOOTEN, DEBEAUNE, BARTHOLINUS, HUDDE, V. HEURAET, DE WITT, Amsterdam 1659—61; Amsterdam 1683 mit zwei weiteren Abhandlungen von HUYGENS; Frankfurt a. M. 1695. Deutsch von L. SCHLESINGER, Berlin 1894; 1923. — 94 ER. BARTHOLINUS, *Francisci à Schooten Principia matheseos universalis seu introductio ad geometriae methodum Renati Descartes*, Leiden 1651; auch in DESCARTES' *Geometria* v. 1659—61[93], 2, S. 4, Z. 4. — 95 K. WEIERSTRASS, *Mathematische Werke*, Ausg. d. Preuß. Akademie 1. Berlin 1894, S. 67. (Ohne Einführung: Abhandlung aus 1841.) — 96 DESCARTES, *La Géométrie*, Leiden 1637. Anhang zum *Discours de la méthode.* Facsimile-Ausgabe mit englischer Übersetzung von D. E. SMITH und MARCIA L. LATHAM, Chicago-London 1925. *Œuvres*, éd. ADAM et TANNERY, 6, Paris 1903, S. 457.

$$+\,x^4 * . p\,x\,x . q\,x . r \propto 0$$

für unser

$$x^4 + 0\,x^3 \pm p\,x^2 \pm q\,x \pm r = 0\,.$$

F. VAN SCHOOTEN führte 1649 das Zeichen ꝗ für $\pm$ ein[97] und schrieb demgemäß ȣ für $\mp$.[98]

Die Zeichen + und − haben doppelte Verwendung; einmal sind sie Operationszeichen für die Addition und Subtraktion, dann aber auch Vorzeichen, durch die positive und negative Größen unterschieden werden sollen. Der erste, der die scharfe Trennung ihrer Bedeutung fordert, ist WILKINS (1800)[99]: er gebraucht sie nur als Operationszeichen; eine negative Größe schreibt er $\bar{a}$, ohne Strich ist a immer positiv.

Bei den Zeichen der Addition und Subtraktion haben Erörterungen nach ihrem Werden und Entstehen vielleicht noch eine Berechtigung, wahrscheinlich aber schon nicht mehr bei dem Multiplikations- und Divisionszeichen. Das Bedürfnis nach solchen Zeichen empfanden die Mathematiker sofort, als sich die symbolische Algebra im Anfang des sechzehnten Jahrhunderts weiter ausbildete. Schon in der deutschen Algebra des Dresdener Sammelbandes C. 80[43, 47] (vgl. S. 16 und Bd. III, Anhang II, Nr. 37[a]) wird dem Bedürfnis, neben den Additions- und Subtraktionswörtern vnd und minner auch ein Multiplikationswort verwenden zu können, durch Benutzung des Wortes ſtund abgeholfen (vgl. S. 15; I S. 105); ein Ersatzzeichen tritt aber nicht auf. MICHAEL STIFEL (1486/87 Eßlingen — 1567 Jena; lutherischer Prediger an verschiedenen Orten) stellte (1545[I421]) den Zeichen + und − zwei neue als gleichwertig an die Seite, M für die Multiplikation, D für die Division,[100] indem er einfach die Anfangsbuchstaben der entsprechenden Wörter wählte. Merkwürdigerweise benutzte er aber selbst die Zeichen nicht. Vielleicht hatte er in seinem Hauptwerk, der *Arithmetica integra* von 1544[I23], den neuen Gedanken noch nicht gefaßt. In der *Deutschen Arithmetik* (1545) aber, die sich offenbar an einen weniger wissenschaftlichen Leserkreis wendet, wollte er dem Studierenden nicht zu viel zu der schon ungewohnten, damals eifrig bearbeiteten Coß (S. 8) zumuten und beschränkte sich daher auf den bloßen Vorschlag. In seinem dritten Werke von 1553[I338] gab er andrerseits nur eine neue Bearbeitung eines älteren, damals vergriffenen Lehrbuches der Coß,

97 DESCARTES, *Geometria* 1649[93], S. 291. — 98 Daselbst S. 291 am Rand. — 99 WILKINS, *Die Lehre von den entgegengesetzten Größen*, Braunschweig 1800. Vgl. FL. CAJORI, *Hist. Notations* I[71], S. 247. — 100 M. STIFEL, Deutſche Arithmetica[1421], Bl. 74 v°.