Repertorium der Physik.

Enthaltend
eine vollständige Zusammenstellung der neuern Fortschritte dieser Wissenschaft.

Unter Mitwirkung der Herren
Lejeune-Dirichlet, Moser, Neumann, Radicke, Riess, Röber, Strehlke,

herausgegeben
von
HEINR. WILH. DOVE.

III. Band.

Akustik, Theoretische Optik, Meteorologie.

Mit drei Tafeln Abbildungen.

Berlin:
Verlag von Veit & Comp.
1839.

Da es nicht möglich war, in diesem Bande durch Aufnahme aller noch zu besprechenden Gegenstände de ersten Cyclus des Repertoriums abzuschliessen, so wird demselben noch ein vierter folgen, welcher bereits theilweise gedruckt ist. Die Bearbeitung der Akustik in diesem Bande haben die Herren Röber und Strehlke in der Weise unter sich vertheilt, dass der erstere bis p. 106. die Theorie der Combinationstöne und Blasinstrumente dargestellt, der letztere von p. 106—141. alle die Schwingungen elastischer Körper betreffenden Erscheinungen erörtert hat. Die theoretische Optik ist von Herrn Radicke bearbeitet worden. Cauchy's, Neumann's und Schwerd's Arbeiten sind darin ausführlich dargelegt. In dem von mir verfassten Abschnitt Meteorologie habe ich nach einer allgemeinen Einleitung die Vertheilung der Wärme so gedrängt wie möglich betrachtet, aber doch das empirische Material ausführlich mitzutheilen für nothwendig gehalten, da es sich in oft wenig zugänglichen Werken verstreut findet.

Berlin, den 1. Juli 1839.

Dove.

Druckfehler
in dem Artikel Magnetismus
im zweiten Bande des Repertoriums.

Seite 100 Zeile 9 v. u. statt Behandlung l. Abhandlung
- 105 - 15 - o. - 12 l. n
- 108 - 10 - u. - eine l. zwei
- 110 - 7 - - dabei l. daher
- - - 5 - - - eingeschüttete l. eingeschaltete
- 119 - 11 - - - ungewöhnlich l. unmöglich
- 124 - 17 - - - Zahl l. Kraft
- 132 3 - o. hinter **bestand** ist einzuschalten: **Da begehrt K. M. von mir den einen Magnetstein zu haben**
- 132 - 6 - - statt Inclination l. Declination
- 138 - 5 - u. - m^x l. $m^{x\alpha}$
- 139 - 4 - o. - gibt l. gilt
- - - - 10 - - - brachte l. brauchte
- 145 - 14 - - - eines l. meines
- 158 - 2 - - - 96,2 l. 496,2
- 163 - 15 - o. fällt einmal ϑ (u — N) fort
- 173 - 2 - o. statt Gewichtsmassen l. Gewichtseinheiten
- 197 - 3 - - - N. W. l. S W.
- 200 - 6 - u. - dieselben l. die Wendestunden
- 220 - 3 - o. - der Erde l. des Orts
- - - 6 - - - des Orts l. Pols
- - - 10 - - - Polars l. Pols
- - - 16 - - - regelmässigen l. unregelmässigen
- 222 - 12 - - - d l. d,
- - - 13 - u. - $\vartheta\ (x - z) =$ l. $\varphi h \sin z - \vartheta\ (x - z) =$
- 228 - 10 - - - freiere l feinere
- 232 - 4 - o. hinter **wahrscheinlich** ist einzuschalten: **nicht überall**
- 237 - 10 - u. $= 18^0\ 41'\ 40'',4$ fällt fort
- 248 - 11 - - statt 2φ l. 2π
- 250 - 13 - - - Declination l. Inclination
- - - 9 - - - möglichen l. ungleichen
- 251 - 8 - o. - kann l. muss
- - - 20 - - - $\sin_9\eta$ l. $\sin^9\eta$; statt $\frac{5}{2}$ l. $\frac{5}{2}$
- 267 - 4 - - fällt „der" fort
- 269 - 4 - - statt verschiedenen l. entschiedenen
- 272 - 4 - - - ursprünglichen l. ungleichen

N. B. Seite 162 ist der Buchstabe l von der Zahl 1 so wenig zu unterscheiden, dass man Zeile 11 v. o. setzen wird $r^2 = (R + q)^2 + m$

. 14 - - statt $l = [$, $m = [$ u. s. w. auf dieser Seite

In den Tafeln Seite 279 — 284:

Seite 279	bei n	= 0,56	statt	0,410121	l.	0,410122
- 280	- -	= 0,03	-	0,014805	-	0,011481
- -	- -	= 27	-	,332452	-	,332453
- -	- -	= 32	-	,245869	-	,245870
- -	- -	= 41	-	,690020	-	,690021
- 282	- -	= 52	-	,458590	-	,458591
- 283	- -	= 0,60	-	,579556	-	,579555
- -	- -	= 2	-	,931851	-	,931852.

Inhaltsverzeichniss zum dritten Bande.

Neunter Abschnitt.

Akustik.

Zehnter Abschnitt.

Theoretische Optik.

Elfter Abschnitt.

Meteorologie.

Temperaturverhältnisse der Erde.

Tägliche Aenderungen der Lufttemperatur.

Veränderungen der Temperatur in der jährlichen Periode.

Nachweisung der Figuren.

Taf. I.

Taf. II.

Taf. III.

zu Schwerd's Beugungserscheinungen.

Neunter Abschnitt.

Akustik

von Roeber.

Combinationstöne und Stösse.

Die ältesten bekannten Nachrichten über Combinationstöne und Stösse fallen in die erste Hälfte des vorigen Jahrhunderts.

Bereits im Jahre 1700 machte Sauveur ein Verfahren bekannt, durch Messung der Stösse, welche von zwei nahe im Einklang befindlichen Tönen hervorgebracht werden, die absolute Vibrationszahl eines Tones zu finden. Indem er diese Stösse dem Unterschied der Schwingungen gleich setzte, bestimmte er die Höhe einer 5 Fuss langen offenen Pfeife auf 100 Schwingungen in der Sekunde. Doch wollte ihm die Wiederholung der Versuche, welche er vor mehreren Musikern mit Erfolg ausgeführt hatte, vor einer von der Pariser Academie ernannten Commission nicht gelingen, auch verliess er später diesen Weg, und bestimmte im Jahre 1713 die Vibrationen der Töne aus den Schwingungsgesetzen gespannter Saiten.

Erst im Jahre 1796 nahm Sarti, Kapellmeister in Petersburg, das Verfahren Sauveur's wieder auf. Er bediente sich zweier 5 Fuss langer offener Pfeifen, erniedrigte den Ton der einen vermittelst eines Schiebers so lange, bis beide, gleichzeitig tönend, in einer Secunde Einen Stoss erzeugten, und fand dann mit Hülfe des Monochords das Verhältniss der Töne gleich 100:99.

Hiernach bestimmte er gleich Sauveur den höheren Ton auf 100 Schwingungen in der Secunde.

Was die physikalische Erklärung dieser Stösse betrifft, so erwähnt schon Sauveur, dass sie von den sich abwechselnd trennenden und wieder vereinigenden Vibrationen zweier Töne in dem Moment hervorgebracht würden, in welchem dieselben gleichzeitig auf unser Ohr einwirkten. Doch beging er anfangs den Fehler, jene 100 Schwingungen für einfache Schwingungen zu nehmen, und erst die Resultate seiner spätern Untersuchungen über schwingende Saiten veranlassten ihn, dieselben als Doppelschwingungen anzusehen.

Weniger noch als die Stösse kannte man im vorigen Jahrhundert das Gesetz und die Erzeugungsweise der Combinationstöne.

Andreas Sorge erwähnt 1745, dass die beiden Töne einer Quinte auf der Orgel gleichzeitig angestimmt noch einen dritten Ton hören lassen, welcher eine Octave tiefer ist, als der Grundton der angestimmten Quinte, dass die beiden Töne einer grossen Terz auf gleiche Weise einen dritten tieferen Ton hervorbringen und bei einer grossen Sexte zugleich die Unterdominante des Grundtons gehört werde.

Im Jahre 1753 beobachtete auch Romieu diesen dritten Ton, doch die ausführlichsten Versuche über denselben sind von Tartini im Jahre 1754.

Lässt man nach ihm auf einer Violine durch einen starken Bogenstrich zwei Töne gleichzeitig und dauernd erklingen, welche in dem Verhältniss

einer reinen Quinte	gleich	2:3
- - Quarte	-	3:4
- grossen Terz	-	4:5
- kleinen Terz	-	5:6
eines grossen ganzen Tons	-	8:9
- kleinen ganzen Tons	-	9:10
- grossen halben Tons	-	15:16
- kleinen halben Tons	-	24:25

stehen; so erscheint, wenn die angeführten Zahlen jedesmal die Höhe der betreffenden Töne ausdrücken, in allen diesen Fällen zugleich ein dritter Ton, dessen Höhe durch die Zahl Zwei ausgedrückt wird. Diesen dritten Ton hörte er gleichfalls, wenn die beiden Töne einzeln auf zwei Violinen, besonders deutlich aber, wenn sie auf zwei Oboen gleichzeitig angegeben wurden. Auch entsteht ein solcher dritter Ton nicht bloss bei den angeführten Intervallen, sondern, den Einklang und die Octave allein ausgenommen, bei jedem beliebigen rationalen, oder irrationalen Verhältniss zweier zusammen klingenden Töne.

Als Gesetz für die Höhe des dritten Tones giebt dann Tartini an, dass die Schwingungszahl desselben jedesmal gleich Zwei sei, wenn die Schwingungszahlen der beiden Töne wie 20 und 21 oder 99 und 100, zwei auf einanderfolgende Zahlen der natürlichen Zahlenreihe bilden; auch scheint er für jedes andere Verhältniss der Töne, wenn dasselbe durch relative Primzahlen ausgedrückt wird, die Zahl Zwei zur Bestimmung des dritten Tones anzunehmen.

Vergleichen wir diese Angaben sowohl mit der früheren Beobachtung von Sorge, als mit der aus den späteren Beobachtungen hervorgegangenen allgemeinen Annahme über die Höhe des dritten Tones, so bemerken wir eine auffallende Abweichung der von Tartini gegebenen Bestimmung. Nach der bis dahin allgemein angenommenen Regel ist nämlich die Höhe des Combinationstones grade in den Fällen, wo Tartini denselben ausdrücklich durch die Zahl Zwei bestimmt, gleich Eins, und das einzige Beispiel, wo nach der allgemeinen Erfahrung der Combinationston durch die Zahl Zwei angegeben wird, bildet die grosse Sexte nach dem Verhältniss 3:5, wo die beiden Töne nicht durch zwei aufeinander folgende Zahlen der natürlichen Zahlenreihe ausgedrückt werden.

Doch möchte man nicht mit Chladni und Vieth unbedingt behaupten dürfen, dass Tartini den dritten Ton unrichtig und um eine Octave zu hoch angegeben habe, da sich in der Folge ergeben wird, dass, neben dem um eine Octave tiefern Ton, der von Tartini angegebene Ton wirklich erscheinen musste, und Vieth ja auch erzählt, dass es ihm und dem geschickten Organisten Kindscher auf der Orgel eben so wie Tartini ergangen sei.

Aber auch an und für sich betrachtet, sind die von Tartini angegebenen Beobachtungen nicht geeignet, jeden Zweifel an die Realität derselben zu entfernen.

So wird es schwer, einzusehen, wie der Combinationston der reinen Quinte neben dem Grundtone derselben, mit welchem er gleiche Höhe haben soll, beobachtet werden könne.

Ferner erscheint uns eine so genaue Intonirung der kleineren

Intervalle (wie des grossen halben Tones = 15:16 und des klei nen halben Tones = 24:25), dass mit Sicherheit der betreffende Combinationston gefunden werden könnte, durchaus unmöglich. Wenn auch, was jedoch nicht angegeben ist, ein Monochord zu Hülfe genommen wäre, so mussten bei der damaligen mangelhaften Einrichtung dieses Instruments, nothwendig wesentliche Fehler in der Abmessung der Saitenlängen entstehen, und diese Fehler vergrösserten sich durch die Uebertragung der Töne des Monochords auf die Violine, durch die Erwärmung, welche die Saite und das Instrument während des Spielens erleidet, und selbst durch den ungleichen Druck des Bogens. Nähme man aber z. B. die Töne g und g♯ nicht in dem Verhältniss 24:25, sondern in dem wenig abweichenden Verhältniss 22:23, so würde nach der allgemeinen Regel Tartini's der Combinationston schon beinahe um einen ganzen Ton abweichen und statt des angegebenen C der Comb. D erhalten werden.

Halten wir diese Bedenken nebst der Abweichung der mitgetheilten Resultate von der allgemeinen Erfahrung mit der mystischen Richtung Tartini's überhaupt zusammen; so scheint es allerdings, dass die Spekulation zuweilen die Stelle der wirklichen Beobachtung vertreten habe, was um so mehr zu bedauern ist, da die Versuche eines so tüchtigen musikalischen Talents, ungetrübt durch voreilig gefasste Meinungen, ohne Zweifel der Wissenschaft sehr erspriesslich geworden wären, statt dass sie in Wahrheit eine genauere Untersuchung der Combinationstöne mehr gehemmt als gefördert haben.

Auffallend ist es, dass Tartini bei der grossen Aufmerksamkeit, welche er auf die Combinationstöne richtete, nie von mehreren Combinationstönen redet, da er doch mindestens ausser dem Ton Zwei, den allgemein beobachteten und nach Vieth auf der Violine deutlich hervortretenden Combinationston Eins hätte wahrnehmen müssen.

Die erste Bemerkung dieser Art finden wir zuerst zu Anfange dieses Jahrhunderts bei Thomas Young, welcher sagt, dass einige Intervalle ausser dem Hauptcombinationston noch einen Zweiten erzeugen, und bei der grossen Terz die Quarte unter dem Grundtone ebenso gut gehört werde, als die Doppeloctave.

Dieser geistvolle Physiker lieferte zuerst eine specielle Darstellung der Wirkungen, welche aus dem Zusammentreffen zweier

Töne resultiren. Er erkannte die Identität der Stösse und Combinationstöne, erklärte die ersteren so wie einige Fälle der Erzeugung des Combinationstones völlig genügend, und nur der Mangel an vorliegenden zweckmässigen Beobachtungen konnte ihn verhindern das allgemeine Gesetz für die Geschwindigkeit der Stösse und die Höhe des dritten Tones, was sich so leicht aus seiner Theorie entwickelt hätte, aufzustellen. Ueber die Natur des von ihm beobachteten zweiten Combinationstones findet sich bei ihm nur eine dunkle Bemerkung. Ohne Zweifel ist es diesem Mangel an einem ausgesprochenen allgemeinen Gesetze, durch dessen Bestätigung die zu Grunde liegende Theorie sich in jedem einzelnen Falle würde bewährt haben, zuzuschreiben, dass die Ideen Young's in der Folge unbeachtet blieben.

Man begnügte sich mit der theils aus der Erfahrung abgezogenen, theils aus allgemeinen Reflexionen entsprungenen Regel, dass die Höhe des Combinationstones durch die grösste in den Schwingungszahlen der erzeugenden Töne ohne Rest enthaltenen ganzen Zahl ausgedrückt werde. Berechnet man z. B. den Combinationston von $\overline{c}$ u. $\overline{g}$ oder von $\overline{c}$ u. $\overline{e}$ unter der Voraussetzung, dass sich diese Töne genau wie 2:3 oder 4:5 verhalten, so erhält man allerdings, mit den angeführten Angaben von Sorge und Young übereinstimmend, im ersten Falle den Combinationston c, im zweiten C. Ist aber (wie es wohl in der Wirklichkeit immer vorkommen wird) das Verhältniss der angewandten Töne nicht genau, sondern nur angenähert, gleich 2:3 und 4:5, so giebt die Rechnung einen viel tieferen Combinationston, wohingegen das Ohr, welches geringe Abweichungen nicht unterscheidet, immernoch die Combinationstöne c und C vernimmt. Um diesem Uebelstande abzuhelfen modificirte man die Regel dahin, dass jedesmal dasjenige einfache Verhältniss genommen werden müsse, welchem die Schwingungszahlen der wirklich angewandten Töne am nächsten kommen; und als Wilhelm Weber die von Blein in neuerer Zeit angestellten, ausführlichen Beobachtungen über Combinationstöne in Pogg. Ann. bekannt machte, versuchte er auch die übrigen Combinationstöne durch die erweiterte Regel aufzunehmen, dass überhaupt diejenigen Verhältnisse zu nehmen seien, welche als Partialwerthe des in einen Kettenbruch verwandelten wahren Verhältnisses der erzeugenden Töne diesem Verhältnisse in eben so kleinen Zahlen am nächsten kommen, und jedem dieser Partialwerthe ein besonderer Combinationston entspreche. Vergleicht man indess die so berechneten Werthe mit dem Resultate der neueren Beobachtungen, so ist, nach Webers eigner Bemerkung, ein Missverhältniss zwischen der jener Rechnung zu Grunde liegenden, theoretischen Ansicht und der wirklichen Erfahrung nicht zu verkennen.

Allerdings kann der einem jeden Partialbruch entsprechende Werth als ein angenäherter Ausdruck an einen der erscheinenden Combinationstöne angesehen werden: jedoch ist derselbe um so weniger genau, je mehr der Partialwerth von dem wahren Verhältniss der erzeugenden Töne abweicht, und in manchen Fällen erscheinen Combinationstöne, welche durch Anwendung der Kettenbrüche nicht gefunden werden. Wir erinnern nur an den schon von Sorge beobachteten Combinationston der grossen Sexte, welcher durch Kettenbrüche nur sehr ungenau, und an die Beobachtung Young's über den zweiten Combinationston der grossen Terz, welcher durch diese Rechnung gar nicht gefunden wird.

Bezeichnen wir die Töne der grossen Sexte durch 3 und 5, so ist der Combinationston gleich 2, und sind die Töne der grossen Terz 4 und 5, so ist der zweite Combinationston 3. Für das erste Intervall giebt aber die Anwendung des Kettenbruches, nach dem Partialwerth $\frac{1}{2}$, den Combinationston gleich $\frac{3}{1}$ oder $\frac{6}{2}$, und für die grosse Terz fällt der einzige Partialwerth mit dem gegebenen Verhältniss $\frac{4}{5}$ zusammen, aus welchem wohl der erste Combinationston $\frac{4}{4} = \frac{5}{5}$, aber nicht der zweite beobachtete Combinationston 3 gefunden wird.

Erst Hällström war es vorbehalten, zuerst das wahre Gesetz des Combinationstones auszusprechen, und dasselbe, so wie dessen Uebereinstimmung mit dem der Stösse in der Erfahrung nachzuweisen. Wir würden ihm auch ohne Zweifel den ersten richtigen Ausdruck für die Geschwindigkeit der Stösse verdanken, wenn nicht ein Versehen des bei den Versuchen assistirenden Organisten verursacht hätte, dass Hällström die Zahl der Stösse doppelt so gross bestimmte als sie wirklich ist.

So blieb, wenn wir nicht durch die spätere Berichtigung Sauveur's das Gesetz der Stösse schon als ausgemacht ansehen, die evidente Feststellung desselben ein Verdienst Scheibler's, dessen Arbeiten zugleich die genaueste Bestimmung der absoluten Schwingungszahl der Töne enthielt, und eine bis dahin nicht beachtete Klasse von Stössen kennen lehrten, deren Kenntniss zugleich zur vollkommensten Bestätigung des von Hällström aufgestellten Gesetzes für Combinationstöne diente.

Wir werden in Folgendem die von Hällström in Pogg. Ann. Bd. 24. S. 438. niedergelegten Resultate und die von dem Verfasser dieser Darstellung in Pogg. Ann. Bd. 32. S. 333 und S. 492 beschriebenen Arbeiten Scheibler's näher ausführen.

Hällström. Gegen die ältere Regel welche die Zahl der Stösse oder der Schwingungen des Combinationstones der Einheit gleich setzt, wenn die Schwingungen der erzeugenden Töne durch zwei relative Primzahlen ausgedrückt werden, macht Hällström geltend, dass sie in ihren Folgerungen weder mit der Erfahrung übereinstimme, noch mit der Einfachheit der Natur und ihrer Gesetze bestehen könne. Lässt man nämlich zusammenklingende Töne, die anfangs in Einklang stehen, immer mehr auseinander weichen, so lehrt die Erfahrung, dass die Geschwindigkeit der Stösse ununterbrochen wächst, ohne dass ein Sprung zu bemerken wäre.

Dagegen giebt die Rechnung z. B. für die Töne 2n und 2n+1 zuerst die Zahl der Stösse gleich Eins, worauf, bei allmähliger Erhöhung des zweiten Tones eine viel geringere Zahl von Stössen erhalten wird, welche mindestens in die doppelte Zahl der Stösse überspringt, sobald der zweite Ton die Höhe 2n+2 erreicht. Durch eine ähnliche Betrachtung die Unzulänglichkeit der genannten Regel zur Berechnung der Combinationstöne nachweisend, entwickelt nun Hallström folgende Theorie der Combinationstöne.

„Wenn zwei Körper gleichzeitig ertönen, so ist klar, dass das „Ohr, zu welchem diese Töne mittelst der Luft fortgepflanzt wer„den, von geringerer Kraft ergriffen wird, wenn es die Impulse „zu verschiedenen Zeiten empfängt, von stärkerer aber, wenn es „sie gleichzeitig bekommt. Sind die Töne genau von gleicher „Höhe, so wird diese ungleiche Erregung des Ohrs nicht beob„achtet, entweder weil in diesem Falle die beiden Körper ihre „Schwingungen gleichzeitig anfangen, wodurch dann auch die Pul„sationen dieser Körper der Reihe nach vollbracht werden und „im Ohr anlangen, oder auch, wenn der Anfang der Schwingun„gen nicht gleichzeitig ist, weil die Pulsationen beider Körper sich „dann niemals erreichen, wodurch dann immer ein und dasselbe „gehört wird. Ist aber die Zahl ihrer Schwingungen verschieden,

„so werden die Impulse, in wie ungleicher Zeit sie auch anfingen, „sich doch nach einiger Zeit erreichen, und allemal, wenn diess „geschieht, wird das Ohr stärker angegriffen werden, und daher „während des Tönens, Schläge in gewisser Ordnung hören, welche, „wenn sie einander nicht sehr rasch folgen, einzeln wahrgenom- „men und gezählt werden können, bei schneller Aufeinanderfolge „aber so auf das Ohr wirken, wie wenn, ausser den beiden ge- „gebenen Körpern, noch ein dritter seine Pulsationen in dasselbe „schickte, und solchergestalt die Empfindung eines dritten Tones „hervorbringen, d. h. des Combinationstones, der in der That aus „der Verbindung beider Töne entsprungen ist. Seien nun r und s „die Schwingungen der gleichzeitig angestimmten Töne und x die „Schwingungen des zugehörigen Combinstionstones in einer Sekunde, „so vollbringen die tönenden Körper in derselben Zeit $\left(=\frac{1}{x}\right)$, in „welcher dem Combinationston eine Schwingung zukommt, respec- „tive $\frac{r}{x}$ und $\frac{s}{x}$ Schwingungen. Diese aber, wenn aus ihrem Zusam- „menklingen eine einzige Pulsation hervorgehen soll, müssen noth- „wendiger Weise in solchem Verhältnisse stehen, dass die Zahl „ $\frac{s}{x}$ um eine Einheit die Zahl $\frac{r}{x}$ übertrifft, so dass man hat $\frac{s}{x} =$ „ $\frac{r}{x} + 1$, oder $x = s - r$. Dieser Combinationston ist indess nur „als der vorzüglichste oder erste unter mehreren zugleich erschei- „nenden Combinationstönen zu betrachten. Auf gleiche Weise „bringt nämlich der bereits erzeugte Combinationston mit dem „gleichzeitig erklingenden Ton einen zweiten Combinationston her- „vor, dieser mit s einen dritten und mit dem ersten einen vier- „ten und sofort, welche Töne indess nicht immer von solcher „Stärke sind, dass sie in Wirklichkeit alle gehört werden könn- „ten. Als Schema für diese Töne würde man ungefähr folgen- „des haben:

Ursprüngliche Töne	Combinationstöne.
v, s	s — v erster
s — r, v	2r — s zweiter
2r — s, s	2 (s — v) dritter
2v — s, s — v	3v — 2s vierter
u. s. w.	u. s. w.“

Vergleicht man das Resultat dieser Betrachtung mit den bis herigen Annahmen, so findet man, dass dieselben in mehreren Stücken zusammentreffen.

Lässt sich nämlich das Verhältniss der erzeugenden Töne durch zwei um Eins verschiedene ganze Zahlen ausdrücken, so ist der von Hällström erster Combinationston genannte Ton derselbe, als der nach der früheren Methode berechnete, da die Differenz von a n und (a+1) n mit dem grössten gemeinschaftlichen Faktor (n) zusammen fällt. Ueberhaupt trifft die Rechnung Hällströms mit der älteren Regel insofern zusammen, als auch sie einen Combinationston liefert, welcher dem grössten gemeinschaftlichen Faktor derjenigen ganzen Zahlen, welche die Schwingungen der erzeugenden Töne bezeichnen, entspricht; allein dieser Combinationston ist nach Hällström nur in dem vorhin angeführten Falle, der erste und hauptsächlichste, und erscheint meistens in der Reihe sämmtlicher Combinationstöne viel später.

So giebt z. B. die Rechnung Hällström's für die Töne 84 und 108 folgende Combinationstöne:

erzeugende Töne	Combinationstöne
84 und 108	24
24 - 84	60
60 - 108	48
48 - 84	36
48 - 60	12
36 - 108	72
12 - 108	96

wo erst der fünfte Combinationston dem grössten gemeinschaftlichen Faktor der Zahlen 84 und 108 entspricht.

Alle übrigen Zahlen, welche in diesen Rechnungen als Werthe der Combinationstöne vorkommen, sind, wie sich leicht allgemein ergiebt, nur die Vielfachen dieses grössten gemeinschaftlichen Faktors bis zu der Zahl, welche den höchsten der erzeugenden Töne bezeichnet, wodurch zugleich die Angabe Tartini's, nach welcher der Combinationston gleich ist dem Zwiefachen des gemeinschaftlichen Faktors, gerechtfertigt wäre. Endlich trifft diese Berechnung der Combinationstöne merkwürdiger Weise mit der vorhin erwähnten scharfsinnigen Erweiterung der älteren Regel durch W. Weber in gewisser Hinsicht zusammen. Sind z. B. die ursprünglichen Töne 51 und 117, so erhält man nach folgende Division

$$
\begin{array}{l}
51 \,|\, 117 \,|\, 2 \\
\quad\;\; |\, 102 \,| \\
\qquad 15 \,|\, 51 \,|\, 3 \\
\qquad\qquad |\, 45 \,| \\
\qquad\qquad\; 6 \,|\, 15 \,|\, 2 \\
\qquad\qquad\qquad |\, 12 \,| \\
\qquad\qquad\qquad\; 3 \,|\, 6 \,|\, 2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad |\, 6 \,|
\end{array}
$$

$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{7}{10}$ und $\frac{17}{39}$ als Partialwerthe des betreffenden Kettenbruches, welchem folgende Combinationstöne entsprechen,

gegebener Ton: $\frac{51}{1}$ oder $\frac{117}{2} = 58\frac{1}{2}$

1) Combinationston: $\frac{51}{3} = 17$ oder $\frac{117}{7} = 16\frac{5}{7}$

2) Combinationston: $\frac{51}{7} = 7\frac{2}{7}$ oder $\frac{117}{10} = 11\frac{7}{10}$

3) Combinationston: $\frac{51}{17} = 3$ oder $\frac{117}{39} = 3$.

Diese Werthe 51, 17, $7\frac{2}{7}$, 3 oder $58\frac{1}{2}$, $16\frac{5}{7}$, $11\frac{7}{10}$ 3, sind aber wenig von den obigen Divisoren 51, 15, 6, 3 verschieden, welche letztere nach einem bekannten Satze der Arithmetik genaue Vielfache des grössten gemeinschaftlichen Faktors der gegebenen Zahlen 51 und 117 bilden, und als solche, nach Hällström, zu den wahren Werthen der Combinationstöne gehören. Auch ergiebt sich leicht, dass allgemein, bei beliebigem Verhältniss der erzeugenden Töne, die auf gleiche Weise durch Kettenbrüche erhaltenen Werthe als angenäherte Ausdrücke der Divisoren zu betrachten sind, da sie denselben jedesmal gleich kämen, wenn der auf den entsprechenden Divisor folgende Rest gleich Null würde.

Wenn gleich hiernach die, beiden Rechnungsweisen zu Grunde liegenden, theoretischen Ansichten sich in gewissem Sinne begegnen, so muss doch die Bestimmung Weber's als wesentlich verschieden von der nach Hällström vorgetragenen angesehen werden, da — abgesehen davon, dass die beiden Ausdrücke, welche nach ersterer Rechnung im Allgemeinen für jeden Combinationston erhalten werden, unter sich nicht stimmen — nur der Ausdruck des letzten Combinationstones genau mit der Rechnung Hällström's übereinstimmt, und in den meisten Fällen nach letzterer eine grosse Zahl von Combinationstönen (in dem angeführten Beispiele alle Vielfache von 3 bis zu dem Tone 117) entsteht, von denen nur wenige durch Anwendung der Kettenbrüche gefunden werden.

Um die vorliegende Theorie zunächst durch Beobachtung der

Stösse zu prüfen, bediente sich Hällström einer vortrefflichen Orgel in der Hauptkirch zu Abo. Es wurde dazu diejenige Octave gewählt, in welcher die Stösse von je zwei aufeinandur folgenden Halbtöne am leichtesten zu zählen sind, nämlich die tiefste Octave eines 8 füssigen Registers von C bis c [1]) und die Zeit von 18 oder 20 Schlägen vermittelst einer Tertienuhr gemessen.

Als Mittel aus 10 bis 12 Versuchen ergab sich für die Zahl der Stösse in einer Sekunde:

C	
C♯	3, 35
D	4, 49
D♯	4, 08
E	4, 95
F	5, 20
F♯	5, 04
G	6, 78
G♯	4, 92
A	6, 14
B	6, 71
H	6, 75
c	8, 79
Summa	67, 20

Setzen wir mit Hällström diese Stösse dem Unterschiede der angewandten Töne proportional, so ergiebt sich aus der Vergleichung dieses Resultates mit der bekannten ungefähren Schwingungszahl der Töne, dass dieser Unterschied, ausgedrückt in ganzen Schwingungen, der einfachen, oder in Vibrationen ausgedrückt, der doppelten Zahl der Stösse gleich sein müsse. Da hiernach der Unterschied von C und c 67, 20 Schwingungen [2]) beträgt,

[1]) In der angeführten Abhandlung ist durch einen Irrthum des bei den Versuchen behülflichen Organisten die tiefste Octave eines 16 füssigen Registers angegeben, wonach die Geschwindigkeit der Stösse im Verhältniss zu den Schwingungszahlen der Töne, doppelt so gross wäre als sie sich wirklich findet. Obige Berichtigung haben wir aus einer späteren Erklärung Hällström's in Berzelius Jahresbericht, funfzehnter Jahrgang, entnommen.

[2]) Unter Schwingungen werden wir in der Folge immer nur ganze oder sogenannte Doppelschwingungen verstehen, und, aus später zu entwickelnden Gründen, durch die Zahl dieser Schwingungen die Höhe der Töne bezeichnen. anstatt, wie gewöhnlich, die Zahl der Vibrationen oder der halben Schwingungen anzugeben.

so würde dieselbe Zahl der Schwingungen dem C zukommen, wenn C und c eine genaue Octave bildeten; doch ergiebt sich für diesen Ton eine genauere Bestimmung aus einer andern Beobachtung Hallström's.

In der Erwartung den Combinationston B zu hören, stimmte er gleichzeitig die beiden Töne C und H an. Statt des Combinationstones aber wurden deutlich 8, 26 starke Schläge in der Sekunde gehört. Diese Stösse entstehen nach der Erklärung Hällström's aus einer neuen Combination zwischen dem Combinationstone von C und H, und dem Tone C. Setzen wir C=m, c=2m und H=2m—x Schwingungen, so ist der erste Combinationston von C und H gleich m—x und die Differenz der Schwingungen zwischen diesem Combinationstone und dem Ton m, mithin die Zahl der erzeugten Stösse, gleich x, woraus folgt, dass obige 8, 26 Schläge zugleich die Schwingungen bezeichnen um welche H von der genauen Oktave des Tones C verschieden ist. Bestimmen wir hiernach die Schwingungen des C und berechnen die Werthe der übrigen Töne unter der Voraussetzung einer gleichmässigen Temperatur, so haben wir zur Prüfung der Theorie folgende Tabelle.

angestimmte Töne	Schwingungszahlen derselben	Zahl der Stösse		
		berechnet nach H.	beobachtet	berechnet nach Kettenbrüchen $\sqrt[12]{2} = \frac{16}{17}$
C	66, 67			
C♯	70, 63	3, 96	3, 35	4, 17
D	74, 83	4, 20	4, 49	4, 41
D♯	79, 28	4, 45	4, 08	4, 68
E	84, 00	4, 72	4, 95	4, 96
F	88, 99	4, 99	5, 20	5, 25
F♯	94, 28	5, 29	5, 04	5, 56
G	99, 89	5, 61	6, 78	5, 89
G♯	105, 83	5, 94	4, 92	6, 24
A	112, 12	6, 29	6, 14	6, 61
B	118, 79	6, 67	6, 71	7, 01
H	125, 85	7, 06	6, 75	7, 42
c	123, 34	7, 49	8, 26	7, 87
		66, 67	66, 67	70, 08.

Wenn gleich aus dieser Zusammenstellung kein definitives Urtheil über den relativen Werth beider Methoden abzuleiten ist, so sind doch die grössere Zahl der Stösse, welche nach der früheren Theorie erhalten wird, die Einfachheit der neueren Methode und der Umstand, dass letztere ein so leichtes und genaues Mittel liefert, die Schwingungszahlen der Töne zu bestimmen, Momente, welche die Annahme der **Hällström**'schen Theorie nur begünstigen können.

Nähme man statt des ersten Näherungswerthes für $\sqrt[12]{2}$ den zweiten $\frac{17}{18}$, so würde freilich in dem vorliegenden Falle die Zahl der berechneten Stösse der beobachteten weit näher kommen, allein es ergiebt sich leicht, dass zur Berechnung der Stösse, welche von zwei nahe im Einklang befindlichen Tönen hervorgebracht werden, nur der erste Näherungswerth anzuwenden ist. Anders verhält es sich mit den vorhin erwähnten Stössen von C und H. Setzen wir das Verhältniss dieser Töne gleich $1:\sqrt[12]{2^{11}}$, so sind die aufeinanderfolgenden Näherungswerthe $\frac{1}{2}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{9}{15}$, von welchen der zweite ($\frac{8}{15}$) für die beobachteten 8, 26 Stösse $\frac{66,67}{8}=8{,}33$ Stösse liefert.

Doch wir enthalten uns der weiteren Reflexionen und wenden uns zur Beobachtung der Combinationstöne, welche entschiedener den Werth der neuen Theorie erkennen lassen.

Hällström beobachtete, wie früher **Tartini**, diese Töne an einer Violine, und erhielt folgende Resultate, welche wir mit den gewöhnlich angenommenen einfachen Verhältnissen der Töne und den aus diesen Verhältnissen berechneten Combinationstönen zusammengestellt haben.

angestimmte Töne	Verhältniss derselben	Combinationstöne berechnet nach Hällström		Combinationstöne beobachtet	Bemerkungen
$\bar{\bar{c}}$ $\bar{\bar{d}}$	8 : 9	8 mit 9 1 — 8 7 — 9 1 — 7 2 — 7	1 = C 7 = $\bar{a}$, $\bar{b}$, [1] 2 = c 6 = $\bar{g}$ 5 = $\bar{e}$	$\bar{c}$ = 5	
$\bar{c}$ $\bar{d}$	8 : 9	wie vorhin	1 = C 7 = a, b	a = 7	
$\bar{\bar{c}}$ = $\bar{\bar{d}}$♯	5 : 6	5 — 6 1 — 5	1 = G♯ 4 = $\bar{g}$♯	$\bar{g}$♯ = 4	
$\bar{\bar{c}}$ $\bar{\bar{e}}$	4 : 5	4 — 5 1 — 4 3 — 5	1 = c 3 = $\bar{g}$ 2 = $\bar{c}$	$\bar{g}$ = 3 $\bar{c}$ = 2	$\bar{g}$ stärker als $\bar{c}$
$\bar{\bar{c}}$ $\bar{\bar{f}}$	3 : 4	3 — 4 1 — 3	1 = f 2 = $\bar{f}$	$\bar{f}$ = 2	$\bar{f}$ gut hörbar f nur schwach
$\bar{\bar{c}}$ $\bar{\bar{f}}$♯	32 : 45	32 — 45 13 — 31	13 = g♯, a 19 = $\bar{d}$♯	$\bar{d}$♯ = 19	$\bar{d}$♯ deutlich
$\bar{\bar{c}}$ $\bar{\bar{g}}$	2 : 3	2 — 3	1 = $\bar{c}$	—	$\bar{c}$ nicht leicht von $\bar{\bar{c}}$ unterscheidbar
$\bar{\bar{c}}$ $\bar{\bar{g}}$♯	5 : 8	5 — 8 3 — 5	3 = $\bar{d}$♯ 2 = $\bar{g}$♯	$\bar{d}$♯ = 3	$\bar{d}$♯ deutlich
$\bar{\bar{c}}$ $\bar{\bar{a}}$	3 : 5	3 — 5 2 — 3	2 = $\bar{f}$ 1 = f	$\bar{f}$ = 2	hinreichend deutlich
$\bar{\bar{c}}$ $\bar{\bar{b}}$	9 : 16	9 — 16 7 — 9	7 = $\bar{g}$, $\bar{g}$♯ 2 = B	$\bar{g}$ = 7	$\bar{g}$ deutlich, wenngleich wegen des murmelnden B rauh.

[1]) Wo zwei Töne angegeben sind liegt der berechnete zwischen beiden.

angestimmte Töne		Verhältniss derselben	Combinationstöne			Bemerkungen
			berechnet nach Hällström		beobachtet	
$\bar{\bar{c}}$	$\bar{\bar{h}}$	8 : 15	8 — 15	7 = $\bar{\bar{a}}$, $\bar{b}$		$\bar{g}$ unter dem Geräusch der übrigen unterscheidbar
			7 — 8	1 = C	$\bar{g}$ = 6	
			1 — 15	14 = $\bar{\bar{a}}$, $\bar{\bar{b}}$		
			1 — 7	6 = $\bar{g}$		
$\bar{h}$	$\bar{\bar{d}}$	5 : 6	5 — 6	1 = G		Beide unterscheidbar, g etwas stärker wegen der Consonanz mit G in $\bar{g}$.
			1 — 5	4 = $\bar{g}$		
			4 — 6	2 = g	g = 2	
			2 — 5	3 = $\bar{d}$	$\bar{d}$ = 3	
$\bar{h}$	$\bar{\bar{\bar{d}}}$	5 : 12	5 — 12	7 = $\bar{\bar{e}}$, $\bar{\bar{f}}$		
			5 — 7	2 = g	g = 2	beide deutlich
			2 — 15	3 = $\bar{d}$	$\bar{d}$ = 3	
$\bar{h}$	$\bar{\bar{e}}$	3 : 4	3 — 4	1 = e	$\bar{e}$ = 2	e deutlich
			1 — 3	2 = $\bar{e}$		
$\bar{h}$	$\bar{\bar{\bar{e}}}$	3 : 8	3 — 8	5 = $\bar{\bar{g}}$♯		beide deutlich $\bar{e}$ stärker als e
			3 — 5	2 = $\bar{e}$	$\bar{e}$ = 2	
			2 — 8	6 = $\bar{\bar{h}}$	e = 1	
			2 — 3	1 = e		
$\bar{\bar{c}}$♯	$\bar{\bar{e}}$	5 : 6	5 — 6	1 = A		hinreichend deutlich
			1 — 5	4 = $\bar{a}$	a = 2	
			4 — 6	2 = a		
$\bar{\bar{d}}$	$\bar{\bar{g}}$	3 : 4	3 — 4	1 = g	g = 1	beide gehört
			1 — 3	2 = $\bar{g}$	$\bar{g}$ = 2	
$\bar{\bar{d}}$	$\bar{\bar{g}}$♯	3 : 4	3 — 4	1 = g♯	g♯ = 1	ebenso
			1 — 3	2 = $\bar{g}$♯	$\bar{g}$♯ = 2	
$\bar{\bar{d}}$♯	$\bar{\bar{g}}$	4 : 5	4 — 5	1 = d♯	d♯	deutlich
			1 — 4	3 = $\bar{a}$♯		

angestimmte Töne	Verhältniss derselben	Combinationstöne berechnet nach Hällström		Combinationstöne beobachtet	Bemerkungen
$\bar{\bar{d}}$ $\bar{\bar{h}}$	3 : 5	3 — 5 2 — 3	$2 = \bar{g}$ $1 = g$	$\bar{g} = 2$ $g = 1$	deutlicher ist $\bar{g}$
$\bar{\bar{e}}$ $\bar{\bar{b}}$	32 : 45	32 — 45 13 — 32	$13 = \bar{c}, \bar{c}\sharp$ $19 = \bar{g}$	$\bar{c}\sharp = 13$	deutlich
$\bar{\bar{e}}$ $\bar{\bar{\bar{c}}}$	5 : 8	5 — 8 3 — 5	$3 = \bar{g}$ $2 = \bar{c}$	$\bar{g} = 3$ $\bar{c} = 2$	
$\bar{\bar{f}}\sharp$ $\bar{\bar{a}}$	5 : 6	5 — 6 1 — 5 4 — 6 1 — 4	$1 = d$ $4 = \bar{\bar{d}}$ $2 = \bar{d}$ $3 = \bar{a}$	$d = 1$ $\bar{a} = 3$	beide gehört, d stärker.
$\bar{\bar{f}}\sharp$ $\bar{\bar{\bar{d}}}$	5 : 8	5 — 8 3 — 5	$3 = \bar{a}$ $2 = \bar{d}$	$\bar{a} = 3$ $\bar{d} = 2$	beide gehört
$\bar{\bar{f}}\sharp$ $\bar{\bar{h}}$	3 : 4	3 — 4 1 — 3	$1 = h$ $2 = \bar{h}$	$h = 1$ $\bar{h} = 2$	deutlich hörbar
$\bar{\bar{g}}\sharp$ $\bar{\bar{h}}$	1024:1215 [1]	1024 — 1215 191 — 1024 833 — 1215	$191 = d\sharp$ $833 = \bar{\bar{e}}, \bar{\bar{f}}$ $382 = \bar{d}\sharp$	$\bar{d}\sharp = 382$	
$\bar{\bar{h}}$ $\bar{\bar{g}}$	5 : 8	5 — 8 3 — 5	$3 = \bar{d}$ $2 = g$	$\bar{d} = 3$ $g = 2$	deutlicher $\bar{d}$, doch g nicht ungewiss
$\bar{b}$ $\bar{\bar{g}}$	3 : 5	3 — 5 2 — 3	$2 = \bar{d}\sharp$ $1 = d\sharp$	$\bar{d}\sharp = 2$	sehr deut lich d♯

[1]) 1024 : 1215 ist das von Hällström angenommene Verhältniss, und entsteht, wenn von einer aus zwei grossen ganzen Tönen bestehenden Terz (= 64 : 81) ein grosser halber Ton (15 : 16) weggenommen wird. Nähme man statt dessen das Verhältniss 5 : 6, so erhielte man die Combinationstöne c, $\bar{\bar{e}}$, $\bar{e}$ und $\bar{h}$.

Ist wie in den vorliegenden Fällen das Verhältniss der ursprünglichen Töne durch relative Primzahlen ausgedrückt, so müsste nach der Theorie jede Zahl der natürlichen Zahlenreihe von Eins bis zur grössten von den gegebenen Zahlen einem besonderen Combinationstone entsprechen. Um durch Hülfe dieser einfachen Regel die erhaltenen Resultate leichter mit der Theorie vergleichen zu können, haben wir folgende Tabelle zusammengestellt, und in derselben die sich ergänzenden Beobachtungen, welche das nämliche Intervall bei verschiedenen Tönen betreffen, zusammengezogen.

angestimmte Intervalle	Verhältniss derselben	Combinationstöne		entsprechende Näherungswerthe des Kettenbruchs
		beobachtet	berechnet nach Kettenbrüchen	
Quarte	3 : 4	1 2	1, 1	$\frac{3}{4}$
grosse Sexte	3 : 5	1 2	3, $2\frac{1}{2}$ 1, 1	$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{5}$
grosse Terz	4 : 5	1 2 3	1, 1	$\frac{4}{5}$
kleine Terz	5 : 6	1 2 3 4	1, 1	$\frac{5}{6}$
kleine Sexte	5 : 8	2 3	$2\frac{1}{2}$, $2\frac{2}{3}$ 1, 1	$\frac{2}{3}$ $\frac{5}{8}$
Octave plus kleine Terz	5 : 12	2 3	$2\frac{1}{2}$, $2\frac{2}{5}$ 1, 1	$\frac{2}{5}$ $\frac{5}{12}$
grosser ganzer Ton	8 : 9	5 7	1, 1	$\frac{8}{9}$
grosse Septime	8 : 15	6	8, $7\frac{1}{2}$ 1, 1	$\frac{1}{2}$ $\frac{8}{15}$
kleine Septime	9 : 16	9	9, 8 $2\frac{1}{4}$, $2\frac{2}{7}$ 1, 1	$\frac{1}{2}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{9}{16}$

angestimmte Intervalle	Verhältniss derselben	Combinationstöne beobachtet	Combinationstöne berechnet nach Kettenbrüchen	entsprechende Näherungswerthe des Kettenbruchs
übermässige Quart	32 : 45	13	16, 15	$\frac{2}{3}$
		19	$6\frac{2}{5}$, $6\frac{3}{7}$	$\frac{5}{7}$
			1, 1	$\frac{32}{45}$
Octave plus Quarte	3 : 8	1	3, $2\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
		2	1, 1	$\frac{3}{8}$
kleine Terz	1024 : 1215	382	$204\frac{4}{5}$, $202\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$
			$93\frac{1}{11}$, $93\frac{6}{13}$	$\frac{11}{13}$
			64, $62\frac{10}{19}$	$\frac{16}{19}$
			$17\frac{21}{59}$, $17\frac{5}{14}$	$\frac{59}{70}$
			$5\frac{59}{193}$, $5\frac{70}{229}$	$\frac{193}{229}$
			1, 1	$\frac{1024}{1215}$

Berücksichtigt man, dass durch die Individualität des Experimentators und überhaupt durch die Unvollkommenheit unserer Sinne die Zahl der wirklich hörbaren Combinationstöne eine nothwendige Beschränkung erleidet, so liefern diese Beobachtungen eine Bestätigung des von Hällström aufgestellten Gesetzes, wie es kaum erwartet werden konnte.

Nicht im Einklang mit der theoretischen Entwickelung Hällströms scheint die Erfahrung, dass öfter später abgeleitete Combinationstöne deutlich gehört wurden, wo, auch bei angestrengtester Aufmerksamkeit, diejenigen, aus welcher sie hergeleitet wurden, nicht, oder nur schwach gehört werden konnten. Offenbar aber kann ein solches Ausbleiben früherer Combinationstöne nur subjectiven Einflüssen des Beobachters zugeschrieben werden, da bei gleichen, aber von verschiedenen Tönen gebildeten Intervallen mehrmals in dem einen Falle Combinationstöne vorkommen, die in einem andern Falle nicht gehört wurden, und umgekehrt. Auch können wir als indirecte Bestätigung der Hällström'schen Ansicht über die Folge der Combinationstöne die Beobachtung der in dem nächsten Abschnitte beschriebenen verschiedenen Stossgattungen anführen, da, nach den Erfahrungen Scheibler's, die Stärke der Stösse in dem Maasse abnimmt, in welchem die ihre Erzeugung bedingenden Combinationen verwickelter werden, Stösse und Combinationstöne aber sich in physikalischer Hinsicht nur durch die ungleiche Geschwindigkeit der auf das Ohr einwirkenden Impulse unterscheiden.

Uebrigens liefern die Beobachtungen, in welchen nur die entfernteren Combinationstöne gehört werden konnten, gerade die entschiedensten Belege für die Gültigkeit des Hällström'schen Gesetzes, da z. B. bei dem Intervall 8 : 9 in einem Falle nur der Combinationston 5 in einem andern nur der Ton 7 gehört wurde, die Anwendung der Kettenbrüche aber nur einen Combinationston, nämlich den nicht gehörten Ton 1 liefert.

Scheibler. Gewohnt auch die scheinbar geringfügigsten Arbeiten mit der äussersten Genauigkeit auszuführen und selbst die gewöhnlichsten Beschäftigungen mit einem stets auf Vervollkommnung gerichteten Nachdenken zu begleiten, fasste Scheibler, als er um die erste Hälfte des vorletzten Jahrzehend beim Stimmen der zarten und reinen Töne der Maultrommel so recht deutlich die Unvollkommenheit unseres musikalischen Gehörs erkannte, den Gedanken, die Stösse, welche von zwei nahe im Einklang befindlichen Tönen hervorgebracht werden, zum Stimmen der Töne anzuwenden.

Er hatte bemerkt, dass die Geschwindigkeit dieser Stösse mit dem Unterschiede der Töne stetig zu- und abnimmt, so dass zu zwei nahe liegenden Tönen nur Ein dritter Ton gefunden werden kann, welcher mit beiden die nämliche Zahl der Stösse in einer Sekunde erzeugt. Um diesen Umstand zur Stimmung der Töne zu benutzen, suchte er, theils durch Rechnung, theils durch vielfache Versuche, auf dem Monochord in der Nähe der Stelle für $\bar{a}$ zwei Stellen zu bestimmen, deren zugehörige Töne mit dem Tone einer $\bar{a}$-Gabel bei erforderlicher Spannung der Saite genau 4 Stösse in der Sekunde erzeugten und zugleich von dem Tone der für $\bar{a}$ bestimmten Saitenlänge um dieselbe Zahl der Schwingungen, der eine in positivem, der andere in negativem Sinne differirten. Vermittelst dieser Stellen, welche Nebenstellen genannt wurden, stimmte Scheibler, leichter und sicherer als nach dem musikalischen Gehör, das Monochord auf die Weise, dass er der Saite durch zweckmässige Vorrichtung genau diejenige Spannung gab, bei welcher die, durch diese Stellen abgegrenzten Saitenlängen mit der $\bar{a}$-Gabel 4 Stösse in der Sekunde erzeugten. Die für $\bar{a}$ bestimmte Seitenlänge musste alsdann, wenn die Nebenstellen durchaus richtig bestimmt waren, mit derselben Genauigkeit den Ton der $\overline{a}$-Gabel angeben, mit welcher die Zahl der Stösse nach dem Gange eines Sekundenpendels gemessen war, da die den Nebenstellen entsprechenden Töne von dem Tone der Saite für $\overline{a}$ um gleich viel Schwingungen differirten, und ein gleicher Unterschied der Schwingungszahlen als die Bedingung einer gleichen Geschwindigkeit der Stösse musste angesehen werden. Setzen wir den grössten Fehler in der Bestimmung der Stösse gleich einem halben Stoss in der Sekunde (eine Annahme, welche selbst für ungeübte und wenig sorgfältige Messungen zu gross sein möchte); so beträgt, nach der im vorigen Abschnitte erwähnten Relation der Stösse zum Unterschiede der Schwingungen, die grösste Abweichung des Tones der nach dieser Methode gestimmten Saite von dem Tone der Gabel nicht mehr als eine Vibration, und mit gleicher Genauigkeit konnte vermittelst der Nebenstellen das $\overline{a}$ des Monochords auf andere Instrumente übertragen werden.

Bei den Versuchen, ähnliche Nebenstellen auch für andere Töne des Monochords zu bestimmen fand S. durch das Verhältniss der Saitenlängen die Vermuthung bestätigt, dass die Zahl der Stösse proportional sei dem Unterschiede der erzeugenden Töne, welche Proportionalität später bei Anwendung mehrerer Gabeln auch daraus hervorging, dass die Stösse zweier Gabeln die Summe derjenigen Stösse betragen, welche beide Gabeln mit einer dritten der Tonhöhe nach zwischen ihnen liegenden Gabel erzeugen.

Ohne den mühseligen Weg des direkten Aufsuchens wieder durchzuwandern, berechnete er nun aus den gefundenen Nebenstellen des $\overline{a}$ gleiche Nebenstellen für alle Töne der gleichmässig temperirten chromatischen Tonleiter von a bis $\overline{a}$ und verzeichnete sie mit grösster Sorgfalt auf der Skala des Monochords. Wurde dann mit Hülfe der Nebenstellen des $\overline{a}$ zuerst die Saite des Monochords gestimmt, so dienten diese neuen Nebenstellen, in derselben Weise, wie früher die Nebenstellen des $\overline{a}$, die übrigen Skala-Töne auf andere Instrumente zu übertragen.

So einfach und sicher dieses Verfahren auch erscheint, so wenig entsprach indess die bis dahin erreichte Genauigkeit derjenigen, welche von einer Anwendung der Stösse erwartet werden musste. Theils die Unvollkommenheit des Monochords, theils mannigfaltige äussere Einflüsse bildeten eine Menge, zum Theil nicht sogleich erkennbarer, Schwierigkeiten, welche die Arbeiten S.'s öfter unterbrachen und dadurch die endliche Erreichung des vorgesteckten Zieles sehr verzögerten. Wir begnügen uns in Kurzem diejenigen Mittel anzugeben, durch welche S. den störenden Einflüssen wenigstens in so weit begegnete, als es für den Zweck einer genauen Stimmung hinreichend war.

Nachdem er die Unzulänglichkeit der gewöhnlichen Monochorde nur zu oft erprobt hatte, entschloss er sich zum Bau eines neuen, äusserst festen und sorgfältig gearbeiteten Monochords, welches von seinem Orte nicht mehr versetzt wurde, sorgte dafür, dass der Schieber die verlangten Seitenlängen mit möglichster Schärfe abgrenzte, ohne die Saite weder in horizontaler noch vertikaler Richtung zu verrücken, verzeichnete die Skala mit solcher Genauigkeit, dass die einzelnen Theilpunkte nur durch eine Loupe gesehen werden konnten, und vermied den Einfluss der von dem Stimmenden auf die Saite ausstrahlenden Wärme durch übergelegte verschiebbare hölzerne Leisten.

Um der, bei längeren Arbeiten mit dem Monochord immer noch störenden Veränderlichkeit des Tones zu entgehen, und zugleich grössere, nicht transportable Instrumente stimmen zu können, bereitete er sich für jeden Ton der Skala und für die Töne der tiefern Nebenstellen Stimmgabeln. Zu dem Ende feilte er zu jedem Ton der Tonleiter eine Gabel so viel tiefer, dass dieselbe mit dem Ton der Saite deutliche und genau messbare Stösse erzeugte, suchte dann diejenige Stelle für das verschiebbare Gewicht eines gut gearbeiteten Metronoms, bei welcher auf eine einfache Schwingung genau 3 oder 4 Stösse erfolgten, und stimmte nun eine andere Gabel um so viel höher, dass beide in der nämlichen Zeit dieselbe Zahl der Stösse erzeugten. War auf diese Weise die zweite Gabel dem Ton der Saite gleich gestimmt, so wurde die erste Gabel genau um 4 Stösse in der Sekunde tiefer gefeilt, und konnte nun statt der tiefern Nebenstelle zur Stimmung benutzt werden.

Da bei diesen Messungen die Saite nur auf kurze Zeit der Erwärmung ausgesetzt, und ausserdem durch hölzerne Leisten möglichst geschützt wurde; so war eine wesentliche Störung von Seiten des Monochords nicht mehr zu befürchten, wogegen aber die Behandlung der Gabeln eine grössere Vorsicht erforderte.

Um eine Erwärmung derselben durch unmittelbare Berührung der Hand und durch die beim Halten unvermeidliche Nähe des

Beobachters zu verhüten, wurde jede Gabel an ihrem Stiele mit einem hölzernen Hefte und unter demselben mit einer männlichen Schraube versehen. Beim Gebrauch wurden dann die Gabeln entweder in das eine Ende eines etwa 6 Zoll langen hölzernen Stabes, welcher in einen Resonanzboden fest eingesteckt werden konnte, oder, nach einer spätern Einrichtnug, in die obere Fläche eines kleinen tragbaren Stimmkästchens fest eingeschraubt und vermittelst eines mit einem wollenen Wulst versehenen Stäbchens, oder durch eine ähnliche Vorrichtung wie die eines Klavierklaves angeschlagen.

So verbessert entsprachen die Instrumente allerdings mehr als hinreichend den Anforderungen, welche in musikalischer Hinsicht an eine Stimmung der Töne gemacht werden konnten; da die noch vorhandenen Fehler in jedem Falle kleiner waren, als diejenige Grösse, welche auch das feinste musikalische Gehör noch als Differenz der Töne aufzufassen vermag. Doch für S. war dieser praktische Zweck nicht mehr der Endzweck seiner Bemühungen. Ihm war die genaue Bestimmung der Höhe eines Tones der Gegenstand eines wissenschaftlichen Interesses gerworden, für welchen das bisher Erreichte nicht genügen konnte, und überhaupt hatte die vieljährige Beschäftigung mit akustischen Gegenständen manche Fragen angeregt, deren Erledigung nach der Ueberwindung so vieler Schwierigkeiten um vieles leichter werden musste.

So geschah es, dass die aus rein praktischem Interesse entsprungenen Arbeiten S.'s in ihrem Verlaufe mit den theoretischen Untersuchungen Hällström's über Bestimmung der absoluten Schwingungszahlen der Töne, über Stösse und Combinationstöne zusammentrafen und das von Hällström entdeckte Gesetz nicht allein ebenfalls kennen lehrten, sondern mit einer Genauigkeit bestätigten, welche durch die zu solcher Bestätigung absichtlich unternommenen Versuche nimmer erreicht werden konnte.

Um die absoluten Schwingungszahlen seiner $\bar{a}$-Gabel zu finden bediente sich S. zuerst eines Verfahrens, welches mit dem von Sauveur und Sarty angewandten dem Wesen nach übereinkommt.

Er hatte die für $\bar{a}$ bestimmte Saitenlänge auf dem Monochord in 2000 gleiche Theile getheilt, und die tiefere Nebenstelle für $\bar{a}$ um 18,2 dieser Theile weiter vom Anfang der Saite entfernt gefunden. Nehmen wir nun an, was sich vielfältig durch die bisherigen Resultate herausgestellt hatte, dass der Unterschied der Schwingungszahlen zweier Töne gleich sei der Zahl der durch diese Töne erzeugten Stösse; so haben wir, wenn die Schwingungen des $\bar{a}$, oder der Saitenlänge 2000, x genannt werden, für die Saitenlänge 2018,2 die Schwingungszahl x — 4, wornach sich verhält:

$$2000 : 2018{,}2 = x - 4 : x$$

$$\text{oder:}\quad 18{,}2 : 2018{,}2 = 4 : x,$$

und das angestrichene $\bar{a}$ gleich 443,56 Schwingungen gefunden wird.

Durch eine nicht ganz genaue Rechnungsweise erhielt S. ein von dem angegebenen um einige Schwingungen abweichendes Resultat; doch stimmte dasselbe hinreichend mit den bisherigen Angaben über die absoluten Vibrationszahlen der Töne, um die Richtigkeit der vorausgesetzten Relation zwischen der Zahl der Stösse und dem Unterschiede der Schwingungen vollkommen zu bestätigen und zu fernern Versuchen aufzumuntern.

Da bei dieser Methode ein geringer Fehler in der Bestimmung der Nebenstelle, etwa um 0,1 jener Monochordtheile schon einen Fehler von mehreren Schwingungen in dem Resultate für $\bar{a}$ zur Folge hat, so entschloss sich S., die Stösse zwischen Tönen von grösseren Unterschieden zu messen und bereitete sich zu diesem Behuf zwischen den schon vorhandenen Skalagabeln, Zwischengabeln, so dass von Gabel zu Gabel die Stösse sicher und genau gemessen werden konnten.

Um in einer solchen Reihe, wo nicht mehr jede Gabel von der nächsten um 4 Stösse entfernt sein konnte, die Stösse mit Leichtigkeit zu messen, bediente er sich eines für genauere Messungen besonders eingerichteten Metronoms, dessen Skala er selbst mit äusserster Sorgfalt für die von 50 bis 90 um $\frac{1}{10}$ verschiedenen einfachen Schwingungen in der Minute eintheilte. Bei den vorzunehmenden Messungen wurde dann das durch eine Schraube verschiebbare Gewicht des Metronoms so gestellt, dass, je nach der Geschwindigkeit der Stösse, genau 3, 4, 5 oder 6 Stösse während jeder einfachen Schwingung des Instruments erfolgten, worauf die Zahl der Stösse in der Sekunde aus der auf der Skala abzulesenden Zahl der Schwingungen in einer Minute leicht berechnet werden konnte.

Um die Genauigkeit dieses Verfahrens zu beurtheilen, erwähnen wir, dass es S. in diesen Messungen zu der Fertigkeit gebracht hatte, die Zahl der Schwingungen mit Sicherheit bis auf $\frac{1}{10}$ Schwingung in der Minute zu bestimmen, woraus folgt, dass für eine mittlere Geschwindigkeit des Pendels, nämlich für 60 Schwingungen in der Minute, die möglichen Fehler nicht mehr als $\frac{1}{600}$ der gefundenen Pendelschwingungen, Stösse oder Vibrationen betragen konnten.

War nun durch dieses Mittel die Zahl der Stösse je zweier auf einander folgenden Gabeln zwischen den Tönen eines Intervalls gefunden, so gab die Summe der Stösse den Unterschied der Schwingungen dieser Töne, welcher nur noch mit einem, aus dem Verhältniss der entsprechenden Saitenlängen des Monochords leicht abzuleitenden Faktor multiplizirt wurde, um die absolute Zahl der Schwingungen irgend eines Tones der Saite zu erhalten.

Nehmen wir an, dass bei den einzelnen Messungen, welche dieses Verfahren nothwendig machte, alle Fehler in demselben Sinne gelegen, sich folglich summirt hätten, so würde der für $\overline{a}$ resultirende Fehler nach dem ungefähren Werth des $\overline{a}$ gleich 440 Schwingungen und dem mittleren Werth des Fehlers gleich $\frac{1}{600}$ doch nicht mehr als $\frac{3}{4}$ Schwingungen betragen haben, wogegen die Resultate S.'s öfter um 3 Schwingungen für $\overline{a}$ differirten.

Um diese Zeit hatte ich das Glück, mit den Arbeiten S.'s näher bekannt zu werden. Theils die Ueberzeugung, dass der Grund solcher Verschiedenheit der Resultate nicht in der Methode, sondern lediglich in der Unzuverlässigkeit des Monochords zu suchen sei, theils die Differenz unserer Ansichten über Berechnung der Schwingungen des $\overline{a}$ aus den gefundenen Nebenstellen und ausserdem die mangelhafte Bestimmung dieser Stellen selber bewogen mich, eine Ausdehnung der vorhin erwähnten Gabelreihe auf den ganzen Umfang einer Octave a bis $\overline{a}$ zu veranlassen, was um so mehr den gewünschten Erfolg zu versprechen schien, da es durch die glückliche Entdeckung S.'s, dass ein der Octave nahe liegender Ton mit dieser Octave dieselbe Zahl der Stösse erzeugt, als mit dem Grundton, möglich geworden war, die Grenzen dieses Intervalls bis mindestens auf $\frac{1}{600}$ von 4 Stössen oder Tonschwingungen festzustellen, und somit das Monochord gänzlich zu entbehren.

S c h e i b l e r vollführte diese Arbeit mit der ihm eigenen Sorgfalt und Sinnigkeit. Er hatte bemerkt, dass die Tonhöhe einer Gabel schon durch den Einfluss der von dem Messenden ausstrahlenden Wärme merklich geändert wird und erst nach längerer Zeit wieder völlig den vorigen Stand erreicht, obgleich der Unterschied in der Höhe zweier Gabeln, oder die durch denselben bedingte Geschwindigkeit der Stösse, beim Messen, wie überhaupt bei geringer aber relativ gleicher Temperaturveränderung, für unsere Sinne keine merkbare Aenderung erleidet.

Um daher die Aufnahme der ganzen Gabelreihe zugleich zur Ausmittelung der Schwingungen der einzelnen Gabeln zu benutzen, war eine gleichmässige Temperatur sämmtlicher Gabeln und vor Allem jedesmal derjenigen Gabeln, deren Unterschied gerade gemessen werden sollte, eine unerlässliche Bedingung. Nach mancherlei Abänderungen fand es S. am Besten, die Gabeln gut polirt in ein trockenes, durch seine Lage vor schnellem Temperaturwechsel geschütztes Zimmer hinter kleine Vorhänge zu legen. Beim Messen wurden dann jedesmal an einem Tage die Stösse sämmtlicher Skala-Gabeln mit den ersten Zwischengabeln, am zweiten die Stösse der ersten Zwischengabeln mit den darauf folgenden u. s. f. bestimmt, bis alle Entfernungen der ganzen Octave gemessen waren. Die Summe der erhaltenen Stösse gab nun den Unterschied der Schwingungen von a und $\bar{a}$, oder die Anzahl der Schwingungen des a, womit zugleich die absolute Höhe der einzelnen Gabeln gegeben war.

Durch diese Vorarbeiten war es nun leicht, an den einzelnen Gabeln diejenige Correktion anzubringen, welche nöthig war, um, den erhaltenen Werth für a zu Grunde legend, eine Reihenfolge von Tönen darzustellen, welche sich genau wie $1 : \sqrt[12]{2} : \sqrt[12]{2^2} \ldots$ verhielten, worauf die Höhe der Nebengabeln, zum Behuf der Stimmung anderer Instrumente, wieder auf 4 Stösse in der Sekunde corrigirt werden musste.

Nach der endlichen Ausführung dieser Arbeit, welche fast als ideale Lösung der ursprünglich vorgesetzten Aufgabe anzusehen ist, unternahm S. noch mehrere Messungen der ganzen Octave und hatte die Freude, die abweichendsten Resultate für $\bar{a}$ nur um 0,126 Schwingungen in der Sekunde verschieden zu finden.

In folgender Tabelle haben wir das detaillirte Ergebniss einer dieser Aufnahmen zusammengestellt.

Hauptgabeln	Zwischengabeln	Zahl der Pendelschläge in der Minute; wenn auf jeden 4 Stösse kommen
a		
	1	68,1
	2	67,7
a♯		60,0
	1	73,6
	2	74,0
h		60,0
	1	79,9
	2	79,6
$\bar{c}$		60,0
	1	58,1
	2	57,1
	3	58,0
$\bar{c}$♯		60,0
	1	62,1
	2	61,9
	3	62,3
$\bar{d}$		60,0
	1	67,0
	2	67,7
	3	66,7
$\bar{d}$♯		60,0
	1	72,4
	2	72,4
	3	72,5
c		60,0
	1	77,9
	2	79,0
	3	76,1
$\bar{f}$		60,0
	1	62,6
	2	62,4
	3	63,2
	4	62,5
$\bar{f}$♯		60,0
	1	67,4
	2	67,6
	3	66,7
	4	67,2
$\bar{g}$		60,0
	1	72,4
	2	73,4
	3	72,8
	4	72,2
$\bar{g}$♯		60,0
	1	77,9
	2	78,0
	3	76,4
	4	77,6
$\bar{a}$		60,0

Anstatt aus jeder einzelnen Zahl der Pendelschwingungen die Stösse zu berechnen ist es für die Berechnung des $\bar{a}$ bequemer die Summe sämmtlicher Pendelschwingungen zu nehmen. Aus dieser erhält man für den Unterschied der Schwingungen von a bis $\bar{a}$ oder für die Schwingungen des a in einer Sekunde $\frac{3295.4}{60} = 219{,}6667$, woraus für die übrigen Skala-Töne nach vorstehender Tabelle folgende Werthe hervorgehen, die wir mit den nach dem Verhält $1 : \sqrt[12]{2}$ berechneten Schwingungszahlen zusammengestellt haben.

Töne	Schwingungszahlen derselben		Unterschiede
	nach den angestellten Messungen	berechnet nach dem Verhältniss $1 : \sqrt[12]{2}$	
a	219,6667	219,6667	
$\bar{a}$#	232,720	232,728	0,008
h	246,560	246,567	0,007
$\bar{c}$	261,193	261,230	0,037
$\bar{c}$#	276,740	276,762	0,022
$\bar{d}$	293,160	293,220	0,060
$\bar{d}$#	310,585	310,655	0,070
$\bar{e}$	329,073	329,129	0,056
$\bar{f}$	348,605	348,699	0,094
$\bar{f}$#	369,360	369,433	0,073
$\bar{g}$	391,285	391,402	0,117
$\bar{g}$#	414,673	414,676	0,003
$\bar{a}$	439,333	439,333 [1]	

[1]) Nach dieser Bestimmung der absoluten Schwingungszahlen seiner $\bar{a}$-Gabel untersuchte S. später die absolute Tonhöhe anderer, eigends zu diesem Zwecke bestellten $\bar{a}$-Gabeln, und fand den Ton von 5 verschiedenen Pariser Gabeln gleich 426,7 bis 440,7, von einer Gabel des Berliner Orchesters gleich 441,62, von 6 Gabeln des Wiener Orchesters gleich 433,66 bis 444,87 Schwingungen. Diese Resultate veranlassten S. zu dem, von der Versammlung deutscher Naturforscher im Jahre 1834 angenommenen Vorschlag, das $\bar{a}$ auf 440 Schwingungen in der Sekunde festzustellen.

Dass aus diesen Resultaten, verglichen mit den von den Physikern durch die verschiedenartigsten Untersuchungen erhaltenen Vibrationszahlen der Töne, auf das Unzweifelhafteste hervorgeht, dass der Unterschied der Schwingungen, oder der halbe Unterschied der Vibrationen, zweier nahe liegenden Töne gleich ist der Zahl der erzeugten Stösse, bedarf keiner weitern Erwähnung.

Auffallend war es uns aber, von einer sehr achtbaren Seite her auf diese Frage aufmerksam gemacht, in keinem der uns bekannten physikalischen Lehrbücher einen bestimmten Ausdruck für die Beziehung der Stösse zu den Schwingungen der erzeugenden Töne und eben so wenig eine genügende Erklärung für die physikalische Entstehungsweise der erstern zu finden.

Nach einer mündlichen Unterredung über diesen Gegenstand erhielt ich von S. einen Versuch zur figürlichen Darstellung der beiden erzeugenden Wellenzüge, welcher mich zu folgender Entwickelung veranlasste.

Nehmen wir, um für unsere Betrachtung den einfachsten Fall herauszuheben, an, dass sich die Schwingungen zweier Töne wie zwei um Eins verschiedene ganze Zahlen verhalten, dass die Maxima der in der Luft erzeugten Verdichtungen und Verdünnungen einander gleich seien und im Anfange das Verdichtungsmaximum des einen Tones mit dem Verdünnungsmaximum des andern zusammen falle. Alsdann werden die auf solche Weise erzeugten Wellenzüge sich durch zwei in Figur I. gezeichnete Curven a b c d ... l, a' b' c' d' ... l' ausdrücken lassen, deren Perpendikel auf die Abscissen-Axe pq in der Richtung ap die Grössen der Verdichtung und in der Richtung a' p die Grössen der Verdünnung darstellen, während die entsprechenden Abschnitte der Abscissen-Axe die zugehörigen Zeiten bezeichnen.

Treffen diese Wellenzüge das Ohr, so wird für dasselbe allerdings die Empfindung jedes einzelnen Tones in ihrer ursprünglichen Eigenthümlichkeit verbleiben, da das System der einen Wellen nicht durch die Durchkreuzung der andern geändert wird und jede Einwirkung auf das Gehör doch immer vermittelst einer gewissen Menge von Lufttheilchen geschieht: ähnlich so, wie für das Auge die einzelnen Systeme der sich im Wasser kreuzenden Wellen erkennbar bleiben, wofern nur ein hinreichender Theil von der Oberfläche des Wassers gesehen wird.

Neben dieser Empfindung der einzelnen Töne aber entsteht aus dem Zusammentreffen beider Wellenzüge eine dritte neue Empfindung, bedingt durch das gegenseitige Verstärken und Aufheben der zusammenstossenden Verdichtungen und Verdünnungen.

Berücksichtigen wir die gewöhnliche Bedeutung der positiven und negativen Grössen, so lassen sich die, solchergestalt resultirenden, combinirten Verdichtungen und Verdünnungen durch die Summe der zu denselben Abscissen gehörigen Ordinaten beider Curven ausdrücken. Jedoch ist es für die Betrachtung der aus den Endpunkten dieser Ordinaten gebildeten Curve an und für sich vollkommen gleichgültig, welche Grösse zur Einheit der Ordinaten angenommen wird, weshalb wir der grössern Bequemlichkeit und Anschaulichkeit wegen vorziehen, die halbe Summe der vorhin bezeichneten Ordinaten zu nehmen, wornach die neue Curve p α β γ ... mit den Curven a b c ..., a′ b′ c′ ... in ihren Durchschnittspunkten zusammentrifft und überhaupt die Entfernungen der zu gleichen Abscissen gehörigen Punkte dieser Curven wie c m in λ und c′ n in μ halbirt.

Diese Curve p α β γ ... welche in derselben Weise die resultirende Wirkung beider Wellenzüge bezeichnet, wie wir durch die Curven a b c ... a′ b′ c′ ... die einfachen Verdichtungen und Verdünnungen dargestellt haben, zeigt nun ebenfalls von p bis q eine abwechselnde Aufeinanderfolge von Verdichtungen und Verdünnungen. Aber diese Verdichtungen und Verdünnungen sind nicht, wie bei gewohnlichen Tönen, alle einander gleich, so dass der Ablauf des ganzen Wellenzuges als die regelmässige Wiederkehr eines aus zwei gleichen aber entgegensetzton Gliedern bestehenden Binomiums betrachtet werden könnte; sondern die in einem solchen Combinationswellenzuge, wie man ihn nennen könnte, regelmässig wiederkehrenden Systeme sind zusammengesetzt aus einer grössern Anzahl einzelner Verdichtungen und Verdünnungen, deren Maxima, in der Mitte eines solchen Systems am grössten, nach beiden Seiten hin fortwährend abnehmen, bis sie an den Enden selbst in Null übergehen.

Werfen wir einen Blick auf die Zeichnung, so liegt der Anfang eines dieser Systeme in p, wo die Maxima zweier entgegengesetzten einfachen Vibrationen zusammentreffen. Von da, wo die combinirte Wirkung Null und die Linie p A Anfangs gegen die Abscissen-Axe gekrümmt ist, erhebt sich dieselbe allmählig zu der schwachen combinirten Verdichtung p A α. Auf diese Verdichtung folgt dann die stärkere Verdünnung $\alpha B \beta$ u. s. f. bis zu derjenigen Verdichtung, deren Maximum Eo zugleich die stärkste combinirte Wirkung und die Mitte des ganzen Systems bezeichnet. Von dieser Mitte aus nimmt dann die combinirte Wirkung in der zweiten Hälfte des Systems in immer schwächern Verdichtungen und Verdünnungen wieder eben so ab, wie sie in der ersten Hälfte zugenommen, und schliesst das System mit einer schwachen combinirten Verdichtung δFq, um ein gleiches in derselben Weise wieder zu beginnen.

Untersuchen wir den Einfluss dieser combinirten Wirkung auf unser Gehör, so ergiebt sich zunächst, dass die resultirenden Verdichtungen und Verdünnungen weder, wegen zu schneller Aufeinanderfolge, einzeln für sich eine gesonderte Auffassung gestatten, noch auch, wegen der Verschiedenheit ihrer Intensitäten zur unmittelbaren Erzeugung eines musikalischen Tones geeignet sind, und also nur die aus diesen Verdichtungen und Verdünnungen zusammensetzten und durch die Zunahme ihrer Maxima in der ersten so wie die Abnahme derselben in der zweiten Hälfte charakterisirten Systeme als nächste Elemente der Empfindung betrachtet werden können.

Folgen nun diese Systeme einander in solchen Zeiträumen, dass der Eindruck eines jeden von ihnen für sich wahrgenommen werden kann, so muss diejenige Empfindung entstehen, welche wir Stoss genannt haben, und das schöne Anschwellen und Abnehmen, welches bei der Dauer eines Stosses von etwa zwei Sekunden so deutlich wahrgenommen wird, ist die Empfindung der Zu- und Abnahme der Intensitäten in den beiden Hälften der Systeme. Geschieht aber die Aufeinanderfolge der Systeme so schnell, dass der gesonderte Eindruck jedes einzelnen Systems nicht mehr wahrgenommen wird; so ist die stetige, während ihrer ganzen Dauer sich völlig gleich bleibende Empfindung unverkennbar der aus den erzeugenden Tönen resultirende Combinationston, und es bleibt uns nur noch übrig, den Zusammenhang der Höhe dieses Tones so wie der Geschwindigkeit der Stösse mit den erzeugenden Tönen nachzuweisen.

Zu diesem Zwecke sei es erlaubt die bekannten Versuche Savart's und Cagniard de Latour's zur Erzeugung der Töne zu berühren. Suchen wir das Gemeinschaftliche dieser Versuche, sowohl derjenigen von Savart über die tiefsten und höchsten hörbaren

Töne, als derjenigen von **Cagniard de Latour**, welche den Gebrauch der Syrene betreffen, so finden wir, dass die Erzeugung des Tones nur durch die regelmässige Wiederkehr irgend eines auf das Gehör einwirkenden Impulses bedingt wurde, wobei in allen Fällen dieselbe Abhängigkeit der Höhe des Tones von der Zahl der in einer Seknnde erfolgenden Impulse stattfindet. Dieser Impuls erscheint in den angeführten Versuchen entweder als Binomium einer Verdichtung und Verdünnung, oder als blosse Verdichtung, und insbesondere zeigt die Untersuchung **Savart's** über die tiefsten hörbaren Töne, dass die Entfernung der beiden Maxima eines Binomiums keineswegs abhängt von der Dauer der einzelnen Impulse oder, mit andern Worten, von der Entfernung der Maxima zweier auf einander folgenden Binomien: wornach also die gewöhnliche Erzeugung musikalischer Töne, wo die verschiedenen Maxima der Verdichtung und der Verdünnung alle in gleichen Zeitintervallen einander folgen, nur als ein besonderer Fall der allgemeinen Wiederholung eines aus einer Verdichtung und Verdünnung zusammengesetzten Impulses betrachtet werden muss.

Folgen wir aber dieser allgemeinern Ansicht, so ist es offenbar der Natur der Sache angemessener, die Höhe eines Tones durch die Zahl der in einer Sekunde erfolgenden Impulse, oder, um ein den physikalischen Vorgang ohne Bezug auf unsere Empfindung bezeichnendes Wort zu gebrauchen, durch die Zahl der in einer Sekunde erfolgenden Wellen oder ganzen Schwingungen zu bezeichnen, anstatt, wie gewöhnlich, zu dieser Bezeichnung die Zahl der halben Schwingungen, welche gewöhnlich Vibrationen genannt werden, anzuwenden; ein Vorschlag, zu welchem **Poggendorf** bereits in den Anmerkungen zu der angeführten Abhandlung, Ann. XXXII, S. 520 veranlasst wurde.

Rücksichtlich des Combinationstones ist es nun gleichfalls, nach der vorliegenden Darstellung, die regelmässige Wiederkehr eines und desselben Impulses, welcher die Erzeugung dieses Tones bedingt, dessen Höhe demnach wiederum durch die Zahl der in einer Sekunde erfolgenden Impulse bestimmt ist, und es unterscheidet sich dieser Ton nur dadurch von den bis dahin unmittelbar hervorgebrachten Tönen, dass dieser Impuls nicht durch das blosse Auftreten einer einfachen Verdichtung, wie bei der Syrene (wenn man nicht ein allenfallsiges Zurücktreten der Lufttheilchen nach dem Verschluss der Oeffnung in Betracht ziehen will), oder durch die Combination einer Verdichtung und Verdünnung, wie in den gewöhnlichen Fällen, sondern durch die Verbindung einer grössern Zahl unter sich ungleicher Verdichtungen und Verdünnungen zu einem grössern Ganzen, welches wir mit dem Namen System bezeichneten, gegeben ist.

Um für diese Systeme einen mehr gebräuchlichen Ausdruck zu suchen, dürfen wir nur die einzelnen Verdichtungen und Verdünnungen mit entsprechenden Hebungen und Senkungen des Wasserspiegels vergleichen, so dass die Figur I. gezeichnete Curve $p\alpha\beta\gamma\ldots$ unmittelbar den Durchschnitt desselben mit einer vertikalen Ebene darstellt. Wie man eine solche Verbindung wellenartiger Theile wiederum mit dem Namen Welle bezeichnen könnte, so würden die aus den entsprechenden Verdichtungen und Verdünnungen zusammengesetzten Systeme nicht unpassend mit dem nämlichen Namen bezeichnet werden, zumal, da für das Binomium einer Verdichtung und Verdünnung diese Benennung schon geläufig ist. Auch würde man, mit direkter Beziehung auf die wirkliche Bewegung der Lufttheilchen, nach einer gleichen Verallgemeinerung der gewöhnlichen Bedeutung, diese Systeme Schwingungen nennen können, welche Benennung, eben so wie die vorige, den Vortheil darbietet, die Elemente der Combinationstöne auf gleiche Weise wie die der gewöhnlichen Töne zu bezeichnen.

Fragen wir nun, um uns der so eben erwähnten Ausdrücke zu bedienen, nach dem Gesetz in der Wiederkehr dieser zusammengesetzten Wellen oder Schwingungen, so ergiebt sich sogleich, dass die Wiederholung derselben so oft geschieht, als das Maximum der Verdichtung des einen Tones mit dem Maximum der Verdünnung des andern zusammentrifft, oder als der Unterschied der Wellenzahlen dieser Töne Eins beträgt.

Zwar bezieht sich unsere Darstellung nur auf den besondern früherhin bezeichneten Fall, jedoch ist es leicht, auch für jeden andern Fall des Zusammenklingens zweier einfachen Töne eine ähnliche Folge von zusammengesetzten Wellen und dieselbe Relation ihrer Zahl zur Wellenzahl der erzeugenden Töne nachzuweisen.

Da nun die zusammengesetzten Wellen, so lange die Zahl derselben in einer Sekunde nicht mehr als 8 beträgt, einzeln als deutlich wahrnehmbare und zählbare Stösse empfunden werden und bei grösserer Geschwindigkeit den Combinationston erzeugen, dessen Höhe unmittelbar durch die Zahl der Wellen gegeben ist; so ergiebt sich als allgemeines Gesetz der Stösse und Combinationstöne, dass die Zahl der Stösse, so wie die Wellen- oder Schwingungszahl der Combinationstöne gleich ist dem Unterschiede der Wellenzahlen der erzeugenden Töne.

Unerwartet war es uns aus den angeführten schätzbaren Anmerkungen Poggendorf's zu ersehen, dass bereits im Jahre 1800 Thomas Young eine ähnliche, aber unverdienter Weise wieder in Vergessenheit gerathene Theorie der Stösse und Combinationstöne geliefert habe. Wir entlehnen in möglichster Kürze aus der Abhandlung über Schall und Licht, übersetzt von Vieth, Gilbert's Ann. Bd. XXII, S. 349, folgende wesentliche Punkte derselben.

„Um den einfachsten Fall zu betrachten, wollen wir anneh-„men, dass die Lufttheilchen, indem sie die Schwingungen fort-„pflanzen, mit gleichförmiger Bewegung vorwärts und rückwärts „gehen. Um ihre Bewegung dem Auge anschaulich zu machen, „wollen wir den gleichförmigen Fortgang der Zeit durch das „Wachsen der Abscissen und die Entfernung des Luftheilchens „von seiner ursprünglichen Lage durch die Ordinaten darstellen. „(Fig. 2—7.) [1]. Wenn nun zwei oder mehrere Vibrationen nach „einerlei Richtung zusammen treffen, so wird die vereinigte Be-„wegung durch die Summe oder Differenz der Ordinaten darge-„stellt. Bei zwei Tönen in gleicher Stärke und ungefähr von „gleicher Höhe, (wie Fig. 5.) ist die combinirte Schwingung ab-„wechselnd sehr schwach und sehr stark und bringt die Wirkung „hervor, die wir Schläge oder Pulsus nennen (Fig. 8. A mit B), „die um so langsamer und markirter sind, je näher die Töne sich „an Geschwindigkeit der Schwingungen gleich kommen. Von „dergleichen Pulsirungen kann es mehrere Ordnungen geben, wie „es das periodische Zusammentreffen der Zahlen, die ihre Schwin-„gungsverhältnisse ausdrücken, mit sich bringt.

„Nur in der Mitte einer Pulsirung, nicht aber in ihrer gan-„zen Dauer, ist die Stärke des combinirten Tones doppelt so gross, „als die des einfachen.

---

[1]) In Fig. 2. bezeichnen a b c d und a′ b′ c′ d′ ... die ursprünglichen Töne und a α β γ δ ... den Combinationston; Fig. 7. stellt eine Quarte vor, welche um ungefähr zwei Comma temperirt ist.

„Je grösser der Unterschied der Höhe zweier Töne ist, desto „schneller sind die Schläge, bis sie zuletzt die Vorstellung eines „fortdauernden Tons erwecken: und dies ist der von Tartini be- „schriebene harmonische Fundamentalton. So sind in Figur 3—6 „die Schläge der aus den Intervallen 1:2, 4:5, 9:10, 5:8 zusam- „mengesetzten Schwingungen gezeichnet, welche (wenn anders „die Töne nicht zu tief genommen werden), einen deutlich hör- „baren Ton hervorbringen, wie es dem periodischen gänzlichen „oder ungefähren Zusammentreffen der Schwingungen gemäss ist, „wie auch Fig. 7. zeigt.

„Aber ausser diesem Hauptcombinationston lässt sich bisweilen „noch ein zweiter Ton hören, wenn die zwischenliegenden zusam- „mengesetzten Vibrationen, obgleich unterbrochen, in einem ge- „wissen Zwischenraume wiederkehren. Zum Beispiele in der Coa- „lescenz zweier Töne, die sich wie 7:8 oder 5:7 oder 4:5 ver- „halten, findet sich ein Wiederkehren eines ähnlichen Zustandes „der vereinten Bewegung ungefähr in Zwischenräumen von $\frac{5}{15}$, „$\frac{4}{12}$ oder $\frac{3}{9}$ der ganzen Periode; wesshalb in der grossen Terz „die Quart unter dem Grundtone eben so deutlich gehört wird „als die Doppeloktave, wie man schon einigermaassen aus Fig. 4. „sieht, wo AB beinahe $\frac{1}{3}$ von CD ist.“

In einem spätern Aufsatz aus dem Jahre 1803, Gilb. Ann. XXI, S. 293 unterwirft Young diesen Gegenstand einer abermaligen Betrachtung. Als das Wesentlichste aus demselben stehe hier folgende Beschreibung der von ihm erfundenen Wellenstäbchen.

Diese Stäbchen sind, wie Fig. 9. darstellt, in einem Rahmen neben einander gestellt, und können durch eine Schraube festgeklemmt werden. Wird die Schraube gelöst, so nimmt die untere Grenze der Stäbchen die Figur der Curve an, auf welche sie gesetzt werden, und die obere Grenze bildet eine neue Curve deren Ordinaten, Fig. 10, 11, aus der Summe der Ordinaten der untern Curve und der Länge der einzelnen Stäbchen bestehen. Diese Vorrichtung eignet sich nun auf eine sinnreiche Weise zur Darstellung der Combinationen zweier zusammenklingenden Töne. Werden nämlich in Fig. 12. durch die untere Curve die Wellen des einen und durch die Länge der Stäbchen die Wellen des andern von zwei nahe im Einklang befindlichen Tönen dargestellt, so giebt die neue Curve $\alpha\beta\gamma\ldots$ ein anschauliches Bild der aus dem Zusammenklingen dieser Töne hervorgehenden combinirten Wirkungen.

Man ersieht aus diesen Betrachtungen, dass der die optischen Erscheinungen mit klarem Auge durchschauende Physiker nicht minder gründlich und genau die wahre Natur der Stösse und Combinationstöne erkannte. Nicht zu verkennen ist jedoch, dass seine Untersuchungen nicht das eigentliche Gesetz der Stösse und Combinationstöne umfassten, und wenn wir ausser den selbst dem scharfsichtigen Vieth noch dunkeln Stellen über die Bildung mehrerer Combinationstöne finden, dass er, im Verhältniss zu der fast überall nur andeutenden Darstellungsweise, mit ziemlicher Weitläuftigkeit die Anzahl der combinirten kleinen Schwingungen berechnet, so muss es uns erscheinen, als ob ihm selbst mehrere Gegenstände seiner Theorie nicht recht deutlich gewesen seien.

Wenden wir uns zu den weitern Entwickelungen der Scheibler'schen Arbeiten.

Nachdem S. durch die Aufnahme der ganzen Octave sich die Kenntniss der absoluten Schwingungszahlen aller einzelnen Gabeln verschafft hatte, war es leicht, innerhalb der Grenzen von a bis $\overline{a}$ einen Ton von beliebiger Anzahl der Schwingungen zu stimmen. Um einen möglichst reinen Dreiklang zu hören, von dessen Existenz bei der gewöhnlichen Stimmmethode nicht die Rede sein kann, stimmte er zwei Gabeln, so dass sich die Schwingungen des a (=219,667) zu den Schwingungen dieser Gabeln genau wie 4:5:6 verhielten.

Der Erfolg entsprach den Erwartungen, und jedes für musikalische Reinheit empfängliche Ohr wurde von der überraschenden Harmonie und dem schönen gleichmässigen Abfluss der Töne ergriffen.

Als er nun zur Vergleichung mit diesem Accord den Accord aus den Tönen a, $\overline{c\sharp}$, $\overline{e}$ nach den temperirten Verhältnissen $1 : \sqrt[12]{2^4} : \sqrt[12]{2^7}$ zusammenstellte, bemerkte er, statt jenes gleichförmigen Abflusses der Töne, Stösse, wie von zwei nahe im Einklang befindlichen Gabeln, nur etwas schwächer. Es wurde die Geschwindigkeit dieser, wohl nur von Hällström einmal beobachteten, Stösse gemessen und eine direkte Erklärung derselben in der Weise, wie wir die Stösse zweier nahe liegenden Töne betrachtet haben, versucht, jedoch ohne genügenden Erfolg.

S. wandte sich daher zu weitern Versuchen. Er vertauschte