



Synthetische  
Geometrie der Kegelschnitte

in engster Verbindung  
mit  
neuerer und darstellender Geometrie.

Für die oberen Klassen höherer Lehranstalten

bearbeitet

von

A. Schulte-Tigges,  
Direktor des Realgymnasiums zu Kassel.

Fünfte unveränderte Auflage.



Berlin W. 10  
Druck und Verlag von Georg Reimer  
1918.

Hauptsätze  
der  
**Elementar-Mathematik**

zum Gebrauche an höheren Lehranstalten

von

Dr. F. G. Mehler.

Bearbeitet von A. Schulte-Tiggas,  
Direktor des Realgymnasiums zu Kassel.

Ausgabe B.

Oberstufe I. Teil.

Synthetische Geometrie der Kegelschnitte in engster  
Verbindung mit neuerer und darstellender Geometrie.



Berlin W. 10

Druck und Verlag von Georg Reimer

1918.



## Vorwort zur ersten Auflage.

Die außerordentlich weite Verbreitung der Schellbach-Mehlerschen „Hauptsätze der Elementar-Mathematik“ beruht ohne Zweifel auf den anerkannten Vorzügen des Buches: Kurz und knapp in seinen Ausführungen und dabei doch klar und überzeugend, vermeidet es allen Ballast wie alle unnütze Wortklauberei, so daß es bei seinem verhältnismäßig geringen Umfang in der Tat das Wichtigste und Notwendigste aus der Schulmathematik enthält. Aber es entspricht der Entstehung des Buches, daß es den Anforderungen, die an realistischen Anstalten gestellt werden müssen, wie auch den neuen Lehrplänen überhaupt und insbesondere den neuesten Bestrebungen auf dem Gebiet des mathematischen Elementarunterrichts, wie sie durch die Unterrichtskommission der Naturforscherversammlung festgelegt worden sind, nicht genug Rechnung trägt.

Der Anschluß an diese Ziele soll nun in der folgenden Weise erstrebt werden. Das Stammbuch selbst wird in einer im einzelnen wenig veränderten Ausgabe bestehen bleiben, die indessen soweit ergänzt werden soll, wie es die Lehrpläne von 1901 hinsichtlich der Lehraufgabe der Gymnasien erfordern. Daneben aber soll, in Unter- und Oberstufe getrennt, eine den angedeuteten methodischen Gesichtspunkten gerecht werdende Neuauflage erscheinen, die, dem Umfang nach den realistischen Anstalten angepaßt, doch auch mit Auswahl an den Gymnasien benutzbar sein dürfte. In Zukunft würden also diese Ausgaben zu unterscheiden sein:

Ausgabe A: Mehler-Schulte-Tigges, Stammbuch (Vollausgabe).

Ausgabe B: Schulte-Tigges-Mehler, Neuauflage.

Unterstufe,

Oberstufe.

- I. Teil: Synthetische Geometrie der Regelschnitte in engster Verbindung mit neuerer und darstellender Geometrie.
- II. Teil: Arithmetik, Trigonometrie, Stereometrie.
- III. Teil: Funktionale Geometrie<sup>1)</sup> (Graphische Darstellung von Funktionen, Analytische Geometrie der Ebene, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung).

Die Oberstufe der neuen Ausgabe erscheint in drei getrennten Teilen, damit jeder Teil für sich in Gebrauch genommen und (insbesondere Teil I und III) als Ergänzung zu der Ausgabe A wie zu jedem andern mathematischen Lehrbuch benutzt werden kann. Hier- von bildet das vorliegende Bändchen den ersten Teil. Es handelt sich darin um eine möglichst enge Verbindung der synthetischen Geometrie der Regelschnitte mit Elementen der neueren und der darstellenden Geometrie, also um eine Verbindung, die die Wissenschaft längst vollzogen hat. Wenn somit hier Gebiete, deren Durchnahme die Lehrpläne — in den Grundzügen auch für die Gymnasien — vorschreiben, in die engste Beziehung gesetzt werden, so kann von einer Vermehrung des Stoffes oder der Arbeitslast gar keine Rede sein, vielmehr dürfte mit Recht in dieser Verbindung eben eine ganz besondere Erleichterung gegenüber der anscheinend noch vielfach gebräuch- lichen getrennten Behandlung erblickt werden.

Der als „Einleitung in die neuere Geometrie“ bezeichnete Ab- schnitt ist, einige Änderungen und Zusätze ausgenommen, die größtenteils durch die Verwendung in den nachfolgenden Abschnitten bedingt waren, mit Erlaubnis der Schellbach-Mehlerschen Erben dem Stamm- buch entnommen, aber so gestaltet worden, daß jede Bezugnahme auf letzteres vermieden ist und das vorliegende Buch ohne Bedenken an Schulen gebraucht werden kann, die das Stammbuch selbst nicht benutzen. Aus naheliegenden Gründen haben Kürzungen hierbei nicht stattgefunden, obwohl sie in den Teilen C, D und E zulässig und zweckmäßig sein dürften.

Völlig neu sind dagegen die übrigen Abschnitte. In dem der darstellenden Geometrie gewidmeten Teil handelt es sich nur darum,

<sup>1)</sup> Eine Bezeichnung, die sich noch genauer mit dem Gegenstande deckte, war nicht zu finden.

von ihrem Wesen und ihren Hilfsmitteln eine klare Anschauung zu geben. Es ist daher unter den zu behandelnden Aufgaben eine Auswahl getroffen worden, die auf irgend welche Vollständigkeit gar keinen Anspruch macht, aber für den Unterricht in den Pflichtstunden selbst an realistischen Anstalten (nicht für das wahlfreie Linearzeichnen) sicherlich ausreicht. In der nun folgenden synthetischen Geometrie der Kegelschnitte ist, von dem ersten Teil abgesehen, wo Ellipse, Parabel und Hyperbel als geometrische Örter eingeführt werden, die starre Euklidische Methode, die erfahrungsgemäß die Schüler auf dieser Stufe nicht mehr genug fesselt, verlassen und durch Betrachtung dieser Kurven als Kreisprojektionen der engste Anschluß an die Lehre von Pol und Polare gewonnen worden. Da das Entwerfen der Figuren 70—72 an der Schultafel immerhin schwierig und zeitraubend ist, bei Wiederholungen auch mehrere dieser Figuren gleichzeitig vorhanden sein müssen, so sind dieselben als Wandtafeln im Format  $95 \times 130$  cm besonders herausgegeben worden und zum Preise von 10 M für jede der beiden Tafeln von der Verlagsbuchhandlung zu beziehen.\*) Dem Buche selbst sind mehrere Tafeln in Buchformat, die von den Figuren 70—72 insbesondere den Kegelschnitt, die Schnittlinie, die Projektionsachse und die Verschwindungslinie wiedergeben, zum Abtrennen beigeheftet. Sie sollen den Schülern als Vorlage dienen für die nach §§ 96—104 notwendigen Zeichnungen, wobei natürlich nicht ausgeschlossen, vielmehr wünschenswert ist, daß die Schüler die Schnittlinie vorher selbst zeichnen lernen.

Für die Darbietung des Stoffes waren die von der Unterrichtskommission der Naturforscher-Versammlung aufgestellten und unzweifelhaft als richtig anzuerkennenden Gesichtspunkte maßgebend, daß im mathematischen Unterricht in erster Linie die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens und die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens erstrebt werden soll. Daß das räumliche Vorstellungsvermögen durch eine Verbindung der synthetischen Geometrie der Kegelschnitte mit der darstellenden Geometrie wie durch die letztere

\*) Die Tafeln sind zweifarbig auf Leinen gedruckt und mit Stäben versehen. Auch die Figuren 66—69 sollen als Wandtafeln herausgegeben werden, wenn es sich zeigt, daß die obigen Tafeln Anklang finden.

selbst bedeutend gefördert wird, bedarf keiner näheren Begründung. Von diesem Standpunkt aus ist auch mit Absicht vermieden worden, durch Drehung der Bildebene um die Projektionsachse die Schnittlinie in den Figuren 66—72 zu einem affinen oder kollinearen Bilde des Kreises in der Ebene werden zu lassen, weil dadurch die unmittelbare Anschauung des räumlichen Zusammenhangs verloren geht. Das funktionale Denken aber findet reiche Betätigung besonders beim Verfolgen der Abhängigkeit, die zwischen der abgebildeten Figur und ihrem Bilde besteht; man beachte in dieser Beziehung insbesondere die Erörterungen der §§ 96—104.

Mit Rücksicht darauf, daß das Buch nicht nur den realistischen Anstalten dienen soll und die zahlreichen Abbildungen und Tafeln den Preis ohnehin erhöhen, ist der Stoff möglichst beschränkt worden. Es fehlen daher Affinität und Kollineation in der Ebene, die Involution, Axonometrie und Kartenprojektion. Wo die Möglichkeit und Neigung vorhanden ist, auf diese Gegenstände näher einzugehen, wird dies im Anschluß an das vorliegende Buch recht wohl geschehen können; insbesondere sind die §§ 46, 52, 53 und 54, die sonst ausgelassen werden können, sowie Abschnitt I E und der letzte Abschnitt über die Kegelschnitte als Erzeugnisse projektiver Gebilde zur Vermittelung dieses Anschlusses bestimmt. Andererseits dürfte sich das Buch auch für die Gymnasien eignen, da mit Leichtigkeit ganze Abschnitte ausgeschaltet werden können, wie z. B. I D, E, I I C, I I B und D, während die übrigen nach Bedürfnis Kürzungen vertragen.

Für alle Wünsche und Ratschläge bezüglich weiterer Ausgestaltung des vorliegenden Leitfadens wird der Verfasser den Fachgenossen dankbar sein.

Cassel, im Juni 1907.

**A. Schulte-Tiggis.**

# Inhaltsübersicht.

	Seite
Vormort . . . . .	III
Erster Abschnitt: Einleitung in die neuere Geometrie . . . . .	1
A. Harmonische Punkte und Strahlen. §§ 1—6 . . . . .	1
B. Von den Kreispolaren. §§ 7—11 . . . . .	6
C. Von den Transversalen. §§ 12—19 . . . . .	10
D. Vom Ähnlichkeitspunkt. §§ 20—24 . . . . .	14
E. Von den Potenzlinien und dem Apollonischen Problem. §§ 25—30	18
Zweiter Abschnitt: Grundzüge der darstellenden Geometrie . . . . .	23
A. Grundgesetze der Parallelprojektion. §§ 32—34 . . . . .	24
B. Übungen in schiefer Parallelprojektion. §§ 35—38 . . . . .	26
C. Übungen in rechtwinkliger Parallelprojektion. §§ 39—43 . . . . .	29
D. Übertragung von Eigenschaften durch Parallelprojektion. Besondere Fälle. §§ 44—47 . . . . .	32
E. Die Zentralprojektion. §§ 48—54 . . . . .	35
Dritter Abschnitt: Grundzüge der synthetischen Geometrie der Kegelschnitte . . . . .	40
A. Ellipse, Parabel und Hyperbel als geometrische Örter . . . . .	40
I. Die Ellipse. §§ 55—62 . . . . .	40
II. Die Parabel. §§ 63—66 . . . . .	42
III. Die Hyperbel. §§ 67—71 . . . . .	44
IV. Übungen. §§ 72—77 . . . . .	46
B. Ellipse, Parabel und Hyperbel als Kegelschnitte . . . . .	51
I. Die Ellipse als Zylinderschnitt. §§ 78—79 . . . . .	51
II. Ellipse, Parabel und Hyperbel als Kegelschnitte. §§ 80 bis 82 . . . . .	52
III. Die Leitlinien der Kegelschnitte. §§ 83—87 . . . . .	53
C. Die Kegelschnitte als Zentralprojektionen des Kreises . . . . .	55
I. Übertragung von Eigenschaften des Kreises auf die Ellipse als Parallelprojektion des Kreises. §§ 88—90 . . . . .	55
II. Übertragung von Eigenschaften des Kreises auf die Kegelschnitte als Zentralprojektionen des Kreises. §§ 91—95 . . . . .	57
III. Besondere Eigenschaften der Kegelschnitte. §§ 96—104 . . . . .	61
D. Die Kegelschnitte als Erzeugnisse projektiver Gebilde. §§ 105—108	67

