Sammlung Schubert XXXIV

Liniengeometrie

mit Anwendungen

von

Dr. Konrad Zindler
Professor an der Universität Innsbruck

I. Band

Mit 87 Figuren

Neudruck

Walter de Gruyter & Co.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.
Berlin W 10 und Leipzig 1928

Vorwort.

Eine systematische Liniengeometrie, die auch die analytischen Methoden berücksichtigt, ist seit Plückers Originalwerk „Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement“ (I, 1868; II, 1869) in deutscher Sprache nicht erschienen (Sturms Liniengeometrie 3 Bände 1892, 1893, 1896, ist rein synthetisch); auch in anderen Sprachen giebt es nur Monographieen über einzelne allerdings ausgedehnte Teile der Liniengeometrie (namentlich Koenigs, Géométrie réglée, 1895). So bin ich der Aufforderung, eine „Liniengeometrie“ zu schreiben, gerne nachgekommen, da mir diese Aufgabe lohnend schien.

Entsprechend den Zwecken der „Sammlung Schubert“ sind die ersten beiden Abschnitte ganz elementar gehalten, d. h. es wurde hier von Linienkoordinaten gar nicht, von projektiver Geometrie sehr mäfsiger Gebrauch gemacht. In den letzten Abschnitten wachsen die Anforderungen an den Leser etwas; doch ist die Darstellung immer noch Studierenden höherer Semester zugänglich.

Den Hauptgegenstand des vorliegenden ersten Bandes bilden die linearen Komplexe und Kongruenzen und die linearen Mannigfaltigkeiten solcher Komplexe samt den Anwendungen, welche dieser Teil der Liniengeometrie gestattet. Die Gebilde höheren Grades, die dabei auftreten, dienen zugleich als Vorbereitung für den zweiten Band, der hauptsächlich die algebraischen Liniengebilde höheren als des ersten Grades und die infinitesimale Liniengeometrie behandeln soll. Da der angewandten Mathematik neuerdings im Universitätsunterricht mehr Aufmerksamkeit geschenkt wird, habe ich den Kreis der Anwendungen möglichst weit gezogen, z. B. die Beziehungen der Liniengeometrie zur graphischen Statik berücksichtigt.

Um die Darstellung von anderen Büchern möglichst unabhängig zu machen, habe ich einen Abschnitt „Imaginäre Elemente" eingeschaltet, damit der Anfänger Gelegenheit hat, sich diese nun einmal unentbehrlichen Theorieen und Ausdrucksweisen nicht durch blofse Gewöhnung, sondern durch Einsicht in ihre Berechtigung anzueignen. Ähnliche Rücksichten bewogen mich zur Einschaltung des § 80. Allerdings habe ich mich in der Theorie des Imaginären auf das engste Gebiet beschränkt, in dem ein relativer Abschlufs erreicht werden kann, nämlich auf die Gesetze des Verbindens und Schneidens, glaube aber hier einige Vereinfachungen erzielt zu haben.

Alle Gebilde suchte ich möglichst der Anschauung zugänglich zu machen. Die Anschaulichkeit hängt weniger davon ab, ob die analytische oder die synthetische Methode benutzt wird (denn die abstrakte Allgemeinheit der projektiven Geometrie ist ebenso unanschaulich als die analytische Geometrie), als vielmehr davon, ob es gelingt, die Gebilde in metrisch ausgezeichneter Weise zu erzeugen. Dies ist freilich nur in den elementaren Gebieten zu erreichen; hier soll man es aber auch verlangen. Man hat sich z. B. auffallend wenig darum gekümmert, wie denn ein Strahlennetz ohne reelle Brennlinien eigentlich „aussieht". Die Sätze 105 bis 110 und Fig. 47 füllen diese Lücke aus.

Inhaltlich Neues findet sich in den §§ 43, 54, 55, 59, 60, 68, 83, B. Aufserdem wurden manchmal neue Beweise alter Sätze gegeben und Bekanntes in einzelnen Punkten ergänzt: So dürfte die geometrische Bedeutung tetraedrischer Linienzeiger in dieser Vollständigkeit (Satz 47) noch nicht ausgesprochen sein und die Diskussion der imaginären Tangenten zweiter Art einer Fläche zweiter Ordnung (§ 72) explicite nicht gegeben sein. Die Untersuchung der Achsenkongruenzen der Komplexnetze wurde mit Berücksichtigung aller speziellen Fälle geführt, was weder bei Plücker noch bei Ball (Theory of the Screws, 1900) geschieht, aber notwendig ist, wenn man für die Anwendungen auf Mechanik und die Beurteilung jedes einzelnen Falles von Bewegungsfreiheit dritten Grades sicheren Boden gewinnen will.

Den bequemen Ausdruck Grafsmanns „Zeiger“ für „Koordinaten“ (dementsprechend „Zeigersystem“, „Linienzeiger“ u. s. w.), halte ich einer gröfseren Verbreitung wert und habe ihn ebenso angenommen, wie einige zweckmäfsige Bezeichnungen Sturms. Ich habe die Gelegenheit benutzt, in den Übungsaufgaben den Leser auf weitere Litteratur aufmerksam zu machen, zu deren Erwähnung im Text kein Anlafs war. Andere Bände der „Sammlung Schubert“ wurden mit S. S. zitiert.

Zwischen synthetischer und analytischer Methode wurde nach Bedarf abgewechselt. Denn die „Reinheit der Methode“ befriedigt nur in den grundlegenden Disziplinen. Später wirkt sie ermüdend und soll durch diejenigen Hilfsmittel abgelöst werden, die am raschesten und natürlichsten weiterführen.

Innsbruck, am 26. Februar 1902.

Konrad Zindler.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Der Gegenstand der Liniengeometrie.

Die Mannigfaltigkeit der Geraden des Raumes ist eine vierfache, d. h. die einzelne Gerade hängt von vier Konstanten oder Parametern ab. Bestimmen wir z. B. eine Gerade durch ihre Schnittpunkte S, S' mit zwei festen Ebenen, so erhalten wir jede Gerade nur einmal, und jeder der Punkte S, S' braucht zur Bestimmung in seiner Ebene wieder zwei Zeiger (Koordinaten). Oder wenn wir die analytische Darstellung

$$x = az + \alpha, \qquad y = bz + \beta$$

in einem Parallelzeigersystem mit den laufenden Zeigern x, y, z zu Grunde legen, so können wir a, b, α, β als die vier Parameter der Geraden betrachten. Innerhalb dieses vierfachen Gebietes*) giebt es nun einfache, zweifache, dreifache Gebiete, analog wie es innerhalb des dreifach ausgedehnten Punktraumes einfache und zweifache Gebiete (Kurven und Flächen) giebt. Die einfachen Gebiete gerader Linien heifsen Regelflächen, die zweifachen Strahlensysteme, häufiger Strahlenkongruenzen (auch Linienkongruenzen oder Kongruenzen schlechtweg), die dreifachen Linienkomplexe oder Komplexe. Z. B. bilden die sämtlichen Normalen einer Fläche eine Strahlenkongruenz, die sämtlichen Tangenten derselben einen Komplex (sehr spezieller Art). Auch aus der obigen analytischen Darstellung erhalten

*) Statt „Mannigfaltigkeit" werden wir häufig den kürzeren Ausdruck „Gebiet" gebrauchen.

wir Komplexe, wenn wir die Wahl der vier Parameter dadurch beschränken, dafs wir ihnen eine Bedingung

$$f(a, b, \alpha, \beta) = 0$$

auferlegen. Zwei solche Bedingungen sondern Kongruenzen, drei sondern Regelflächen aus. Vier unabhängige Bedingungen sondern nurmehr eine diskrete Anzahl gerader Linien aus, analog wie sich drei Flächen im allgemeinen nur noch in einer endlichen Anzahl von Punkten schneiden.

Die Untersuchung der einfachen, zweifachen und dreifachen Geraden-Mannigfaltigkeiten bildet nun den Gegenstand der Liniengeometrie im engeren Sinn; eine Erweiterung wird dieser Stoff am Schlufs des § 43 erfahren. Daneben gestattet die Liniengeometrie Anwendungen auf Mechanik, graphische Statik und Bewegungslehre, mit denen wir uns auch befassen werden.

I. Abschnitt.

Das Nullsystem und das Strahlengewinde.

---

§ 1. Die Schraubenbewegung.

Es sei P ein Punkt einer Kreiscylinderfläche mit dem Halbmesser r, N seine senkrechte Projektion auf die Achse a des Cylinders, P' seine senkrechte Projektion auf eine zu a senkrechte Ebene ε (Fig. 1). Wenn sich dann P so bewegt, dafs der von P' beschriebene Kreisbogen und die von N beschriebene Strecke zu allen Zeiten im selben Verhältnis stehen, so beschreibt P eine Schraubenlinie. Es ist am einfachsten, sich die Bewegung von N, also auch von P' gleichförmig zu denken; es sei τ die Geschwindigkeit von N, ω die Winkelgeschwindigkeit des Punktes P', also $r\omega$ seine absolute Geschwindigkeit. Wenn man die Ebene ε von derjenigen Seite betrachtet, nach der τ gerichtet ist, so kann die Drehung von P' noch im positiven oder negativen Drehungssinn erfolgen, demgemäfs ω zweierlei Vorzeichen haben. Im ersten Fall heifst die Schraubenlinie rechtsgewunden oder rechtsgängig (sie steigt, von der Aufsenseite des Cylinders betrachtet, nach rechts), im zweiten linksgewunden oder linksgängig.*) Diese Festsetzung ist vom Sinne, in dem die Schraubenlinie s durchlaufen wird, unabhängig; denn drehen wir den Cylinder der Fig. 1 so um, dafs seine Basis nach oben zu liegen kommt, so bleibt s

*) Danach sind z. B. die Korkzieher und die allgemein gebräuchlichen Schraubennägel „rechtsgewunden“. Dieser Sprachgebrauch ist in der Maschinenlehre üblich; in der theoretischen Geometrie ist die Bezeichnung mitunter umgekehrt.

rechtsgewunden. Es sei P_0 der Schnitt von s und ε, t die Zeit, welche der Punkt von P_0 bis P gebraucht hat; das auf dem Cylinder gelegene Dreieck $P_0P'P$ können wir in eine Ebene abwickeln und erhalten ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten:

$$P_0P' = r\omega t, \quad P'P = \tau t;$$

die Neigung ϑ der Schraubenlinie ist also bestimmt durch

$$1) \qquad tg\,\vartheta = \frac{\tau}{r\omega}.$$

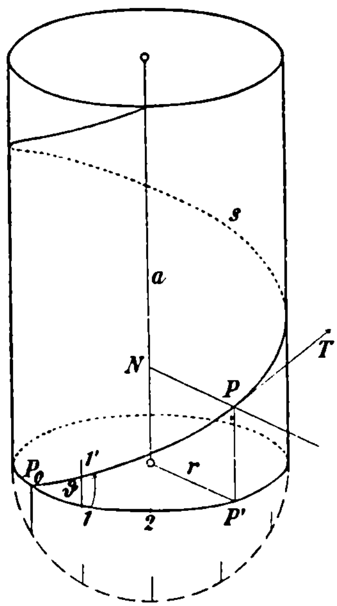

Fig. 1.

Da ω für rechtsgewundene Schraubenlinien positiv, für linksgewundene negativ ist, wird ϑ im ersten Falle spitz, im zweiten stumpf, d. h. wir haben unter ϑ immer den Winkel zu verstehen, den der Geschwindigkeitsvektor des Punktes P_0 mit der im Sinn der positiven Drehung gezogenen Kreistangente bildet. Wenn P' einen vollen Kreis beschrieben hat, so ist $P_0P' = 2r\pi$ geworden, also $2r\pi = r\omega t$ und die zugehörige Zeit

$$t = \frac{2\pi}{\omega}$$

$P'P$ ist gleich der Ganghöhe h geworden; also ist

$$2) \qquad h = \frac{2\pi\tau}{\omega}.$$

Durch die Achse a und die Tangente T eines ihrer Punkte ist s vollkommen bestimmt. Wenn s rechtsgewunden ist, so ist es auch diejenige Schraubenlinie, die durch T als Achse und a als Tangente bestimmt ist. Hiernach nennen wir ein Paar windschiefer Geraden, die nicht aufeinander senkrecht stehen, selbst rechts- oder linksgewunden, je nachdem es die beiden Schraubenlinien sind, die bestimmt werden, wenn man die eine Gerade als Achse, die andere als Tangente nimmt.

Wenn ein geometrisches Gebilde sich mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit ω um a dreht und gleichzeitig längs a mit der gleichförmigen Geschwindigkeit τ fortschreitet, so sagt man, das Gebilde vollführe eine gleichförmige Schraubenbewegung oder Schraubung um die Achse a. Da man sich jeden Punkt des Raumes mit dem beweglichen Gebilde fest verbunden denken kann, so gelangt man zur Vorstellung, als ob der ganze bewegliche Raum $\mathfrak{R}$ in einem zweiten ruhenden Raum eine Schraubung vollzöge. Jeder Punkt P von $\mathfrak{R}$ beschreibt dabei eine Schraubenlinie, deren Ganghöhe nach 2) von seiner Lage unabhängig ist, deren Neigung nach 1) mit wachsendem r abnimmt; bloſs die Punkte von a beschreiben a selbst. Wir nennen die ganze Schraubung rechts- oder linksgewunden, je nachdem es ihre einzelnen Schraubenlinien sind. Dabei hängen die Bahnen der Punkte nicht von den absoluten Werten τ und ω, sondern nur von ihrem Verhältnis

$$\frac{\tau}{\omega} = \mathfrak{k} \tag{3}$$

und von der Lage der Achse ab; $\mathfrak{k}$ heiſst der Parameter oder die Steigung der Schraubung. Für $r = 1$ wird $tg\,\vartheta = \mathfrak{k}$, also:

Satz 1: Die Steigung der Schraubung ist gleich der Tangente der Neigung derjenigen Schraubenlinien, die auf dem Cylinder mit dem Halbmesser eins liegen.

---

§ 2. Das Nullsystem.

Wir denken uns den Raum in einer Schraubung um a begriffen und fassen einen bestimmten Zeitpunkt ins Auge; die Normalebene der Bahn, die ein Punkt P zu dieser Zeit hat, nennen wir aus einem später zu besprechenden Grunde seine Nullebene ν. Hierdurch ist jedem Punkt des Raumes eine durch ihn gehende Ebene zugeordnet. Denken wir uns die Normalebene während der Schraubung mitgeführt, so bleibt sie für jeden Zeitpunkt Nullebene des Punktes P. Jene Zuordnung ist also vom gewählten Zeitpunkt unabhängig. ν enthält die Normale PN des Punktes P auf a. Versuchen wir umgekehrt, wenn ν gegeben ist, einen Punkt P zu finden, dessen Nullebene ν ist. Wenn $\nu \perp a$, so ist ihr Schnittpunkt N mit a der gesuchte Punkt. Andernfalls legen wir in ν durch N die Gerade $g \perp a$; nur auf g haben wir P zu suchen. Sein Abstand r von N mufs die Bedingung 1) erfüllen, wobei ϑ durch die Normale von ν bekannt ist. Wenn wir vorläufig beiderseits nur die absoluten Werte dieser Gleichung berücksichtigen, so ist durch sie r eindeutig bestimmt. Aber es giebt auf g zwei symmetrisch zu N gelegene Punkte dieses Abstandes; derjenige ist der gesuchte, dessen Normale zu ν gegen a ebenso gewunden ist, wie die gegebene Schraubung. P heifst der Nullpunkt von ν. Die Zuordnung ist also gegenseitig eindeutig; nur die zu a parallelen Ebenen haben noch keine Nullpunkte erhalten. Diese Lücke wird sich alsbald schliefsen.

Satz 2: In einer Schraubung sei jedem Punkt die Normalebene seiner Bahn zugeordnet. Die so definierte geometrische Verwandtschaft ist gegenseitig eindeutig und heifst Nullsystem.

Die Achse a der Schraubung heifst auch Achse des Nullsystems, der Parameter $\mathfrak{k}$ der Schraubung auch Parameter (Steigung) des Nullsystems. Das Nullsystem hängt von der Lage der Achse und von $\mathfrak{k}$ ab; also giebt es, da es ∞^4 Gerade giebt, fünffach unendlich viele Nullsysteme. Aus der Entstehungsweise eines Nullsystems $\mathfrak{N}$ geht hervor, dafs es bei einer Drehung um a in sich selbst übergeht, d. h.: Dreht man einen Punkt samt seiner Nullebene um a, so bleibt die Ebene fortwährend Nullebene des Punktes. Man sagt, $\mathfrak{N}$ „gestatte" eine Drehung um a. Ebenso gestattet es eine Schiebung längs a, daher auch eine Schraubung, die irgendwie aus solchen Drehungen und Schiebungen zusammengesetzt ist, also nicht nur diejenige Schraubung, durch welche es definiert wurde, sondern:

Satz 3: Ein Nullsystem gestattet eine beliebige Schraubung um seine Achse.

Hiernach kann man sich eine anschauliche Vorstellung machen, in welcher Weise durch $\mathfrak{N}$ die Punkte und Ebenen des Raumes einander zugeordnet sind. Man kann sich dabei auf die Punkte P einer Geraden g beschränken, welche a senkrecht in N schneidet. Denn jeden anderen Punkt des Raumes kann man durch eine passende Schraubung in einen Punkt von g überführen. Wir denken uns a der bequemerer Ausdrucksweise halber lotrecht, schreiben die Gleichung 1) in der Form

$$\text{1a)} \qquad tg\,\vartheta = \frac{\mathfrak{k}}{r}$$

und ersehen daraus: Wenn r von Null bis ∞ wächst, bewegt sich P auf g von N ins Unendliche; dabei werden die zugehörigen Schraubenlinien der Schraubung immer flacher, dagegen die Nullebenen immer steiler gegen die Horizontalebene.

§ 3. Über die Bewegung einer Geraden.

Eine Gerade g bewege sich irgendwie im Raume und der Geschwindigkeitsvektor α eines ihrer Punkte A sei auf ihr senkrecht; β sei der Geschwindigkeitsvektor eines zweiten Punktes B auf g, g_1 eine Nachbarlage von g, g' die durch A zu g_1 gezogene Parallele, endlich ε die Normalebene von g in B. Dann können wir g nach g_1 so überführen, dafs wir g zuerst durch blofse Drehung um A nach g' bringen, dann durch eine Parallelverschiebung nach g_1; der Geschwindigkeitsvektor von B wird beim ersten Schritt in ε liegen, weil er die Kugelfläche aus A durch B berühren mufs, beim zweiten Schritt zu α parallel, also ebenfalls zu g senkrecht sein. Aus diesen beiden Vektoren setzt sich β zusammen, liegt daher auch in ε, falls es nicht etwa verschwindet. Wir wollen diese Überlegung durch einen analytischen Beweis ergänzen, d. h. zeigen:

Satz 4: Wenn bei einer Bewegung einer Geraden die Bahntangente eines ihrer Punkte auf ihr senkrecht steht, so tritt dasselbe für alle ihre Punkte ein.*)

*) Dieser Satz dürfte zuerst von Chasles („Propr. géom. rel. au mouv. inf. petit ...", Comptes R. Bd. 16, 1843) ausgesprochen sein.

Wir verlegen den Ursprung eines rechtwinkligen Zeigersystems nach A, die z-Achse in die Gerade g; ein zweiter Punkt B auf g habe den Zeiger $z = r$. Bei der Bewegung von g wird A eine Kurve

4) $$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t)$$

mit der Tangente α in A beschreiben und B eine Kurve

5) $$x_1 = \varphi_1(t),\ y_1 = \psi_1(t),\ z_1 = \chi_1(t) + r$$

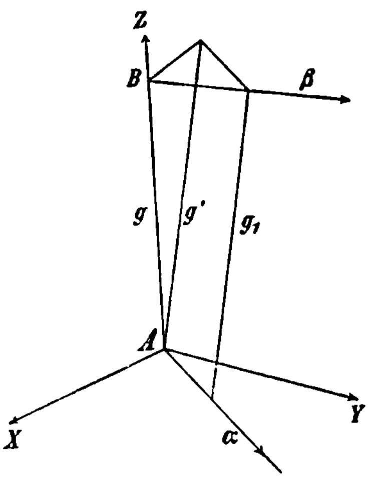

Fig. 2.

mit der Tangente β in B. Dabei müssen zufolge der Lage des Zeigersystems alle sechs Funktionen φ, ψ, χ für $t = 0$ verschwinden, wenn wir die Zeit t vom Beginn der Bewegung an zählen. Aber aufserdem mufs

$$\chi'(0) = 0$$

sein; denn die Richtungscosinus von α sind proportional $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ und nach Voraussetzung ist $\cos(\alpha, Z) = 0$. Zu beweisen ist, dafs auch $\frac{dz_1}{dt}$ für $t = 0$ verschwindet. Weil die Punkte A und B während der Bewegung ihre Entfernung r beibehalten, ist

$$(\varphi_1 - \varphi)^2 + (\psi_1 - \psi)^2 + (r + \chi_1 - \chi)^2 = r^2;$$

durch Differentiation nach t erhalten wir:

$$(\varphi_1 - \varphi)(\varphi'_1 - \varphi') + (\psi_1 - \psi)(\psi'_1 - \psi') \\ + (r + \chi_1 - \chi)(\chi'_1 - \chi') = 0;$$

setzen wir hierin $t = 0$, so kommt:

$$r[\chi'_1(0) - \chi'(0)] = 0,$$

also ist

$$\chi'_1(0) = 0.$$

§ 4. Das Strahlengewinde.

Ein Punkt P hat bei einer Bewegung im Raume in einem bestimmten Augenblick ∞^1 Bahnnormalen und zwar, wenn ν die Normalebene seiner Bahn ist, alle Strahlen des Büschels (P, ν). Wir definieren:

Die Gesamtheit der Bahnnormalen aller Punkte des Raumes bei einer Schraubung heifst Strahlengewinde oder Gewinde.

Mit jedem Nullsystem ist also nach Satz 2 zugleich ein Gewinde definiert; indem wir nämlich in jedem Punkte P des Raumes alle Strahlen auffassen, die durch ihn gehen und in seiner Nullebene ν liegen, erhalten wir ein Gewinde. Wir fragen, ob durch P noch ein Strahl s des Gewindes aufserhalb ν gehen kann? Ein solcher müfste in der Nullebene eines seiner Punkte liegen; dann stünde die Bahntangente dieses Punktes Q auf s senkrecht, daher*) nach Satz 4 auch die Bahntangente von P. Dies ist aber nur möglich, wenn s in ν liegt. Zugleich folgt aus Satz 4, dafs die Bahntangente jedes Punktes Q eines Gewindestrahls s auf s senkrecht steht; daher ist s in der Nullebene ν jedes seiner Punkte Q enthalten. Bewegt sich Q auf s, so dreht sich ν um s, wobei es nach Satz 2 ausgeschlossen ist, dafs ν früher in dieselbe Lage zurückkehrt als Q. Es giebt ∞^3 Punkte im Raume; durch jeden gehen ∞^1 Strahlen des Gewindes, die ein ebenes Büschel bilden. Andererseits tritt jeder Strahl bei jedem seiner Punkte als Strahl des zugehörigen Büschels auf. Es giebt also doch nur ∞^3 Gewindestrahlen.

Satz 5: Die Strahlen eines Gewindes bilden eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit. Durch jeden Punkt des Raumes geht und in jeder Ebene des Raumes liegt davon ein lineares Büschel.

Den letzten Teil des Satzes müssen wir noch beweisen: Ist zunächst die Ebene ε parallel zur Achse a, so wählen wir in ihr eine Gerade g parallel zu a. Alle Punkte von g haben, da das Nullsystem eine Schiebung längs g gestattet,

*) Der in § 3 vorgesehene Fall, dafs β verschwindet, kann hier nicht eintreten, weil bei einer gleichförmigen Schraubung überhaupt kein Punkt in Ruhe bleibt.

parallele Nullebenen; sie schneiden ε in einem Parallelbüschel, dessen Strahlen dem Gewinde angehören. Aufserdem giebt es in ε keinen Gewindestrahl; denn für jeden seiner Punkte müfste, da durch ihn noch ein zweiter Gewindestrahl in ε ginge, diese Ebene die Nullebene sein. Ist ε nicht zu a parallel, so kennen wir in ε einen Büschel von Gewindestrahlen, dessen Scheitel der nach § 2 ihr zugeordnete Nullpunkt ist; aus demselben Grunde wie früher kann kein anderer Strahl von ε dem Gewinde angehören. Somit ist Satz 5 vollständig bewiesen und wir können jetzt auch den Ebenen, die parallel zu a sind, also in § 2 noch keinen Nullpunkt erhielten, einen solchen zuordnen. Da nämlich für eine solche Ebene ε der Scheitel des Büschels der Gewindestrahlen, der sonst zugleich der Nullpunkt ist, in bestimmter Richtung in unendliche Ferne rückt, so haben wir den unendlich fernen Punkt V dieser Richtung als Nullpunkt von ε zu betrachten. Es giebt aufserdem keinen Gewindestrahl durch V; denn legen wir durch einen solchen s eine Ebene ε', so enthält ε' zwei parallele Gewindestrahlen, nämlich s und die Schnittlinie mit ε, was unmöglich ist, da ε' ihren Nullpunkt im Endlichen hat. Aus § 2 geht hervor, dafs jetzt auch umgekehrt jedem unendlich fernen Punkte (vorläufig mit Ausnahme desjenigen U der Achsenrichtung) eine Nullebene zugeordnet ist. Wenn aber eine Ebene, immer parallel zu einer beliebigen Ausgangsstellung, ins Unendliche rückt, so rückt ihr Nullpunkt immer in der Achsenrichtung ins Unendliche; wir haben daher den Punkt U als Nullpunkt der unendlich fernen Ebene zu betrachten. Damit stimmt überein, dafs U der einzige unendlich ferne Punkt ist, durch den keine im Endlichen liegenden Gewindestrahlen gehen. Es sind also jetzt die Punkte und Ebenen des Raumes ausnahmslos (einschliefslich der unendlich fernen Elemente) einander gegenseitig eindeutig in einem Nullsysteme zugeordnet. Ein Gewindestrahl heifst auch Leitstrahl des zugehörigen Nullsystems.

§ 5. Die Paare polarer Geraden.

Fassen wir zwei Punkte P, P' einer Geraden g auf (Fig. 3), die dem Gewinde nicht angehört, so gehen ihre Nullebenen nicht durch g, schneiden sich also in einer zu g

windschiefen Geraden g'. Alle Strahlen des Büschels (P, g'), ebenso des Büschels (P', g') sind Gewindestrahlen, insbesondere auch QP und QP', wenn Q ein beliebiger Punkt auf g' ist. Der Ort der Gewindestrahlen durch Q ist ein ebenes Strahlbüschel, das durch die beiden Strahlen QP und QP' vollkommen bestimmt ist; also ist Qg die Nullebene von Q, ebenso $Q'g$ von Q', so dafs auch umgekehrt g als Schnitt der Nullebenen zweier beliebigen Punkte Q, Q' auf g' bestimmt ist. Zwei so gegenseitig zugeordnete Gerade heifsen **Polaren** des Nullsystems oder Gewindes. Jeder Strahl durch Q, der g schneidet, gehört dem Gewinde an; dies gilt für jeden Punkt Q auf g; also:

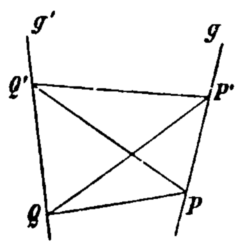

Fig. 3.

Satz 6: Alle Strahlen, die zwei zugeordnete Polaren schneiden, gehören zum Gewinde.

Die Nullebene eines Punktes einer der beiden Geraden ist also die Verbindungsebene mit der anderen. Wir fassen dies mit einem Ergebnis des § 4 zusammen:

Satz 7: Wenn ein Punkt eine Gerade g beschreibt, so dreht sich seine Nullebene um eine Gerade g', die mit g zusammenfällt oder zu ihr windschief ist, je nachdem g ein Strahl des mit dem Nullsystem verbundenen Gewindes ist oder nicht; die Rollen von g und g' sind vertauschbar.

Die Nullebenen zweier Punkte P, P' sind, wie aus der Erzeugungsweise des Nullsystems durch Schraubung unmittelbar hervorgeht, nur dann parallel, wenn die Verbindungslinie g von P und P' zur Achse a parallel ist. Dann rückt g' ins Unendliche und ist durch die Stellung des Parallel-Ebenenbüschels repräsentiert, das die Nullebenen von g bilden; g heifst alsdann ein **Durchmesser** des Nullsystems. Der Satz 7 behält also auch in diesem Falle seine sinngemäfse Geltung; nur tritt an Stelle einer eigentlichen Drehung eine Parallelverschiebung. Wenn dagegen ein Punkt eine unendlich ferne Gerade g' beschreibt, so dreht sich die Nullebene im eigentlichen Sinne um den polaren Durchmesser g. Nur für die unendlich fernen Geraden der Parallelebenen zu a, die als Gewindestrahlen zu betrachten sind, tritt an Stelle der Drehung eine Parallelverschiebung. Die Achse ist der einzige Durchmesser, für den die zugeordnete Stellung auf ihm senkrecht steht.

Satz 8: Wenn ein Strahl des Gewindes eine Gerade g schneidet, so schneidet er auch ihre Polare g'.

Denn er liegt zugleich mit g' in der Nullebene seines Schnittpunktes mit g. Es sei h, h' ein zweites Polarenpaar, wobei h weder g noch g' schneiden möge. Ein Strahl s, der g, g' schneidet, ist ein Gewindestrahl; schneidet er auch h, so schneidet er nach Satz 8 auch h'. Nun bilden die Strahlen s, welche drei gegebene g, g', h schneiden, eine Regelschar $\mathfrak{R}$ zweiter Ordnung (vergl. Reye, Geom. d. Lage, I. Vortr. 10). Da alle auch von h' geschnitten werden, ist h' ein Strahl der Leitschar $\mathfrak{R}'$, der auch g, g', h angehören. Man sagt, vier Gerade haben hyperbolische Lage, wenn sie derselben Regelschar zweiter Ordnung angehören.

Wenn g und h sich schneiden (Fig. 4), mufs in der Nullebene σ des Schnittpunktes S sowohl g' als h' liegen; also schneiden sich auch diese beiden in einem Punkte T, dessen Nullebene τ sowohl g als h enthält. Die vier Geraden liegen so, dafs sie sich zu je zweien schneiden, wobei die Verbindungslinie der Schnittpunkte mit der Schnittlinie der Verbindungsebenen identisch ist. Wir wollen diese Lage unter dem Namen „hyperbolische Lage" einbegreifen (wenn nötig als „spezielle hyperbolische Lage" von der „allgemeinen" unterscheiden). Die Gesamtheit der Geraden, welche g, h, g' schneiden, zerfällt hier in die beiden Strahlbüschel (S, σ) und (T, τ). Also können wir sagen:

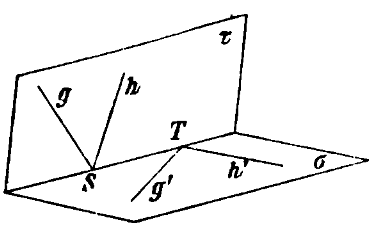

Fig. 4.

Satz 9: Zwei beliebige Paare zugeordneter Polaren eines Nullsystems haben hyperbolische Lage.

Wir lassen jetzt h mit a zusammenfallen; wenn dann eine Gerade s sowohl h als h' schneidet, so heifst das soviel, als dafs sie h senkrecht schneidet. $\mathfrak{R}'$ enthält jetzt eine unendlich ferne Gerade h' und ist daher ein hyperbolisches Paraboloid $\mathfrak{P}$, von dem die eine Leitebene auf der Achse senkrecht steht, die andere zu ihr parallel ist;*) $\mathfrak{P}$ ist also gleichseitig und jede der beiden Haupterzeugenden wird von allen Geraden der anderen Schar senkrecht geschnitten. Die Achse ist die eine Haupterzeugende; die andere enthält, da sie von g, g' senkrecht geschnitten wird, den kürzesten Abstand dieser beiden Geraden, also:

Satz 10: Der kürzeste Abstand zweier Polaren eines Nullsystems schneidet die Achse senkrecht.

Drei Strahlen bestimmen eine Regelschar. Gehören alle drei einem Gewinde an, so fassen wir eine Gerade g der Leitschar auf; dann gehört ihre Polare g' nach Satz 8 auch zur Leitschar. Daraus folgt in Verbindung mit Satz 6:

Satz 11: Wenn drei Strahlen einer Regelschar $\mathfrak{R}$ einem Gewinde angehören, so gehört jeder Strahl von $\mathfrak{R}$ dem Gewinde an.

§ 6. Das Nullsystem als reciproke Verwandtschaft.

Aus Satz 7 und Ende des § 4 ergiebt sich, dafs durch ein Nullsystem jedem „Raumelement", nämlich einem Punkt, einer Geraden oder einer Ebene stets wieder ein Raumelement und zwar bezw. eine Ebene, eine Gerade oder ein Punkt zugeordnet wird und zwar so, dafs, wenn der Punkt eine Gerade durchläuft (die Ebene um eine Gerade sich dreht), die entsprechende Ebene sich um die entsprechende Gerade dreht (der zugeordnete Punkt die entsprechende Gerade beschreibt). Wenn der Punkt Q in der Nullebene ν des Punktes P liegt, so ist QP ein Strahl des zugehörigen Gewindes; also geht auch umgekehrt die Nullebene von Q durch P. Den Punkten des Feldes ν entsprechen also die Ebenen des Bündels P, ferner den Geraden des Feldes die Geraden des Bündels. Wenn also g in ν liegt, geht g' durch P. Wenn endlich zwei Gerade g, h sich schneiden, so schneiden sich auch die entsprechenden (§ 5).

*) Für Leser, die mit der Geometrie der Lage nicht vertraut sind, sei bemerkt, dafs der wichtige Satz 10 in § 8 nochmals bewiesen werden wird.

Wenn ein Punkt in einer Ebene liegt oder ein Punkt in einer Geraden oder eine Gerade in einer Ebene oder endlich, wenn zwei Gerade sich schneiden, so sagt man in allen diesen Fällen, die beiden Raumelemente seien incident. Unter Benutzung dieser Ausdrucksweise können wir die eben ausgesprochenen Einzelsätze in den einen Satz zusammenfassen:

Satz 12: Wenn zwei Raumelemente incident sind, so sind die in einem Nullsystem entsprechenden auch incident.

Welcher Art diese Incidenz ist, bestimmt sich aus der Art der Raumelemente von selbst. Das Nullsystem gehört also zu den aus der projektiven Geometrie bekannten „reciproken Verwandtschaften“ oder „Korrelationen“; wir werden später noch darauf zurückkommen (§ 46).

§ 7. Analytische Darstellung des Nullsystems.

Wir knüpfen unmittelbar an § 2 an und wünschen, wenn die Zeiger x, y, z eines Punktes P gegeben sind, die Gleichung seiner Nullebene hinschreiben zu können. Wir lassen die Z-Achse eines rechtwinkligen Zeigersystems erster Art mit der Achse a des Nullsystems zusammenfallen. Die Gleichung einer Ebene durch P hat die Form:

$$6)\qquad A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0,$$

wobei ξ, η, ζ ihre laufenden Zeiger sind. Soll sie die Nullebene von P sein, so müssen A, B, C proportional den Richtungs-Cosinus der Bahntangente von P bei der Schraubung sein; diese Cosinus müssen wir also berechnen. Durch die Schraubung sei P nach der Zeit t in die Lage $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ gekommen. $P' \equiv (x, y, 0)$ und $P'_1 \equiv (x_1, y_1, 0)$ seien die Projektionen von P und P_1 auf die XY-Ebene. Dann ist P'_1 aus P' durch Drehung in der XY-Ebene um den Winkel $\beta = \omega t$ hervorgegangen (§ 1). Wenn also r, α die Polarzeiger von P' in der XY-Ebene sind (Fig. 5), r_1, α_1 von P'_1, so ist

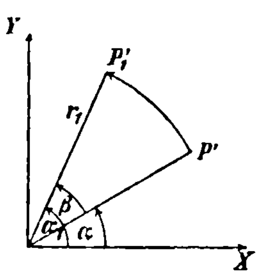

Fig. 5.

$$r_1 = r, \; \alpha_1 = \alpha + \beta$$
$$x_1 = r_1 \cos \alpha_1 = r (\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta)$$
$$y_1 = r_1 \sin\alpha_1 = r (\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta)$$

oder

$$x_1 = x \cos\beta - y \sin\beta, \; y_1 = x \sin\beta + y \cos\beta;$$

aufserdem ist die Höhe von P über der $X\,Y$-Ebene um τt gewachsen. Der Zusammenhang der Zeiger von P und P_1 wird also dargestellt durch:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos\omega t - y \sin\omega t \\ y_1 &= x \sin\omega t + y \cos\omega t \\ z_1 &= z + \tau t \end{aligned} \tag{7}$$

Diese Gleichungen stellen die Bahnkurve des Punktes P dar, in x_1, y_1, z_1 als laufenden Zeigern und mit t als Parameter. Für $t = 0$ wird, wie es sein mufs, $P_1 \equiv P$. Wollen wir also drei Gröfsen kennen, die den Richtungs-Cosinus der Bahntangente in P proportional sind, so müssen wir nach t differenzieren und hierauf $t = 0$ setzen. Dies ergiebt:

$$\left(\frac{dx_1}{dt}\right)_0 = -y\omega, \quad \left(\frac{dy_1}{dt}\right)_0 = x\omega, \quad \frac{dz_1}{dt} = \tau$$

Diese drei Gröfsen haben wir für A, B, C in Gleichung 6) einzusetzen und erhalten mit Berücksichtigung von Gleichung 3) als Gleichung der Nullebene von P:

$$x\eta - \xi y + \mathfrak{k}(\zeta - z) = 0. \tag{8}$$

Wir betrachten jetzt τ und ω als mit einem Vorzeichen behaftete Gröfsen; aber es bestätigt sich, dafs das Nullsystem nur von ihrem Verhältnis $\mathfrak{k}$ abhängt. Wenn beide gleichzeitig ihr Vorzeichen umkehren, geschieht die Schraubung im entgegengesetzten Sinn, aber in denselben Bahnen wie früher. Es entspricht einem positiven $\mathfrak{k}$ eine rechtsgewundene, einem negativen eine linksgewundene Schraubung.

---

§ 8. Die Lage der Polarenpaare.

Da wir durch eine passende Drehung um die Achse a des Nullsystems und eine Schiebung längs derselben es dahin bringen können, dafs der kürzeste Abstand einer Geraden g von a in die X-Achse fällt, so können wir uns auf die Geraden g beschränken, welche die X-Achse senkrecht schneiden. Eine solche ist durch den X-Zeiger c ihres Schnittpunktes S und durch ihren Neigungswinkel ν gegen die XY-Ebene bestimmt. Über die Zählung dieses Winkels setzen wir folgendes fest: Durch die positive Seite der X-Achse ist in der YZ-Ebene (und in jeder zu ihr parallelen) ein positiver Drehungssinn fixiert. Wenn nun g_1 die Projektion von g auf die YZ-Ebene ist (Fig. 6), so verstehen wir unter dem Neigungswinkel ν von g mit der XY-Ebene den Winkel (Y, g_1). Wenn c und ν gegeben sind, stellen wir uns die Aufgabe, die Polare g' zu finden. Die Gleichungen der Geraden g sind

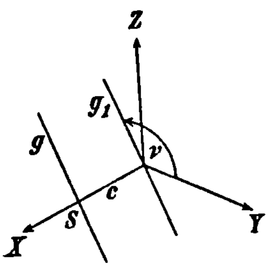

Fig. 6.

$$x = c, \quad \frac{z}{y} = \tan \nu.$$

Die Zeiger eines ihrer Punkte P sind also

$$c, y, y \cdot \tan \nu$$

und nur von der einzigen Veränderlichen y abhängig. Setzen wir sie in Gleichung 8) ein, so erhalten wir als Nullebene von P:

$$9) \qquad c\eta + \mathfrak{k}\zeta - y(\xi + \mathfrak{k} \tan \nu) = 0.$$

Aus dieser Gleichung können wir durch Wahl von y noch die Gleichung der Nullebene eines beliebigen Punktes von g berechnen; insbesondere wollen wir die Nullebene ε von S finden und die Nullebene ε' des unendlich fernen Punktes U von g. Wir setzen $y = 0$ und erhalten als Gleichung von ε:

$$10) \qquad \frac{\zeta}{\eta} = -\frac{c}{\mathfrak{k}}.$$

Um die Gleichung von ε' zu finden, schreiben wir Gleichung 9) zunächst in der Form:

$$\frac{c\eta + \mathfrak{k}\zeta}{y} - (\xi + \mathfrak{k} \tan \nu) = 0.$$

Lassen wir jetzt y unendlich werden, so nähert sich die Ebene der Grenzlage

11) $$\xi = -\mathfrak{k} \tan \nu,$$

der Nullebene von U. Die Ebene 10) enthält, wie es sein mufs, die X-Achse, die Ebene 11) ist auf ihr senkrecht. Die Schnittlinie beider ist nach § 5 die gesuchte Polare g'. Übrigens findet man aus der Form der Gleichung 9), dafs die gemeinsamen Punkte der Ebenen 10) und 11) für jeden Wert y in der Ebene 9) liegen, weil ihre Zeiger die Bestandteile $c\eta + \mathfrak{k}\zeta$ und $\xi + \mathfrak{k} \tan \nu$ für sich zu Null machen; also dreht sich diese Ebene um die Schnittlinie der beiden anderen. Hiermit ist der erste Teil des Satzes 7 neuerdings und unabhängig von § 3 ff. bewiesen worden, ebenso der Satz 10. Denn die Gleichungen 10) und 11) stellen eine Gerade g' vor, die, wie g, die X-Achse senkrecht schneidet; sind c', ν' ihre analogen Bestimmungsstücke, so ist:

$$\frac{\zeta}{\eta} = \tan \nu', \quad \xi = c',$$

durch Vergleich mit 10) und 11) finden wir

$$\tan \nu' = -\frac{c}{\mathfrak{k}}, \quad c' = -\mathfrak{k} \tan \nu,$$

oder symmetrischer:

12) $$\begin{aligned} c &= -\mathfrak{k} \tan \nu' \\ c' &= -\mathfrak{k} \tan \nu, \end{aligned}$$

wodurch die Beziehung zwischen den vier Bestimmungsstücken der Geraden g, g' ausgedrückt ist. Wir entnehmen daraus noch:

13) $$c : c' = \tan \nu' : \tan \nu.$$

Wir fragen, wann g' mit g zusammenfällt. Hierzu mufs $c' = c$ sein, also auch nach Gleichung 12)

$$c = -\mathfrak{k} \tan \nu.$$

Für die Gewindestrahlen s, deren Bestimmungsstücke wir durch den Index s kennzeichnen, gilt also

14) $$\tan \nu_s = -\frac{c_s}{\mathfrak{k}}.$$

Vergleichen wir die rechten Seiten dieser Gleichung und der Gleichung 1), so finden wir (mit Rücksicht auf die Änderungen in der Bezeichnung), dafs ihr Produkt -1 ist. In der That ist ν um $\frac{\pi}{2}$ gröfser als ϑ, wenn g in die Lage s kommt.

Wir wollen uns einen anschaulichen Überblick über die Verteilung der Polarenpaare verschaffen, indem wir die Gerade g das Büschel (S, ε') beschreiben lassen (Fig. 7) und die Bewegung von g' verfolgen. Da ε, U die entsprechenden Elemente von S, ε' sind, können wir aus Satz 12 folgern, dafs g' das Strahlbüschel (ε, U) beschreibt, d. h. in der Nullebene von S parallel zur Lage s von g sich bewegt. Diesen Umstand und die quantitativen Eigenschaften der Bewegung können wir auch aus Gleichung 12) entnehmen. Aufser s betrachten wir noch die zwei ausgezeichneten Lagen, in denen g parallel zur Y- oder Z-Achse wird und nennen sie p und q. Je nachdem $\mathfrak{k}$ positiv oder negativ ist, wird g, die Drehung im positiven Sinn von der Lage p aus beginnend, zuerst die Lage q oder s durchschreiten; dies entnimmt man aus der Gleichung 14) oder unmittelbar aus der geometrischen Bedeutung des Vorzeichens von $\mathfrak{k}$ (§ 7). Um die Vorstellungen zu fixieren, denken wir uns $\mathfrak{k}$ positiv. Während ν von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, nimmt c' nach Gleichung 12) ab von 0 bis $-\infty$. Auch bei weiterer Drehung entsprechen sich die nebeneinander stehenden Intervalle des folgenden Schemas:

ν	c'
0 bis $\frac{\pi}{2}$	0 bis $-\infty$
$\frac{\pi}{2}$ „ ν_s	$+\infty$ „ c
ν_s „ π	c „ 0

Diese Verhältnisse sind in der Fig. 7 ersichtlich gemacht, wo die ausgezeichneten Lagen von g und die entsprechenden von g' eingezeichnet sind. Ferner sind die Winkel, welche ν beschreibt, durch Bogen angedeutet, die gleiche Ziffern tragen, wie die entsprechenden Strecken, welche der Schnittpunkt (g', X) durchläuft; q' liegt im Unendlichen.

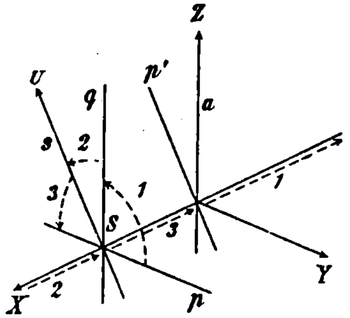

Fig. 7.

Wenn der kürzeste Abstand von g, g' diese Geraden in N, N' schneidet, die Achse in M, so entnehmen wir noch aus Figur 7 oder aus Gleichung 13) den:

Satz 13: Je nachdem die Projektionen von g, g' auf die YZ-Ebene in verschiedenen oder in denselben Quadranten liegen, liegt M innerhalb oder aufserhalb NN'.

§ 9. Das Strahlengebüsch.

Wir haben uns bisher stets eine eigentliche Schraubung gedacht. Wenn jedoch die Schiebungskomponente τ verschwindet, so haben wir eine blofse Drehung um a. Es leuchtet unmittelbar ein, dafs die Bahnnormalen sämtlicher Raumpunkte in diesem Fall aus allen ∞^3 Geraden bestehen, die a schneiden. Man nennt ihre Gesamtheit ein „spezielles Gewinde“ oder ein Strahlengebüsch und a seinen Träger. Ihm entspricht kein eigentliches Nullsystem mehr. Denn die Nullebene jedes Achsenpunktes wird unbestimmt, die aller anderen Punkte geht durch die Achse. Die Nullpunkte der Ebenen durch die Achse werden unbestimmt, die aller anderen Ebenen liegen im Schnitt mit der Achse. Die gegenseitige Eindeutigkeit der Zuordnung hört also auf. Aber dieses ausgeartete Nullsystem wird immer noch durch die Gleichung 8) dargestellt ($\mathfrak{k} = 0$).

Wenn andererseits die Drehungskomponente ω verschwindet, so wird $\mathfrak{k}$ unendlich. Dividiert man vorher Gleichung 8) durch $\mathfrak{k}$, so erhält man für diesen Fall die

Gleichung $\zeta - z = 0$; in der That stellt sie noch immer die Normalebenen der Bahnen aller Punkte dar; denn es liegt eine Schiebung in der Richtung der Z-Achse vor. Das Gewinde besteht jetzt aus allen ∞^3 Strahlen, die zur XY-Ebene parallel sind und kann als ein Strahlengebüsch aufgefafst werden, dessen Träger die unendlich ferne Gerade dieser Ebene ist.

---

§ 10. Bestimmungsweisen eines Gewindes oder Nullsystems.

Ein Gewinde ist eindeutig bestimmt:

a) Durch die Achse a und einen Strahl s (der zu a windschief sein mufs). Denn wählen wir den kürzesten Abstand von a und s als X-Achse eines wie in § 8 liegenden Zeigersystems, in der wir die positive Richtung willkürlich fixieren können, so sind damit ν_s und c_s gegeben, und man kann $\mathfrak{k}$ aus Gleichung 14) berechnen.

Wenn von einem Nullsystem ein Polarenpaar g, g' (mit dem kürzesten Abstand NN') gegeben ist, so mufs a die Strecke NN' senkrecht (in M) schneiden. Aufserdem ist noch die Bedingung 13) zu erfüllen. Man kann also die Richtung von a innerhalb eines Büschels willkürlich wählen, wodurch auch die Ebene bestimmt ist, von der aus die Winkelzählung erfolgt. Alsdann ist M nach Gleichung 13) dadurch eindeutig bestimmt, dafs man NN' im Verhältnis $\tan \nu' : \tan \nu$ zu teilen hat (vergl. auch Satz 13). Zieht man eine Treffgerade von g, g' hinzu, so ist man hiermit beim Fall a) angekommen. Ein Nullsystem ist also auch eindeutig bestimmt:

b) Durch ein Polarenpaar und die Richtung von a, die dem Büschel der Richtungen g, g' entnommen sein mufs.

Es giebt also ∞^1 Gewinde, in denen g, g' polar sind. Wählt man eine dritte Gerade h (zu g und g' windschief), so ist h' durch Satz 9 auf die Regelschar beschränkt, der g, g', h angehören, kann also ebenfalls gerade noch ∞^1 Lagen einnehmen. Man wird also h' innerhalb der Regelschar willkürlich wählen dürfen. Dann ist aber ein Gewinde bestimmt.

Denn wenn d der kürzeste Abstand von g, g' ist, d_1 von h, h', so mufs a nach Satz 10 der kürzeste Abstand von d, d_1 sein. Wenn d, d_1 sich schneiden, ist a die gemeinsame Senkrechte im Schnittpunkte. Ein Nullsystem ist also auch eindeutig bestimmt:

c) Durch zwei Polarenpaare in hyperbolischer Lage.

Insbesondere kann man h' mit h identisch wählen. Dann ist vom Gewinde aufser g, g' ein Strahl s gegeben, und man kann zu jedem Punkte P des Raums die Nullebene konstruieren. Zunächst kann man nämlich (Fig. 8) den Nullpunkt Q der Ebene $(P, s) = \varepsilon$ finden, indem man in dieser Ebene aufser s noch den durch die Schnittpunkte mit g, g'

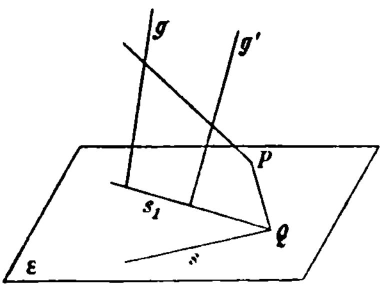

Fig. 8.

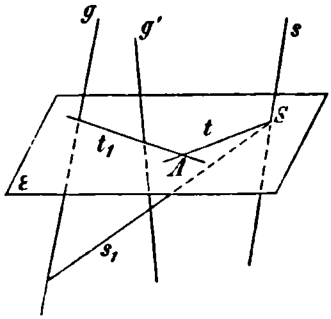

Fig. 9.

bestimmten Gewindestrahl s_1 kennt. Man kennt also durch P den Gewindestrahl PQ und denjenigen, der g, g' schneidet. Dual kann man zu jeder Ebene ε des Raums (Fig. 9) den Nullpunkt A konstruieren. Zunächst kann man nämlich die Nullebene ihres Schnittpunktes S mit s finden, indem man durch S aufser s noch den Gewindestrahl s_1 kennt, der g, g' schneidet. In ε erhält man einen Gewindestrahl t als Schnitt mit der Ebene (s, s_1) und einen zweiten t_1 durch die Schnittpunkte von g, g' mit ε. Ein Nullsystem ist also auch bestimmt durch:

d) Ein Polarenpaar und einen Leitstrahl.

§ 11. Anordnung der Gewindestrahlen.

Es ist wichtig, sich eine möglichst anschauliche Vorstellung vom Strahlengewinde zu machen. Da aber eine Mannigfaltigkeit von ∞^3 Geraden unzerlegt schwer vorstellbar ist, so ist es förderlich, Zerlegungen in Teilmannigfaltigkeiten vorzunehmen. Eine besonders anschauliche wollen wir noch besprechen: Wir denken uns der leichteren Ausdrucksweise halber die Achse a lotrecht; wenn dann $MN = c$ der kürzeste Abstand eines Gewindestrahls s von a ist, wobei M auf a, N auf s liegt, so ist die Neigung von s gegen die Horizontalebene χ durch Gleichung 14 bestimmt. Beschreibt man um a einen Kreiscylinder mit dem Halbmesser c, so berührt s diesen Cylinder; und alle Cylindertangenten, die mit s die gleiche Neigung gegen χ haben und gegen a gleich gewunden (§ 1) wie s sind, gehören ebenfalls zum Gewinde. Diese Neigung wächst mit wachsendem Cylinderhalbmesser nach Gleichung 14. Die ∞^3 Gewindestrahlen lassen sich also zu je ∞^2 als Tangenten von ∞^1 Kreiscylindern anordnen; in jedem Punkte eines Cylinders berührt ein Gewindestrahl und steht auf der Bahntangente, die der Punkt vermöge der zugehörigen Schraubung hat, senkrecht. Die ∞^2 Gewindestrahlen, die denselben Cylinder berühren, lassen sich also wieder zu je ∞^1 als Tangenten von ∞^1 Schraubenlinien anordnen, welche die Bahnschraubenlinien der Cylinderpunkte überall senkrecht durchschneiden, also mit ihnen entgegengesetzt gewunden sind. Man sagt, eine Schraubenlinie (überhaupt eine Kurve) sei in einem Gewinde enthalten, wenn ihre Tangenten dem Gewinde angehören. Je nach der Windung der in ihm enthaltenen Schraubenlinien kann man das Gewinde selbst **rechts oder links gewunden** nennen; also:

Satz 14: **Ein Strahlengewinde ist entgegengesetzt gewunden wie die Schraubung, durch die es definiert wurde.**

Wir haben in Fig. 10 drei von den koaxialen Cylinderflächen dargestellt, sie durch eine Ebene durch a geschnitten und die Parallelbüschel von Gewindestrahlen, die längs der so entstandenen Cylindererzeugenden berühren, durch kurze Striche angedeutet. Dreht man dieses System von ∞^2 Geraden um a, so erhält man sämtliche Gewindestrahlen. Da nach

Gleichung 3 einem positiven $\mathfrak{k}$ rechtsgewundene Schraubenlinien entsprechen, so stellt Gleichung 8 für $\mathfrak{k} > 0$ ein linksgewundenes Gewinde dar.

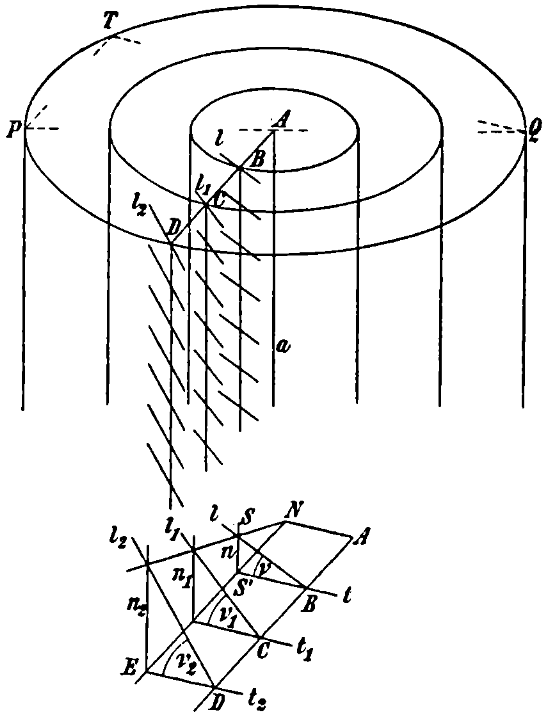

Fig. 10.

---

§ 12. Das Moment zweier Stäbe und zweier Geraden.

Man nennt allgemein Strecken, an denen nur ihre Länge, Richtung und Sinn in Betracht kommt, Vectoren. Sie sind parallel zu sich selbst frei beweglich, ohne ihre Bedeutung zu ändern. Dagegen ist z. B. eine Kraft, die an einem starren Körper angreift, an eine bestimmte Wirkungslinie gebunden. Eine Strecke, bei der die Länge, die Gerade auf der sie liegt und der Durchlaufungssinn in Betracht kommen, nennen wir mit H. Grassmann d. J. (vergl. Ges. W. I, b, S. 438) einen Stab. Ein Stab ist also nur längs dieser Geraden, seines „Trägers" frei verschiebbar, ohne seinen Wert zu ändern.

b) Unter dem Moment zweier Stäbe a,b versteht man das Produkt ihrer Längen, ihres kürzesten Abstands und des sinus des Neigungswinkels ihrer Träger. Das Moment wird also Null, wenn die Träger sich schneiden (oder parallel sind). Um es aber auch dem Vorzeichen nach definieren zu können, nehmen wir auf der Linie des kürzesten Abstandes AB (wobei A auf a, B auf b liegt), willkürlich eine positive Richtung an, wodurch zugleich in den hierzu senkrechten Ebenen ein positiver Drehungssinn*) und daher der Winkel (a,b) fixiert ist (vergl. § 8). Dann verstehen wir unter dem Moment der beiden Stäbe, wenn a und b zugleich ihre Mafszahlen sind:

15) $$M(a,b) = -\text{a. b. AB. sin}\,(a,b).$$

Der Grund des Minuszeichens wird aus Satz 15 ersichtlich werden. Das Moment ist davon unabhängig, wie im kürzesten

---

*) Als positiven Drehungssinn in einer Ebene betrachten wir denjenigen, der, von der positiven Seite ihrer Normalen aus gesehen, der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzt ist, also mit dem Drehungssinn der Erde um ihre Achse, vom Nordpol aus gesehen, übereinstimmt, ferner mit dem Sinn der Bewegung der Erde in der Ekliptik, von der Nordseite der Ekliptik aus gesehen, auf der sich die meisten Kulturländer das ganze Jahr hindurch befinden. Unter dem Winkel (a,b) zweier Richtungen (Halbstrahlen) der Ebene versteht man nun den Winkel der überstrichen wird, wenn man einen Halbstrahl aus der Richtung a im positiven Drehungssinn in die Richtung b dreht; es ist also

$$\sphericalangle(b,a) = 2\pi - \sphericalangle(a,b).$$

Wo nur trigonometrische Funktionen in Betracht kommen, kann man setzen:

$$\sphericalangle(b,a) = -\sphericalangle(a,b),$$

und man kommt mit Winkeln zwischen Null und 2π (ausschliefslich der oberen Grenze) aus. Es ist nicht immer nötig, einen positiven Drehungssinn einzuführen oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Reihenfolge der Winkelschenkel zu beachten, weil viele Ergebnisse hiervon unabhängig sind, z. B. alle jene, in denen nur der cos der Winkel auftritt. Wir sprechen dann von absoluter Winkelzählung. Sie braucht sich nur von Null bis π (einschliefslich beider Grenzen) zu erstrecken. Wir werden sogleich ein Beispiel ihrer Verwendung haben (Satz 15).

Abstand die positive Richtung fixiert wurde; denn bei Änderung derselben wechseln die letzten beiden Faktoren ihr Vorzeichen. Aus demselben Grund ist

$$M(b,a) = M(a,b).$$

Wenn dagegen der eine Stab in den entgegengesetzten verkehrt wird, ändert das Moment sein Vorzeichen, weil sich der Winkel (a,b) um π ändert. Wir haben uns bisher die positive Richtung in den Trägern der Stäbe durch diese selbst fixiert gedacht, so dafs die Zahlen a, b positiv waren. Eine etwaige andere Festsetzung hat auf das Moment keinen Einflufs. Denn wechselt die postive Richtung im Träger von a, so wechselt sowohl a als $\sin(a,b)$ sein Vorzeichen. Aus Fig. 11 sieht man,*) dafs das Moment der Stäbe a, b positiv bleibt, so lange der Drehungssinn, den der Stab b in Bezug auf a bestimmt, positiv ist.**) Indem wir den Begriff der Windung zweier Geraden (§ 1) auch auf Stäbe übertragen, können wir auch den letzten Teil des folgenden Satzes aus Fig. 11 entnehmen.

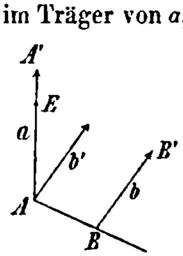

Fig. 11.

Satz 15: **Das Moment zweier Stäbe stimmt dem Vorzeichen nach mit dem Drehungssinn überein, den der eine Stab in Bezug auf den anderen bestimmt; das Moment zweier rechts gewundenen Stäbe ist positiv, wenn sie einen absolut spitzen Winkel bilden.**

Die übrigen Fälle ergeben sich hieraus von selbst.

c) Unter dem Moment zweier Geraden verstehen wir das Moment zweier Einheitsstäbe auf diesen Geraden; damit es also auch dem Vorzeichen nach bestimmt sei, müssen auf den Geraden positive Richtungen fixiert sein. Unter dem Moment eines Stabes in Bezug auf eine

---

*) In Fig. 11 ist die Strecke AB nach rechts vorn unten gehend zu denken. Dann liegt, wenn $AB > 0$, $\measuredangle(a,b)$ im vierten Quadranten. Also ist $M(a,b) > 0$. Die Stäbe sind rechts gewunden.

**) Man denke sich in b eine Kraft, die einen Körper um die Achse a dreht. Je nachdem der Sinn dieser Drehung positiv oder negativ ausfällt, sagen wir, der Stab b bestimme in Bezug auf den Stab a einen positiven oder negativen Drehungssinn. Der Drehungssinn, den der Stab a in Bezug auf b bestimmt, hat dasselbe Vorzeichen.

Achse verstehen wir das Moment des Stabes in Bezug auf einen Einheitsstab auf der Achse; unter dem Moment eines Stabes ST in Bezug auf einen Punkt P verstehen wir das Moment des Stabes in Bezug auf eine Achse, die durch P senkrecht auf die Verbindungsebene PST gelegt ist; es ist also gleich dem doppelten Dreieck PST. Diese Definitionen sind natürlich den Bedürfnissen der Mechanik angepafst.

d) Das Volumen eines Tetraeders $ABCD$ betrachten wir als positiv oder negativ, je nachdem das Dreieck ABC, von D aus gesehen, für einen inneren Punkt den positiven oder negativen Umfahrungssinn ergiebt.*) Es ändert also sein Vorzeichen, wenn man zwei benachbarte oder überhaupt zwei beliebige Symbole vertauscht (vergl. Baltzer, Determin. § 1), ebenso bei cyklischer Vertauschung der vier Symbole. Dagegen ist

$$ABCD = CDAB.$$

Oder wenn man die Stäbe AB, CD mit m, n bezeichnet und durch Nebeneinandersetzen den durch sie bestimmten Tetraederinhalt ausdrückt, so ist auch dem Vorzeichen nach

$$mn = nm.$$

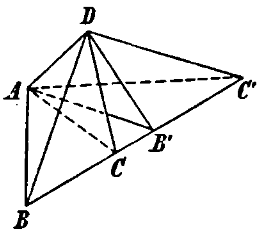

Fig. 12.

Verschiebt man eine Kante eines Tetraeders in sich selbst, ohne ihre Länge zu ändern (Fig. 12; $B'C' = BC$), so ändert sich sein Inhalt nicht; denn es hat weder die Höhe aus D noch die zugehörige Grundfläche ihre Gröfse geändert. Verschiebt man zwei Gegenkanten AA', BB' eines Tetraeders (Fig. 11), bis ihre Anfangspunkte in die Fufspunkte ihres

*) Möbius hat zuerst (1827) ein Vorzeichen des Tetraederinhalts eingeführt; vergl. den Baryc. Calc., § 19 (Ges. W., Bd. I) und „Über die Bestimmung des Inh. eines Polyeders“, § 18 (Ges. W. Bd. II). Er nimmt den Drehungssinn des Uhrzeigers als den positiven, betrachtet dagegen von A aus die Fläche BCD; also hat trotzdem hier und bei Möbius jedes Tetraeder $ABCD$ dasselbe Vorzeichen. Für die hier getroffene Festsetzung spricht aufser dem Satz 16 noch der Umstand, dafs das Tetraeder $ABCD$ positiv ist, wenn A in den Ursprung, B, C, D der Reihe nach in die positive X-, Y-, Z-Achse eines Zeigersystems erster Art fallen.

kürzesten Abstands fallen, so sieht man, dafs der sechsfache Tetraederinhalt $6V$ dem absoluten Betrag nach gleich dem Moment der Stäbe AA', BB' ist. Denn $6V$ ist auch gleich dem Inhalt eines Parallelepipeds, dessen Grundfläche das durch a, b' ($b' \# b$ durch A) bestimmte Parallelogramm und dessen Höhe AB ist. Aber diese Gleichheit gilt auch dem Vorzeichen nach; denn aus der Definition des Vorzeichens des Tetraederinhalts geht hervor, dafs es mit dem des Drehungssinnes übereinstimmt, den der Stab AA' in Bezug auf die Achse BB' bestimmt. Durch Vergleich mit Satz 15 finden wir also:

Satz 16: Das Moment der Stäbe AA', BB' ist auch dem Vorzeichen nach gleich dem sechsfachen Inhalt des Tetraeders $AA'BB'$.

e) Hieraus können wir einen analytischen Ausdruck für das Moment zweier Geraden g_1, g_2 ableiten, wenn g_1 durch einen ihrer Punkte $P_1 \equiv (\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ und ihre Richtungswinkel α_1, β_1, γ_1, analog g_2 durch $P_2 \equiv (\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ und α_2, β_2, γ_2 gegeben ist. Liegen zunächst auf den Geraden zwei beliebige Stäbe P_1P_1' und P_2P_2', so ist der sechsfache Tetraederinhalt gegeben durch (vergl. Baltzer, Determ. § 15):

16) $$6\,P_1P_1'\,P_2P_2' = \begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ 1 & \xi_1' & \eta_1' & \zeta_1' \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ 1 & \xi_2' & \eta_2' & \zeta_2' \end{vmatrix}$$

Dafs diese Gleichung auch dem Vorzeichen nach gilt, erkennt man am einfachsten an einem Spezialfall: Nimmt man P_1 im Ursprung, P_1', P_2, P_2' bezw. auf der X-, Y-, Z-Achse eines rechtwinkligen Systems erster Art in den Abständen eins vom Ursprung an, so wird $6\,P_1P_1'\,P_2P_2' = +1$; andererseits wird auch die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1.$$

Da der Tetraederinhalt sein Vorzeichen nicht ändert, solange bei Bewegung seiner Eckpunkte mit Beibehaltung ihrer Reihenfolge niemals eine Ecke die Ebene der drei anderen durchschreitet, und auch die Determinante unter dieser Voraussetzung nie verschwindet, mufs die Übereinstimmung der Vorzeichen immer gelten, sobald sie in einem speziellen Falle gilt.*) Also ist (Satz 16):

$$M(P_1 P_1', P_2 P_2') = \begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ 0 & \xi_1' - \xi_1 & \eta_1' - \eta_1 & \zeta_1' - \zeta_1 \\ 0 & \xi_2 - \xi_1 & \eta_2 - \eta_1 & \zeta_2 - \zeta_1 \\ 0 & \xi_2' - \xi_2 & \eta_2' - \eta_2 & \zeta_2' - \zeta_2 \end{vmatrix}.$$

Sind insbesondere $P_1 P_1'$ und $P_2 P_2'$ zwei Einheitsstäbe, so ist

$$\xi_1' - \xi_1 = \cos \alpha_1, \quad \xi_2' - \xi_2 = \cos \alpha_2, \text{ u. s. w.; also}$$

$$17) \qquad M(g_1, g_2) = \begin{vmatrix} \xi_1 - \xi_2 & \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 \\ \eta_1 - \eta_2 & \cos \beta_1 & \cos \beta_2 \\ \zeta_1 - \zeta_2 & \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 \end{vmatrix},$$

wobei (ξ_1, η_1, ζ_1) und (ξ_2, η_2, η_2) je ein beliebiger Punkt auf g_1 und g_2 ist.

Übungsaufgaben:

1. Es ist der eigentliche Inhalt des Satzes 7 für den Fall explicite auszusprechen, dafs g die unendlich ferne Gerade einer zur Achse parallelen Ebene ist.

2. Wie berechnet man, wenn eine Ebene $A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0$ gegeben ist, ihren Nullpunkt mit Hilfe der Gleichung 8)?

3. Die Gleichung 8) darf sich zufolge der Eigenschaften des Nullsystems nicht ändern, wenn man das Zeigersystem

*) Es ist also zu beachten, dafs die Reihe der Einser als erste Kolonne (oder Zeile) geschrieben werden mufs, hierauf die Reste der Zeilen (oder Kolonnen) entsprechend der Reihenfolge der Eckpunkte.

um die Z-Achse dreht oder längs ihr verschiebt; dies ist unmittelbar zu bestätigen.

4. Die zur Fig. 7 analoge Figur für ein negatives $\mathfrak{k}$ ist zu zeichnen.

5. Es ist im Anschlufs daran g' zu einer gegebenen Lage von g zu konstruieren.

6. Was geschieht, wenn man in § 10 bei der Bestimmungsweise b) die Achsenrichtung senkrecht zu g wählt oder parallel dazu?

7. Bei der Bestimmungsweise § 10, c) ist unmittelbar wie bei d) zu jedem Punkt die Nullebene und umgekehrt zu konstruieren.

8. Wieso kann in § 10 die Bestimmungsweise a) als ein Spezialfall von d) aufgefafst werden?

9. Wie findet man bei § 10, d) am schnellsten die Achse?

10. Wie hilft man sich, wenn d, d_1 bei § 10, c) zusammenfallen?

11. Wenn a die (lotrecht gedachte) Achse eines Nullsystems ist (Fig. 13), d der kürzeste Abstand eines Gewindestrahls l, ν seine Neigung gegen die Horizontalebene, so ist (l, d) die Nullebene von P. Nach Gleichung 14) gilt die Beziehung: $d \cdot \cot \nu = -\mathfrak{k}$. Haben d_1, ν_1 für einen anderen Gewindestrahl l_1 durch P die entsprechende Bedeutung, so mufs auch $d_1 \cot \nu_1 = -\mathfrak{k}$ sein. Also ist

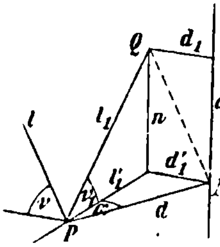

Fig. 13.

$$d_1 \cot \nu_1 = d \cdot \cot \nu.$$

Dies ist unmittelbar zu bestätigen.

12. Wenn man ein Tetraeder durch eine Ebene E nach einem Parallelogramm schneidet (wie?) und dann eine Kante, die zu E parallel ist, in sich selbst verschiebt (§ 12), so verschiebt sich das Parallelogramm kongruent mit sich selbst

in E; auch hieraus kann man die Unveränderlichkeit des Tetraederinhalts entnehmen (Prinzip von Cavalieri).

13. Für alle in einem Nullsystem enthaltenen Schraubenlinien ist der Quotient aus dem Querschnitt des Schraubencylinders und der Höhe des Schraubenganges konstant (Silldorf, Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 20).

13a) Drei Punkte ABC und drei der Reihe nach durch sie gehende Ebenen α, β, γ bestimmen ein Nullsystem, wenn die Ebene (A, B, C) durch den Punkt (α, β, γ) geht.

II. Abschnitt.

Anwendungen auf Bewegungslehre, Mechanik und graphische Statik.

§ 13. Momente von Kräften.

Wenn ein starrer Körper um eine Achse a beweglich ist, und es greift eine Kraft k an ihm an, zunächst längs einer Wirkungslinie, die a senkrecht im Abstande $AB = d$ kreuzt (Bezeichnungen und Zeigersystem sind dieselben wie im § 12), so spielt das Produkt kd in der Theorie der Drehung des Körpers bekanntlich*) eine analoge Rolle, wie die Kraft in der Theorie des beweglichen Massenpunktes; es heifst **Moment** der Kraft k bezüglich der Achse a. Wenn in a eine positive Richtung fixiert ist, so ist hiermit auch ein positiver Drehungssinn um a gegeben, und dann zählt man das Moment positiv oder negativ, je nachdem die Drehung, die seine Kraft hervorbringt, im positiven oder negativen Sinn erfolgt. Trägt man auf a eine Einheitsstrecke AE nach der positiven Richtung ab, so ist das Moment (auch dem Vorzeichen nach) gleich dem sechsfachen Tetraeder $AEBB'$ (wenn $k = BB'$), weil es gleich einem Parallelepiped mit AE als Höhe und $AB . BB'$ als Basis ist.

Liegt k **beliebig** gegen a, so kommt für die Drehung um a nur die Komponente von k in Betracht, die durch Projektion auf eine zu a senkrechte Ebene entsteht, und man versteht unter dem Moment von k auf a das Moment dieser

*) In § 13 erinnern wir an gewisse Sätze der Mechanik, von denen wir die einfachsten als bekannt voraussetzen.