LES MODÈLES STOCHASTIQUES D'APPRENTISSAGE

Recherches et perspectives

ÉCOLE PRATIQUE DES HAUTES ÉTUDES - SORBONNE
SIXIÈME SECTION : SCIENCES ÉCONOMIQUES ET SOCIALES

MATHÉMATIQUES ET SCIENCES DE L'HOMME

IV

1967

ÉDITIONS GAUTHIER-VILLARS
55, quai des Grands-Augustins
Paris-VI^{e}

HENRY ROUANET

LES MODÈLES STOCHASTIQUES D'APPRENTISSAGE

Recherches et perspectives

PRÉFACE DE J.-M. FAVERGE

1967

ÉDITIONS MOUTON

45, rue de Lille

Paris-VII^{e}

CET OUVRAGE A ÉTÉ
PUBLIÉ AVEC LE CONCOURS
DU CENTRE NATIONAL DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

© *Éditions Gauthier-Villars*
Éditions Mouton et Cie
École Pratique des Hautes Études
1967

PREFACE

par J.-M. Faverge,

Professeur à l'Université Libre de Bruxelles

Il y a une trentaine d'années, je poursuivais mes études de Mathématiques et depuis une vingtaine j'étudie la Psychologie ; aujourd'hui après ce long passé, il m'arrive de ne plus reconnaître dans ce que j'ai appris et la Mathématique et la Psychologie ; j'ai l'impression qu'il s'agit de connaissances appartenant à une autre époque, extrêmement lointaine et révolue, une sorte de moyen âge dans ma vie. Lorsque je préparais l'agrégation, l'actualité contenait des thèmes tels que la géométrie anallagmatique fort belle et séduisante ; nous passions nos journées sur la théorie des surfaces de Darboux ; qu'en savent aujourd'hui nos jeunes mathématiciens ! Pour la psychologie, le changement est encore plus marqué, même le langage est autre ; j'ai voulu rouvrir ces derniers temps le livre de Spearman, notre livre de chevet d'antan, mais j'ai vite abandonné la lecture. D'ailleurs, si vous consultez quelque publication, vous ne trouverez en référence que des auteurs américains récents, dont les écrits datent de moins de dix ans, mis à part quelques grands noms internationaux qui sont entrés dans l'histoire comme Pavlov, Binet, Freud ou Fechner; bien sûr, je simplifie, comme tout être qui a été marqué par la statistique, mais ce que je dis est presque toujours vrai pour les auteurs américains et à peu près presque toujours vrai pour les auteurs européens qui regardent à la longue vue au-delà de l'océan et oublient les efforts et même l'existence de leurs frères de langue.

Sans doute, le même phénomène est observable dans les autres disciplines et le vieil adepte des modes de pensée de la corrélation que je suis se demande parfois si toutes ces variations rapides ne sont pas en réalité des covariations congruentes, explicables par quelque découverte fondamentale qu'il faut chercher ailleurs, par exemple dans l'électronique. Ou plutôt, adoptant le langage d'Henry Rouanet, disons qu'une société est arrivée à un moment donné dans un certain état, inobservable en lui-même, résumant une évolution, et à l'origine des réponses que cette société donne aux questions scientifiques, sociales et organisationnelles. Depuis ma jeunesse, cet état de la société française a changé et ainsi les problèmes mathématiques ou psychologiques actuellement prégnants sont autres qu'auparavant; hier, nos pères cultivaient la psychologie au coin du feu, la psychologie d'eux-mêmes et lisaient Proust ou Bergson, aujourd'hui nous devons faire la psychologie des autres, des aviateurs à la commande d'avions à réaction, des malades mentaux de plus en plus nombreux ou de la jeunesse qui arrive dans une société en transformation où les places ne sont pas préparées à l'avance et qui doit s'accommoder de l'incertitude; hier, les ingénieurs calculaient des formes ou la résistance des matériaux et avaient besoin de la géométrie et de l'analyse classique, aujourd'hui ils alimentent les ordinateurs en programmes ou réalisent des synthèses complexes sur des arguments logiques, réveillent donc cette mathématique logique qui n'avait donné lieu qu'à discussions philosophiques et l'appellent algèbre moderne comme s'ils voulaient faire oublier ces controverses qu'ils jugent stériles et hors de leur sujet.

L'état a changé et est encore tout autre aux Etats-Unis d'Amérique.

Là on est préoccupé de mécaniser les activités pour leur donner un développement massif; il ne s'agit plus seulement de l'automatisation de l'industrie, mais de toute la vie sociale. Pour donner un exemple qui appartient à la sphère d'intérêt des psychologues, rappelons la mécanisation du testing scolaire qui a permis une extension considérable de cette méthode d'évaluation; les camionnettes recueillent les paquets de feuilles de réponses, les machines corrigent, calculent, les notes s'ajoutent au dossier individuel qui est carte perforée et à la sortie de l'établissement secondaire l'adolescent est accompagné de son bilan fourni par une machine imprimante; le psychologue n'est intervenu à aucun moment sauf pour programmer les machines. Cet exemple montre bien le décalage existant entre l'état de notre société et celui de la

société américaine ; ainsi, actuellement en Belgique, existe un courant tendant à introduire une telle mécanisation centralisée pour les examens psychologiques passés dans les divers centres psycho-médico-sociaux du pays ; les réactions sont vives et manifestent la crainte de la disparition du contact psychologue-sujet, le souci des indices relevés au cours de la correction des tests ou de la synthèse des résultats. Un autre exemple est celui de ces machines à percevoir dont on dit que l'étude fut motivée au départ par l'intérêt d'une lecture mécanique des photographies aériennes capables de faire l'économie d'un personnel militaire extrêmement nombreux.

Mais ne multiplions pas ces exemples, comme il serait facile de le faire, pour entrer dans notre sujet et explicitons l'idée que nous avons voulu suggérer : le souci général de mécaniser, de trouver un modèle physique remplaçant l'homme, ou un programme d'ordinateur, n'a-t-il pas «conditionné» les cerveaux à ce point que la pensée s'oriente vers les démarches opérationnelles ou algorithmiques, même en l'absence de buts économiques ? Si oui, nous pourrions ainsi expliquer la naissance et le développement des modèles stochastiques d'apprentissage aux U.S.A., comme d'ailleurs de toutes les tentatives de simulation en psychologie. On remarquera l'apparition de-ci de-là dans le texte d'Henry Rouanet du terme d'« automate probabiliste », on se souviendra que le perceptron apprend lui aussi et que sa connaissance reste probabiliste.

D'ailleurs, le terrain était favorable à cette naissance ; Henry Rouanet en indique la genèse dans ses premiers chapitres ; il rappelle l'essor des théories de l'apprentissage et comment les conceptions de Guthrie ont engendré le modèle d'échantillonnage du stimulus. On lira à ce sujet dans le premier chapitre de belles pages sur les relations et distinctions entre modèle et théorie : une théorie serait « un ensemble de concepts relatif à une classe de situations, et non à une situation particulière » ; un modèle par contre « exprimerait de façon précise, dans le cas d'une situation expérimentale particulière, une théorie psychologique ». Cependant après avoir lu la partie finale de l'ouvrage, on s'apercevra que cette distinction fondée sur le degré de généralité de la situation n'est peut-être pas fondamentale ; on y apprendra que les modèles trouveraient leur sens et sans doute leur utilité dans des comparaisons inter-expériences, expériences se distinguant naturelle-

ment par quelque chose qui ferait partie de la définition de la situation. Ce qui paraît essentiel, c'est la précision du modèle comparée à celle des théories habituelles, la possibilité qu'il a d'absorber des données numériques et d'en fournir. A ce titre encore, il correspond à un autre état d'exigences, il traite les mêmes problèmes que la théorie mais dans une autre culture, plus évoluée diront certains; dans le cas qui nous occupe, les modèles sont en effet apparus après les théories, sur le terrain labouré par elles, plantes éparses encore, mais dont il conviendrait d'accroître la densité.

Cette assurance de la validité du modèle au-delà d'une situation particulière est très importante pour réconcilier les objectifs des théories et des modèles; elle assurerait aussi une logique paradoxale à la démarche si nous adoptions les idées exprimées plus haut : le modèle, apparaissant dans une société dont le souci est de mécaniser, permettrait au moins à l'intérieur de la sphère de généralisation, de faire de la psychologie sans sujet ni expérience avec le seul recours au calculateur. Cette mécanisation est probablement repoussée par beaucoup d'esprits même avancés, mais ce rejet risque de laisser apparaître la naissance des modèles comme un épiphénomène, engendré par contagion à partir des domaines où la mécanisation est acceptée et recherchée.

Nous avons dit que les modèles stochastiques étaient les enfants des théories psychologiques sur l'apprentissage; ceci explique qu'ils soient considérés traditionnellement comme des modèles d'apprentissage, d'une façon très restrictive. Henry Rouanet nous propose fort heureusement de rompre ce lien de filiation et de les appeler « modèles d'adaptation temporelle »: ils entrent, dit-il, dans le champ de « l'adaptation d'un organisme à un environnement (éventuellement variable) au cours du temps » et ne sont pas, au fond, liés à une théorie psychologique particulière. Dans cette démarche, Henry Rouanet nous fait faire un grand pas de décantation, de transplantation dans un horizon plus large, où la structure logique a une position focale à la place des urnes hypothétiques où seraient échantillonnés les éléments de la situation. Il s'agit d'un grand pas qui curieusement n'avait pas été esquissé; il y a pourtant aux U.S.A. plus peut-être qu'ailleurs des ingénieurs qui depuis longtemps construisent des servo-mécanismes et proposent d'étudier leur fonctionnement à partir d'équations différentielles linéaires; Bush et Mosteller écrivent un livre entier sur des modèles à équations linéaires aux différences finies, très proches des précédentes comme chacun sait, et ne se réfèrent pas à tout ce qui a été dit dans la théorie des systèmes asservis,

en particulier des systèmes à échantillonnage. J'avoue en avoir été souvent intrigué et je me demande s'il y a une autre explication que celle recherchée dans un cloisonnement élevé autour du mot apprentissage que l'on relie difficilement à celui de régime transitoire des ingénieurs dans une société où la spécialisation est reine.

Nous voici découvrant le métal précieux contenu dans le livre d'Henry Rouanet; il est le produit d'un esprit cartésien, gêné quelquefois aux entournures par le souci de conserver les dogmes des Ecoles, mais malgré cette modestie proposant hardiment des classes de modèles, les disposant selon des arbres ou leur trouvant un père dans un modèle général qu'il décrit. En un mot, Henry Rouanet expose pour des esprits français un sujet américain. Il est un homme à deux cultures où se mirent tour à tour les pages de son ouvrage; il est privilégié pour savoir nous traduire ce qui n'a pas son germe dans les modes de pensée que nous avons acquis au lycée.

En effet, il a été ce lycéen, ce taupin qui a appris les déterminants à la méthode ancienne, mieux certes que ce «vieux taupin qui planchait chez la guerre» dont parle l'histoire, mais dans les mêmes livres. Aujourd'hui, il n'aime plus ces déterminants et voudrait les voir bannis de l'algèbre linéaire. Ingénieur, il est venu à la psychologie parce qu'il lui semblait que l'homme valait au moins autant de soins que la machine. J'ai eu l'honneur d'être celui qui lui a ouvert la porte. Bien sûr, compte tenu de sa formation, il se devait d'étudier les problèmes de mesure et a été séduit par les belles constructions de Patrick Suppes sur ce sujet. Il a donc suivi aux Etats-Unis Suppes qui s'occupait à ce moment de modèles stochastiques. Il a étudié à fond ces modèles dans la façon de faire américaine, c'est-à-dire en se spécialisant sur le cas où les réponses appartiennent à un continuum; ce spécialiste est le Rouanet américain connu sous ce titre aux Etats-Unis. Mais pour nous, il est celui qui a écrit un livre dont on chercherait en vain l'analogue ailleurs, proposant des thèmes à notre réflexion, tentant d'ouvrir une voie qui nous permet de discerner déjà «où vont les modèles».

J.-M. F.

INTRODUCTION

Parmi les courants récents de recherche en psychologie expérimentale, celui dit des «modèles stochastiques» occupe une place croissante : lié à l'origine au domaine de l'apprentissage, il a progressivement débordé ce cadre, et pénètre aujourd'hui dans tous les secteurs de la psychologie où l'étude du processus temporel apparaît comme cruciale pour l'intelligence du phénomène(*).

Depuis 1960, nous avons participé à ce courant de recherches : l'ouvrage qu'on va lire présente l'essentiel de cette participation. En cherchant à replacer dans leur contexte les recherches théoriques et expérimentales présentées, nous avons été amené à exposer longuement des perspectives d'ensemble sur la psychologie mathématique et les modèles stochastiques, voire à émettre certains pronostics sur les développements à venir. Mais ces considérations générales ne constituent pas une tentative de «synthèse» sur la portée et les limites d'un courant tout récent, dont l'évolution est extrêmement rapide et dont la place exacte dans la psychologie de demain peut dépendre de rebondissement imprévisibles. Nous n'avons pas non plus cherché à présenter, dans un tableau équitable, des tendances actuellement importantes mais auxquelles nous n'avons pas directement participé(**). Le but principal que nous avons poursuivi, en écrivant les pages qui suivent, a été de reconstituer une démarche faisant partie d'un mode de recherche en psychologie expérimentale, que nous croyons appelé à présenter un intérêt durable. Les étapes de cette démarche, qui correspondent aux chapitres successifs, peuvent être résumées de la façon suivante :

(*) Nous conservons cependant, pour des raisons historiques, l'expression de «modèles stochastiques d'apprentissage».

(**) Dans une revue représentative, les considérations sur les modèles stochastiques au sens strict, et plus encore sur les modèles d'urne (cf. chap. III) mériteraient des développements importants.

Nous décrirons d'abord (chap. I) le contexte général, désigné sous l'appellation de «psychologie mathématique» : par quoi il faut entendre (mais il en va de même pour la psychologie expérimentale) non pas un objet d'études, mais une méthode : celle où l'hypothèse du chercheur est devenue un modèle formalisé. Nous situerons ensuite (chap. II) les modèles stochastiques dans la ligne des recherches classiques sur l'apprentissage et procéderons (chap. III) à une première présentation d'ensemble des modèles stochastiques. Ceux-ci peuvent être classés en : modèles stochastiques au sens strict (Ecole de Bush et Mosteller), moins engagés à l'égard des théories de l'apprentissage traditionnelles, et modèles d'échantillonnage du stimulus (Ecole d'Estes), plus proches de certaines interprétations théoriques classiques. Cet inventaire global terminé, nous entreprendrons (chap. IV) l'examen d'une situation expérimentale particulière, celle de «prédiction», qui s'est trouvée liée à une phase importante du développement des modèles stochastiques : son exposé permet de mieux comprendre les extensions récentes de ces modèles. A propos de la situation de prédiction, nous indiquerons en détail (chap. V) les prédictions fournies par les modèles d'échantillonnage du stimulus. Nous décrirons ensuite (chap. VI) l'extension, due à Suppes, de ces modèles au cas où l'ensemble des signaux et celui des réponses sont des ensembles continus et non plus des ensembles finis. Dans le cas des ensembles continus on est conduit à envisager l'association d'un stimulus non plus à une réponse unique, mais à un ensemble de réponses ; cette caractéristique nouvelle fait du modèle un outil très souple, susceptible d'être intégré dans une gamme de constructions très large.

La présentation des modèles continus sera suivie de l'exposé de deux études expérimentales. Le premier travail (chap. VII) est un essai de validation directe des modèles de Suppes ; concrètement, la tâche consistait à prédire l'apparition d'une cible sur un écran. Dans la deuxième expérience (chap. VIII) de caractère exploratoire, la situation de base était compliquée par une tâche de discrimination.

Nous présenterons ensuite (chap. IX) une contribution d'ordre théorique. Il s'agit d'un modèle stochastique général, que nous avons appelé «modèle d'adaptation temporelle», pour souligner que sa portée déborde les situations classiques d'apprentissage. La considération de ce modèle a été inspirée par un double souci d'unification et d'abstraction : il nous paraît en effet important de dissocier les mécanismes des modèles stochastiques de certaines interprétations théoriques trop étroites. D'autre part, ce modèle général apporte un point de vue privilégié pour aborder l'étude comparative des modèles existants : en particularisant ce modèle, nous pourrons ainsi procéder (chap. X) à une présentation déductive d'une grande variété de modèles stochastiques.

Dans la dernière partie de notre étude, nous esquisserons (chap. IX) quelques lignes de recherche, théoriques et expérimentales, susceptibles de prolonger les travaux présentés. Les modèles stochastiques ont désormais atteint un niveau de souplesse suffisant pour en faire des outils d'analyse applicables à nombre de situations où l'on constate des dépendances séquentielles - que celles-ci aient classiquement constitué l'objet essentiel de la recherche (situations d'apprentissage) ou qu'elles aient été le plus souvent considérées comme des effets secondaires (situations perceptives en particulier). Nous ferons une revue rapide de quelques situations expérimentales qui commencent à faire l'objet (ou qui mériteraient dès maintenant de faire l'objet) d'investigation systématique : nous mentionnerons, plus spécialement, les situations de temps de réaction, de détection, de reproduction, d'anticipation, d'apprentissage de couples et d'identification de concept.

Lorsque, parvenu à ce point de la démarche, nous essaierons de tirer une conclusion provisoire, nous ne pourrons sans doute pas assurer que les modèles stochastiques puissent se constituer, dans un avenir immédiat, en théorie complètement formalisée des phénomènes d'adaptation temporelle ; mais nous pourrons affirmer qu'ils nous permettent dès maintenant de formuler clairement un tel objectif, et qu'ils nous fournissent des moyens efficaces pour progresser dans sa direction (*).

(*) Une version primitive de cet ouvrage a fait l'objet d'une thèse de Troisième Cycle préparée sous la direction du Professeur P. Fraisse ; qu'il me soit permis de dire ici combien je lui suis reconnaissant à la fois de cette direction et des encouragements constants qu'il me prodigue actuellement au Laboratoire de Psychologie de la Sorbonne, pour l'avancement de la psychologie mathématique.

Les travaux expérimentaux présentés ont été réalisés à l'Université de Stanford, sous la conduite du Professeur P. Suppes, qui m'a guidé dans un champ spécifique de recherches et à qui je tiens à exprimer ma vive gratitude.

Je voudrais encore pouvoir dire ici toute ma dette à l'égard du Professeur J.M. Faverge, qui m'a fait découvrir la psychologie scientifique, et dont l'influence sur mon orientation et mes travaux a toujours été décisive.

Enfin, je désire remercier ceux qui, par leurs commentaires et leurs critiques, ont contribué de façon déterminante à l'élaboration de cette étude : MM. W. Ackermann, C. George, J.C. Falmagne, J. Leplat, B. Matalon et J.F. Richard ; ainsi que ceux, trop nombreux pour être cités, dont les suggestions et remarques m'ont été utiles ; enfin, tous les collègues - et tout particulièrement Mme M. Toublanc - qui ont permis la réalisation matérielle de ce travail.

CHAPITRE I

LE CADRE : LA PSYCHOLOGIE MATHEMATIQUE

Le début de notre étude est une introduction notionnelle aux concepts et à la démarche de la psychologie mathématique, cadre dans lequel se situent les modèles stochastiques. La majeure partie de ce chapitre est consacrée à la description des quatre étapes principales d'une recherche de psychologie mathématique : la formalisation, le développement du modèle, la confrontation statistique, les conclusions.

Vers 1950, plusieurs articles, apparus plus ou moins indépendamment dans la littérature américaine : G.A. Miller et Frick (1949), Estes (1950), Mueller (1950), Bush et Mosteller (1951a), G.A. Miller (1952), marquent le début d'une série de nouveaux développements dans le domaine de l'apprentissage. Dans ces articles, on trouve, pour la première fois intégrées dans une construction formalisée, les idées suivantes : les changements observés dans le comportement d'un organisme au cours du phénomène d'apprentissage peuvent être adéquatement décrits par des mécanismes modifiant les probabilités des réponses et les modifications de ces probabilités peuvent être exprimées à partir des événements qui interviennent d'essai à essai. Ces idées, appliquées sous des formes diverses à une grande quantité de situations, caractérisent les «modèles probabilistes d'apprentissage» – on dit encore «modèles stochastiques», le terme «stochastique», synonyme de probabiliste, suggérant en plus l'idée d'une influence du facteur temporel. L'ensemble des travaux théoriques et expérimentaux relatifs aux modèles stochastiques n'a pas cessé de croître ; des ouvrages entiers leur ont été consacrés, depuis le déjà classique *Stochastic models for learning* de Bush et Mosteller

(1955) jusqu'aux livres plus récents, comme celui publié sous la direction de Bush et Estes (1959) et l'ouvrage de Suppes et Atkinson (1960). Les articles sont en nombre considérable ; dans leur revue sur les modèles stochastiques, Rouanet et Ackermann (1963) en recensent plus de trois cents, tous postérieurs à 1949.

Pour bien situer le mouvement des modèles stochastiques d'apprentissage, il faut le rattacher à un secteur de la psychologie qu'on peut appeler la *psychologie mathématique* (ou encore : la *psychologie mathématisée)**, dont les développements en psychologie expérimentale ont été très rapides lors des dernières années. Le terme de «*psychologie mathématique*», d'usage récent (il date peut-être de Luce, Bush et Licklider, 1960), peut, à première vue, ne pas sembler très heureux et on aurait pu, apparemment, continuer à parler de «méthodes mathématiques en psychologie». Cette dernière expression nous paraît cependant avoir une acception trop large et englober un ensemble de techniques, en particulier statistiques, qui sont souvent utilisées comme auxiliaires de la psychologie, le substrat explicatif étant en dernier ressort de nature non-mathématique ; avec la psychologie mathématique, comme nous le verrons, il s'agit d'une intégration plus poussée de la psychologie et de la mathématique, où l'explication du phénomène psychologique étudié peut consister essentiellement dans le schéma mathématique (cf.***infra*, p. 20, les conceptions de Piaget). En tout cas, le terme de «*psychologie mathématique*» est sans doute justifié par l'emploi de techniques mathématiques relativement complexes ; on devrait dire par le plein emploi des mathématiques pour l'étude de problèmes psychologiques. Dans ce sens, l'expression «*psychologie mathématique*» désigne une méthode et non un domaine spécifique d'application ; ce caractère lui est commun avec la psychologie expérimentale (Fraisse, 1956, p. 2).

La psychologie mathématique n'est pas une démarche fondamentalement nouvelle de la psychologie. Si l'on considère que la psychologie expérimentale est née en 1860 avec les *Elemente der Psychophysik* de Fechner (Fraisse, 1956, p. 1 ; 1962, p. 238), la même date de naissance doit être attribuée à la psychologie mathématique. Et la tradition mathématisante a toujours été vivante en psychologie expérimentale, en particulier dans le domaine de la psychophysique ; qu'il suffise d'évoquer les travaux sur les échelles psychophysiques, à la suite de Thurstone, ou les controverses autour de la «loi puissance» ou «loi logarithmique» que nous rappelle Piéron (1951). Il faut noter d'ailleurs que pendant

* On pourrait également dire « psychologie quantitative ». Mais le terme « mathématique » nous semble préférable ; il est en effet plus général, englobant l'usage de méthodes (algèbre dite moderne, etc...) réputées non quantitatives.

** Quand nous écrivons « cf. » nous renvoyons à une autre partie du présent texte.

longtemps les applications mathématiques se sont surtout concentrées en dehors de la psychologie expérimentale, en particulier en psychométrie, avec toutes les recherches sur l'analyse factorielle et la théorie des tests. Ce n'est guère que depuis 1945 que différents groupes de psychologues expérimentalistes américains, qui parfois avaient été amenés à collaborer avec des mathématiciens ou des ingénieurs au cours de la guerre, se sont familiarisés avec certaines branches des mathématiques, comme le calcul des probabilités ou la théorie de l'information, et se sont attachés à formuler un éventail de plus en plus large de problèmes en termes mathématiques. L'importance de ces travaux récents permet de penser qu'aujourd'hui, au moins outre-Atlantique, le centre de gravité des recherches mathématiques en psychologie n'est peut-être plus situé en psychométrie, mais en psychologie expérimentale. Il suffit, pour s'en convaincre, de considérer le traité publié sous la direction de Luce, Bush, Galanter (1963) qui expose la plupart des développements actuels : la majeure partie des contributions présentent des modèles pour la psychophysique (en particulier détection et discrimination) et l'apprentissage.

Plus encore que l'évolution relative aux domaines d'application, il faudrait, dans une perspective historique, décrire une évolution parallèle, celle de la nature des efforts de mathématisation et de la notion-même de mathématisation. Jusqu'à une date récente, il était possible de discerner dans ces efforts deux directions distinctes qu'on peut appeler « la quantification » et « l'axiomatisation »*. Par « quantification », nous entendons la mise au point de méthodes d'élaboration de données susceptibles de se prêter à un « calcul » ; comme exemple, on peut citer les méthodes permettant de décrire la « courbe d'apprentissage » (cf. chap. II, p. 22). Ces méthodes faisaient appel aux outils mathématiques existants (analyse mathématique) et surtout à la statistique. L'« axiomatisation », de son côté, consiste dans la recherche et l'explicitation du nombre minimum de principes permettant de rendre compte de tout un ensemble de phénomènes. Cette démarche a conduit, en particulier dans le domaine de l'apprentissage, à des « théories » (théorie de la contiguïté, théorie du renforcement) qui, lorsqu'elles n'étaient pas en même temps quantitatives, n'étaient pas toujours perçues comme des tentatives de mathématisation. Or, on peut dire que la psychologie mathématique, dans ses développements actuels, tend à réaliser de manière intime la fusion entre la « quantification » (avec les réserves qu'on peut faire sur ce mot, cf. note p. 2) et l'« axiomatisation ».

■

* M. Matalon a attiré notre attention sur cette distinction.

Le reste de ce chapitre sera consacré à une introduction notionnelle aux principales méthodes employées par la psychologie mathématique et aux problèmes soulevés par ces méthodes. Dans ce but, il peut être utile de s'aider d'un schéma, à valeur surtout indicative, représentant les principales étapes d'une recherche typique de psychologie mathématique. La fig. 1 représente un tel schéma, qui nous a été inspiré par Coombs (in Thrall, Coombs et Davis, 1954, p. 21 ; cf. aussi Gulliksen, 1961, p. 95).

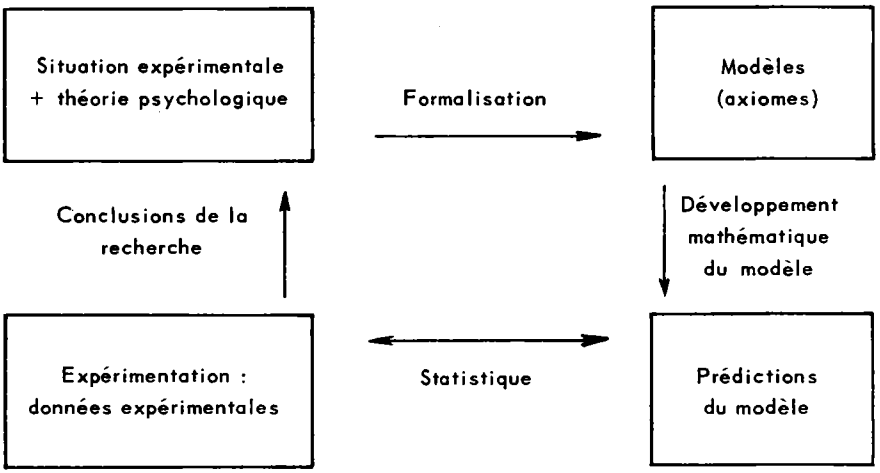

Fig. 1 - Les principales étapes d'une recherche de psychologie mathématique.

A partir d'une situation expérimentale et d'une théorie psychologique, la première étape est celle de la formalisation, c'est-à-dire de la mise au point d'un modèle mathématique. Ce modèle est ensuite développé de manière à conduire à des prédictions. L'expérimentation conduit à des données qu'il est possible de confronter avec ces prédictions en utilisant les méthodes statistiques. Les résultats de cette confrontation conduisent aux conclusions de la recherche qu'il s'agit d'interpréter dans le cadre de la théorie psychologique. Nous considérerons successivement, avec quelque détail, chacune de ces quatre étapes.

LA FORMALISATION

Toute recherche de psychologie mathématique, comme toute recherche de psychologie expérimentale, commence par la prise en considération d'une situation expérimentale et d'une théorie psychologique

qui s'y rapporte. Par théorie, nous entendrons dans cette étude un ensemble de concepts (et de relations entre ces concepts) relatif à une classe de situations, et non à une situation particulière - cet ensemble de concepts pouvant d'ailleurs être ordonné ou même à la limite «axiomatisé» (théories classiques de l'apprentissage par exemple), ou à l'inverse n'être qu'un corps mal unifié de connaissances et d'hypothèses*.

Une recherche de psychologie expérimentale revient toujours à éprouver une hypothèse de la théorie à partir de données recueillies dans la situation expérimentale étudiée. En psychologie classique, l'hypothèse est formulée verbalement et ne se distingue pas toujours nettement de la théorie ; en psychologie mathématique, ce qui est mis directement à l'épreuve est toujours un modèle mathématique - on dit aussi simplement «modèle» - par l'intermédiaire duquel est exprimée la théorie. Le modèle est donc l'outil d'analyse original de la psychologie mathématique - mais que faut-il entendre au juste par «modèle» ?

Le mot a été souvent employé, dans des contextes divers et avec des acceptions variées. «Dans les sciences humaines, écrit Faverge (1961, p. 105), les modèles n'ont pas de rôle normatif... : ils ne fournissent pas des règles de conduite, mais tendent seulement à rendre compte des comportements réels et à les prévoir de la meilleure façon». Cependant, à l'intérieur de ce cadre descriptif, le mot «modèle» a encore en psychologie un emploi très large ; il peut désigner des schémas à valeur surtout indicative : cartes cognitives, tableaux de connexion S-R, théorie du champ ... (Lachman, 1960, p. 126 et suivantes). Quelles que soient les vertus suggestives ou même heuristiques de tels schémas, il ne s'agit pas là de modèles au sens de la psychologie mathématique.

Si, d'autre part, on cherche une définition formelle du mot «modèle» on trouve une telle définition chez les logiciens pour lesquels une théorie est un ensemble d'axiomes et un modèle une réalisation possible satisfaisant une théorie (Suppes, 1960b, p. 287). Or, cette définition, plus proche de l'usage de la psychologie mathématique, ne peut cependant être intégralement retenue : en psychologie, le mot «théorie», en particulier dans le domaine de l'apprentissage, a déjà un emploi consacré par l'usage (théorie de la forme, théorie contiguïste, etc...).

Finalement, l'usage qui semble s'être établi en psychologie mathématique consiste à appeler modèle un ensemble d'axiomes formulés mathématiquement (ou qui pourraient être formulés mathématiquement) exprimant de façon précise, dans le cas d'une situation expérimentale

* Cette définition très large nous suffira pour l'instant. Au chapitre IX nous serons amené à introduire des distinctions plus précises.

particulière, une théorie psychologique : nous disons, exprimant la formalisation d'une théorie à propos de la situation. Le plus souvent, cette formalisation donne au modèle un caractère à la fois plus restreint et plus simplifié que la théorie correspondante. Ce fait est en accord avec l'acception courante, selon laquelle un modèle réduit de bateau ou d'avion est une représentation schématisée qui n'a retenu que les aspects essentiels des phénomènes étudiés ; « c'est dans cette simplification, note précisément Oléron (1963, p. 159), que se trouve son intérêt, puisque c'est ainsi qu'il les rend (les phénomènes) plus intelligibles ».

Du point de vue formel, ce qui permet de distinguer sans ambiguïté, dans un cas particulier un modèle d'une théorie, est le caractère « clos » du modèle qui ne laisse plus de place à l'arbitraire : ainsi, nous verrons au chapitre II que la théorie de Hull, malgré sa présentation « logico-formelle », ne conduit pas (du moins dans l'état où elle est formulée par son auteur) à de véritables modèles ; au chapitre III, qu'il en va de même pour la théorie de Guthrie. Des modèles réduits différents peuvent représenter des aspects différents des mêmes phénomènes ; de même, plusieurs modèles distincts peuvent correspondre à une même théorie psychologique ; nous verrons ainsi (cf. chap. IV, p. 52) que la théorie de Guthrie a pu être formalisée par Estes de plusieurs façons différentes. Inversement, des théories différentes ou appartenant à des domaines différents peuvent être représentées par un même modèle. Notons enfin avec Suppes (1960b, p. 290) que la formulation abstraite n'exclut pas la représentation concrète, qui correspond mieux au sens commun du mot modèle.

Les fonctions assurées par les modèles ont été exposées par divers auteurs. Suppes insiste sur l'importance de l'élaboration du modèle pour la compréhension de la théorie psychologique : « En essayant de construire un modèle d'une théorie empirique, on obtient presque à coup sûr une compréhension plus précise et plus claire de cette théorie. Tout ce qu'il peut y avoir de creux dans plus d'une théorie classique des sciences sociales est bien mis en évidence quand on cherche à formuler exactement ce qui constitue un modèle pour cette théorie. Le type de théorie consistant essentiellement en remarques intuitives et en assertions heuristiques ne sera pas susceptible d'une telle formulation. Les efforts pour rendre une théorie exacte révèleront en même temps ses faiblesses » (Suppes, *ibid.*). Par ailleurs, Estes (1953, cité par Hilgard, 1956, p. 402), Faverge (1962b) et Piaget (1963) montrent comment le modèle forme un lien entre la théorie et l'expérience, en rendant opératoires les mécanismes postulés par la théorie, c'est-à-dire en les mettant dans une forme appropriée pour la prédiction. L'élaboration d'un modèle oriente le choix des expériences, du plan expérimental et du traitement statistique des données.

A ce niveau de l'exposé, on peut s'interroger sur ce qu'on pourrait appeler «l'heuristique des modèles». Comment sont choisies les situations à formaliser et comment sont «inventés» les modèles appropriés ?

Ces questions sont très importantes car, au moins dans l'état actuel des choses, on est loin de pouvoir songer à formaliser n'importe quelle situation. Malheureusement, il n'est pas possible de donner une réponse toute faite à ces questions et l'on a surtout des cas d'espèce. En fait, il est rare que l'invention se fasse «ex nihilo» : le chercheur en psychologie mathématique dispose toujours d'un «arsenal» de situations et de modèles déjà étudiés qui oriente son choix de façon plus ou moins précise. Le cas le plus fréquent est celui où le chercheur, devant la situation qu'il cherche à formaliser, s'efforce de traduire, dans les termes de modèles déjà existants, les variables de la théorie psychologique qu'il juge adéquate à la situation. Ainsi verrons-nous Falmagne (chap. X, p. 210), à propos de la situation des temps de réaction de choix, formaliser la notion de «préparation» à l'aide d'un modèle linéaire utilisé antérieurement dans des contextes différents.

Dans d'autres cas, l'existence d'une théorie formalisée applicable à un ensemble de situations fournit un guide à la recherche en permettant de définir globalement, des types de modèles appropriés à des types de situations. C'est ainsi que nous serons conduit au chapitre XI à envisager une série de situations «d'adaptation temporelle» en relation avec un modèle général.

LE DEVELOPPEMENT DU MODELE

Le modèle une fois précisé, l'étape suivante consiste à développer mathématiquement les axiomes du modèle, afin de parvenir à des conséquences qui soient des prédictions validables. Cette étape est strictement déductive : aucune hypothèse nouvelle n'est introduite, les prédictions qui sont au bout du calcul étaient déjà contenues dans les axiomes.

Soulignons ici cette propriété capitale souvent remarquée de la déduction mathématique, d'être à la fois tautologique et féconde. Les axiomes définissent entièrement un modèle puisque, une fois qu'ils sont posés, plus aucune hypothèse nouvelle n'est introduite ; et pourtant ils contiennent dans un certain sens plus que ce qu'on y a mis puisqu'ils permettent d'obtenir des prédictions impossibles à déduire par un raisonnement «non armé» par le calcul. L'importance de cette partie déductive qui suit la formalisation elle-même suffirait à caractériser l'originalité

de la psychologie mathématique. En psychologie non mathématique, en effet, on a l'impression, d'ailleurs parfois fallacieuse, de passer sans intermédiaire de la théorie psychologique aux prédictions, celles-ci s'exprimant le plus souvent sous la forme d'une alternative : présence ou absence d'un effet systématique, d'une différence, etc. En psychologie mathématique, au contraire, les prédictions sont toujours obtenues à l'issue d'un calcul. D'autre part, ces prédictions sont plus nombreuses et plus précises : ainsi on ne prédira pas seulement la présence d'un effet systématique mais son intensité moyenne, la variance de cette intensité, etc. ; nous en verrons de nombreux exemples au cours de cette étude.

■

Il nous faut maintenant dire quelques mots de la nature particulière de la plupart des modèles employés en psychologie mathématique. On peut en effet distinguer deux sortes de modèles, selon la nature des axiomes : les modèles déterministes et les modèles probabilistes. Dans les développements récents de la psychologie mathématique, la majorité des modèles sont des modèles probabilistes. L'introduction des probabilités n'est pas un fait récent dans les sciences humaines et tous les chercheurs du passé devaient tenir compte de la variabilité bien connue de la plupart des données comportementales, c'est-à-dire admettre, d'une façon ou d'une autre, des termes aléatoires.

Cependant, en forçant un peu les choses, on peut dire que cette introduction était généralement faite avec un esprit resté déterministe, où l'aléatoire était plus toléré que vraiment assumé. On raisonnait toujours, remarque Fraisse (1963b, p.102), « comme s'il existait une valeur vraie d'une réponse, que la multiplication des mesures ou des sujets permettait d'approcher en neutralisant des effets parasites ». Ce n'est que récemment que le « Zeitgeist » a changé, modifiant les perspectives d'une façon révolutionnaire. Notre propos n'est pas ici de décrire toutes les transformations apportées par l'introduction de modèles probabilistes en psychologie. L'avènement de ces modèles dans les sciences humaines n'est pas d'ailleurs restreint à la psychologie ; qu'il suffise de mentionner les modèles de Kendall (1949) pour la croissance des populations ou les applications en biologie de la théorie des processus de Markoff, exposées dans l'ouvrage de Barucha-Reid (1960). Ce mouvement traduit cette nouvelle attitude scientifique - déjà classique chez beaucoup de physiciens - pour laquelle l'aléatoire n'est plus synonyme d'ignorance ou de désordre, mais sait traduire la meilleure approximation d'un phénomène présentant une certaine régularité à travers la variabilité (Granger, 1960, en particulier p. 139).

Dans sa récente analyse de la méthode expérimentale, Fraisse décrit ce nouvel état d'esprit pour lequel «toute réponse est stochastique et le traitement des données n'est pas un artifice qui dégagerait un métal pur de sa gangue, mais l'instrument qui permet de décrire au plus près les comportements réels» (Fraisse, 1963b, p. 102).

Il nous faut signaler, sans nous y attarder, les discussions concernant l'interprétation de la notion de probabilité. En simplifiant un peu, on peut distinguer deux positions extrêmes : selon la première, le comportement est intrinsèquement aléatoire ; selon la seconde, la probabilité n'est que la résultante d'un grand nombre de facteurs agissant de façon déterministe mais non contrôlée. Les tenants de cette dernière position peuvent, à leur tour, être divisés en deux catégories : ceux pour qui, avec les progrès de la neurophysiologie par exemple, les modèles probabilistes feront place à des modèles plus déterministes, et ceux pour qui la probabilité correspond à un niveau de l'analyse et non à un état de connaissance. Pour ces derniers, le modèle probabiliste sera toujours utile. Si on cherche, écrit Piaget (1959, p.12), à montrer qu'une conduite «est le produit d'une équilibration dont les lois relèvent de simples questions de probabilité séquentielle, un tel modèle, à supposer qu'il corresponde aux faits de comportement eux-mêmes, ne saurait être ébranlé parce qu'on aurait trouvé le mécanisme physiologique correspondant. Bien plus, on ira à la rencontre du neurologiste qui aura besoin tôt ou tard de construire à son tour de tels modèles». Il est intéressant de rapprocher cette position de celle du probabiliste Gnedenko (1962, p. 4): «Nous ne considérons pas que les conditions pour l'emploi du calcul des probabilités résident dans notre « connaissance insuffisante ». Le principe fondamental est que les phénomènes macroscopiques possèdent des propriétés particulières nouvelles. Dans l'étude des phénomènes qui mettent en jeu une grande quantité de molécules, la connaissance des propriétés de chaque molécule n'est pas indispensable. En fait, il faut dans l'étude des phénomènes naturels, ne pas s'occuper de l'influence de particularités accessoires». Sans vouloir prendre parti dans ce débat, on peut adopter l'attitude méthodologique de Bush et Mosteller lorsqu'ils déclarent: «Il nous importe peu que le comportement soit statistique par sa nature, ou qu'il nous apparaisse tel par suite de conditions incontrôlées ou incontrôlables. Dans les deux cas, nous soutiendrons qu'un modèle probabiliste est approprié pour décrire nombre de résultats expérimentaux actuellement à notre disposition» (Bush et Mosteller, 1955, p. 3). Cette prise de position d'indifférence est justifiée pour certains types de modèles comme le modèle linéaire de Bush et Mosteller (cf. plus loin chap. III) ; mais il n'est pas certain qu'elle soit défendable pour tous les types de modèles comme le modèle d'échantillonnage du stimulus (chap. IV) ou le modèle à états (chap. IX). Des recherches

seraient nécessaires pour préciser au niveau de la structure des modèles les implications des options fondamentales possibles.

Sur le plan du traitement des données, l'emploi du calcul des probabilités présente un certain nombre de caractéristiques. La probabilité, selon le point de vue, peut être considérée soit comme fréquence, soit comme vraisemblance. Comme vraisemblance, elle fournit un outil plus souple que le modèle déterministe ; celui-ci est rendu invalide par la présence d'une seule exception, alors que le modèle probabiliste laisse à l'individu à étudier une part plus ou moins grande de « liberté », permettant une variabilité au niveau de la réponse. D'autre part, comme fréquence, la probabilité a l'avantage des concepts opératoires immédiatement saisissables. Les modèles probabilistes conduisent à des prédictions nombreuses concernant les phénomènes observables, prédictions que l'intuition à elle seule serait parfois incapable de faire et que les données expérimentales peuvent confirmer ou infirmer. De plus, l'emploi des probabilités permet de considérer l'aléatoire au niveau de la situation-stimulus et d'étudier ces situations à renforcement variable plus conformes aux vœux de Brunswik (1943). Bresson (1955, p. 407) a bien noté le lien entre l'usage de situations à renforcement variable et le fait de considérer les liaisons S-R comme des liaisons stochastiques.

Enfin, l'emploi des probabilités est en harmonie avec celui des techniques statistiques, qui reposent - nous en parlerons plus loin - sur la confrontation de données observées avec un modèle théorique probabiliste. Un obstacle pratique à l'utilisation intensive des modèles probabilistes se trouve au niveau de la complexité et de la longueur des calculs qu'ils nécessitent. A cet égard, l'avènement des calculatrices à grande vitesse a été décisif en permettant de manier des modèles d'une richesse et d'une complexité toutes nouvelles : en particulier des modèles se prêtant mal à l'analyse par les techniques mathématiques traditionnelles comme le calcul différentiel et intégral. Non seulement les machines sont capables de calculer à partir des données les statistiques utiles, mais elles peuvent explorer les potentialités d'un modèle particulier en fournissant des « données artificielles » correspondant à des sujets idéaux dont le comportement obéit au modèle. Les machines sont de plus en plus utilisées dans cette technique de « simulation » qui a reçu dans le cas des modèles probabilistes, le nom pittoresque de « méthode de Monte-Carlo ».

LA CONFRONTATION STATISTIQUE

Poursuivant notre commentaire du schéma de la fig. 1, nous aborderons maintenant l'étape qui suit le développement du modèle et qui concerne la confrontation des prédictions théoriques du modèle avec les données expérimentales. Cette confrontation est le domaine de la statistique. Bien souvent, quand on parle de méthodes mathématiques en psychologie, c'est cette partie de la recherche qui vient à l'esprit et en fait, la recherche psychologique utilise constamment les développements modernes de la statistique c'est-à-dire la statistique dite «inductive», qui, comme l'écrit Fraisse (1956, p. 17), «n'est plus seulement un moyen de description» mais est «l'outil qui permet à l'expérimentateur de vérifier ses hypothèses». A première vue, la statistique utilisée pour la validation des modèles de psychologie mathématique devrait donc être «la même» que celle utilisée pour la validation des hypothèses de la psychologie expérimentale habituelle. Lorsqu'on regarde les choses de plus près, des difficultés apparaissent. La statistique inductive, on le sait, comprend deux catégories de problèmes : les problèmes d'épreuve de signification, ou épreuves d'hypothèses, et les problèmes d'estimation. La première catégorie est de très loin la plus courante en psychologie classique. Or, en psychologie mathématique, d'une part on est conduit à envisager le problème des épreuves d'hypothèses sous un angle assez nouveau, et d'autre part les méthodes d'estimation prennent beaucoup plus d'importance.

Nous envisagerons d'abord le problème des épreuves d'hypothèses. On procède à une telle épreuve lorsqu'on se donne - une hypothèse particulière : l'hypothèse nulle prise dans un ensemble d'hypothèses - une règle qui permet, au vu des données expérimentales, de conclure au «rejet» ou à l'«acceptation» de cette hypothèse nulle ; il est traditionnel d'ajouter que si une conclusion de rejet est «définitive», une conclusion d'acceptation ne saurait être que provisoire.

En fait, les épreuves d'hypothèses, telles qu'elles sont classiquement utilisées par les psychologues (emploi d'un «niveau de signification» α fixé une fois pour toutes) ne font pas jouer un rôle symétrique aux conclusions d'acceptation ou de rejet de l'hypothèse nulle ; c'est cette constatation que reflète l'assertion traditionnelle qui vient d'être rappelée. Il serait sans doute préférable d'insister sur le fait que l'emploi d'épreuves de niveau constant α conduit à favoriser ou défavoriser l'hypothèse nulle selon que le nombre d'observations est faible ou élevé (Reuchlin, 1962, p. 371). Cette dissymétrie statistique entre hypothèse nulle et hypothèses concurrentes n'est cependant pas trop gênante lorsque, cas fréquent en psychologie classique, elle correspond à une dissymétrie «psychologique» ; bien souvent, l'hypothèse nulle

correspond en effet non pas à l'expression d'une théorie psychologique, mais à la formulation précise que le phénomène étudié est «entièrement régi par le hasard». L'épreuve d'hypothèse est alors l'étape de la recherche où l'on fait «le départ entre le systématique et le fortuit» (*ibid.*, p. 368). Par exemple, si l'on veut montrer qu'une variable déterminée a une influence sur une certaine acquisition, on cherchera à rejeter l'hypothèse nulle qu'une différence constatée entre un groupe expérimental soumis à cette variable et un groupe de contrôle peut être attribuée uniquement à des fluctuations aléatoires. Dans ce cas, il est concevable - sinon strictement logique - que l'administration de la «preuve» (de l'existence d'un effet ayant une signification psychologique) soit «à la charge du chercheur»; celui-ci devra recueillir autant d'observations qu'il est nécessaire pour pouvoir affirmer que l'effet décelé est «significatif».

Si les épreuves d'hypothèses étaient toujours utilisées de cette façon, il n'y aurait pas trop de difficultés. Mais la situation est différente lorsque c'est l'hypothèse nulle qui correspond à la théorie psychologique dont le chercheur cherche à montrer la validité. Si l'on interprète alors un effet statistiquement «significatif» comme un rejet (et définitif) de la théorie, on est conduit avec la plupart des tests classiques à rejeter presque certainement la théorie, dès qu'on prend un nombre d'observations suffisamment grand. Ainsi, de deux expérimentateurs désireux d'éprouver une théorie, celui qui a le plus de chances d'accepter la théorie est, toutes choses égales d'ailleurs, celui qui prend le plus petit nombre de sujets. Ce phénomène constitue un véritable paradoxe. Il s'est présenté, en psychologie classique, chaque fois qu'on a cherché à décider entre deux théories à l'aide d'une expérience «cruciale» consistant à éprouver l'existence ou l'absence d'une différence systématique entre deux situations. En pareil cas, les épreuves statistiques habituelles sont d'interprétation très délicate : car les deux théories ne sont pas statistiquement sur un pied d'égalité. Si on prend peu de sujets, on risque de conclure en faveur de la théorie qui prédit l'absence de différence; si on prend beaucoup de sujets, on risque de conclure en faveur de l'autre théorie. Par exemple, dans l'expérience classique de Lashley et Wade, conduite avec six singes, les résultats semblaient donner raison à la théorie de l'apprentissage de discrimination discontinu; reprise par Warren et Brookshire sur vingt singes, la même expérience apparaît concluante en faveur de la théorie continuiste (Le Ny, 1961, p. 97).

Pour lever de telles difficultés, il faudrait revenir sur les notions d'acceptation et de rejet de l'hypothèse nulle. En effet, le chercheur pourra être prêt à accepter une hypothèse, même fausse dans l'absolu, pourvu que le désaccord avec les phénomènes ne soit pas trop grand.

Cette idée de «désaccord admissible», ou, si l'on préfère, de «niveau d'approximation» auquel on se place, est une notion souvent méconnue mais capitale, qu'il faudrait s'efforcer d'introduire dans les techniques statistiques. Dans ces conditions, on accepterait (provisoirement) une hypothèse si son niveau d'approximation était jugé convenable et on ne rejetterait cette hypothèse que si une nouvelle hypothèse rendait compte des données à un niveau d'approximation meilleur.

Ces problèmes, qui apparaissent déjà en psychologie classique, deviennent la règle en psychologie mathématique : en effet dans ce cas, lorsqu'on a construit un modèle mathématique, on cherche à vérifier qu'il est valide, c'est-à-dire qu'on cherche à accepter l'hypothèse nulle. Si l'on prend peu de sujets et qu'on ne puisse rejeter l'hypothèse nulle, on ne peut cependant pas sérieusement affirmer avoir prouvé la validité du modèle et d'autre part, si on prend beaucoup de sujets on risque de rejeter un modèle constituant pourtant une approximation raisonnable des phénomènes. Dans chaque application concrète, il faudrait donc essayer d'expliciter le niveau des exigences à avoir vis-à-vis d'un modèle mathématique. Les modèles, nous l'avons déjà dit, conduisent à des prédictions à la fois très nombreuses et très «fortes»; il est donc quasiment inévitable que certaines de ces prédictions ne se trouvent pas toujours confirmées. A cet égard, les modèles mathématiques peuvent apparaître comme désavantagés par rapport aux hypothèses formulées seulement de façon verbale dont le «niveau d'aspiration» est beaucoup moins élevé et qui ont donc beaucoup moins de chances d'être infirmées par les données. Il est important de garder présente à l'esprit cette disparité lorsqu'il s'agit d'apprécier les points faibles d'un modèle (cf. en particulier chap. V, *in fine*).

Soulignons, en passant, que cette «réfutabilité» des modèles est à nos yeux un de leurs mérites essentiels et notons dans le même ordre d'idées, qu'on ne peut pas, en manipulant les valeurs des paramètres, amener des données à s'ajuster convenablement aux prédictions théoriques de n'importe quel modèle (nous verrons au chap. VIII l'exemple de toute une famille de modèles qui ne peut rendre compte d'un ensemble de données) : la modification d'un modèle ne peut être faite à l'aveugle. Une bonne précaution méthodologique pour les recherches futures en psychologie mathématique consisterait à préciser à l'avance les caractéristiques des données dont le modèle proposé aurait à rendre compte ainsi qu'à fixer un «niveau d'approximation admissible». Ce niveau d'approximation précisé, on pourrait essayer, par exemple en cherchant à équilibrer les probabilités d'erreurs des deux espèces, d'en déduire l'effectif optimal de l'échantillon. Etant donné un niveau d'approximation, il est en effet nécessaire de prendre suffisamment de sujets pour détecter si le modèle n'est pas valable à ce niveau d'approximation,

et il est inutile d'en prendre trop, ce qui pourrait conduire à mettre en évidence un éventuel écart au modèle inférieur au niveau d'approximation choisi.

En signalant les difficultés d'interprétation des méthodes statistiques précédentes, nous n'avons pas l'intention de suggérer que la psychologie mathématique devrait se passer des méthodes statistiques. Bien au contraire, nous pensons que renoncer aux garanties scientifiques fournies par une utilisation raisonnable de la statistique signifierait un retour à un état d'esprit pré-scientifique. En fait, les développements considérables actuels de la psychologie mathématique devraient être accompagnés de développements comparables de la méthodologie statistique, or, il semble que celle-ci ait pris un certain retard. Les progrès les plus importants de la statistique de ces dernières années ont porté sur des domaines dont, à notre avis, il ne faut pas trop attendre en ce qui concerne le présent problème : nous mentionnerons rapidement le domaine de la « théorie des décisions statistiques » et celui de la statistique « néo-bayésienne ».

La théorie des décisions statistiques (Wald, 1950; Blackwell et Girshick, 1954) consiste en gros à envisager le comportement du statisticien comme un « jeu avec la nature ». Les différentes hypothèses sont les « états » de la nature, et le statisticien doit choisir entre plusieurs stratégies possibles.

Nous indiquerons les idées de base de la théorie à partir d'un exemple simple. Considérons une situation où deux hypothèses seulement sont possibles (H_0 et H_1). Le statisticien peut accepter soit H_0 soit H_1. La théorie de la décision considère chaque terme du choix comme une action ou « stratégie » caractérisée par ses « conséquences » dans l'une ou l'autre des hypothèses. Par exemple, accepter H_0 est considéré comme la stratégie S_0 :

S_0 : agir dans la situation comme si H_0 était vraie, et elle est caractérisée par deux conséquences :

C_{00} : conséquence de S_0 si H_0 est vraie,

C_{01} : conséquence de S_0 si H_1 est vraie.

On établit ainsi le tableau des stratégies et de leurs conséquences.

états de la nature ou hypothèses	stratégies S_0	S_1
H_0	C_{00}	C_{01}
H_1	C_{10}	C_{11}