

Die
beschreibende Geometrie,
die
geometrische Zeichenkunst
und
d i e P e r s p e c t i v e.

Von
J. Wolff.

Dritte verbesserte Auflage.

Mit 30 Kupfertafeln.

Berlin,
Druck und Verlag von G. Reimer.
1861.

I n h a l t.

Erster Abschnitt.

Die Projectionslehre	1
--------------------------------	---

Zweiter Abschnitt.

Die beschreibende Geometrie.

Einleitung	37
Erstes Kapitel.	
Die einfachen Constructionen	39
Zweites Kapitel.	
Vom Herabschlagen	57
Drittes Kapitel.	
Vom Projiciren und Zurückschlagen	65
Viertes Kapitel.	
Auflösung der Grundaufgaben der sphärischen Trigonometrie durch Construction. — Reduction schief liegender Winkel auf den Horizont	75
Fünftes Kapitel.	
Construction von Durchschnitsfiguren, welche entstehen, wenn ebene Körper durch Ebenen geschnitten werden, oder wenn ebene Körper einander schneiden	86
Sechstes Kapitel.	
Von einigen krummen Flächen	101
Siebentes Kapitel.	
Construction von Durchschnitspunkten und Durchschnitslinien bei krummen Flächen	127
Achtes Kapitel.	
Construction von Berührungsflächen und Normalen	168

Neuntes Kapitel.

- Von der cylindrischen und der conischen Spirale und von der
sphärischen Epicycloide 196

Zehntes Kapitel.

- Von den Spiralfächen 207

Dritter Abschnitt.**Die geometrische Zeichenkunst.****Erstes Kapitel.**

- Einleitendes und allgemeine Gesetze für die Beleuchtung und die
Construction der Schatten 251

Zweites Kapitel.

- Uebungsbeispiele für die Beleuchtung und die Construction der
Schatten bei parallelen Lichtstrahlen 270

Vierter Abschnitt.**Die Perspective.****Erstes Kapitel.**

- Einleitendes und Allgemeines 309

Zweites Kapitel.

- Vom Vertiefungspunkt 318

Drittes Kapitel.

- Die Constructionen aus der Grundebene 322

Viertes Kapitel.

- Perspectivische Theilung gerader Linien in der Grundebene . . . 330

Fünftes Kapitel.

- Hilfsconstructionen 333

Sechstes Kapitel.

- Gesetz der Höhen, und von der Perspective beliebiger Gegen-
stände, welche durch Grund- und Aufriß gegeben sind . . . 336

Siebentes Kapitel.

- Beispiele 341

Achtes Kapitel.

- Von der Perspective der Schatten 348

Neuntes Kapitel.

- Einfaches Verfahren zur Perspective von Gegenständen, welche
durch Grundriß und Aufriß gegeben sind. 351



Erster Abschnitt.

Die Projektionslehre.



§. 1.

Wir nehmen zwei unendliche, auf einander normal stehende Ebenen an, um gegen sie die Lage von Punkten und Raumgrößen zu bestimmen. Diese Ebenen nennen wir Projectionsebenen, ihre Durchschnittslinie die Achse. Die eine der Projectionsebenen bezeichnen wir durch P' , die andere durch P'' , die Achse durch P . Zuweilen ist noch eine dritte Projectionsebene nöthig; sie wird normal auf jeder von den beiden ersten gedacht, und wir bezeichnen sie durch P''' . In der Folge sind beständig zwei Projectionsebenen vorausgesetzt; der dritten werden wir besonders erwähnen, wenn sie erforderlich ist.

§. 2.

Wird durch einen Punkt eine Linie gedacht, welche normal steht auf einer Projectionsebene, so heißt der Punkt, in welchem die Projectionsebene und die Linie sich schneiden, die Projection jenes Punktes in dieser Projectionsebene.

Punkte bezeichnen wir hier durch Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets. Und ist ein Punkt durch a bezeichnet, so bezeichnen wir seine Projection in P' durch a' , seine Projection in P'' durch a'' , seine Projection in P''' durch a''' .

Fig. 1.

§. 3.

Die Ebene, welche durch einen Punkt a und durch seine Projectionen a' und a'' geht, ist normal auf jeder von den Projectionsebenen P' und P'' .

Sie ist normal auf P' , weil sie durch die Linie aa' geht, welche normal steht auf P' ; und sie ist normal auf P'' , weil sie durch die Linie aa'' geht, welche normal auf P'' ist.

§. 4.

Die Achse ist normal auf der Ebene, welche durch einen Punkt a geht und durch seine Projectionen a' und a'' .

Denn auf dieser Ebene ist jede der Projectionsebenen normal, mithin auch ihre Durchschnittslinie.

§. 5.

Wird von jedem der Punkte a' und a'' eine Normale auf die Achse gefällt, so treffen diese Normalen denselben Punkt a^0 der Achse.

Die Achse steht normal auf der Ebene $aa'a''$, also auch auf den Linien $a'a^0$ und $a''a^0$, in welchen jene Ebene von den Projectionsebenen geschnitten wird. Alle Linien, welche von a' ausgehen, und normal auf der Achse sind, fallen in einander, also in $a'a^0$; ebenso fallen alle Linien, welche von a'' ausgehen und normal stehen auf der Achse, in $a''a^0$. Darin liegt der Satz.

§. 6.

Die Linie $a'a^0$ steht normal auf der Projectionsebene P'' , und die Linie $a''a^0$ normal auf der Projectionsebene P' .

Die Projectionsebenen stehen normal auf einander; daher ist jede Linie, welche in der einen Projectionsebene liegt, und normal steht auf der Achse, normal auf der anderen Projectionsebene.

§. 7.

Das Viereck $aa'a^0a''$ ist ein Rechteck.

Die Linien aa' und $a''a^0$ stehen normal auf der Projectionsebene P' , die Linien aa'' und $a'a^0$ normal auf P'' ; daraus folgt, daß die gegenüberstehenden Seiten des Vierecks parallel sind, und seine Winkel rechte.

§. 8.

Den Punkt der Achse, in welchem sie von den Normalen getroffen wird, die von den Projectionen a' und a'' auf sie gedacht werden können, bezeichnen wir durch a^0 .

Die Linien aa' und aa'' nennen wir die projecirenden Linien, die Linien a^0a' und a^0a'' die Ordinaten, den Punkt a^0 den Anfangspunkt der Ordinaten des Punktes a .

§. 9.

Die projecirende Linie eines Punktes a , welche zu der einen Projectionsebene gehört, und die Ordinate desselben Punk-

tes a , welche in der anderen Projectionsebene liegt, sind einander gleich.

Denn diese Linien sind gegenüberstehende Seiten des Rechtecks $aa'a''$.

§. 10.

Die projectirende Linie aa' ist parallel mit der Projectionsebene P'' , die projectirende Linie aa'' parallel mit der Projectionsebene P' .

Denn die projectirende Linie aa'' ist parallel mit der Linie $a''a^0$ in der Projectionsebene P'' , und die projectirende Linie aa' ist parallel mit der Linie $a'a^0$ in der Projectionsebene P' .

§. 11.

1) Ist der Punkt a^0 gegeben, so ist dadurch eine Ebene gegeben, in welcher der Punkt a sich befindet.

Denn der Punkt a liegt in der Ebene, welche in dem Punkte a^0 normal steht auf der Achse.

2) Ist eine von den Ordinaten a^0a' oder a^0a'' eines Punktes a gegeben, so ist dadurch eine Linie gegeben, in welcher der Punkt a sich befindet.

Denn der Punkt a liegt in der Linie, welche in a' normal steht auf P' , oder in a'' auf P'' .

3) Sind beide Ordinaten a^0a' und a^0a'' eines Punktes a gegeben, so ist dadurch der Punkt a selbst bestimmt.

Die Ebene $a'a^0a''$ ist normal auf jeder von den Projectionsebenen; deshalb fallen die Linien, welche in a' und a'' beziehlich auf P' und P'' normal stehen, in jene Ebene. Die Linien schneiden sich, und weil der Punkt a in jeder von ihnen liegt, so ist es ihr Durchschnittspunkt.

§. 12.

Liegt ein Punkt in der einen Projectionsebene, so fällt seine Projection in dieser Projectionsebene mit ihm zusammen, die projectirende Linie, welche zur anderen Projectionsebene gehört, fällt in die erste Projectionsebene, und seine Projection in der anderen Projectionsebene befindet sich in der Achse; liegt ein Punkt in der Achse, so fallen seine beiden Projectionen mit ihm zusammen. Umgekehrt: befindet sich in der einen Projectionsebene die Projection eines Punktes in der Achse, so liegt der Punkt in der

anderen Projectionsebene; liegen beide Projectionen eines Punktes in der Achse, so befindet sich der Punkt selbst in der Achse.

§. 13.

Die Linien, in welchen eine Ebene die Projectionsebenen schneidet, nennen wir die Schnitte der Ebene.

§. 14.

Die Schnitte einer Ebene sind entweder beide parallel mit der Achse, oder es schneiden beide die Achse, und zwar in demselben Punkt, oder sie fallen beide mit der Achse zusammen.

Denn wenn drei Ebenen sich schneiden, so fallen entweder die drei Durchschnittslinien in einander, oder sie schneiden sich sämmtlich in einem Punkt, oder es sind je zwei von ihnen parallel.

§. 15.

Eine Ebene bezeichnen wir hier durch einen Buchstab des großen lateinischen Alphabets. Ist eine Ebene durch A bezeichnet, so bezeichnen wir ihren Schnitt in P' durch A', ihren Schnitt in P'' durch A'', ihren Schnitt in P''' durch A'''. Und schneiden die Schnitte einer Ebene A die Achse, so bezeichnen wir den Punkt, in welchem das geschieht, durch A°.

§. 16.

1) Die Lage einer Ebene ist durch ihre Schnitte bestimmt, wenn dieselben parallel mit der Achse sind oder sie schneiden.

Denn man hat alsdann zwei parallele oder zwei sich schneidende Linien, durch welche die Ebene geht.

2) Die Lage einer Ebene ist durch ihre Schnitte nicht bestimmt, wenn sie mit der Achse zusammenfallen.

Denn alsdann ist nur eine Linie gegeben, durch welche die Ebene geht.

3) Fallen die Schnitte einer Ebene in die Achse, und ist noch ihr Schnitt in der dritten Projectionsebene gegeben, so ist die Lage der Ebene bestimmt.

Denn man kennt alsdann zwei sich schneidende Linien, durch welche die Ebene geht.

§. 17.

1) Steht eine Ebene normal auf der einen Projectionsebene, und schneidet sie die andere, so ist ihr Schnitt in der anderen Projectionsebene normal auf der Achse.

Die Ebene und die andere Projectionsebene stehen normal auf der ersten Projectionsebene, deshalb ist ihre Durchschnittslinie, d. h. der Schnitt in der anderen Projectionsebene, normal auf der ersten Projectionsebene, somit normal auf der Achse in ihr.

2) Ist ein Schnitt einer Ebene normal auf der Achse, so schneidet die Ebene die andere Projectionsebene und steht auf derselben normal.

Dieser Schnitt ist normal auf der anderen Projectionsebene, deshalb schneidet die Ebene, welche durch ihn geht, die andere Projectionsebene, und steht normal auf derselben.

3) Steht eine Ebene normal auf beiden Projectionsebenen oder, was dasselbe sagt, normal auf der Achse, so sind ihre beiden Schnitte normal auf der Achse.

Folgt aus 1).

4) Sind beide Schnitte einer Ebene normal auf der Achse, so ist die Ebene normal auf jeder der Projectionsebenen und auf der Achse.

Aus 2).

5) Ist eine Ebene parallel mit einer Projectionsebene, so ist ihr Schnitt in der anderen Projectionsebene parallel mit der Achse.

Denn die Ebene und die mit ihr parallele Projectionsebene werden von der anderen Projectionsebene in parallelen Linien geschnitten.

6) Ist ein Schnitt einer Ebene parallel mit der Achse, und steht die Ebene normal auf der Projectionsebene, so ist sie mit der anderen Projectionsebene parallel.

Denn die Ebene und die andere Projectionsebene stehen dann in parallelen Linien normal auf der ersteren Projectionsebene.

7) Steht eine Ebene schief auf der einen Projectionsebene, und schneidet sie die Achse, so ist ihr Schnitt in der anderen Projectionsebene schief auf der Achse.

Der Schnitt in der ersteren Projectionsebene schneidet die Achse. Daher schneidet auch der Schnitt in der anderen Projectionsebene die Achse. Dieser Schnitt steht schief auf der Achse; denn wollte man annehmen, er sei normal auf ihr, so müßte die Ebene auf der ersteren Projectionsebene normal stehen.

8) Steht ein Schnitt einer Ebene schief auf der Achse, so

schneidet die Ebene die andere Projectionsebene und steht schief auf derselben.

Daß die Ebene die andere Projectionsebene schneidet, erhellt leicht; daß sie auf ihr schief steht, folgt indirect aus 1).

9) Steht eine Ebene normal auf der einen Projectionsebene und schief auf der anderen, so ist ihr Schnitt in der ersteren Projectionsebene schief auf der Achse, der in der anderen auf der Achse normal.

Aus 7) und 1).

10) Steht der eine Schnitt einer Ebene schief auf der Achse, der andere normal, so steht die Ebene normal auf der ersteren Projectionsebene und schief auf der anderen.

Aus 2) und 8).

11) Steht eine Ebene schief auf beiden Projectionsebenen und schneidet sie die Achse, so sind ihre beiden Schnitte schief auf der Achse; ist aber die Ebene parallel mit der Achse, so sind beide Schnitte mit der Achse parallel.

Das Erstere folgt aus 7), das Andere indirect.

12) Stehen beide Schnitte einer Ebene schief auf der Achse, oder sind beide mit der Achse parallel, so steht die Ebene schief auf beiden Projectionsebenen, schneidet im erstern Fall die Achse, und ist im andern mit ihr parallel.

Das Erstere folgt aus 8), das Andere indirect.

§. 18.

Die Projectionen einer geraden Linie werden gebildet durch die Projectionen ihrer sämtlichen Punkte.

§. 19.

1) Steht eine gerade Linie normal auf einer Projectionsebene, so ist ihre Projection in dieser Projectionsebene ein Punkt. Er fällt mit dem Punkt zusammen, in welchem die Linie die Projectionsebene schneidet.

Denn die projicirenden Linien sämtlicher Punkte der Linie fallen in die Linie selbst.

2) Ist die Projection einer geraden Linie ein Punkt, so steht die Linie normal auf der Projectionsebene.

Denn die projicirenden Linien sämtlicher Punkte der Linie

und diese Punkte selbst fallen alsdann in die Linie, welche in jenem Punkt auf der Projectionsebene normal steht.

3) Steht eine gerade Linie schief auf einer Projectionsebene, oder ist sie parallel mit einer Projectionsebene, so ist ihre Projection in dieser Projectionsebene eine gerade Linie.

Die projicirenden Linien sämmtlicher Punkte der Linie werden aufgenommen von der Ebene, welche, durch die Linie gehend, normal auf der Projectionsebene gedacht werden kann. Der Schnitt dieser Ebene ist sonach die Projection der Linie.

4) Ist die Projection einer geraden Linie eine gerade Linie, so steht die Linie nicht normal auf der Projectionsebene.

Indirect aus 1).

§. 20.

Wenn eine Linie auf einer Projectionsebene schief steht oder mit ihr parallel ist, und es wird durch die Linie eine Ebene gedacht, welche normal steht auf der Projectionsebene, so heißt diese Ebene die projicirende Ebene der Linie zu dieser Projectionsebene.

Die projicirende Ebene enthält die projicirenden Linien sämmtlicher Punkte der Linie. Die Linie, in welcher die projicirende Ebene und die Projectionsebene sich schneiden, ist daher die Projection der Linie in dieser Projectionsebene.

Die Projection einer geraden Linie, welche auf einer Projectionsebene schief steht oder mit ihr parallel ist, kann auch dadurch erhalten werden, daß man die Projectionen zweier ihrer Punkte construirt, und durch diese Projectionen eine gerade Linie legt. Und wenn man durch die Projectionen zweier Punkte a und b in jeder Projectionsebene eine gerade Linie construirt, so sind die Linien $a'b'$ und $a''b''$ die Projectionen der geraden Linie, welche durch die Punkte a und b sich denken läßt.

Ist eine Linie durch ab bezeichnet, so bezeichnen wir ihre Projection auf P' durch $a'b'$, ihre Projection auf P'' durch $a''b''$, ihre Projection auf P''' durch $a'''b'''$, ihre projicirende Ebene zu P' durch abP' , ihre projicirende Ebene zu P'' durch abP'' , die zu P''' durch abP''' .

Fig. 2.

§. 21.

1) Liegt eine Linie in der einen Projectionsebene, so fällt ihre Projection in dieser Projectionsebene mit ihr zusammen, und ihre Projection in der anderen Projectionsebene liegt in der Achse; und umgekehrt.

2) Liegt eine Linie in der Achse, so liegen auch ihre Projectionen in der Achse; und umgekehrt.

3) Ist eine Linie parallel mit einer Projectionsebene, so ist ihre Projection in der anderen Projectionsebene parallel mit der Achse, und die projicirende Ebene zur anderen Projectionsebene ist parallel mit der ersteren Projectionsebene.

Denn ist eine Linie ab parallel mit P' , so ist $aa' = bb'$, also $a''a^0 = b''b^0$, mithin die Projection $a''b''$ parallel der Achse. Nun werden die projicirende Ebene abP'' und die Projectionsebene P' von der Projectionsebene P'' in parallelen Linien geschnitten (nämlich in $a''b''$ und der Achse), und unter gleichen Winkeln (nämlich rechten); daher sind die projicirende Ebene abP'' und die Projectionsebene P' parallel.

Eben so läßt sich der Satz erweisen, wenn ab parallel mit P'' angenommen wird. Es ist aber niemals erforderlich, einen Beweis für den Fall zu wiederholen, daß man die Projectionsebenen vertauscht, weil sie einerlei Beziehung zu einander haben.

Ist übrigens eine Linie parallel mit einer Projectionsebene, so ist sie es auch mit ihrer Projection in derselben.

4) Ist eine Projection einer Linie parallel mit der Achse, so ist die Linie parallel mit der anderen Projectionsebene, und auch die projicirende Ebene, welche zu jener Projection gehört.

Ist die Projection $a''b''$ parallel mit der Achse, so sind die projicirende Ebene abP'' und die Projectionsebene P' parallel, weil beide von der Projectionsebene P'' alsdann in parallelen Linien und unter gleichen Winkeln geschnitten werden. Ist aber abP'' parallel mit P' , so ist auch die in abP'' liegende Linie ab parallel mit der Projectionsebene P' .

5) Ist eine Linie parallel mit jeder von den Projectionsebenen, so sind ihre beiden Projectionen mit der Axe parallel,

und jede ihrer projicirenden Ebenen ist parallel mit der Projectionsebene, zu welcher sie nicht gehört.

Folgt aus 3).

Hierbei ist die Linie parallel mit der Achse.

6) Sind beide Projectionen einer Linie parallel mit der Achse, so ist die Linie selbst mit der Achse parallel, also auch mit jeder Projectionsebene.

Da die Projection $a'b'$ parallel ist mit der Achse, so sind die projicirende Ebene abP' und die Projectionsebene P'' parallel. Die genannten Ebenen werden also von der projicirenden Ebene abP'' in parallelen Linien geschnitten, und diese Linien sind ab und $a''b''$. Und weil nun ab und $a''b''$ parallel sind, auch wegen der Voraussetzung die Achse und $a''b''$, so folgt, daß ab parallel ist mit der Achse.

7) Schneidet eine Linie eine der Projectionsebenen, so wird diese Projectionsebene von der projicirenden Ebene geschnitten, welche zur anderen Projectionsebene gehört, und die Linie, in welcher das geschieht, steht normal auf der Achse.

Geom. II §. 18. 2), und §. 17. 1) des vorliegenden Buches.

Die auf der Achse normal stehende Linie, in welcher eine projicirende Ebene die Projectionsebene schneidet, zu der sie nicht gehört, nennen wir den Normalschnitt jener projicirenden Ebene oder den Normalschnitt in dieser Projectionsebene.

Man wird wohl thun, Folgendes zu beachten: Wenn eine projicirende Ebene einer Linie beide Projectionsebenen schneidet, so ist ihr Schnitt in der Projectionsebene, zu welcher sie gehört, die Projection jener Linie in dieser Projectionsebene, ihr Schnitt in der anderen Projectionsebene der Normalschnitt jener projicirenden Ebene oder der Normalschnitt in der anderen Projectionsebene; und wenn eine Projectionsebene von beiden projicirenden Ebenen einer Linie geschnitten wird, so geschieht das von der zu ihr gehörenden projicirenden Ebene in der Projection, von der anderen im Normalschnitt.

8) Durch den Durchschnittspunkt einer Linie mit einer Projectionsebene gehen jedesmal die Projection und der Normalschnitt in dieser Projectionsebene.

Geom. II. §. 18. 2).

9) Schneiden sich die Projection einer Linie und der Normalschnitt in einer Projectionsebene, so schneidet die Linie selbst die Projectionsebene in dem Durchschnittspunkt der genannten Linien.

Der Durchschnittspunkt der Projection und des Normalschnitts befindet sich in jeder der beiden projicirenden Ebenen, ist also ein Punkt ihrer Durchschnittslinie, d. h. der Linie selbst. Darin liegt, daß die Linie durch jenen Punkt geht. Und sie schneidet die Projectionsebene in ihm; denn fiele die Linie mit der Projectionsebene zusammen, so fiele auch ihre projicirende Ebene, welche zur anderen Projectionsebene gehört, mit der ersten Projectionsebene zusammen, und dann fände in derselben kein Normalschnitt Statt.

10) Schneidet eine Linie eine der Projectionsebenen, so schneidet ihre Projection in der anderen Projectionsebene die Achse, und der Punkt, in welchem dies geschieht, ist die Projection des Durchschnittspunktes der Linie und der Projectionsebene.

Durch den Durchschnittspunkt der Linie mit der Projectionsebene geht der Normalschnitt in dieser Projectionsebene, der Normalschnitt und die Projection in der anderen Projectionsebene treffen die Achse in demselben Punkt, und die Projection in der anderen Projectionsebene kann dabei nicht mit der Achse zusammenfallen, nach 1), daher schneidet diese Projection die Achse. Der Normalschnitt ist die projicirende Linie des Durchschnittspunktes zur anderen Projectionsebene; daraus erhellet der zweite Theil des Satzes.

11) Schneidet eine Projection einer Linie die Achse, so schneidet die Linie die andere Projectionsebene.

Denn schneide die Linie die andere Projectionsebene nicht, so müßte jene Projection entweder parallel mit der Achse sein oder in ihr liegen.

12) Steht eine Linie normal auf einer Projectionsebene, so ist ihre Projection in der anderen Projectionsebene normal auf der Achse.

Die projicirende Ebene, welche zur anderen Projectionsebene gehört, ist normal auf der ersten Projectionsebene; denn sie geht durch die Linie, welche normal auf der ersten Projectionsebene steht. Diese projicirende Ebene und die andere Projectionsebene

sind also auf der ersten Projectionsebene normal, daher ist auch ihre Durchschnittslinie, welches die Projection ist, auf der ersten Projectionsebene normal und normal auf der Achse.

13) Hat eine Linie, welche nicht auf einer von den Projectionsebenen normal steht, eine solche Lage, daß durch sie eine Ebene gedacht werden kann, welche normal ist auf der Achse, so stehen ihre beiden Projectionen auf der Achse normal und treffen denselben Punkt der Achse.

Die Durchschnittslinien jener Ebene mit den Projectionsebenen stehen, wie leicht erhellet, normal auf der Achse, und die Ebene selbst ist normal auf jeder von den Projectionsebenen. Die projicirenden Ebenen fallen daher mit jener Ebene zusammen, und die Projectionen mit jenen Durchschnittslinien.

Ueberhaupt also, läßt sich durch eine Linie eine Ebene denken, welche normal steht auf der Achse, so ist entweder die eine Projection ein Punkt, und die andere steht normal auf der Achse, oder beide Projectionen stehen normal auf der Achse und treffen denselben Punkt der Achse. Zugleich erhellet, daß die Normal-schnitte die Projectionen in sich aufnehmen.

14) Ist eine Projection einer Linie normal auf der Achse, so kann durch die Linie eine Ebene gedacht werden, welche normal auf der Achse steht.

Ist die Projection normal auf der Achse, so ist sie normal auf der anderen Projectionsebene; daher ist die projicirende Ebene, welche zu der Projection gehört, normal auf der anderen Projectionsebene. Auf dieser projicirenden Ebene sind demnach beide Projectionsebenen normal, und dann ist auch ihre Durchschnittslinie, d. h. die Achse, auf derselben normal. In der projicirenden Ebene liegt aber die Linie. Also giebt es eine Ebene, welche durch die Linie geht und normal steht auf der Achse.

Man bemerke für die Folge, daß eine Ebene normal steht auf der Achse, sobald sie auf einer Projectionsebene normal steht in einer Linie, welche mit der Achse rechte Winkel bildet.

15) Hat eine Linie eine solche Lage, daß durch sie keine Ebene gelegt werden kann, welche normal steht auf der Achse, so ist keine von ihren Projectionen auf der Achse normal.

Folgt indirect aus 14).

16) Ist eine Projection einer Linie nicht normal auf der Achse, so läßt sich durch die Linie keine Ebene legen, welche normal auf der Achse steht.

Die Linie ist entweder auf der anderen Projectionsebene normal oder nicht. Nimmt man nun an, es wäre durch sie eine Ebene möglich, welche normal steht auf der Achse, so stößt man auf einen Widerspruch, im erstern Fall gegen 12); im andern gegen 13).

Steht also die eine Projection einer Linie schief auf der Achse, so ist die andere Projection entweder schief auf der Achse oder parallel mit ihr; eben so, wenn die eine Projection mit der Achse parallel ist.

§. 22.

Der Punkt, in welchem eine Linie eine Projectionsebene schneidet, heiße der Durchgang der Linie in dieser Projectionsebene, das Stück des Normalschnitts, welches zwischen dem Durchgang und der Achse liegt, die Durchgangsordinate.

Ist eine Linie durch ab bezeichnet, so bezeichnen wir ihren Durchgang in P' mit a' , ihren Durchgang in P'' mit b'' ; (den im Alphabet vorangehenden Buchstab setzen wir in P'). Den Punkt, in welchem die Achse von der Durchgangsordinate des Punktes a' getroffen wird, bezeichnen wir durch a'' ; den Punkt, in welchem die zu b'' gehörende Durchgangsordinate die Achse trifft, durch b' . Der Punkt a'' ist die Projection des in P' liegenden Punktes a' auf P'' , eben so ist b' die Projection des in P'' liegenden Punktes b'' auf P' . Bei dieser Bezeichnung erhalten wir in den Linien $a'b'$ und $a''b''$ die Projectionen desjenigen Stücks der Linie ab , welches die Durchgänge begrenzen.

§. 23.

1) Die Lage einer geraden Linie ist gegeben, sobald die Projectionen von zweien ihrer Punkte gegeben sind.

Denn dadurch sind die Punkte gegeben, also auch die Linie, welche durch sie geht.

2) Die Lage einer geraden Linie, welche auf einer Projectionsebene normal steht, ist gegeben durch den Punkt, welcher ihre Projection auf jener Projectionsebene ausmacht.

Denn sie fällt mit der Linie zusammen, welche in diesem Punkt auf der Projectionsebene normal steht.

3) Eine gerade Linie, welche eine solche Lage hat, daß durch sie keine Ebene gedacht werden kann, welche auf der Achse normal steht, ist durch ihre Projectionen gegeben.

Die projecirenden Ebenen der Linie schneiden sich; denn fielen sie in einander, so müßte jede von ihnen auf beiden Projectionsebenen normal stehen, also auch auf der Achse, und die Linie hätte alsdann eine solche Lage, daß durch sie eine Ebene gedacht werden könnte, welche auf der Achse normal steht. Die Linie liegt in jeder von ihren projecirenden Ebenen. Sie ist deshalb deren Durchschnittslinie.

4) Steht eine Linie nicht normal auf einer Projectionsebene, hat sie aber eine solche Lage, daß sich durch sie eine Ebene denken läßt, welche auf der Achse normal steht, so ist die Linie durch ihre Projectionen nicht gegeben.

Denn die projecirenden Ebenen der Linie fallen in einander, nämlich beide in jene auf der Achse normal stehende Ebene, gewähren daher keine Durchschnittslinie. Der Satz erhellt auch daraus, daß die Projectionen aller Linien zusammenfallen, welche in jener auf der Achse normal stehenden Ebene sich denken lassen.

§. 24.

1) Liegt ein Punkt in einer Linie, so befinden sich seine Projectionen in den Projectionen der Linie.

Denn die projecirenden Linien des Punktes fallen in die projecirenden Ebenen der Linie; und wenn die Linie normal steht auf einer Projectionsebene, so fällt die projecirende Linie des Punktes, welche zu dieser Projectionsebene gehört, in die Linie selbst.

2) Befinden sich die Projectionen eines Punktes in den Projectionen einer Linie, und hat die Linie eine solche Lage, daß durch sie keine Ebene gedacht werden kann, welche auf der Achse normal steht, so liegt der Punkt in der Linie.

Die projecirenden Ebenen der Linie schneiden sich. Die projecirenden Linien des Punktes fallen in die projecirenden Ebenen und schneiden sich in deren Durchschnittslinie. Diese ist

aber die Linie selbst, und der Durchschnittspunkt der projecirenden Linien ist jener Punkt.

3) Liegen die Projectionen eines Punktes in den Projectionen einer Linie, und steht die Linie normal auf einer Projectionsebene, so befindet sich der Punkt in der Linie.

Die projecirende Linie des Punktes, welche zu der Projectionsebene gehört, auf der die Linie normal steht, fällt mit der Linie zusammen. Daher liegt der Punkt zunächst in der Richtung der Linie. Und er befindet sich in der Linie selbst, weil sie von der andern projecirenden Linie geschnitten wird.

4) Liegen die Projectionen eines Punktes in den Projectionen einer Linie, und hat die Linie eine solche Lage, daß durch sie eine Ebene gedacht werden kann, welche normal auf der Achse steht, ohne daß die Linie dabei normal auf einer Projectionsebene wäre, so befindet sich der Punkt nicht nothwendig in der Linie.

Denn die Projectionen eines jeden Punktes, welcher in je-
ner auf der Achse normal stehenden Ebene sich befindet, fallen in die Richtungen von den Projectionen der Linie.

§. 25.

Hat eine Linie ab eine solche Lage, daß durch sie eine Ebene E gedacht werden kann, welche normal steht auf der Achse, und steht die Linie nicht normal auf einer von den Projectionsebenen P' und P'' , so läßt sich durch die Linie keine Ebene denken, welche normal steht auf den Projectionsebenen P' und P''' , oder auf den Projectionsebenen P'' und P''' .

Die Ebenen P''' und E sind parallel. Eine Ebene H , welche durch die Linie ab geht und normal stände auf den Projectionsebenen P' und P''' (oder P'' und P'''), müßte daher, weil sie P''' schneide, auch die mit P''' parallele Ebene E schneiden. Dann wären die beiden sich schneidenden Ebenen E und H normal auf der Projectionsebene P' (oder P''), und deshalb würde auch ihre Durchschnittslinie, welche ab ist, normal auf dieser Projectionsebene stehen. Das wäre aber ein Widerspruch gegen die Voraussetzung.

§. 26.

Liegen die Projectionen eines Punktes in den Projectionen einer Linie, und hat die Linie eine solche Lage, daß durch sie

eine Ebene gedacht werden kann, welche auf der Achse normal steht, ohne daß dabei die Linie normal ist auf einer von den Projectionsebenen, so liegt der Punkt in der Linie, wenn noch die dritte Projection des Punktes in der dritten Projection der Linie sich befindet.

Dies ergiebt sich aus dem vorigen Paragraph und aus §. 24. 2). Was nämlich für die Projectionsebenen P' und P'' gilt, behält auch für die Projectionsebenen P' und P''' oder P'' und P''' Giltigkeit.

§. 27.

1) Befinden sich beliebig viele Punkte in einer Ebene, welche auf einer Projectionsebene normal steht, so liegen in dieser Projectionsebene die Projectionen der Punkte in einer geraden Linie, und zwar in dem Schnitt der Ebene.

Denn die projecirenden Linien der Punkte fallen in die Ebene.

2) Liegen in einer Projectionsebene die Projectionen mehrerer Punkte in einer geraden Linie, so werden diese Punkte sämmtlich aufgenommen von der Ebene, welche durch jene Linie geht und auf der Projectionsebene normal steht.

Denn in diese Ebene fallen die projecirenden Linien der Punkte.

3) Liegen beliebig viele Punkte in einer Ebene, welche auf der Achse normal steht, so befinden sich in jeder Projectionsebene die Projectionen der Punkte in einer geraden Linie, und diese Linien stehen normal auf der Achse, die eine mit der anderen in demselben Punkt.

Die Linien, in welchen jene Ebene die Projectionsebenen schneidet, stehen in demselben Punkt normal auf der Achse, und die Ebene ist normal auf jeder von den Projectionsebenen. Die projecirenden Linien der Punkte fallen demnach in die Ebene und ihre Projectionen in jene Linien.

4) Liegen in einer Projectionsebene die Projectionen mehrerer Punkte in einer geraden Linie, und steht diese normal auf der Achse, so befinden sich jene Punkte in der Ebene, welche durch die Linie geht und auf der Achse normal steht.

Nach 2) befinden sich die Punkte in der Ebene, welche durch jene Linie geht und normal steht auf der Projectionsebene. Jene Ebene ist aber auf der Achse normal, [§. 21. 14)].

5) Liegen drei Punkte nicht in einer geraden Linie, und steht die Ebene, welche durch sie geht, nicht normal auf einer Projectionsebene, so befinden sich in dieser Projectionsebene die Projectionen jener Punkte nicht in einer geraden Linie.

Denn befänden sich die Projectionen in einer geraden Linie, so müßte nach 2) die Ebene, welche durch die Punkte geht, auf der Projectionsebene normal stehen.

6) Befinden sich in einer Projectionsebene die Projectionen dreier Punkte nicht in einer geraden Linie, so liegen die Punkte selbst nicht in einer geraden Linie, und die Ebene, welche durch sie geht, ist nicht normal auf dieser Projectionsebene.

Denn wollte man annehmen, es lägen die Punkte in einer geraden Linie, oder es stände die Ebene, welche durch sie geht, normal auf der Projectionsebene, so müßten sich die Projectionen der Punkte in einer geraden Linie befinden.

§. 28.

1) Liegen zwei Linien in einander, so liegen in jeder Projectionsebene ihre Projectionen in einander.

Denn ihre projecirenden Ebenen, welche zu einer Projectionsebene gehören, fallen zusammen.

2) Liegen zwei Linien in einer Ebene, welche auf einer Projectionsebene normal steht, so fallen in dieser Projectionsebene die Projectionen der Linien in eine gerade Linie, und zwar in die Durchschnittslinie jener Ebene mit der Projectionsebene.

Denn die projecirenden Ebenen der Linien, welche zu dieser Projectionsebene gehören, fallen in jene Ebene.

3) Liegen in einer Projectionsebene die Projectionen zweier Linien in einer geraden Linie, so befinden sich die Linien in der Ebene, welche durch jene Linie geht und normal steht auf der Projectionsebene.

Denn in jener Ebene befinden sich sämtliche Punkte der Linien nach §. 27. 2).

4) Befinden sich zwei Linien in einer Ebene, welche normal steht auf der Achse, so fallen in jeder Projectionsebene die Projectionen der Linien in eine gerade Linie, und diese Linien stehen normal auf der Achse, die eine mit der anderen in demselben Punkt.

Folgt aus §. 27. 3), indem man den Satz auf sämtliche Punkte der Linien anwendet.

5) Liegen in einer Projectionsebene die Projectionen zweier Linien in einer geraden Linie, welche auf der Achse normal steht, so befinden sich beide Linien in der Ebene, welche durch jene Linie geht und normal steht auf der Achse.

Aus §. 27. 4).

6) Befinden sich in jeder der Projectionsebenen die Projectionen zweier Linien in einer geraden Linie, und stehen die Projectionen nicht normal auf der Achse, so liegen die Linien in einander.

Die projecirenden Ebenen jeder von den Linien schneiden sich; und die projecirenden Ebenen der einen Linie fallen mit denen der anderen zusammen. In der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie der projecirenden Ebenen finden sich daher beide Linien.

7) Liegen in jeder der Projectionsebenen die Projectionen zweier Linien in einander, und stehen die Projectionen normal auf der Achse, so liegen die Linien nicht nothwendig in einander. Sie fallen aber zusammen, wenn auch ihre Projectionen in der dritten Projectionsebene in einer geraden Linie sich befinden.

Die Linien liegen zunächst nicht nothwendig in einander, weil ihre Lage nicht bestimmt ist. Fallen aber noch ihre Projectionen in der dritten Projectionsebene zusammen, so liegen sie in einander wegen 6).

8) Sind zwei Linien parallel, und steht die Ebene, welche durch sie gelegt werden kann, nicht normal auf einer Projectionsebene, so sind in dieser Projectionsebene die Projectionen der Linien parallel.

Denn nach §. 27. 5) liegt nicht die Projection irgend eines Punktes der einen Linie in der Projection der anderen Linie.

9) Sind zwei Linien parallel, und steht ihre Ebene normal auf der einen Projectionsebene, aber nicht auf der anderen, so fallen die Projectionen in der ersten Projectionsebene in einander, und die in der anderen sind parallel.

Aus 2) und 8).

10) Sind die Projectionen zweier Linien in der einen Projectionsebene parallel, und liegen die in der anderen in einander,

so sind die Linien parallel, und ihre Ebene steht normal auf der anderen Projectionsebene, aber nicht auf der ersteren.

Die Projectionen stehen nicht normal auf der Achse; denn sonst müßten, da die einen in einander liegen, auch die anderen zusammenfallen. Die projicirenden Ebenen jeder Linie schneiden sich demnach. Die projicirenden Ebenen, welche zur ersteren Projectionsebene gehören, sind parallel, denn sie stehen in parallelen Linien normal auf dieser Projectionsebene; die projicirenden Ebenen der anderen Projectionsebene fallen in einander. Die ersteren projicirenden Ebenen werden demnach von den anderen in zwei parallelen Linien geschnitten, und diese sind die Linien unseres Satzes. Die Ebene, welche durch die Linien geht, ist normal auf der anderen Projectionsebene nach 3), und sie ist nicht normal auf der ersten, weil sonst in dieser die Projectionen zusammen fielen.

11) Sind zwei Linien parallel, und steht ihre Ebene nicht normal auf einer von den Projectionsebenen, so sind in jeder derselben die Projectionen der Linien parallel.

Aus 8).

12) Sind die Projectionen zweier Linien in jeder Projectionsebene parallel, und stehen sie nicht normal auf der Achse, so sind die Linien parallel, und ihre Ebene steht nicht normal auf einer der Projectionsebenen.

Die projicirenden Ebenen, welche zu je einer Projectionsebene gehören, sind parallel; und die projicirenden Ebenen der einen Projectionsebene schneiden die der anderen. Dies geschieht in vier Linien, von welchen je zwei parallel sind, und unter ihnen befinden sich die Linien.

13) Sind die Projectionen zweier Linien in jeder Projectionsebene parallel, und stehen sie normal auf der Achse, so sind die Linien nicht nothwendig parallel. Sie sind indeß parallel, wenn ihre Projectionen in der dritten Projectionsebene parallel sind oder in einander fallen.

Die Linien sind zunächst nicht nothwendig parallel, weil ihre Lage unbestimmt bleibt. Das Uebrige folgt aus 12) und 10).

14) Schneiden sich zwei Linien, und steht ihre Ebene nicht normal auf einer Projectionsebene, so schneiden sich die Projectionen der Linien in dieser Projectionsebene.

Wir wollen die Linien durch ab und cd bezeichnen, ihren Durchschnittspunkt mit n ; die Projectionsebene sei P' . Nach §. 24. 1) liegt n' in $a'b'$ und zugleich in $c'd'$, so daß die Projectionen $a'b'$ und $c'd'$ den Punkt n' gemeinschaftlich haben. Es sei q irgend ein anderer Punkt der Linie cd . Da q nicht in ab liegt, so wird nach §. 27. 5) auch q' nicht in $a'b'$ liegen. Die Projectionen $a'b'$ und $c'd'$ haben deshalb außer dem Punkt n' keinen Punkt gemeinschaftlich, und dann schneiden sie sich. (Daß die Projectionen nicht in einander fallen, folgt auch leicht indirect.)

15) Schneiden sich zwei Linien, und steht ihre Ebene normal auf der einen Projectionsebene, aber nicht auf der anderen, so fallen ihre Projectionen in der ersten Projectionsebene zusammen, die in der anderen schneiden sich.

Aus 2) und 14).

16) Schneiden sich die Projectionen zweier Linien in der einen Projectionsebene, und liegen die in der anderen in einander, so schneiden sich die Linien, und ihre Ebene steht normal auf der anderen Projectionsebene, aber nicht auf der ersteren.

Daß die Linien sich in einer Ebene befinden und dieselbe normal steht auf der anderen Projectionsebene, erhellet aus 3). Diese Ebene ist nicht normal auf der ersteren Projectionsebene, denn sonst müßten in derselben die Projectionen der Linien zusammenfallen. Die Linien schneiden sich endlich; denn wollte man annehmen, sie wären parallel oder lägen in einander, so würden auch ihre Projectionen parallel sein nach 11), oder in einander liegen.

17) Schneiden sich zwei Linien, und steht ihre Ebene nicht normal auf einer der Projectionsebenen, so schneiden sich die Projectionen der Linien in jeder von den Projectionsebenen.

Aus 14).

18) Schneiden sich in jeder von den Projectionsebenen die Projectionen zweier Linien, treffen die Normalen, von den Durchschnittspunkten auf die Achse gefällt, denselben Punkt der Achse, und stehen nicht die Projectionen einer der Linien normal auf der Achse, so schneiden sich die Linien, und ihre Ebene steht schief auf jeder der Projectionsebenen.

Bezeichnen wir den Durchschnittspunkt der Projectionen in P' mit n' , so ist der Durchschnittspunkt in P'' durch n'' zu bezeichnen, und die Linien haben den Punkt n gemeinschaftlich. Die Linien haben keinen Punkt weiter gemeinschaftlich, denn sonst müßten ihre Projectionen die Projectionen dieses Punktes gemeinschaftlich haben. Deshalb schneiden sich die Linien. Daß ihre Ebene schief steht auf jeder von den Projectionsebenen, folgt leicht indirect.

19) Liegen zwei Linien nicht in einer Ebene, so schneiden sich entweder in jeder der Projectionsebenen ihre Projectionen, aber in Punkten, welche so liegen, daß die Normalen, von ihnen auf die Achse gefällt, nicht denselben Punkt der Achse treffen, es sei denn, daß die eine der Linien sich in einer Ebene befände, welche normal zur Achse steht; oder es sind ihre Projectionen in der einen Projectionsebene parallel, und die in der anderen schneiden sich; oder es sind die Projectionen in jeder von den Projectionsebenen parallel, dann aber normal auf der Achse.

Es erhellet leicht, daß die Projectionen der Linien in jeder der Projectionsebenen sich schneiden können. Die Normalen, von den Durchschnittspunkten auf die Achse gefällt, müssen dabei verschiedene Punkte der Achse treffen, weil sonst die Linien einen Punkt gemeinschaftlich haben würden, es sei denn, daß durch die eine der Linien eine Ebene sich denken ließe, normal zur Achse. — Durch zwei Linien, welche nicht in einer Ebene liegen, sind immer zwei parallele Ebenen möglich. Deshalb können die projicirenden Ebenen von zweien solchen Linien, welche zu einer Projectionsebene gehören, parallel ausfallen, und dann sind auch die Projectionen der Linien in dieser Projectionsebene parallel. Stehen diese Projectionen nicht normal auf der Achse, so schneiden sich die Projectionen in der anderen Projectionsebene; denn wären sie parallel, oder fielen sie in einander, so müßten die Linien parallel sein. Stehen aber jene Projectionen normal auf der Achse, so bilden auch die Projectionen in der anderen Projectionsebene mit der Achse rechte Winkel. In dem Gesagten liegt der Satz.

20) Schneiden sich die Projectionen zweier Linien in jeder von den Projectionsebenen, und in Punkten, welche so liegen, daß die Normalen, von ihnen auf die Achse gefällt, nicht densel-

ben Punkt der Achse treffen; oder schneiden sich die Projectionen in der einen von den Projectionsebenen, und sind die in der anderen parallel, so befinden sich die Linien nicht in einer Ebene.

Denn lägen die Linien in einer Ebene, so würden, nach den früheren Sätzen, ihre Projectionen anders ausfallen, als es vorausgesetzt ist.

21) Sind in jeder von den Projectionsebenen die Projectionen zweier Linien parallel, und stehen sie dabei normal auf der Achse, so ist es nicht nothwendig, daß die Linien nicht in einer Ebene liegen. Sie befinden sich aber nicht in einer Ebene, wenn ihre Projectionen in der dritten Projectionsebene sich schneiden.

Der erste Theil des Satzes erhellet, insofern die Lage der Linien nicht bestimmt ist; der andere folgt aus 20).

§. 29.

1) Liegen zwei Ebenen in einander, so liegen auch ihre Schnitte in einander, und umgekehrt.

2) Sind zwei Ebenen parallel, so sind ihre Schnitte parallel. Denn sie werden von jeder der Projectionsebenen in parallelen Linien geschnitten.

3) Sind in jeder von den Projectionsebenen die Schnitte zweier Ebenen parallel, und schneiden sie die Achse, so sind die Ebenen parallel.

Denn die Ebenen gehen dann durch sich schneidende beziehlich parallele Linien.

4) Schneiden sich zwei Ebenen, und befindet sich ihre Durchschnittslinie in einer von den Projectionsebenen, so fallen in dieser Projectionsebene die Schnitte beider Ebenen mit der Durchschnittslinie zusammen.

5) Schneiden sich zwei Ebenen, und ist ihre Durchschnittslinie parallel mit einer Projectionsebene, so sind in dieser Projectionsebene die Schnitte der Ebenen parallel.

Jeder von den Schnitten ist parallel mit der Durchschnittslinie, daher sind sie selbst parallel.

6) Sind in einer Projectionsebene die Schnitte zweier Ebenen parallel, und schneiden sich die Ebenen, so ist ihre Durchschnittslinie parallel mit jener Projectionsebene.

Denn sie ist parallel mit den Schnitten.

7) Schneiden sich zwei Ebenen, und schneidet ihre Durchschnittslinie eine Projectionsebene, so schneiden sich in dieser Projectionsebene die Schnitte der Ebenen, und zwar in dem Durchgang ihrer Durchschnittslinie.

Nach Geom. II. §. 18. 2) gehen die Schnitte der Ebenen durch den Durchgang ihrer Durchschnittslinie, und die Schnitte können nicht in einander fallen, weil sonst die Ebenen in einander fielen.

8) Schneiden sich die Schnitte zweier Ebenen in einer Projectionsebene, so schneiden sich die Ebenen, und der Durchschnittspunkt der Schnitte ist der Durchgang ihrer Durchschnittslinie.

Die Ebenen können nicht parallel sein oder in einander fallen, denn sonst müßten die Schnitte parallel sein oder in einander liegen: die Ebenen schneiden sich daher. Den Durchschnittspunkt der Schnitte haben die Ebenen gemeinschaftlich; er ist deshalb ein Punkt ihrer Durchschnittslinie. Die Durchschnittslinie befindet sich nicht in der Projectionsebene [indirect aus 4)], folglich schneidet sie die Projectionsebene in jenem Punkt, und er ist ihr Durchgang.

9) Schneiden sich zwei Ebenen, liegt ihre Durchschnittslinie in der einen Projectionsebene, und schneidet sie die Achse, so fallen in dieser Projectionsebene die Schnitte der Ebenen mit der Durchschnittslinie zusammen, und die in der anderen schneiden die Achse; ist aber die Durchschnittslinie mit der Achse parallel, so sind die Schnitte in der anderen Projectionsebene parallel mit der Achse.

Aus 4) und 5).

10) Schneiden sich zwei Ebenen, schneidet ihre Durchschnittslinie die eine Projectionsebene und ist sie mit der anderen parallel, so schneiden sich die Schnitte in der ersten Projectionsebene in dem Durchgang der Durchschnittslinie, und die Schnitte in der anderen Projectionsebene sind parallel (wenn nämlich zwei Statt finden).

Aus 7) und 5).

11) Schneiden sich die Schnitte zweier Ebenen in der einen Projectionsebene, und sind die in der anderen parallel, so schneiden sich die Ebenen, ihre Durchschnittslinie schneidet die erste Projectionsebene und ist parallel mit der anderen.

Aus 8) und 6).

12) Schneiden sich zwei Ebenen, und ist ihre Durchschnittsline parallel mit jeder von den Projectionsebenen, so sind die Schnitte der Ebenen parallel mit der Achse.

Die Durchschnittsline ist parallel mit der Achse, Geom. II. §. 66., und jeder Schnitt ist parallel mit der Durchschnittsline, daher sind die Schnitte parallel mit der Achse.

13) Sind in jeder von den Projectionsebenen die Schnitte zweier Ebenen parallel, und parallel mit der Achse, so sind entweder die Ebenen parallel, oder sie schneiden sich, und ihre Durchschnittsline ist parallel mit jeder Projectionsebene. Das erste tritt ein, wenn die Schnitte in der dritten Projectionsebene parallel sind, das andere, wenn die Schnitte in der dritten Projectionsebene sich schneiden.

Aus 3) und 11).

14) Schneiden sich zwei Ebenen, und schneidet ihre Durchschnittsline jede von den Projectionsebenen, so schneiden sich in jeder Projectionsebene die Schnitte der Ebenen in dem Durchgang der Durchschnittsline.

Aus 7).

15) Schneiden sich in jeder von den Projectionsebenen die Schnitte zweier Ebenen, so schneiden sich die Ebenen, und ihre Durchschnittsline schneidet die Projectionsebenen in den Durchschnittspunkten der Schnitte.

Aus 8).

§. 30.

1) Ist eine Ebene parallel mit einer Projectionsebene, und steht eine Linie normal auf der Ebene, so ist in der Projectionsebene, mit welcher jene Ebene parallel ist, die Projection der Linie ein Punkt, und in der anderen Projectionsebene steht die Projection der Linie normal auf dem Schnitt der Ebene.

Die Ebene, welche mit der einen Projectionsebene parallel ist, schneidet die andere Projectionsebene, und ihr Schnitt in dieser Projectionsebene ist parallel mit der Achse. Die Linie, welche auf der Ebene normal steht, ist auch normal auf der mit der Ebene parallelen Projectionsebene. Die Projection der Linie in dieser Projectionsebene ist deshalb ein Punkt, und die Projection in der anderen Projectionsebene steht normal auf der

Achse, mithin auch normal auf dem mit der Achse parallelen Schnitt.

2) Ist eine Ebene parallel mit einer Projectionsebene, und ist in dieser Projectionsebene die Projection einer Linie ein Punkt, so steht diese Linie normal auf jener Ebene.

Die Linie steht normal auf der Projectionsebene, und dann auch normal auf jeder Ebene, welche mit dieser Projectionsebene parallel ist.

3) Steht eine Linie normal auf einer Ebene, und ist die Ebene nicht parallel mit einer von den Projectionsebenen, so sind die Projectionen der Linie normal auf den Schnitten der Ebene.

Ist die Ebene nicht parallel mit einer von den Projectionsebenen, so steht die Linie nicht normal auf einer von den Projectionsebenen; denn wäre sie normal auf der einen, so müßte diese Projectionsebene mit jener Ebene parallel sein, weil beide auf derselben Linie normal ständen. Die Ebene sei durch E bezeichnet, die auf ihr normal stehende Linie durch ab . Wir wollen darthun, daß $a'b'$ normal steht auf E' . Die projicirende Ebene abP' steht normal auf P' , zugleich normal auf E , weil sie durch die Linie ab geht, welche normal steht auf E . Es sind also die beiden Ebenen E und P' normal auf der Ebene abP' . Deshalb ist ihre Durchschnittslinie E' normal auf abP' , und auch normal auf der Linie $a'b'$, welche in abP' sich befindet und von E' geschnitten wird. Die Projection $a'b'$ und der Schnitt E' stehen daher normal auf einander. Eben so kann gezeigt werden, daß $a''b''$ normal steht auf E'' .

4) Stehen die Projectionen einer Linie normal auf den Schnitten einer Ebene, und schneiden diese Schnitte die Achse, so steht die Linie normal auf der Ebene.

Die Projectionen der Linie stehen nicht normal auf der Achse, weil sonst die Schnitte der Ebene der Achse parallel sein müßten. Deshalb schneiden sich die projicirenden Ebenen der Linie. Um zu zeigen, daß die Linie auf der Ebene normal steht, thun wir dar, daß die projicirenden Ebenen auf der Ebene normal stehen, Geom. II. §. 60. Die Ebene sei E , die Linie ab . Die projicirende Ebene abP' und die Projectionsebene P' stehen normal auf einander. Ihre Durchschnittslinie ist die Projection

$a'b'$. In P' , als der einen von diesen Ebenen, befindet sich der Schnitt E' , und er steht, wegen der Voraussetzung, normal auf $a'b'$. Deshalb ist der Schnitt E' normal auf der anderen von den beiden Ebenen, nämlich auf der projicirenden Ebene abP' . Die Ebene E geht durch den Schnitt E' . Deshalb ist sie normal auf abP' , oder, was dasselbe sagt, es ist die projicirende Ebene abP' normal auf der Ebene E . Eben so ist abP'' auf E normal.

5) Stehen die Projectionen einer Linie normal auf den Schnitten einer Ebene, und sind diese Schnitte parallel mit der Achse, so steht die Linie nicht nothwendig normal auf der Ebene. Sie ist aber auf der Ebene normal, wenn auch ihre Projection in der dritten Projectionsebene normal ist auf dem Schnitt der Ebene in dieser Projectionsebene.

Die Projectionen der Linie stehen normal auf der Achse. Zunächst ist also die Lage der Linie nicht bestimmt. Das Uebrige folgt aus 4).

6) Steht eine Linie nicht normal auf einer Ebene, und schneiden die Schnitte der Ebene die Achse, so sind nicht beide Projectionen der Linie normal auf den Schnitten der Ebene.

Indirect aus 4).

7) Stehen nicht beide Projectionen einer Linie normal auf den Schnitten einer Ebene, und schneiden diese Schnitte die Achse, so steht die Linie nicht normal auf der Ebene.

Indirect aus 3).

8) Sind die Schnitte einer Ebene parallel mit der Achse, und steht eine Linie nicht normal auf dieser Ebene, so können doch die Projectionen der Linie normal auf den Schnitten der Ebene sein; dann hat aber die Linie eine solche Lage, daß durch sie eine Ebene gedacht werden kann, welche normal auf der Achse steht.

§. 31.

Die Projection eines neßs auf einer Projectionsebene wird gebildet durch die Projectionen seiner sämtlichen Punkte auf dieser Projectionsebene.

§. 32.

1) Steht die Ebene eines neßs normal auf einer Projectionsebene, so ist die Projection des neßs in dieser Projectionsebene

ebene eine gerade Linie. Sie fällt mit dem Schnitt der Ebene zusammen. Umgekehrt: ist die Projection eines $ne\ddot{c}h$ s eine gerade Linie, so befindet sich das $ne\ddot{c}h$ in der Ebene, welche in dieser geraden Linie auf der Projectionsebene normal steht.

2) Steht die Ebene eines $ne\ddot{c}h$ s nicht normal auf einer Projectionsebene, so ist die Projection des $ne\ddot{c}h$ s in dieser Projectionsebene ein $ne\ddot{c}h$. Und umgekehrt: ein $ne\ddot{c}h$ als Projection gehört jedesmal einem $ne\ddot{c}h$ an, und die Ebene desselben steht schief auf der Projectionsebene.

Denn je drei auf einander folgende Eckpunkte des $ne\ddot{c}h$ s befinden sich nicht in einer geraden Linie.

§. 33.

Eine begränzte gerade Linie, welche mit einer Projectionsebene parallel ist, ist ihrer Projection in dieser Projectionsebene gleich.

Die Linie ist mit ihrer Projection parallel, und die projicirenden Linien der Endpunkte sind parallel. Die Linie, die projicirenden Linien ihrer Endpunkte, und die Projection der Linie bilden deshalb ein Rechteck. Und da die Linie und ihre Projection gegenüberstehende Seiten desselben abgeben, so sind beide gleich.

§. 34.

Bildet eine begränzte Linie ab mit einer Projectionsebene den Winkel α , so ist die Projection der Linie in dieser Projectionsebene gleich $ab \cos \alpha$.

Wenn die Linie normal auf der Projectionsebene steht, hat die Projection 0 zu ihrem Maaß, denn sie ist ein Punkt; und es ist in diesem Fall $ab \cos \alpha = ab \cos 90^\circ = ab \cdot 0 = 0$. Liegt die Linie in der Projectionsebene, so ist die Projection der Linie gleich; alsdann ist aber der Winkel, welchen die Linie mit der Projectionsebene bildet, gleich 0° , und es ist $ab \cos 0^\circ = ab \cdot 1 = ab$. Steht endlich die Linie schief auf der Projectionsebene, so denke man in der projicirenden Ebene von dem einen Endpunkte der Linie, parallel mit der Projection, eine Linie gezogen bis zu der projicirenden Linie des anderen Endpunktes; dadurch entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, welches die Linie ab zur Hypotenuse, die gezogene Linie zur einen Kathete hat; diese Kathete ist gleich der Projection, und sie bildet mit der Hypo-

tenuse den Winkel α ; die Kathete ist aber gleich $ab \cos \alpha$, somit auch die Projection.

§. 35.

Ist die Ebene eines Netzes mit einer Projectionsebene parallel, so ist das Netz congruent mit seiner Projection in dieser Projectionsebene.

Denn die Projection hat alle Seiten mit dem Netz beziehlich gleich, und auch alle Winkel, weil die Schenkel derselben parallel sind.

Fig. 3.

§. 36.

Bildet die Ebene eines Dreiecks abc mit einer Projectionsebene den Winkel α , so ist die Projection des Dreiecks in dieser Projectionsebene gleich $abc \cos \alpha$.

Der Satz erhellt sofort, wenn die Ebene des Dreiecks auf der Projectionsebene normal steht, oder mit ihr zusammenfällt. Es bleibt der Beweis zu führen für den Fall, daß die Ebene des Dreiecks einen schiefen Winkel α mit der Projectionsebene bildet. Die Projectionsebene sei P' . Die Ebene des Dreiecks schneide die Projectionsebene in der Linie xz . Die Linien $a'x$, $b'y$, $c'z$ seien normal auf xz , alsdann stehen auch die Linien ax , by , cz normal auf xz . Für jedes der Dreiecke nba und nbc werde nb als Grundlinie angenommen; dann ist die Höhe des ersteren Dreiecks xy , die des anderen yz , der Inhalt des ersteren Dreiecks $\frac{1}{2}nb \cdot xy$, der des anderen $\frac{1}{2}nb \cdot yz$, und

$$abc = \frac{1}{2}nb \cdot xy + \frac{1}{2}nb \cdot yz = \frac{1}{2}xz \cdot nb.$$

Nimmt man bei den Dreiecken $n'b'a'$ und $n'b'c'$ die Linie $n'b$ als Grundlinie, so sind xy und yz die Höhen dieser Dreiecke, und es folgt

$$a'b'c' = \frac{1}{2}xz \cdot n'b'.$$

Es ist $n'b'$ die Projection von nb . Bei der angegebenen Construction ist der Winkel byb' gleich α geworden, zugleich ist dieser Winkel der Neigungswinkel, welchen die Linie nb mit der Projectionsebene bildet. Daher ist nach §. 34. $n'b' = nb \cos \alpha$. Und jetzt folgt

$$a'b'c' = \frac{1}{2}xz \cdot n'b' = \frac{1}{2}xz \cdot nb \cos \alpha = abc \cos \alpha.$$

Das ist der Satz.

§. 37.

Bildet die Ebene eines n -ecks $abcd\dots$ mit einer Projectionsebene den Winkel α , so ist die Projection des n -ecks in dieser Projectionsebene gleich $abcd\dots \times \cos \alpha$.

Der Satz ersieht sich leicht, wenn man das n -eck in Dreiecke zerlegt.

§. 38.

Die Projectionen einer krummen Linie werden gebildet durch die Projectionen ihrer sämtlichen Punkte.

§. 39.

1) Befindet sich eine krumme Linie in einer Ebene, welche auf einer Projectionsebene normal steht, so ist in dieser Projectionsebene die Projection der krummen Linie eine gerade Linie. Sie fällt mit dem Schnitt der Ebene zusammen.

Nach §. 27. 1).

2) Ist eine Projection einer krummen Linie eine gerade Linie, so befindet sich die krumme Linie in einer Ebene, welche in jener Projection auf der Projectionsebene normal steht.

Nach §. 27. 2).

3) Befindet sich eine krumme Linie in einer Ebene, welche nicht normal steht auf einer Projectionsebene, so ist in dieser Projectionsebene die Projection der krummen Linie eine krumme Linie.

Nach §. 27. 5).

4) Eine krumme Linie als Projection gehört jedesmal einer krummen Linie an, und dieselbe findet sich nicht in einer Ebene, welche auf der Projectionsebene normal steht.

Die Linie kann nicht gerade sein, weil sonst auch die Projection gerade sein würde; und sie kann nicht in einer Ebene sich befinden, welche normal auf der Projectionsebene steht, weil sonst ebenfalls die Projection gerade ausfiel.

5) Jede von den Projectionen einer Linie von doppelter Krümmung ist eine krumme Linie.

Indirect aus 2).

§. 40.

Durch die projectirenden Linien sämtlicher Punkte einer Curve, welche zu einer Projectionsebene gehören, läßt sich eine

Fläche denken. Diese Fläche nennen wir die *projicirende Fläche* der Curve zu jener Projectionsebene.

Die *projicirende Fläche* einer Curve zu einer Projectionsebene wird beschrieben durch eine gerade Linie, welche man längs der Curve führt, während man sie beständig auf jener Projectionsebene normal erhält. Sie wird ferner beschrieben durch eine gerade Linie, welche man längs der Projection der Curve führt, indem sie immer normal ist auf der Projectionsebene.

Alle Normalen, welche man aus beliebigen Punkten einer Curve auf eine Projectionsebene fällt, werden aufgenommen von der *projicirenden Fläche* der Curve zu dieser Projectionsebene. Und alle Normalen, welche man in beliebigen Punkten der Projection einer Curve auf der Projectionsebene errichtet, fallen in die *projicirende Fläche* der Curve für diese Projectionsebene.

§. 41.

1) Berühren sich eine Curve von einfacher Krümmung und eine gerade Linie, und steht die Ebene, in welcher sich beide befinden, nicht normal auf einer Projectionsebene, so berühren sich in dieser Projectionsebene die Projectionen der beiden Linien, und der Berührungspunkt der Projectionen ist die Projection des Berührungspunktes der Linien.

Zunächst erhellet, daß die Projectionen beider Linien die Projection des Punktes gemeinschaftlich haben, in welchem sich die Linien berühren. Die beiden Punkte der Curve, welche dem Berührungspunkte zunächst liegen, befinden sich auf einer Seite der *projicirenden Ebene* der Tangente; deshalb befinden sich auch die Projectionen dieser Punkte auf einer Seite von der Projection der Tangente (weil nämlich die *projicirenden Linien* der *projicirenden Ebene* parallel gehen). Darin liegt aber, daß die Projection der Curve und die Projection der Tangente sich berühren in dem Punkte, welcher die Projection des Berührungspunktes ausmacht.

2) Befinden sich in einer Projectionsebene als Projectionen eine krumme Linie und eine gerade, welche sich berühren, wird zu der krummen Linie die *projicirende Fläche*, zu der geraden die *projicirende Ebene* gedacht, und werden diese beiden Flächen durch eine Ebene geschnitten, so erhält man eine krumme Durch-

schnittslinie und eine gerade, beide berühren sich, und der Punkt, in welchem das geschieht, hat zur Projection in jener Projectionsebene den Berührungspunkt der zuerst erwähnten Linien.

Zunächst erhellet, daß die Durchschnittslinien den Punkt gemeinschaftlich haben, welchem als Projection der Berührungspunkt der Linien in der Projectionsebene zugehört. Die beiden Punkte der krummen Linie in der Projectionsebene, welche dem Berührungspunkte zunächst liegen, befinden sich auf einer Seite der geraden Linie, die projecirenden Linien dieser Punkte daher auf einer Seite der projecirenden Ebene. Die beiden Punkte der krummen Linie in der Durchschnittsebene, welchen jene Punkte als Projectionen zugehören, liegen daher dem Punkte zunächst, welchen die krumme Linie und die gerade in der Durchschnittsebene gemeinschaftlich haben, und auf einer Seite der geraden Linie. Deshalb berühren sich diese beiden Linien in dem Punkte, der ihnen gemeinschaftlich ist.

3) Werden die Projectionen einer Curve von einfacher Krümmung durch die Projectionen einer geraden Linie berührt, haben die Berührungspunkte eine solche Lage, daß die Normalen, von ihnen auf die Achse gefällt, denselben Punkt der Achse treffen, und stehen die Projectionen der geraden Linie nicht normal auf der Achse, so berühren sich die Curve und die gerade Linie, und zwar in dem Punkte, welchem jene Berührungspunkte als Projectionen angehören.

Die Punkte, in welchen die Projectionen sich berühren, seien n' und n'' ; die gerade Linie sei ab ; die Ebene, in welcher sich die Curve befindet, sei durch E bezeichnet. — Die Curve und die Linie ab haben den Punkt n gemeinschaftlich. Die projecirende Ebene abP' wird von der Ebene E geschnitten; die gerade Linie, in welcher das geschieht, sei cd . Die Curve und die Linie cd berühren sich nach 2), und in demjenigen Punkte der Curve, dessen Projection in P' der Punkt n' ist, d. h. in dem Punkt n . Die projecirende Ebene abP'' und die Ebene E schneiden sich ebenfalls; die Linie, in welcher es geschieht, sei gh . Die Curve und die Linie gh berühren sich nach 2) in dem Punkte der Curve, dessen Projection auf P'' der Punkt n'' ist, also in n . Die drei Ebenen abP' , abP'' und E schneiden sich