EINFÜHRUNG
IN DIE
THEORETISCHE PHYSIK

MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG
IHRER MODERNEN PROBLEME

VON

ARTHUR HAAS
DR. PHIL.,
A. O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT WIEN

ERSTER BAND

MIT 58 ABBILDUNGEN IM TEXT

DRITTE UND VIERTE, VÖLLIG UMGEARBEITETE
UND VERMEHRTE AUFLAGE

BERLIN UND LEIPZIG 1923
WALTER DE GRUYTER & CO.
VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG, VERLAGSBUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Aus dem Vorwort zur ersten Auflage des ersten Bandes.

Die völlige Neugestaltung, die unser Naturbild in der letzten Zeit durch die großartigen Fortschritte der theoretischen Physik erfahren hat, hat in weiten Kreisen ein lebhaftes Interesse für die Probleme dieses Wissenszweiges geweckt. Manche, denen es an der Zeit oder an den Vorkenntnissen fehlt, um die modernen theoretisch-physikalischen Originalabhandlungen selbst oder um Werke zu studieren, die einzelnen speziellen Gegenständen gewidmet sind, werden vielleicht den Wunsch nach einer nicht zu umfangreichen Darstellung hegen, die von durchaus modernen Gesichtspunkten aus und unter Benutzung moderner Methoden einen Überblick über den gegenwärtigen Stand der gesamten theoretischen Physik gewährt und, ohne zu sehr in Einzelheiten einzugehen, doch ein exaktes Verständnis der Grundlagen und der Hauptprobleme dieser Wissenschaft ermöglicht.

Eine solche Darstellung in einer auch für das Hochschulstudium geeigneten Form zu bieten, ist das Ziel des vorliegenden Buches. Es ist aus Vorlesungen entstanden, die durch einige Semester der Verfasser an der Universität in Leipzig gehalten hat, und bei denen ihn das Bestreben leitete, nach Möglichkeit „klassische" und moderne Physik zu einem einheitlichen Ganzen zu vereinigen. . . .

. . . In mathematischer Hinsicht werden in dem vorliegenden Buche nur die Grundregeln der Differential- und Integralrechnung als bekannt vorausgesetzt; sonst werden alle in der Darstellung benötigten mathematischen Sätze (sofern sie nicht ganz elementarer Natur sind) in dem Buche selbst, dort, wo sie gebraucht werden, abgeleitet. Auch leichte Zwischenrechnungen wurden in diesem Buche mit Absicht stets vollkommen durchgeführt. Wenn der Leser, der noch Anfänger ist, sich — wie das wohl bei der Lektüre vieler Lehrbücher der Fall ist — stundenlang den Kopf darüber zerbrechen muß, wie wohl eine Zwischenrechnung aussehen mag, die als leicht bezeichnet, aber nicht angegeben wird, dann wird nur allzusehr seine Aufmerksamkeit von wichtigen physikalischen Fragen auf mathematische Nebensächlichkeiten abgelenkt. Um diese Möglichkeit bei Lesern dieses Buches unbedingt zu vermeiden, wurde eine zu breite Form der mathematischen Zwischenbetrachtungen einer zu knappen entschieden vorgezogen. . . .

Leipzig, im November 1918.

Arthur Haas.

Vorwort zur dritten und vierten Auflage des ersten Bandes.

Gegenüber der ersten und der mit ihr völlig übereinstimmenden zweiten Auflage stellt die vorliegende dritte und vierte Auflage eine völlige Neubearbeitung unter wesentlicher Vermehrung des Inhalts dar. Aus der ersten Auflage des ersten Bandes sind nur einige Abschnitte über die allgemeinen Prinzipe der Mechanik, einige Abschnitte aus der allgemeinen Theorie der Schwingungen und einige Abschnitte aus der Optik übernommen worden, während alle anderen Abschnitte und auch die Anlage des Buches eine völlig neue Bearbeitung erfahren haben.

Die Umarbeitung erfolgte von zwei Gesichtspunkten aus. Zunächst war ich in der neuen Auflage bestrebt, aus den physikalischen Betrachtungen alle Gedankengänge herauszunehmen, die im wesentlichen einen rein mathematischen Charakter haben, und sie in besonderen Abschnitten zu vereinigen, in einer ganz allgemeinen und abstrakten Form, die noch nicht auf physikalische Tatsachen Bezug nimmt. Dies ist geschehen in den §§ 2 und 3 (Vektorgrößen und Vektoralgebra), 9 und 10 (Transformation von Vektorkomponenten und Gradient), 12 (rotierendes Koordinatensystem), 26 und 27 (Tensoren und Tensorellipsoid), im vierten Kapitel (Allgemeine Theorie der Vektorfelder), im fünften Kapitel (Allgemeine Theorie der Schwingungen und der Wellen) und im siebenten Kapitel (Potentialtheorie).

Indem ich in diesen Kapiteln und Abschnitten die in der theoretischen Physik verwerteten mathematischen Gedankengänge abgesondert vereinigte, hoffe ich dreierlei erreicht zu haben. Die Entwicklung einer einheitlichen vektoriellen Methode, die sowohl in der Mechanik als auch in der Elektrizitätstheorie sowie in der (im zweiten Bande enthaltenen) Relativitätstheorie Verwendung findet, gestattet eine beträchtliche

Vereinfachung vieler Ableitungen (z. B. hinsichtlich der Bewegungsvorgänge auf der rotierenden Erde oder der Dynamik deformierbarer Körper oder der Theorie des Elektromagnetismus); sie erspart überflüssige Wiederholungen analoger Gedankengänge in verschiedenen Zweigen der Physik und ermöglichte es so, den Inhalt des Buches ohne eine Vergrößerung seines Umfanges wesentlich zu vermehren. Zweitens wurden dadurch, wie ich hoffe, die eigentlich physikalischen Gedankengänge, weil sie nun nicht mehr durch mathematische Überlegungen unterbrochen werden, in ihrem Aufbau durchsichtiger; und drittens endlich schien es mir von der größten Wichtigkeit, daß dadurch der Leser noch deutlicher sich dessen bewußt werde, welche Zusammenhänge zwischen physikalischen Theoremen rein mathematischer Natur sind und welche nur unter Zuhilfenahme physikalischer Erfahrungstatsachen hergestellt werden können.

Der zweite, für die Umarbeitung maßgebende Gesichtspunkt war das Streben nach einer scharfen Scheidung zwischen den physikalischen Erkenntnissen, die unabhängig von allen atomistischen Hypothesen gewonnen werden können, und der eigentlichen atomistischen Physik. In dem vorliegenden ersten Bande sollen in der neuen Auflage nur Erkenntnisse der ersten Art behandelt werden; andererseits haben aber bereits in der Theorie des elektromagnetischen Feldes fundamentale Vorstellungen der Atomphysik dann Aufnahme gefunden, wenn sie sich tatsächlich ohne atomistische Hypothesen in allgemeinerer Form ableiten lassen (z. B. der Konvektionsstrom, die Bewegungsgleichung der elektrischen Ladung, die elektromagnetische Masse).

Die geschichtlichen Betrachtungen sind gegenüber der ersten Auflage ganz in den Hintergrund getreten. Ich habe ohne Rücksicht auf den oft zufälligen geschichtlichen Werdegang überall die Art der Darstellung gewählt, die mir bei dem heutigen Stande der Physik und im Zusammenhang mit deren modernen Problemen die einfachste und didaktisch zweckmäßigste zu sein schien.

Abgesehen von den zahlreichen Abschnitten vektoranalytischen Inhalts erscheint gegenüber den früheren Auflagen der erste Band auch insofern inhaltlich vermehrt, als Abschnitte über folgende physikalische Themen neu hinzugekommen sind: Wurfbewegung, Pendelbewegung, Bewegungsvorgänge auf der rotierenden Erde, physisches Pendel, ideale Flüssigkeit, elastisches Medium, elastische Wellen, Selbstinduktion, Lichtintensität, ultrarote und ultraviolette Strahlen.

Die Herren Prof. Dr. Harry Schmidt in Cöthen, cand. math. Richard Fleischer in Dresden, cand. math. Felix Gelber in Wien und cand. math. Franz Urbach in Wien hatten die große Freundlichkeit, die Korrekturbogen der neuen Auflage sehr aufmerksam durchzusehen. Hierfür sei ihnen herzlichst gedankt. In aufrichtiger Dankbarkeit gedenke ich endlich auch der mannigfachen wertvollen Verbesserungsvorschläge, die mir seitens aufmerksamer Leser der ersten und zweiten Auflage zugekommen waren. Auch in Zukunft werde ich sehr dankbar für Hinweise auf Fehler und für Verbesserungsvorschläge sein, die ich gegebenenfalls nach Wien IX., Boltzmanngasse 5, Universitätsinstitut für theoretische Physik, adressieren zu wollen bitte.

Wien, im Juni 1923.

Arthur Haas.

Inhalt.

Erster Teil.

Mechanik nebst allgemeiner Theorie der Vektorfelder, der Schwingungen und der Potentiale.

I. Kapitel. Die Bewegung des Massenpunktes.

II. Kapitel. Die allgemeinen Prinzipe der Mechanik.

III. Kapitel. Die Bewegung starrer Körper.

IX. Kapitel. Die MAXWELLsche Theorie des elektromagnetischen Feldes.

X. Kapitel. Theorie des Lichtes.

Anhang.

Bemerkung. Der Leser, dem die §§ 20, 21, 22 sowie 83, 84, 85 zu schwierig sind, kann diese Abschnitte überschlagen, zumal ihre Kenntnis für die späteren Betrachtungen nicht erforderlich ist.

Berichtigung.

Die letzte Zeile der S. 46 und die ersten zehn Zeilen der S. 47 sind als falsch zu streichen und dafür ist folgendes zu setzen:

Aus dieser Gleichung finden wir die bei dem vertikalen Wurf resultierende westliche Abweichung x^*, indem wir für die Zeit die doppelte Steigdauer einsetzen, also (gemäß Gl. 8 des § 5) t gleich $2u/g$ setzen. Dann wird

$$x^* = \frac{4}{3} w \cos\psi \frac{u^3}{g^2} \cdot$$

Andererseits ist die Steighöhe h (nach Gl. 9 des § 5) gleich $u^2/2g$, und daher wird

$$x^* = \frac{8\sqrt{2}}{3} \frac{h^{3/2}}{\sqrt{g}} w \cos\psi \quad . \tag{11}$$

Wie ein Vergleich mit Gl. 6 zeigt, ist also die resultierende westliche Abweichung *viermal* so groß, wie die östliche Abweichung bei dem freien Fall durch die gleiche Höhe.

ERSTER TEIL

MECHANIK

nebst allgemeiner Theorie der Vektorfelder, der Schwingungen und der Potentiale

I. Kapitel.

Die Bewegung des Massenpunktes.

§ 1. Beharrungsprinzip und Kraftbegriff.

Das einfachste Beispiel einer Bewegung stellt eine geradlinige Bewegung dar, bei der in gleichen Zeiten gleiche Wegstücke zurückgelegt werden. Eine solche Bewegung wird als gleichförmig bezeichnet. Den Quotienten aus einem beliebigen Stücke des Weges und der zu seiner Zurücklegung erforderlichen Zeit bezeichnet man dann als die Geschwindigkeit der Bewegung. Sie behält bei einer gleichförmigen Bewegung ihren Wert unverändert bei, und ihr Wert ergibt sich auch ganz unabhängig davon, ein wie großes Stück der Bewegung man ihrer Berechnung zugrundelegt.

Durchläuft nun auch ein Körper eine ganz beliebige, im allgemeinen also krummlinige Bahn in ganz beliebiger Bewegung, so kann gleichwohl die Bewegung durch ein kleines Stück der Bahnkurve näherungsweise als gleichförmig angesehen werden. Je kleiner das betrachtete Stück der Bewegung ist, mit desto größerer Annäherung kann die tatsächlich ungleichförmige und krummlinige Bewegung zwischen zwei benachbarten Punkten der Bahn durch eine fingierte, gleichförmige und geradlinige Bewegung zwischen diesen Punkten ersetzt werden. Betrachten wir also ein Element der Kurve von der Länge ds, das in einem Zeitelement dt zurückgelegt wird, so kann der Differentialquotient ds/dt definiert werden als der momentane Wert der Geschwindigkeit. Der Geschwindigkeit können wir auch in jedem Augenblick eine Richtung zuschreiben, indem wir ihre jeweilige Richtung zusammenfallen lassen mit der Richtung des Wegelementes (also mit der Richtung der Bahntangente).

Das erste Grundgesetz der Mechanik ist nun das zuerst von DESCARTES (1644) ausgesprochene und später (1687) von NEWTON als erstes Bewegungsgesetz formulierte Beharrungsprinzip.[1] Ein jeder Körper behält nach diesem Prinzip den Wert seiner Geschwindigkeit und seine Bewegungsrichtung unverändert bei, woferne keine äußeren Ursachen die Bewegung des Körpers beeinflussen.

Im besonderen muß daher ein ruhender Körper bei dem Fehlen äußerer Ursachen im Zustande der Ruhe beharren.

Ändert also ein Körper seine Geschwindigkeit oder seine Bewegungsrichtung, so muß als Grund dieser Änderung eine äußere Ursache angenommen werden, die den Körper, wenn er ruhte und frei beweglich wäre, in Bewegung versetzen würde und die eben mit einem alt hergebrachten Ausdruck als Kraft bezeichnet wird.

Es ist nun eine wichtige Erfahrungstatsache, daß man jede Kraft, die einen frei beweglichen Körper in Bewegung zu setzen strebt, daran durch einen Zug verhindern kann, der von einem Gewichte von bestimmter Größe in bestimmter Richtung ausgeübt wird.[2] Infolgedessen kann man eine Kraft dadurch bestimmen, daß man angibt, wie groß ein Gewicht sein und in welcher Richtung es einen Zug ausüben müsse, um die Wirkung der zu bestimmenden Kraft aufzuheben. Indem man dieses Gewicht mit einem als Einheit festgesetzten Gewicht vergleicht, kann man die Größe der Kraft messen, und da, wie die Erfahrung lehrt, zwei gleich große, aber entgegengesetzte Zugkräfte einander aufheben, so muß man der Kraft eine Richtung zuschreiben, die der Richtung des sie kompensierenden Zuges gerade entgegengesetzt ist. Jede Kraft kann daher, wie zuerst STEVIN (um 1600) erkannte, symbolisch durch eine Strecke dargestellt werden, die dieselbe Richtung wie die Kraft hat und die ebensoviel Längeneinheiten umfaßt, als die Kraft Krafteinheiten enthält.

---

[1] Das Beharrungsprinzip geht eigentlich auf GALILEI zurück. GALILEI ist der Schöpfer des Begriffs der idealen als der von Bewegungshindernissen freien Bewegung; und für diese ideale Bewegung schuf er ein oberstes Gesetz in dem Prinzip von der völligen Umkehrbarkeit des idealen mechanischen Vorgangs. Aus diesem Prinzip folgerte nun GALILEI ganz richtig, daß jede Bewegung, die unter dem Einfluß der Schwere längs einer schiefen Ebene abwärts mit einer bestimmten Beschleunigung erfolgt, in der umgekehrten Richtung, also aufwärts, mit einer gleich großen Verzögerung erfolgen müsse (wobei natürlich das Fehlen aller Bewegungshindernisse vorausgesetzt ist). Hieraus konnte aber GALILEI weiter schließen, daß bei einer idealen horizontalen Bewegung ebensowenig wie eine Beschleunigung auch eine Verzögerung möglich sein könne, daß somit eine solche Bewegung, bei der der Körper dem Einfluß der Schwere entzogen ist, ewig mit gleich bleibender Geschwindigkeit fortdauern müßte. Diesen von GALILEI nur nebenbei aufgefundenen Satz hat DESCARTES dann als erster in seiner vollen Tragweite erfaßt und zugleich dahin ergänzt, daß ein Körper seine Bewegung stets nur in gerader Linie fortzusetzen strebe. Seine dauernde Formulierung fand das Beharrungsprinzip in dem ersten NEWTONschen Bewegungsgesetz (Lex motus I): „Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare“ (Ein jeder Körper beharrt in seinem Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, woferne er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, jenen Zustand zu ändern).

[2] Man denke etwa an einen beweglichen Magnetpol, der von einem festen Magnetpol angezogen wird.

§ 2. Die Vektorgrößen.

In der Geschwindigkeit und in der Kraft haben wir Beispiele für Größen kennen gelernt, die erst durch Angabe einer Richtung vollkommen bestimmt sind und die daher symbolisch durch gerichtete Strecken dargestellt werden können. Man bezeichnet solche Größen als Vektorgrößen oder ebenso wie gerichtete Strecken als Vektoren schlechthin.

An jeder Vektorgröße müssen drei wesentliche Eigenschaften unterschieden werden: der Betrag, die Richtung und der Richtungssinn. Unter dem Betrag eines Vektors versteht man die Zahl, die es angibt, wieviel Einheiten die betreffende Größe hat. Unter dem Betrag einer Kraft oder einer Geschwindigkeit versteht man beispielsweise die Zahl, die es angibt, wieviel Krafteinheiten die betreffende Kraft oder wieviel Geschwindigkeitseinheiten die betreffende Geschwindigkeit mißt. Bei der Darstellung durch eine gerichtete Strecke ist natürlich der Betrag der Vektorgröße durch die Länge der Strecke repräsentiert.

Dem allgemeinen Brauche gemäß sollen in diesem Buche Vektorgrößen immer mit deutschen Buchstaben bezeichnet werden. Der Betrag eines Vektors soll mit dem entsprechenden lateinischen Buchstaben bezeichnet werden, also der Betrag eines Vektors $\mathfrak{A}$ mit A.

Daß zwei Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ im Betrage, in der Richtung und im Richtungssinn übereinstimmen, soll durch die symbolische Gleichung ausgedrückt werden

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\,. \tag{1}$$

Zwei Vektoren werden also auch dann als identisch angesehen, wenn sie von verschiedenen Punkten aus gezogen werden, wofern nur Betrag, Richtung und Richtungssinn übereinstimmen. Daß zwei Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ zwar im Betrage und in der Richtung übereinstimmen, jedoch entgegengesetzten Richtungssinn haben, soll seinen Ausdruck in der symbolischen Gleichung finden

$$\mathfrak{A} = -\mathfrak{C}\,. \tag{2}$$

Die Projektionen eines Vektors auf die Achsen eines Koordinatensystems werden als die Komponenten des Vektors in bezug auf dieses Koordinatensystem bezeichnet. Sind die Komponenten eines Vektors $\mathfrak{A}$ gleich[1] A_x, A_y, A_z, so ist nach dem pythagoreischen Lehrsatz

$$A^2 = A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2\,. \tag{3}$$

Das Quadrat des Betrages eines Vektors ist gleich der Summe der Quadrate seiner Komponenten.

---

[1] Die Komponenten eines Vektors sollen in diesem Buch grundsätzlich immer mit lateinischen Buchstaben bezeichnet werden.

Durch die Komponenten ist aber nicht nur der Betrag des Vektors bestimmt, sondern auch seine Richtung und durch das Vorzeichen der Komponenten natürlich auch der Richtungssinn. Es ist ja die Projektion auf die x-Achse gleich dem Betrage des Vektors, multipliziert mit dem Kosinus des Winkels, den die Vektorrichtung mit der Richtung der x-Achse einschließt, also

$$A_x = A \cos(\mathfrak{A}, x) \tag{4}$$

oder nach Gl. 3

$$\cos(\mathfrak{A}, x) = \frac{A_x}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}. \tag{5}$$

Zwei analoge Gleichungen gelten für die Winkel, die die Vektorrichtung mit der y- und der z-Achse bildet.

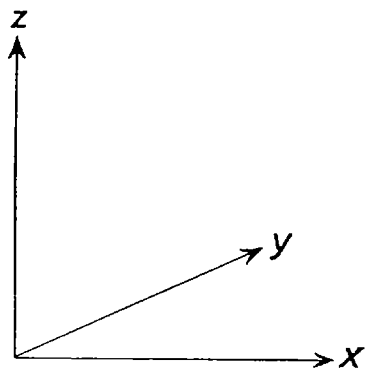

Fig. 1.

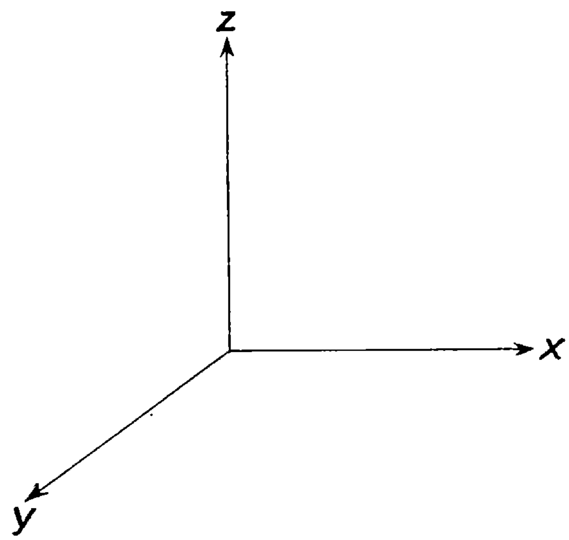

Fig. 2.

Eine kurze Zwischenbemerkung über räumliche Koordinatensysteme muß indessen hier eingeschaltet werden. Es sind zwei Arten von räumlichen Koordinatensystemen möglich, die miteinander nie zur Deckung gebracht werden können, weil die eine Art das Spiegelbild der anderen ist. Zeichnen wir nämlich in einer vertikalen Ebene die x- und die z-Achse, so kann die positive y-Achse nach hinten oder nach vorn gerichtet sein. Im ersten Falle (Fig. 1) erscheint, von einem Punkte der positiven z-Achse aus gesehen, die Drehung, die auf kürzestem Wege die positive x-Achse in die Richtung der positiven y-Achse überführt[2], entgegengesetzt der Drehung des Uhrzeigers. Im zweiten Fall (Fig. 2) erscheint diese Drehung im Sinne des Uhrzeigers. Im ersten Fall spricht man von einem englischen, im zweiten Fall von einem

[2] Statt durch eine Drehung um 90^0 kann man ja die positive x-Achse in die Richtung der positiven y-Achse auch durch eine entgegengesetzte Drehung um 270^0 überführen. Darum wird von einer Überführung „auf kürzestem Wege“ gesprochen.

französischen Koordinatensystem.[3] Man nennt auch das englische Koordinatensystem ein Rechtssystem und das französische ein Linkssystem. Stellt man nämlich die x-Achse durch den Daumen, die y-Achse durch den Zeigefinger und die z-Achse durch den Mittelfinger dar, so erhält man durch die Finger der rechten Hand ein englisches, durch die der linken Hand hingegen ein französisches Koordinatensystem. Da für die Untersuchung elektromagnetischer Vorgänge das englische Koordinatensystem vorteilhafter ist, ist es heute in der theoretischen Physik allgemein gebräuchlich und soll darum auch im folgenden ausschließlich benutzt werden.

Im Gegensatze zu den Vektoren nennt man Größen, die bereits durch Angabe einer Zahl vollkommen bestimmt sind, denen also eine Richtung nicht zukommt, Skalare. Man nennt sie deshalb so, weil sie vollkommen bestimmt sind, sobald man ihre an einer bestimmten Skala gemessene Größe kennt. Skalare sind z. B. die Temperatur, die Zeit, die Masse, die elektrische Ladung, die Magnetismusmenge.

Mit einem Skalar wird ein Vektor offenbar so multipliziert, daß der Betrag des Vektors mit dem Skalar multipliziert wird, ohne daß an der Richtung des Vektors etwas geändert wird. Ebenso wird natürlich ein Vektor durch einen Skalar dividiert, indem man den Betrag dividiert, ohne etwas an der Richtung zu ändern.

Diese Regel führt nun weiterhin zu dem wichtigen Begriff des Einheitsvektors. Unter einem solchen versteht man einen Vektor, dessen Länge gleich der Längeneinheit ist. Jede mögliche Richtung kann also durch einen Einheitsvektor festgelegt werden. Jeder beliebige Vektor kann nun aufgefaßt werden als das Produkt aus einem in seine Richtung fallenden Einheitsvektor und einem Skalar, der gleich ist dem Betrage des Vektors. Bezeichnen wir etwa einen Einheitsvektor, der in die Richtung eines Vektors $\mathfrak{A}$ fällt, mit $\mathfrak{a}$, so ist

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{a} A \,. \tag{6}$$

Auch ein Koordinatensystem kann charakterisiert werden durch die drei Einheitsvektoren, die in die Richtungen der positiven Achsen fallen. Man bezeichnet diese Einheitsvektoren allgemein mit $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ und nennt sie die Grundvektoren des betreffenden Koordinatensystems.

§ 3. Vektoralgebra.

Ebenso wie Zahlengrößen können auch Vektorgrößen durch mannigfache Operationen miteinander verknüpft werden, die zweckmäßig so definiert werden, daß sie in besonderen Fällen in die mit gleichem Namen benannten arithmetischen Operationen übergehen.

[3] Die Bezeichnungen erklären sich daraus, daß früher das durch Fig. 1 dargestellte System hauptsächlich von englischen, das durch Fig. 2 dargestellte aber vor allem von französischen Physikern benutzt wurde.

Als Summe zweier Vektoren definiert man zunächst einen Vektor, der die Diagonale eines Parallelogramms darstellt, dessen Seiten den beiden Summanden nach Größe und Richtung gleich sind. Um die Summe zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zu erhalten, trägt man also von dem Endpunkt des Vektors $\mathfrak{A}$ den Vektor $\mathfrak{B}$ auf und verbindet nun den Anfangspunkt des Vektors $\mathfrak{A}$ mit dem Endpunkt des Vektors $\mathfrak{B}$ (Fig. 3). Die vektorielle oder, wie man auch sagt, die geometrische Summe der beiden Vektoren wird durch das Symbol ausgedrückt

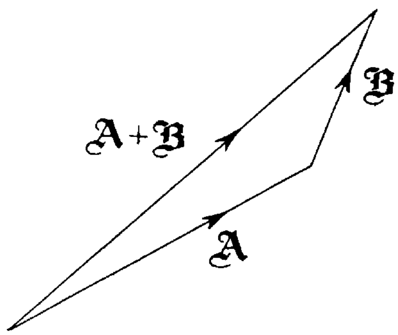

Fig. 3.

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} .$$

Ohne weiteres zeigt die geometrische Anschauung, daß ebenso wie für die arithmetische so auch für die vektorielle Addition sowohl das kommutative als auch das assoziative Gesetz gilt. Es ist

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A} , \tag{1}$$

und wenn ein beliebiger dritter Vektor mit $\mathfrak{C}$ bezeichnet wird, ist

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C} = (\mathfrak{A} + \mathfrak{C}) + \mathfrak{B} = (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) + \mathfrak{A} . \tag{2}$$

Sind zwei zu addierende Vektoren gleich gerichtet, so geht die geometrische Addition in die arithmetische über, indem der Betrag der Summe dann einfach gleich ist der Summe der Einzelbeträge.

Unter der Differenz zweier Vektoren, bezeichnet durch das Symbol

$$\mathfrak{A} - \mathfrak{B} ,$$

versteht man die Summe aus dem Vektor $\mathfrak{A}$ und aus einem Vektor, der dem Vektor $\mathfrak{B}$ entgegengesetzt gleich ist.

Hat ein Vektor $\mathfrak{A}$ die Komponenten A_x, A_y, A_z, so können wir den Vektor auch auffassen als die Summe dreier Vektoren, die in die Richtungen der Koordinatenachsen fallen und die Beträge A_x, A_y, A_z haben. Indem wir die Symbole für die Grundvektoren des Koordinatensystems benutzen, können wir also die Formel aufstellen

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{i} A_x + \mathfrak{j} A_y + \mathfrak{k} A_z . \tag{3}$$

Ist umgekehrt ein Vektor $\mathfrak{A}$ in der Form darstellbar

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{i} S' + \mathfrak{j} S'' + \mathfrak{k} S''' ,$$

wobei S', S'' und S''' drei skalare Ausdrücke bedeuten mögen, so können wir daraus sofort schließen, daß S' die x-Komponente des Vektors ist, S'' die y- und S''' die z-Komponente.

Denken wir uns die Gl. 3 auch für einen zweiten Vektor $\mathfrak{B}$ gebildet und zu der ursprünglichen Gl. 3 vektoriell hinzuaddiert, so finden wir

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{i}\,(A_x + B_x) + \mathfrak{j}\,(A_y + B_y) + \mathfrak{k}\,(A_z + B_z) . \tag{4}$$

Nach dem vorhin Gesagten bedeutet diese Formel, daß die Komponenten der Summe zweier Vektoren gleich sind den Summen der Komponenten der einzelnen Vektoren.

Bei der Multiplikation von Vektoren unterscheidet man die sogenannte innere und die sogenannte äußere Multiplikation. Als inneres oder skalares Produkt zweier Vektoren definiert man einen Skalar, der sich ergibt, wenn man den Betrag des einen Vektors multipliziert mit der Projektion des anderen Vektors auf den ersten Vektor. Das innere Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ wird durch das Symbol bezeichnet

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{B} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{B} \quad \text{oder} \quad (\mathfrak{A}\,\mathfrak{B})\,.$$

Es ist also

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{B} = A\,B\cos(\mathfrak{A},\,\mathfrak{B})\,. \tag{5}$$

Das skalare Produkt ist positiv oder negativ, je nachdem ob die Vektoren miteinander einen spitzen oder einen stumpfen Winkel bilden.

Aus der Definition des skalaren Produktes folgt zunächst, daß ebenso wie für die arithmetische Multiplikation das kommutative Gesetz gilt; es ist

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\,\mathfrak{A}\,. \tag{6}$$

Wir wollen nun weiterhin das skalare Produkt aus einem Vektor $\mathfrak{A}$ und einem zweiten Vektor $\mathfrak{D}$ untersuchen, der seinerseits die Summe zweier Vektoren $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ sei. Indem wir die Richtung des Vektors $\mathfrak{A}$ zu der x-Achse eines sonst beliebigen Koordinatensystems machen, erkennen wir aus der Gl. 4 sogleich, daß die Projektion des Vektors $\mathfrak{D}$ auf die Richtung des Vektors $\mathfrak{A}$ gleich ist der Summe der Projektionen der Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$. Nach der Definition des skalaren Produktes ist also

$$\mathfrak{A}\,(\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = \mathfrak{A}\,\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\,\mathfrak{C}\,. \tag{7}$$

Für die innere Multiplikation gilt nicht nur das kommutative, sondern auch das distributive Gesetz, weshalb auf die skalare Multiplikation die Rechenregeln der arithmetischen Multiplikation angewendet werden können.

Aus der Gl. 5 folgt, daß in zwei Fällen das skalare Produkt eine besonders einfache Form annimmt, nämlich dann, wenn die beiden Vektoren gleich gerichtet oder aber zueinander normal sind. Im ersten Falle ist das skalare Produkt einfach gleich dem Produkt der Beträge, und daher ist im besonderen das skalare Produkt jedes Vektors mit sich selbst gleich dem Quadrate des Betrages; es ist

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{A} = A^2\,. \tag{8}$$

Hingegen ist

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{B} = 0, \text{ wenn } \mathfrak{A} \perp \mathfrak{B}\,. \tag{9}$$

Umgekehrt kann aus dem Umstande, daß das skalare Produkt zweier Vektoren verschwindet, stets geschlossen werden, daß die beiden Vektoren aufeinander senkrecht stehen. In ihrer Anwendung auf die Grundvektoren ergeben die Gl. 8 und 9 die wichtigen Beziehungen

$$\mathfrak{i}\,\mathfrak{i} = \mathfrak{j}\,\mathfrak{j} = \mathfrak{k}\,\mathfrak{k} = 1 \tag{10}$$

und

$$\mathfrak{i}\,\mathfrak{j} = \mathfrak{j}\,\mathfrak{k} = \mathfrak{k}\,\mathfrak{i} = 0\,. \tag{11}$$

Das skalare Produkt zweier Grundvektoren ergibt immer eins oder null, je nachdem, ob die beiden Faktoren gleich oder verschieden sind.

Wollen wir das skalare Produkt zweier Vektoren durch die Komponenten der Vektoren ausdrücken, so gehen wir von der Gleichung aus

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{B} = (\mathfrak{i}\,A_x + \mathfrak{j}\,A_y + \mathfrak{k}\,A_z)\,(\mathfrak{i}\,B_x + \mathfrak{j}\,B_y + \mathfrak{k}\,B_z)\,. \tag{12}$$

Wenn wir im Sinne des distributiven Gesetzes ausmultiplizieren, erhalten wir auf der rechten Seite neun Glieder, von denen aber nach Gl. 11 sechs verschwinden. Wenden wir auf die übrigbleibenden drei die Gl. 10 an, so erhalten wir die einfache Beziehung

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{B} = A_x\,B_x + A_y\,B_y + A_z\,B_z\,. \tag{13}$$

Dividieren wir diese Gleichung durch das Produkt $A\,B$, und beachten wir, daß A_x gleich ist $A \cos(\mathfrak{A}, x)$, so ergibt sich nach Gl. 5 die Relation

$$\begin{cases} \cos(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \cos(\mathfrak{A}, x)\cos(\mathfrak{B}, x) \\ \quad + \cos(\mathfrak{A}, y)\cos(\mathfrak{B}, y) + \cos(\mathfrak{A}, z)\cos(\mathfrak{B}, z)\,. \end{cases} \tag{14}$$

Im Gegensatz zu dem inneren oder skalaren Produkt definiert man als das äußere oder Vektorprodukt zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einen Vektor, dessen Betrag gleich ist dem Flächeninhalt eines von den Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gebildeten Parallelogramms, der also soviel Längeneinheiten mißt, als das Parallelogramm Flächeneinheiten enthält und der einen solchen Richtungssinn hat, daß von seiner Spitze aus gesehen die Drehung dem Uhrzeiger entgegengesetzt erscheint, die auf kürzestem Wege den im Produkte an erster Stelle stehenden Vektor in die Richtung des an zweiter Stelle stehenden Vektors überführt, wofern man beide Vektoren von demselben Punkte aus zieht (Fig. 4). Man bezeichnet das Vektorprodukt zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch das Symbol

$$[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]\,.$$

In der Tat ist das Vektorprodukt eigentlich nicht eine gerichtete Strecke, sondern eine gerichtete Plangröße; aber es erweist sich für alle vektoriellen Operationen als zweckmäßig, statt mit gerichteten Plangrößen mit den sie „ergänzenden Hilfsvektoren“ zu rechnen, die eben in der angegebenen Weise senkrecht auf den gerichteten Plangrößen errichtet werden.

Aus der Definition des Vektorproduktes ergibt sich für seinen **Betrag** der Wert $AB \sin(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Weiter folgt aus der Definition, daß sich der Richtungssinn des Vektorproduktes ändert, wenn die Reihenfolge der beiden Vektoren im Produkt geändert wird; es ist

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = -[\mathfrak{B}\mathfrak{A}]. \tag{15}$$

Wir wollen nun weiterhin das Vektorprodukt aus einem Vektor $\mathfrak{A}$ und einem zweiten Vektor $\mathfrak{D}$ untersuchen, der seinerseits die Summe zweier Vektoren $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ sei. Wir denken uns hierzu ein Parallelogramm konstruiert, dessen Seiten von den Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gebildet werden

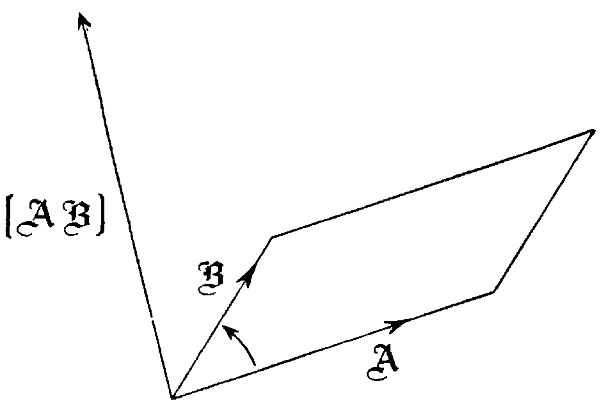

Fig. 4.

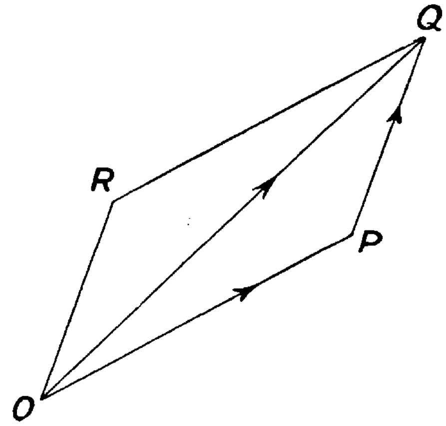

Fig. 5.

mögen, dessen Diagonale also gleich $\mathfrak{D}$ sei, und denken uns nun dieses Parallelogramm auf eine zu dem Vektor $\mathfrak{A}$ senkrechte Ebene projiziert. Die Projektionen der Seiten und der Diagonale sind dann gegeben durch die Ausdrücke

$$B \sin(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}); \quad C \sin(\mathfrak{A}, \mathfrak{C}); \quad D \sin(\mathfrak{A}, \mathfrak{D}).$$

Wir denken uns nun die Dimensionen dieses Parallelogramms vergrößert im Verhältnis $A:1$; dann erhalten wir (dargestellt durch Fig. 5) ein Parallelogramm $OPQR$, und es sind die Längen der Strecken OP, PQ und OQ numerisch gleich den Beträgen der drei Vektorprodukte $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$, $[\mathfrak{A}\mathfrak{C}]$ und $[\mathfrak{A}\mathfrak{D}]$. Nun denken wir uns schließlich noch in der Figurenebene das Parallelogramm $OPQR$ um 90^0 so gedreht, daß die Strecke OP senkrecht stehe auf dem Vektor $\mathfrak{B}$; dann steht natürlich auch die Strecke PQ senkrecht auf dem Vektor $\mathfrak{C}$ und die Strecke OQ senkrecht auf dem Vektor $\mathfrak{D}$. Überdies sind aber, weil die Figurenebene senkrecht auf dem Vektor $\mathfrak{A}$ steht, alle drei gerichteten Strecken auch normal zu dem Vektor $\mathfrak{A}$. Nach erfolgter Drehung stellen also die drei Strecken OP, PQ und OQ nach Größe und Richtung die drei Vektorprodukte $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$, $[\mathfrak{A}\mathfrak{C}]$ und $[\mathfrak{A}\mathfrak{D}]$ dar;[1] und da die Diagonale eines Parallelogramms

[1] Es ist überflüssig, in diesem Zusammenhang auch vom Richtungssinn zu sprechen.

gleich ist der Vektorsumme der Seiten des Parallelogramms, so ergibt sich somit die Beziehung

$$[\mathfrak{A}\,\mathfrak{D}] = [\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}] + [\mathfrak{A}\,\mathfrak{C}]$$

oder, da ja $\mathfrak{D}$ die Summe von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ ist,

$$[\mathfrak{A}\,(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})] = [\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}] + [\mathfrak{A}\,\mathfrak{C}]\,. \tag{16}$$

Für die vektorielle Multiplikation gilt also ebenso wie für die arithmetische das distributive Gesetz; und daraus folgt, daß die äußere Multiplikation nach den Regeln der arithmetischen durchgeführt werden kann, nur mit dem Unterschiede, daß bei einer Vertauschung in der Reihenfolge der Faktoren das Vorzeichen umgekehrt werden muß.

Aus der Definition des Vektorproduktes folgt, daß es in zwei Fällen eine einfache Gestalt annimmt; nämlich dann, wenn die Vektoren zueinander senkrecht oder wenn sie parallel sind. Im ersten Falle ist der Betrag des Vektorproduktes gleich dem Produkte der einzelnen Beträge; für den zweiten Fall aber finden wir

$$[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}] = 0\,, \quad \text{wenn} \quad \mathfrak{A} \parallel \mathfrak{B}\,. \tag{17}$$

Umgekehrt kann aus dem Umstande, daß das Vektorprodukt zweier Vektoren verschwindet, immer geschlossen werden, daß diese beiden Vektoren die gleiche Richtung haben.

Aus der Gl. 17 ergeben sich für die Grundvektoren die wichtigen Formeln

$$[\mathfrak{i}\,\mathfrak{i}] = [\mathfrak{j}\,\mathfrak{j}] = [\mathfrak{k}\,\mathfrak{k}] = 0\,. \tag{18}$$

Bilden wir hingegen die äußeren Produkte zweier verschiedener Grundvektoren, so haben die Produkte immer den Betrag eins und die Richtung des dritten Grundvektors. Es ergeben sich somit die Beziehungen

$$\left\{\begin{array}{lll} [\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}] = \mathfrak{k}\,; & [\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}] = \mathfrak{i}\,; & [\mathfrak{k}\,\mathfrak{i}] = \mathfrak{j} \\ [\mathfrak{j}\,\mathfrak{i}] = -\mathfrak{k}\,; & [\mathfrak{k}\,\mathfrak{j}] = -\mathfrak{i}\,; & [\mathfrak{i}\,\mathfrak{k}] = -\mathfrak{j}\,. \end{array}\right. \tag{19}$$

Wollen wir die Komponenten des Vektorproduktes durch die Komponenten der miteinander multiplizierten Vektoren ausdrücken, so haben wir nach dem distributiven Gesetz den Ausdruck zu bilden

$$[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}] = [(\mathfrak{i} A_x + \mathfrak{j} A_y + \mathfrak{k} A_z)\,(\mathfrak{i} B_x + \mathfrak{j} B_y + \mathfrak{k} B_z)]\,. \tag{20}$$

Von den neun Gliedern, die sich durch Ausmultiplizieren ergeben, fallen drei Glieder nach Gl. 18 weg, und wir finden somit

$$\begin{aligned}[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}] = {} & [\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}]\,A_x\,B_y + [\mathfrak{i}\,\mathfrak{k}]\,A_x\,B_z \\ & + [\mathfrak{j}\,\mathfrak{i}]\,A_y\,B_x + [\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}]\,A_y\,B_z \\ & + [\mathfrak{k}\,\mathfrak{i}]\,A_z\,B_x + [\mathfrak{k}\,\mathfrak{j}]\,A_z\,B_y\,.\end{aligned}$$

Hierfür finden wir nach den Gl. 19

$$[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}] = \mathfrak{k} A_x B_y - \mathfrak{j} A_x B_z - \mathfrak{k} A_y B_x + \mathfrak{i} A_y B_z + \mathfrak{j} A_z B_x - \mathfrak{i} A_z B_y\,.$$

Indem wir die Glieder ordnen und so drei skalare Ausdrücke erhalten, die mit $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ multipliziert erscheinen, finden wir für die Komponenten des Vektorproduktes die Werte[2]

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]_x &= A_y B_z - A_z B_y \\ [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]_y &= A_z B_x - A_x B_z \\ [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]_z &= A_x B_y - A_y B_x . \end{aligned}\right.$$

Nachdem die innere und die äußere Multiplikation definiert sind, ist es nur noch eine keine weiteren Festsetzungen verlangende Rechenaufgabe, Ausdrücke zu berechnen, in denen drei oder mehr Vektoren miteinander multipliziert erscheinen. Zunächst ist es klar, daß ein Ausdruck von der Form $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$, da in ihm ein Vektor mit einem Skalar multipliziert erscheint, einen Vektor darstellt, der dieselbe Richtung hat wie $\mathfrak{A}$. Die Ausdrücke $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$, $\mathfrak{B}(\mathfrak{C}\mathfrak{A})$, $\mathfrak{C}(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ sind also im allgemeinen voneinander nach Größe und Richtung verschiedene Vektoren.

Das innere Produkt aus einem Vektor und dem äußeren Produkte zweier anderer, also die Größe $\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$, muß natürlich auch ein Skalar sein. Dieser ist gleich dem Flächeninhalt des von den Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gebildeten Parallelogramms, multipliziert mit dem Betrage A und überdies noch mit dem Kosinus des Winkels, den die Richtung von $\mathfrak{A}$ mit der auf dem Parallelogramm errichteten Normalen einschließt. Der Kosinus dieses Winkels ist aber gleich dem Sinus des Winkels, den der Vektor $\mathfrak{A}$ mit der Ebene des Parallelogramms bildet. Infolgedessen ist das skalare Produkt $\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ gleich dem Volumen des von den Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ gebildeten Parallelepipeds. Hieraus folgt sogleich die wichtige Beziehung

$$(22)\qquad \mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = 0\,, \quad \text{wenn } \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \text{ komplanar}$$

sind, d. h. wenn die drei Vektoren, von einem Punkte aus aufgetragen, in eine Ebene zu liegen kommen.

Das Volumen des Parallelepipeds ergibt sich aber nun auch, wenn der Inhalt des von den Vektoren $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}$ gebildeten Parallelogramms multipliziert wird mit dem Betrage B und überdies mit dem Sinus des Winkels, den die Richtung von $\mathfrak{B}$ mit der Parallelogrammebene einschließt. Analoges gilt schließlich auch für das von den Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gebildete Parallelogramm, und somit ergibt sich durch zyklische Vertauschung die Beziehung[3]

---

[2] Aus der ersten der drei Gl. 21 erhält man die zweite und aus dieser wieder die dritte, indem man die Indizes x, y, z zyklisch, d. h. in der Reihenfolge x, y, z, x usw. vertauscht. Aus x wird y, aus y wird z und aus z wiederum x.

[3] Daß in der Gl. 23, in der die drei Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ zyklisch vertauscht werden, auch das Vorzeichen überall richtig ist, erkennt man leicht durch folgende Überlegung. Wir denken uns die von den Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gebildete Ebene horizontal, etwa als Tischebene, und in dieser die Lage der beiden Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ derart, daß, von oben gesehen, die Drehung dem Uhrzeiger entgegengesetzt erscheint, die den

(23) $$\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}] = \mathfrak{B}[\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}] = \mathfrak{C}[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]\,.$$

Das zweifache Vektorprodukt $\left[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]\right]$ muß jedenfalls wiederum ein Vektor sein. Bezeichnen wir den Vektor $[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]$ mit $\mathfrak{E}$, so ist nach Gl. 21

$$\left[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]\right]_x = A_y E_z - A_z E_y = A_y\,(B_x C_y - B_y C_x) - A_z\,(B_z C_x - B_x C_z)\,.$$

Zu dieser Gleichung addieren wir noch die Identität hinzu

$$0 = A_x\,B_x\,C_x - A_x\,B_x\,C_x\,;$$

dann finden wir

$$\left[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]\right]_x = B_x\,(A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - C_x\,(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)\,.$$

Analoge Gleichungen gelten für die y- und die z-Komponente des zweifachen Vektorproduktes. Beachten wir die Gl. 13, so erhalten wir somit die Formel

(24) $$\left[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]\right] = \mathfrak{B}\,(\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}) - \mathfrak{C}\,(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B})\,.$$

Die Differentiation eines Vektors nach einer skalaren Veränderlichen läßt sich, indem man den Differentialquotienten als Grenzwert eines Differenzenquotienten auffaßt, stets auf die vektorielle Subtraktion zurückführen. Aus der Gl. 4 ergibt sich somit für den zeitlichen Differentialquotienten eines Vektors die Formel

(25) $$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \mathfrak{i}\,\frac{dA_x}{dt} + \mathfrak{j}\,\frac{dA_y}{dt} + \mathfrak{k}\,\frac{dA_z}{dt}\,.$$

Dabei muß aber die wesentliche Voraussetzung erfüllt sein, daß sich die Lage des Koordinatensystems selbst mit der Zeit nicht ändert.

Aus den Gl. 4 und 25 ergibt sich die Formel

(26) $$\frac{d(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}{dt} = \frac{d\mathfrak{A}}{dt} + \frac{d\mathfrak{B}}{dt}\,.$$

Ebenso folgt aus der Gl. 13

Vektor $\mathfrak{B}$ in die Richtung des Vektors $\mathfrak{C}$ überführt. Wir unterscheiden nun zwei Fälle, je nachdem ob der Vektor $[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]$ mit dem Vektor $\mathfrak{A}$ einen spitzen oder einen stumpfen Winkel bildet. Im ersten Falle ist das skalare Produkt $\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]$ positiv, im zweiten negativ. Im ersten Fall muß der Vektor $\mathfrak{A}$ von der Horizontalebene irgendwie nach aufwärts gehen. Ist dies der Fall, dann wird die Anschauung aber immer zeigen, daß dann auch vom Vektor $\mathfrak{B}$ aus gesehen die Drehung dem Uhrzeiger entgegengesetzt erscheint, die auf kürzestem Wege den Vektor $\mathfrak{C}$ in die Richtung des Vektors $\mathfrak{A}$ überführt. Ist dies aber der Fall, dann ist auch der Winkel zwischen den Vektoren $[\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}]$ und $\mathfrak{B}$ spitz, also das skalare Produkt $\mathfrak{B}[\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}]$ positiv; d. h. es haben die Produkte $\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]$ und $\mathfrak{B}[\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}]$ dasselbe Vorzeichen. Dasselbe läßt sich auch leicht für den zweiten Fall zeigen, daß der Vektor $\mathfrak{A}$ mit dem Vektor $[\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]$ einen stumpfen Winkel einschließt. (Bei dem Studium veranschaulicht man sich am besten die Verhältnisse so, daß man auf einen Tisch von einem Punkte aus zwei verschiedenfarbige Bleistifte nach verschiedenen Richtungen legt und dann irgendwie nach aufwärts von demselben Punkte aus einen Federstiel oder einen dritten Bleistift hält.)

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{B}}{dt} + \mathfrak{B}\frac{d\mathfrak{A}}{dt}. \tag{27}$$

Aus den Gl. 21 ergibt sich wiederum für die Differentiation eines Vektorproduktes die Regel

$$\frac{d}{dt}[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}] = \left[\mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right] + \left[\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\mathfrak{B}\right]. \tag{28}$$

Andererseits können wir, indem wir einen in die Richtung eines Vektors $\mathfrak{A}$ fallenden Einheitsvektor mit $\mathfrak{a}$ bezeichnen, (gemäß Gl. 6 des § 2) setzen

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{a}\,A \tag{29}$$

und somit

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \mathfrak{a}\frac{dA}{dt} + A\frac{d\mathfrak{a}}{dt}. \tag{30}$$

Nun ist aber nach Gl. 8

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{a} = 1\,,$$

und hieraus folgt wieder (nach Gl. 27)

$$\mathfrak{a}\frac{d\mathfrak{a}}{dt} = 0$$

oder (nach Gl. 9), weil ja die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{A}$ in ihrer Richtung übereinstimmen,

$$\frac{d\mathfrak{a}}{dt} \perp \mathfrak{A}\,. \tag{31}$$

Bezeichnen wir nun mit $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ die Werte, die der von einem bestimmten Punkte aus gezogene Einheitsvektor $\mathfrak{a}$ zu Beginn und zu Ende eines Zeitelementes $d\,t$ hat, so müssen die Werte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ und $d\,\mathfrak{a}$ zu einem Dreieck zusammenfügbar sein (Fig. 6). Bezeichnen wir den im Bogenmaß gemessenen Winkel, um den sich in dem Zeitelement $d\,t$ die Richtung des Vektors $\mathfrak{a}$ gedreht hat, mit $d\,\varphi$, so ist also der Betrag von $d\,\mathfrak{a}$ gleich $d\,\varphi$. Die Gl. 30 kann somit auch in der Form ausgesprochen werden, daß der zeitliche Differentialquotient eines Vektors stets in zwei Komponenten zerlegt werden kann: in eine Komponente in der Richtung des Vektors und vom Betrage dA/dt und in eine dazu senkrechte Komponente vom Betrage $A\,d\,\varphi/d\,t$, wenn $d\,\varphi$ der Winkel ist, um den sich in dem Zeitelement $d\,t$ der Vektor $\mathfrak{A}$ dreht. Beide Komponenten liegen in der als eben aufzufassenden Fläche, die in dem Zeitelement der Vektor durchstreicht.

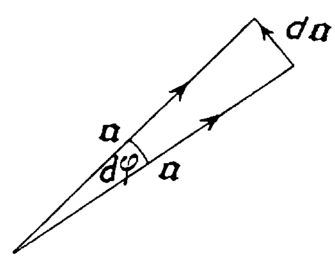

Fig. 6.

§ 4. Die Bewegungsgleichungen des Massenpunktes.

Der Zusammenhang, der zwischen den beiden für die Bewegung wesentlichen Vektoren der Kraft und der Geschwindigkeit besteht, wird durch das zweite NEWTONsche Bewegungsgesetz ausgedrückt, demzufolge für jeden Körper der Kraftvektor stets proportional ist der zeitlichen Änderung des Geschwindigkeitsvektors; der Proportionalitätsfaktor erscheint demnach als eine für den Körper charakteristische Konstante, die als die Masse des Körpers bezeichnet wird.[1]

Bezeichnen wir die vektoriell aufgefaßte Geschwindigkeit mit $\mathfrak{v}$, die vektoriell aufgefaßte Kraft mit $\mathfrak{K}$ und die Masse des Körpers mit m, so findet das zweite NEWTONsche Bewegungsgesetz seinen vektoriellen Ausdruck in der Gleichung

$$\mathfrak{K} = m \frac{d\mathfrak{v}}{dt}. \tag{1}$$

Der selbst einen Vektor darstellende zeitliche Differentialquotient des Geschwindigkeitsvektors wird als die Beschleunigung bezeichnet. Für die folgenden Untersuchungen wollen wir die vereinfachende Annahme machen, daß sich der Körper so bewege, wie wenn seine ganze Masse in einem einzigen Punkte konzentriert wäre. Wir legen also den folgenden Betrachtungen einen fingierten, sogenannten „Massenpunkt" zugrunde.[2]

Die jeweilige Lage des bewegten Massenpunktes ist nun bestimmbar durch eine gerichtete Strecke $\mathfrak{r}$, die als Radiusvektor von einem irgendwie gewählten Ursprung zu dem bewegten Massenpunkt gezogen wird und als deren Komponenten eben die Koordinaten des bewegten Massenpunktes x, y, z erscheinen.

[1] In der Fassung NEWTONS lautet das zweite Bewegungsgesetz: Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur (Die Änderung der Bewegung ist der einwirkenden Kraft proportional und erfolgt in deren Richtung). — Hierzu kommt als „zweite Definition" bei NEWTON der Satz: Quantitas motus est mensura eius orta ex velocitate et quantitate materiae coniunctim (Die Größe der Bewegung wird durch das Produkt aus Geschwindigkeit und Masse gemessen). — Als Einheit der Masse gilt in der theoretischen Physik das Gramm, d. i. der tausendste Teil einer in Sèvres bei Paris aufbewahrten Normalmasse, die mit ziemlicher Genauigkeit gleich ist der Masse von einem Kubikdezimeter Wasser bei 4° C. Als Längeneinheit gilt das Zentimeter, d. i. der hundertste Teil eines in Sèvres verwahrten Normallängenmaßes. Als Zeiteinheit gilt die Sekunde, d. i. der $24 \times 60 \times 60$ste Teil des mittleren Sonnentages. Aus diesen drei Einheiten ergeben sich ohne weiteres die Einheiten der Geschwindigkeit und der Beschleunigung sowie die als Dyne bezeichnete Einheit der Kraft.

[2] Die fingierte Konzentration der Masse in einem einzigen Punkt bedingt namentlich dann eine wesentliche Vereinfachung des Problems, wenn die wirkende Kraft eine Funktion des Ortes ist, sich also von Stelle zu Stelle ändert, in welchem Falle natürlich die Berücksichtigung der räumlichen Ausdehnung des Körpers die Aufgabe sehr verwickeln würde. Weiter hat die fingierte Konzentration der Masse den Vorteil, daß von allen Kräften, die im Innern eines Körpers auftreten, von allen Formänderungen sowie von allen etwaigen Drehungen abstrahiert werden kann.

Hat der Radiusvektor zu den Zeiten t und $t + dt$ die Werte $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$, so ist

$$\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_1 + \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\, dt\,. \tag{2}$$

Andererseits ist, wenn das in dem Zeitelement zurückgelegte Wegelement mit $d\mathfrak{s}$ bezeichnet wird,

$$\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_1 + d\mathfrak{s} \tag{3}$$

(Fig. 7). Nach der Definition der Geschwindigkeit ist wiederum

$$d\mathfrak{s} = \mathfrak{v}\, dt\,. \tag{4}$$

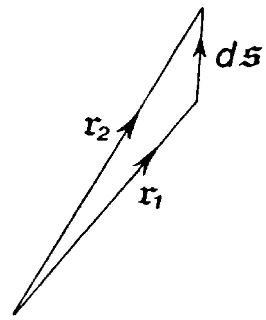

Fig. 7.

Ein Vergleich der Gl. 2 und 3 ergibt somit die Beziehung

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\,. \tag{5}$$

Der Vektor der Beschleunigung $\mathfrak{b}$ ist nach seiner Definition gleich dem zeitlichen Differentialquotienten des Geschwindigkeitsvektors; es ist also

$$\mathfrak{b} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt} \tag{6}$$

oder

$$\mathfrak{b} = \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\,. \tag{7}$$

In analytischer Darstellung ergeben sich aus diesen Gleichungen die Formeln

$$v_x = \frac{dx}{dt}\,, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}\,, \qquad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{8}$$

und

$$b_x = \frac{d^2x}{dt^2}\,, \qquad b_y = \frac{d^2y}{dt^2}\,, \qquad b_z = \frac{d^2z}{dt^2}\,. \tag{9}$$

Bei Berücksichtigung dieser Gleichungen löst sich die Gl. 1 in analytischer Schreibweise in die Bewegungsgleichungen auf

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2}\,, \qquad Y = m\frac{d^2y}{dt^2}\,, \qquad Z = m\frac{d^2z}{dt^2}\,, \tag{10}$$

wenn X, Y, Z die Kraftkomponenten bedeuten.

Da die Beschleunigung der zeitliche Differentialquotient der Geschwindigkeit ist, so können wir die Beschleunigung (nach Gl. 30 des § 3) in zwei zueinander senkrechte Komponenten zerlegen, deren eine in der Richtung der Geschwindigkeit liegt und als die Tangentialbeschleunigung bezeichnet wird, während die dazu senkrechte Komponente die Normalbeschleunigung genannt wird. Für die Tangentialbeschleunigung b_t ergibt sich nach dem, was am Schlusse des § 3 gesagt wurde, der Wert

$$b_t = \frac{dv}{dt}\,; \tag{11}$$

hingegen gilt für die Normalbeschleunigung die Formel

$$b_n = v \frac{d\varphi}{dt}\,, \tag{12}$$

wenn $d\varphi$ der Winkel ist, um den sich der Geschwindigkeitsvektor in dem Zeitelement dt dreht. Ist AB das Wegelement, das in dem Zeitelement dt zurückgelegt wird, so ist $d\varphi$ gleich dem Winkel, den die in den Punkten A und B an die Bahnkurven gelegten Tangenten miteinander bilden. Für diesen Winkel (den sogenannten „Kontingenzwinkel") gilt aber wieder nach einem elementaren Satz der Differentialgeometrie (der hier als bekannt vorausgesetzt werden möge) die Beziehung, daß das Kurvenstück AB gleich ist dem Produkte aus diesem (im Bogenmaß gemessenen) Winkel und aus dem Werte, den der Krümmungshalbmesser für das betreffende Kurvenstück hat. Nennen wir den Wert des Krümmungsradius ϱ, so ist also

$$ds = \varrho\, d\varphi$$

oder, wenn wir noch durch dt dividieren,

$$v = \varrho \frac{d\varphi}{dt}\,.$$

Es ist also

$$b_n = \frac{v^2}{\varrho}\,. \tag{13}$$

Trägt man von dem Punkte A aus die Richtungen auf, die der Geschwindigkeitsvektor in den Punkten A und B hat, so bestimmen diese beiden Vektoren eine Ebene, die die Schmiegungsebene des Kurvenstückes AB genannt wird. In dieser Schmiegungsebene liegen demnach die Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v} + d\mathfrak{v}$ und somit auch der Vektor $d\mathfrak{v}/dt$, also der Beschleunigungsvektor mit seinen beiden Komponenten.[3] Für eine kreisförmige Bewegung wird ϱ einfach gleich dem Kreisradius. Die Normalkomponente der Beschleunigung wird dann einfach als die Zentripetalbeschleunigung bezeichnet.[4]

Das Produkt aus der Masse und dem Geschwindigkeitsvektor wird als Bewegungsgröße oder Impuls bezeichnet. Wird der Impuls $\mathfrak{G}$ genannt, so ist also

$$\mathfrak{G} = m\,\mathfrak{v} \tag{14}$$

und somit

$$\mathfrak{K} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt}\,. \tag{15}$$

---

[3] Die zu der Schmiegungsebene normale Richtung wird als die Binormale bezeichnet. Die Komponente der Beschleunigung nach dieser Richtung ist also stets null.

[4] Bezeichnet man die Umlaufszeit mit T, so ergibt sich für eine Kreisbewegung als anderer Ausdruck der Gl. 13 die Formel

$$b_n = \frac{4\,r\,\pi^2}{T^2}\,.$$

Das Produkt $\mathfrak{K}\,dt$ (das also ebenfalls eine Vektorgröße darstellt) wird auch der in dem Zeitelement $d\,t$ erfolgende Antrieb genannt. Die Gl. 15 kann somit auch in der Form ausgesprochen werden, daß die Vermehrung der Bewegungsgröße gleich dem Antrieb ist.

Zu dem zweiten NEWTONschen Bewegungsgesetz kommt als ein wichtiger Zusatz das Prinzip hinzu, wonach sich die Wirkungen mehrerer, gleichzeitig an einem Massenpunkt angreifender Kräfte einfach superponieren. Sind also die Beschleunigungen, die zwei Kräfte an einem Massenpunkt hervorbringen, wenn jede einzeln angreift, $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$, so soll sich nach dem Superpositionsprinzip der Massenpunkt, falls beide Kräfte gleichzeitig angreifen, mit einer tatsächlichen Beschleunigung $\mathfrak{b}$ bewegen, für die die Beziehung gilt

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 \,. \tag{16}$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit der Masse, so ergeben die Produkte $m\,\mathfrak{b}_1$ und $m\,\mathfrak{b}_2$ die beiden angreifenden Kräfte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$. Es gilt also für die tatsächliche Beschleunigung die Beziehung

$$m\frac{d\,\mathfrak{v}}{d\,t} = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 \,. \tag{17}$$

Ein Massenpunkt, an dem gleichzeitig mehrere Kräfte angreifen, bewegt sich also so, als ob an ihm nur eine einzige Kraft angreifen würde, die gleich ist der vektoriellen Summe aus den angreifenden Kräften. Man bezeichnet diese Kraft als die resultierende Kraft, und da sie sich nach der Definition der vektoriellen Addition durch Konstruktion eines Parallelogramms ergibt, so bezeichnet man das Superpositionsprinzip der Kraftwirkung auch als das Prinzip des Kräfteparallelogramms.

Der Satz vom Kräfteparallelogramm stammt in seiner Anwendung auf statische Probleme von STEVIN[5], in seiner allgemeinen dynamischen Geltung von NEWTON. Die Zerlegung der Beschleunigung in eine tangentiale und eine normale Komponente hat (bereits vor NEWTON im Jahre 1673) HUYGENS zuerst durchgeführt. Die Bewegungsgleichungen des Massenpunktes hat aus dem zweiten NEWTONschen Bewegungsgesetz zuerst EULER (1765) abgeleitet.

§ 5. Wurfbewegung und freier Fall.

Die Bewegung eines Körpers im Schwerefeld der Erde wird durch die Differentialgleichung beschrieben

$$\frac{d\,\mathfrak{v}}{d\,t} = \mathfrak{g} \,, \tag{1}$$

[5] Von STEVIN stammt der Satz, daß sich drei in einem Punkte angreifende Kräfte dann das Gleichgewicht halten, wenn sich die gerichteten Strecken, die die Kräfte darstellen, zu einem Dreieck zusammenfügen lassen.

wobei $\mathfrak{g}$ die Beschleunigung der Erdschwere darstellt, also einen Vektor, der die Richtung der nach abwärts gerichteten Vertikalen und einen Betrag von etwa 981 cm $\sec^{-2}$ (in der geographischen Breite von Mitteleuropa) hat.

Durch Integration der Gl. 1 ergibt sich die Beziehung

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{g}\, t + \mathfrak{u}\,, \tag{2}$$

wobei die vektorielle Integrationskonstante $\mathfrak{u}$ den Wert darstellt, den zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit hat. Eine Bewegung, die im Schwerefeld der Erde mit einer von null verschiedenen Anfangsgeschwindigkeit erfolgt, wird nun als eine Wurfbewegung bezeichnet. Der Vektor $\mathfrak{u}$ bestimmt die Wurfrichtung und durch seinen Betrag die Wurfgeschwindigkeit. Der Winkel, den die Wurfrichtung mit der Horizontalen einschließt, wird der Elevationswinkel genannt.

Aus der Gl. 2 folgt zunächst, daß der geworfene Körper die Ebene nicht verläßt, die durch die Vektoren $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{g}$ bestimmt ist, also die Vertikalebene, die die Wurfrichtung enthält. In dieser Vertikalebene werde ein ebenes Koordinatensystem gelegt mit einer horizontalen x-Achse und einer vertikal nach aufwärts gehenden z-Achse. Wird der Elevationswinkel mit α bezeichnet, so ist

$$u_x = u \cos \alpha\,, \qquad u_z = u \sin \alpha\,. \tag{3}$$

Da der Vektor $\mathfrak{g}$ die Richtung der negativen z-Achse hat, so nimmt in analytischer Schreibweise die Gl. 2 die Form an

$$\frac{d\,x}{d\,t} = u \cos \alpha\,, \qquad \frac{d\,z}{d\,t} = -\,g t + u \sin \alpha\,. \tag{4}$$

Hieraus folgt durch Integration

$$x = u\, t \cos \alpha\,, \qquad z = -\,\frac{g t^2}{2} + u\, t \sin \alpha\,. \tag{5}$$

Denn die noch hinzukommenden Integrationskonstanten verschwinden, wenn das Koordinatensystem so gelegt wurde, daß für $t = 0$ auch x und z null werden.

Indem wir aus den Gl. 5 die Zeit eliminieren, erhalten wir die Gleichung

$$z = -\,\frac{g}{2}\,\frac{x^2}{u^2 \cos^2 \alpha} + x \operatorname{tg} \alpha\,. \tag{6}$$

Diese Beziehung ist die Gleichung der Wurfbahn; sie stellt eine Parabel dar, deren Achse, weil eben z nur in der ersten Potenz auftritt, der z-Achse parallel, also vertikal sein muß.[1] Die Parabel schneidet die

[1] Die Gleichung einer Parabel, deren Achse mit der z-Achse zusammenfällt und deren Scheitel in der x-Achse liegt, lautet bekanntlich

$$x^2 = 2 p z\,,$$

wenn p die Brennweite ist. Werden die x- und die z-Achse nun parallel zu sich selbst verschoben, so bleibt die Gleichung in bezug auf z linear.

x-Achse außer in dem Koordinatenursprung noch in einem zweiten Punkt, dessen Entfernung von dem Ursprung (OA in Fig. 8) als die Wurfweite bezeichnet wird. Die Wurfweite, die a genannt werde, ergibt sich aus der Gl. 6, indem man in dieser $z = 0$ setzt; es ist demnach[2]

$$(7)\qquad a = \frac{2u^2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \alpha}{g} = \frac{u^2}{g} \sin(2\alpha)\,.$$

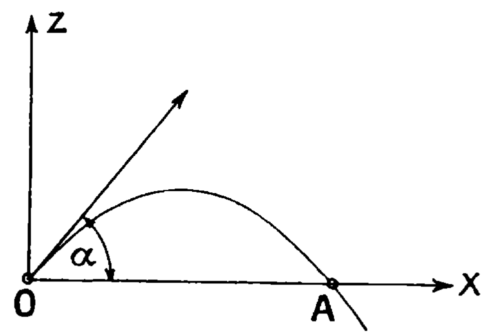

Fig. 8.

Die z-Koordinate des Scheitels der Wurfbahn wird als die Steighöhe, die Zeit, die vom Beginn der Wurfbewegung bis zur Erreichung der Steighöhe vergeht, wird als die Steigdauer bezeichnet. Die Steigdauer läßt sich dadurch ermitteln, daß in dem Scheitel der Bahn die Vertikalgeschwindigkeit, also dz/dt verschwinden muß. Nennen wir die Steigdauer t', so folgt aus Gl. 4

$$(8)\qquad t' = \frac{u}{g} \sin \alpha\,.$$

Setzen wir diesen Wert in die zweite der Gl. 5 ein, so ergibt sich für die Steighöhe, die z' genannt werde, der Wert

$$z' = -\frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} + \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{g}$$

oder

$$(9)\qquad z' = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{g\,t'^2}{2}\,.$$

Aus der Gl. 7 läßt sich der Elevationswinkel bestimmen, unter dem ein Körper mit einer ihrem Betrage nach gegebenen Wurfgeschwindigkeit geworfen werden muß, um ein in der horizontalen Entfernung a gelegenes Ziel zu erreichen. Es muß sein

$$(10)\qquad \sin(2\alpha) = \frac{a\,g}{u^2}\,.$$

Ist nun a größer als u^2/g, so wird $\sin(2\alpha)$ größer als eins, und eine reelle Lösung ist dann nicht möglich. Das Ziel liegt dann zu weit, als daß es überhaupt mit der gegebenen Geschwindigkeit erreicht werden könnte. Ist hingegen a kleiner als u^2/g, so wird $\sin(2\alpha)$ kleiner als eins. Nun haben aber andererseits zwei einander zu 180° ergänzende Winkel denselben Sinus; ist somit α eine Lösung, so muß es daher ein Winkel von $90^0 - \alpha$ auch sein.

Das Ziel kann also mit der gegebenen Wurfgeschwindigkeit mittels zweier verschiedener, zueinander komplementärer Elevationswinkel erreicht werden, mittels einer steileren und einer flacheren

[2] Es wird die bekannte Formel benutzt, derzufolge $\sin(2\alpha)$ gleich ist $2 \sin \alpha \cos \alpha$.

Parabel (Fig. 9). Ist im besonderen a gleich u^2/g, so fallen die beiden Parabeln zusammen; für den Elevationswinkel gibt es dann nur einen Wert, nämlich 45°. Andererseits folgt aber auch aus der Gl. 7, daß die größte Wurfweite bei einem Elevationswinkel von 45° erreicht wird.

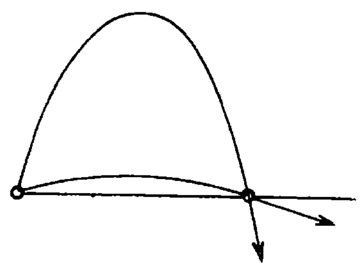

Fig. 9.

Wenn im besonderen die Wurfgeschwindigkeit verschwindet, so ergibt sich als Spezialfall einer Wurfbewegung der freie Fall. Aus den Gl. 4 und 5 folgen dann für die Fallgeschwindigkeit (v) und die Fallhöhe (h) die Beziehungen

$$v = g\,t\,, \qquad h = \tfrac{1}{2}\,g t^2\,. \tag{11}$$

Hieraus folgt für den Zusammenhang zwischen v und h

$$v = \sqrt{2gh}\,. \tag{12}$$

Die elementaren Gesetze des freien Falles sind ebenso wie die der Wurfbewegung bereits von Galilei um das Jahr 1590 abgeleitet und in seinen 1638 erschienenen „Discorsi" veröffentlicht worden.

Zum Schluß möge noch der Einfluß des widerstehenden Mittels auf die freie Fallbewegung kurz besprochen werden. Wie die Erfahrung zeigt, kann der Widerstand bei nicht allzu rascher Bewegung näherungsweise der Geschwindigkeit proportional und ihr entgegengesetzt gerichtet angenommen werden; der Proportionalitätsfaktor wird als der Reibungskoeffizient bezeichnet. Für die Fallbewegung im widerstehenden Mittel gilt somit die Gleichung

$$\frac{d\,v}{d\,t} = g - k\,v\,, \tag{13}$$

wenn k den Quotienten aus dem Reibungskoeffizienten und der Masse des fallenden Körpers bedeutet.

Durch Integration folgt aus der Gl. 13

$$\int \frac{d\,v}{g - k\,v} = t + C$$

oder

$$\ln\,(g - k\,v) = -k\,t + \ln C'$$

oder

$$g - k\,v = C'\,e^{-k\,t}\,,$$

wobei C und C' Integrationskonstanten bedeuten. Da bei dem freien Fall für $t = 0$ auch v verschwindet, so wird C' einfach gleich g, und somit

$$v = \frac{g}{k}\,(1 - e^{-k\,t})\,. \tag{14}$$

Mit wachsender Zeit nähert sich also die Geschwindigkeit dem konstanten Grenzwert g/k. Da k den Quotienten aus dem Reibungskoeffi-