Bergmann · Schaefer
Lehrbuch der Experimentalphysik III
Optik

Bergmann · Schaefer
Lehrbuch der Experimentalphysik

Band III Optik

8. Auflage
Herausgeber Heinrich Gobrecht

Autoren
Hans-Joachim Eichler, Heinrich Gobrecht
Michael Krystek, Heinz Niedrig
Manfred Richter, Heinz Schoenebeck
Horst Weber, Kurt Weber

Walter de Gruyter
Berlin · New York 1987

Herausgeber

Dr.-Ing. Heinrich Gobrecht
em. o. Professor für Physik
Institut für Festkörperphysik
Technische Universität Berlin
Hardenberg-Straße 36
D-1000 Berlin 12

1. Auflage 1955
2. Auflage 1959
3. Auflage 1962
4. Auflage 1966 bearbeitet von Frank Matossi
5. Auflage 1972
6. Auflage 1974 Herausgeber Heinrich Gobrecht
7. Auflage 1978
  1. Nachdruck 1985
  2. Nachdruck 1986
8. Auflage 1987

Das Buch enthält 682 Abbildungen, 70 Tabellen und 2 Farbtafeln am Schluß des Buches.

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Bergmann, Ludwig:
Lehrbuch der Experimentalphysik / Bergmann ; Schaefer. – Berlin ; New York : de Gruyter
Früher mit d. Angabe: Bergmann-Schaefer

NE: Schaefer, Clemens:
Bd. 3. Optik / Herausgeber Heinrich Gobrecht. Autoren Hans-Joachim Eichler ... – 8. Aufl. – 1987.
ISBN 3-11-010882-8

NE: Eichler, Hans-Joachim [Bearb.]

Einbandentwurf: Wernitz & Wernitz, Berlin. Satz: Tutte GmbH, Salzweg-Passau. Druck: Gerike GmbH, Berlin. Bindung: Lüderitz & Bauer GmbH, Berlin.

Vorwort zur 8. Auflage

Die erste Auflage des Bandes „Optik" erschien im Jahre 1955. Die damaligen Autoren – Ludwig Bergmann und Clemens Schaefer – hatten sich das Ziel gesetzt, ein Lehrbuch zu schreiben, in welchem einerseits der Anfänger die Grundlagen der Optik verstehen kann und welches andererseits auch dem Fortgeschrittenen noch nützlich ist. Wenn nun jetzt die achte Auflage erscheint, so kann man daraus wohl zu Recht schließen, daß der Band „Optik" bei vielen Studenten und auch anderen Lesern Zustimmung erhalten hat.

Das Buch wurde neu bearbeitet und verbessert, wo dies notwendig oder zweckmäßig erschien. Tragischerweise erlag Prof. Dr. Dietrich Hahn während der Arbeit an dem Buch einem plötzlichen Herztod. Sein Mitarbeiter Dr. Michael Krystek war sofort bereit, das Kapitel 5 (Optische Strahlung und ihre Messung) vollverantwortlich zu übernehmen. Und leider mußte auch Prof. Dr. Heinz Schoenebeck, kurz, nachdem er die Korrekturen an seinem Kapitel über Relativitätstheorie beendet hatte, aus dem Leben scheiden.

Sowohl die internationalen Einheiten (SI) als auch die international empfohlenen Buchstabensymbole werden weitgehend verwendet. In wenigen Ausnahmen mußte davon abgesehen werden. So z. B. ist der Buchstabe n sowohl für die Brechzahl als auch für die Besetzungsdichte bei den Laserniveaus üblich. Wenn aber in einem Abschnitt diese beiden Begriffe vorkommen, dann wird für die Brechzahl nicht der Buchstabe n, sondern der griechische Buchstabe η benutzt.

Die Literatur zur Ergänzung und Vertiefung steht bei dieser Auflage zum ersten Mal am Ende eines jeden Kapitels. Die Anzahl der empfohlenen Bücher und Aufsätze in Zeitschriften wurde erweitert und ihre Auswahl kritisch durchgesehen. Das deutsch-englische und das englisch-deutsche Wörterverzeichnis enthält solche Fachwörter, die in dem Buch vorkommen. Es soll dem Leser eine Hilfe sein, zumal die Verwendung der englischen Sprache in der Naturwissenschaft und Technik zunimmt.

Berlin, Februar 1987 *Heinrich Gobrecht*

Autorenverzeichnis

Prof. Dr.-Ing. Hans-Joachim Eichler
Optisches Institut
Technische Universität Berlin
Straße des 17. Juni 135
D-1000 Berlin 12
Kapitel 2 Dispersion und Absorption des Lichtes
Kapitel 3 Interferenz und Beugung

Prof. Dr.-Ing. Heinrich Gobrecht
Institut für Festkörperphysik
Technische Universität Berlin
Hardenberg-Straße 36
D-1000 Berlin 12
Kapitel 1 Strahlenoptik

Dr. Michael Krystek
Physikalisch-Technische Bundesanstalt
Abteilung Optik
D-3300 Braunschweig
Kapitel 5 Optische Strahlung und ihre Messung

Prof. Dr.-Ing. Heinz Niedrig
Optisches Institut
Technische Universität Berlin
Straße des 17. Juni 135
D-1000 Berlin 12
Kapitel 8 Wellencharakter der Materie

Prof. Dr.-Ing. Manfred Richter
Bundesanstalt für Materialprüfung
Unter den Eichen 87
D-1000 Berlin 45
Kapitel 6 Farbmetrik

Prof. Dr.-Ing. Heinz Schoenebeck
Optisches Institut
Technische Universität Berlin
(verstorben Oktober 1986)
Kapitel 9 Relativitätstheorie

Prof. Dr.-Ing. Horst Weber
Fachbereich Physik
Universität Kaiserslautern
Erwin-Schrödinger-Straße, Bau 46
D-6750 Kaiserslautern
Kapitel 7 Quantenoptik

Prof. Dr. rer. nat. Kurt Weber
Institut für Mineralogie und Kristallographie
Technische Universität Berlin
Straße des 17. Juni 135
D-1000 Berlin 12
Kapitel 4 Polarisation und Doppelbrechung des Lichtes

Inhalt

Energieeinheiten und Äquivalentwerte

1 Joule (J)	= 1 Wattsekunde (Ws) = 1 Newtonmeter (Nm)
1 Kalorie (cal)	= 4,1868 J
1 Elektronvolt (eV)	= $1{,}6021 \cdot 10^{-19}$ J
1 Reziprokes Zentimeter (cm^{-1})*	≙ $1{,}9865 \cdot 10^{-23}$ J
1 Kelvin (K)	≙ $1{,}3807 \cdot 10^{-23}$ J

Einer Quantenenergie von $h\nu = 1$ eV entspricht eine Strahlung mit der Frequenz $\nu = 2{,}418$ Hz, der Wellenlänge $\lambda = 1{,}24$ µm und der Wellenzahl von 8065 cm^{-1}.

Strahlungsphysikalische Größen und Einheiten

Energiebezogen; Buchstabensymbole oft mit Index e versehen

Größe	Einheit
Strahlstärke I, I_e	$W \cdot sr^{-1}$
Strahlungsleistung Φ, Φ_e	W
Strahlungsenergie Q, Q_e	$W \cdot s$
Strahldichte L, L_e	$W \cdot sr^{-1} \cdot m^{-2}$
Bestrahlungsstärke E, E_e	$W \cdot m^{-2}$
Spezifische Ausstrahlung M_e	$W \cdot m^{-2}$
Bestrahlung H	$W \cdot m^{-2} \cdot s$
Strahlungsausbeute η_e	%

* Übliche Einheit der Wellenzahl; 1 cm^{-1} wurde früher als 1 Kayser bezeichnet.

Lichttechnische Größen und Einheiten

Auf das Auge, d. h. auf den Lichtsinn bezogen; Buchstabensymbole oft mit Index v (= visuell) versehen

Größe	Einheit
Lichtstärke I, I_v	Candela (cd)
Lichtstrom Φ, Φ_v	Lumen (lm) = cd · sr
Lichtmenge Q, Q_v	lm · s
Leuchtdichte L, L_v	$cd \cdot m^{-2}$
Beleuchtungsstärke E, E_v	Lux (lx) = $lm \cdot m^{-2}$
Spezifische Lichtausstrahlung $M(M_v)$	$lm \cdot m^{-2}$
Belichtung H	$lm \cdot m^{-2} \cdot s = lx \cdot s$
Lichtausbeute η	$lm \cdot W^{-1}$

1 Strahlenoptik

Heinrich Gobrecht, Berlin

1.1 Vorbemerkungen und Grundbegriffe

In der *geometrischen Optik* oder *Strahlenoptik* wird die geradlinige Ausbreitung des Lichtes in eng begrenzten Lichtbündeln behandelt. Für den Anfang ist diese Art der Betrachtung nützlich. So versteht man die Wirkungsweise von Spiegeln und Linsen am leichtesten auch dann, wenn diese zu optischen Geräten zusammengesetzt sind (Photoapparat, Fernrohr, Mikroskop usw.). Später wird man freilich erkennen, daß die optische Abbildung nicht vollständig durch die Ausbreitung geometrischer Strahlen beschrieben werden kann.

Man findet durch einfache Versuche leicht, daß sich ein eng begrenztes Lichtbündel in einem homogenen Medium, z. B. in Luft einheitlicher Temperatur, geradlinig wie ein „Strahl" ausbreitet. Oft sieht man solche „Lichtstrahlen", wenn die Sonne durch die Lücken der Blätter eines dunklen Waldes scheint und auf Nebel trifft, ferner auch, wenn ein Sonnenstrahl in ein mit Staub oder Tabakrauch erfülltes Zimmer gelangt. Durch einfache Überlegung kommt man sofort zu dem Schluß, daß man den Sonnenstrahl selbst nicht sehen kann, und daß man den Weg des Strahls nur deshalb beobachtet, weil das Licht die kleinen, schwebenden Teilchen (Staub, Wassertröpfchen) beleuchtet, die sich dann besonders gut vor einem dunklen Hintergrund abheben.

Daß das Licht eine elektromagnetische Welle ist, interessiert bei der Betrachtungsweise der Strahlenoptik kaum. Nur die Wellenlänge ist öfter von Belang, weil in Materie die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes von der Wellenlänge abhängt. Dadurch entsteht beim Übergang des Lichtstrahls von einem Medium in ein anderes mit einer unterschiedlichen Lichtgeschwindigkeit, also auch mit einer unterschiedlichen Wellenlänge, ein Knick, eine *Brechung* des Strahls, sofern der Einfall in die Grenzebene nicht senkrecht erfolgt.

Auch ist der minimale Durchmesser einer Blende von der Wellenlänge abhängig: Der Durchmesser der das Lichtbündel begrenzenden Blende muß wesentlich größer sein (etwa 1000mal) als die Lichtwellenlänge, wenn die geradlinige Ausbreitung des Strahls nicht durch **Beugung** an der Blende gestört sein soll. Diese Bedingung gilt nicht nur für Lichtwellen: Die auf den Flugplätzen sich drehenden Parabolspiegel bündeln die *Radarstrahlen*. Deren Wellenlänge ist etwa 10^4mal größer als die Lichtwellenlänge. Es ist deshalb nicht möglich, dafür kleine Spiegeldurchmesser wie beim Licht zu verwenden.

Unter Optik verstand man früher die Lehre vom sichtbaren Licht ausschließlich. Als dann gefunden wurde, daß außerhalb des sichtbaren Spektrums das infrarote und das ultraviolette Licht existiert, bezog man dieses unsichtbare Licht ohne Bedenken in die Optik mit ein. Analog spricht man vom *Röntgenlicht* und der *Röntgenoptik* sowie von den „optischen Eigenschaften" der elektromagnetischen Zentimeter- und Millimeterwellen. Die Optik ist also nicht auf das sichtbare Licht beschränkt, wenngleich dieses zusammen mit dem benachbarten infraroten und ultravioletten Licht überwiegend die Optik beherrscht.

Der Gesamtbereich der elektromagnetischen Wellen erstreckt sich lückenlos von den energieärmsten, langen Wellen, die leicht mit elektrischen Schwingungskreisen hergestellt und von Antennen abgestrahlt werden können, bis zu den energiereichsten, ultraharten Röntgenstrahlen und den Gammastrahlen der Atomkerne. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Vakuum ist bei allen gleich:

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum $c \approx 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$.

Das Spektrum des sichtbaren Lichtes umfaßt nur eine Oktave. Sie liegt bei etwa 0,4 µm (violett) bis 0,7 µm (rot), entsprechend einer Frequenz von $8 \cdot 10^{14}$ bis $4 \cdot 10^{14}$ Hz.

Der Farbeindruck, den das Licht im Auge hervorruft, wird ausschließlich von der **Frequenz des Lichtes** bestimmt, das vom Auge wahrgenommen wird. Wenn in der Strahlenoptik das unterschiedliche Verhalten des roten und des violetten Lichtes beschrieben wird, z. B. bei der Brechung, so ist mit dieser etwa laxen Ausdrucksweise nicht der Farbeindruck im Auge, sondern das Frequenzgebiet gemeint. Es ist eben einfacher und kürzer zu sagen: „rotes Licht" statt „sichtbares Licht kleiner Frequenz, das im Auge den Eindruck rot hervorruft".

Um einen eng begrenzten Lichtstrahl zu erzeugen, soll möglichst schon der Anfang des Strahls, also die Lichtquelle, punktförmig sein. Eine solche Lichtquelle, die punktförmig ist und dauernd gleichmäßig leuchtet, gibt es nicht. Man behilft sich jedoch so: Entweder wählt man den Abstand der Lichtquelle groß, und sie erscheint dann unter einem sehr kleinen Winkel: Ein Stern von sehr großer Ausdehnung ist wegen des sehr großen Abstandes eine punktförmige, besser punktartige Lichtquelle. Oder man beleuchtet eine feine, runde oder spaltförmige Blende von hinten mit einer Lichtquelle. Das kleine Loch oder der enge Spalt ersetzt dann die punktförmige bzw. lineare Lichtquelle.

Als Lichtquelle muß nicht unbedingt ein *Selbstleuchter* verwendet werden. Man kann z. B. eine Metallkugel von der Sonne oder von einer hellen Lampe beleuchten und hat so eine ganz gute (punktartige) Lichtquelle. Oder man beleuchtet eine diffus reflektierende Fläche, die dann als Lichtquelle dient und einen Spalt oder eine Blende beleuchtet. Der Mond und die Planeten sind ja bekanntlich ebenfalls keine Selbstleuchter, und das Tageslicht im Zimmer ist bei bedecktem Himmel an Wolken und Wänden diffus reflektiertes Sonnenlicht.

In der Strahlenoptik ist das Vorzeichen des Richtungspfeils des Lichtstrahls nur selten von Bedeutung, weil der Weg zweier Lichtstrahlen entgegengesetzter

Richtung fast immer gleich ist (Satz von der Umkehrbarkeit des Lichtweges). Die Strahlenrichtung steht im allgemeinen senkrecht auf der Wellenfläche.

Lichtstrahlen beliebiger Herkunft können sich durchkreuzen, ohne sich zu stören. Jeder Strahl verläuft jedenfalls im Vakuum so, als ob die anderen nicht da wären.

1.2 Die geradlinige Ausbreitung des Lichtes, Schatten, Lochkamera

Wenn eine ideal punktförmige Lichtquelle vorhanden ist und wenn die Ausbreitung von Strahlen wirklich geradlinig ist, dann müssen Gegenstände, die von den Strahlen getroffen werden, scharf begrenzte Schattenbilder liefern. Dies ist auch bei erster, einfacher Betrachtung wirklich der Fall, besonders, wenn das Schattenbild nicht allzuweit vom Gegenstand entfernt ist. Bei sehr genauer Beobachtung, z. B. mit einer Lupe oder mit einem Mikroskop (und bei großem Abstand des Schattenbildes vom Gegenstand), sieht man jedoch kein scharf begrenztes Schattenbild. Der Rand des Schattenbildes besteht aus hellen und dunklen Streifen. Man nennt diese Erscheinung **Beugung**. Sie tritt immer dann auf, wenn Wellen auf Hinderniskanten treffen. Die Beugung ist daher auch ein Beweis für die Wellennatur des Lichtes. In der Strahlenoptik wird von der Erscheinung der Beugung abgesehen.

Einiges über Schatten. Bringt man vor einen leuchtenden Lichtpunkt L in einiger Entfernung einen undurchsichtigen Körper K (Abb. 1.1), z. B. eine Kugel, so bildet sich hinter der Kugel ein *Schattenraum* S aus, der von den die Kugel tangierenden Strahlen begrenzt wird und der die Gestalt eines sich erweiternden Kegels hat. Bringt man hinter den schattenwerfenden Körper eine weiße Wand W, so sieht man auf dieser den Schatten des Körpers. Der Schatten läßt die Umrisse des schattenwerfenden Körpers erkennen und ist von einer gleichmäßig erhellten

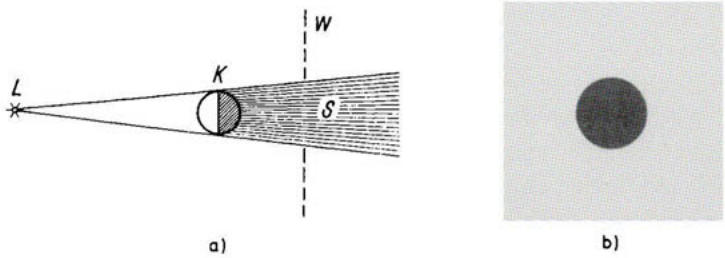


Abb. 1.1 Schattenbildung hinter einer Kugel bei punktförmiger Lichtquelle
a) Strahlenverlauf b) Bild des Schattens

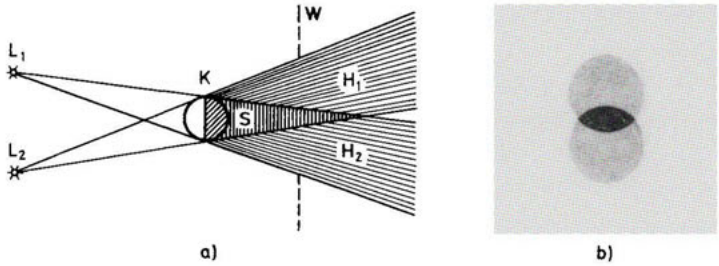


Abb. 1.2 Schattenbildung hinter einer Kugel bei zwei punktförmigen Lichtquellen
a) Strahlenverlauf b) Bild des Schattens

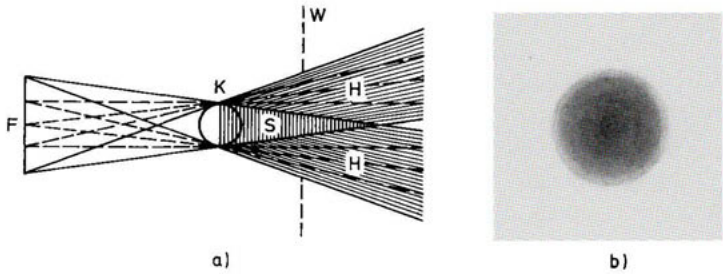


Abb. 1.3 Schattenbildung hinter einer Kugel bei flächenhafter Lichtquelle
a) Strahlenverlauf b) Bild des Schattens

Fläche umgeben. Im Fall der schattenwerfenden Kugel hat der Schatten, da wegen der geradlinigen Ausbreitung des Lichtes eine Zentralprojektion vorliegt, die Gestalt eines Kegelschnitts: Steht die Wand senkrecht zur Kegelachse, so liefert die Kugel einen kreisförmigen Schatten (Abb. I, 1) – Wird der Körper z. B. eine Kugel K, von zwei punktförmigen Lichtquellen beleuchtet (Abb. 1.2a) so entstehen hinter dem Körper drei verschiedene Schattenräume. Der Raum H_1 wird nur von L_1, der Raum H_2 nur von L_2 beleuchtet, während der Raum S überhaupt kein Licht bekommt. Die nur teilweise beleuchteten Räume H_1 und H_2 liegen im *Halbschatten*, während der Raum S den *Kernschatten* bildet. Auf einem in den Schattenraum gebrachten weißen Schirm W erhält man das Bild von Abb. I, 2b, aus dem man deutlich die verschiedenen Schattenräume erkennt. – Wird schließlich der schattenwerfende Körper von einer flächenhaften Lichtquelle F beleuchtet (Abb. 1.3a), so muß man für jeden Punkt der Lichtquelle den Schattenkegel entwerfen und ihre gemeinsame Wirkung hinter dem Körper durch Summierung feststellen. Es zeigt sich dann, daß sich hinter dem Körper ein Kernschatten S ausbildet, der keinerlei Licht erhält. Dieser Kernschatten ist von einem Halbschatten H umgeben, der nach außen allmählich in den vollerleuchteten Raum und nach innen allmählich in den Kernschatten übergeht (Abb. 1.3b).

In diesem Halbschatten findet also ein stetiger Übergang von voller Helligkeit zu voller Dunkelheit statt. Der Kernschatten ist daher nur dicht hinter dem Körper scharf begrenzt und bekommt, je weiter man sich von dem schattenwerfenden Körper entfernt, eine immer unschärfere Begrenzung. Ist, wie in Abb. 1.3a, der Querschnitt des schattenwerfenden Körpers kleiner als der der Lichtquelle, so entsteht in großer Entfernung hinter dem Körper kein Kernschatten mehr, sondern nur noch Halbschatten.

Im Sonnenlicht ist der Kernschatten einer Kugel etwa 108mal so lang wie der Kugeldurchmesser. Dies folgt aus der Beziehung

$$\frac{\text{Schattenlänge}}{\text{Kugeldurchmesser}} = \frac{\text{Sonnenentfernung}}{\text{Sonnendurchmesser}} = \frac{150 \cdot 10^6\,\text{km}}{1{,}392 \cdot 10^6\,\text{km}} = 108\,.$$

Die Abb. 1.3a gibt zugleich die Verhältnisse wieder, die sich bei einer Sonnen- oder Mondfinsternis abspielen. Stellt F die Leuchtfläche der Sonne und K die Erde dar, so entsteht eine *Mondfinsternis*, wenn der Mond in den Kernschatten hinter der Erde eintritt, und zwar ist die Finsternis total oder partiell, je nachdem, ob die ganze Mondfläche oder nur ein Teil im Schattenraum verdunkelt wird. Ist dagegen K der Mond, so entsteht eine *Sonnenfinsternis* auf der Erde, wenn diese in den Schattenraum hinter dem Mond gelangt. Da der Durchmesser der Erde (12740 km) fast viermal größer als der des Mondes (3476 km) ist, entsteht für diejenigen Orte der Erde, die vom Kernschatten getroffen werden, eine totale Sonnenfinsternis, während für alle die Orte, die im Halbschatten liegen, nur eine partielle Finsternis eintritt, d.h. es bleibt für sie noch ein mehr oder minder großer sichelförmiger Teil der Sonnenscheibe sichtbar. Ist schließlich der Mond zur Zeit der Sonnenfinsternis soweit von der Erde entfernt, daß die Spitze des Kernschattens diese nicht mehr trifft, so entsteht eine ringförmige Sonnenfinsternis.

Schattenbilder haben eine sehr bedeutungsvolle **Anwendung bei Röntgenstrahlen** gefunden, da es für diese keine Linsen gibt. In der Medizin und in der Technik sind fast alle Röntgenaufnahmen Schattenbilder der Gegenstände, deren Umrisse man kennen möchte. Voraussetzung für scharfe Bilder sind auch hier punktförmige Lichtquellen, d.h. der Entstehungsort der Röntgenstrahlen soll einen möglichst kleinen Durchmesser haben. Da die Röntgenstrahlen durch Aufprall schneller Elektronen auf die Anode der Vakuumröhre entstehen, müssen die Elektronen zu einem möglichst kleinen Brennpunkt (Fokus) gebündelt werden. Dies geschieht durch elektrische oder magnetische Felder.

Die **Lochkamera** wurde schon 1321 von Levi Ben Gerson erwähnt (Abb. 1.4). Eine Abbildung damit ist nur wegen der geradlinigen Ausbreitung des Lichtes möglich. Die Schärfe des Bildes sollte um so größer sein, je kleiner die Öffnung O ist. Dies ist auch wirklich der Fall, sofern die Öffnung O nicht zu klein ist, so daß Beugung auftritt. Die Größe des Bildes hängt von dem Abstand Bild – Loch ab. Da die Fläche des Bildes mit dem Quadrat des Abstandes Bild – Loch steigt, sinkt

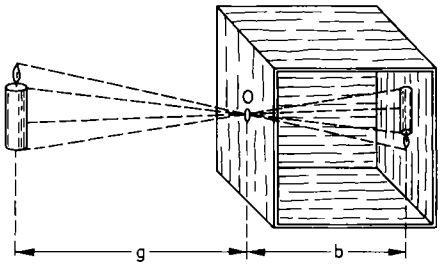


Abb. 1.4 Entstehung eines Bildes in der Lochkamera

damit auch die Helligkeit des Bildes mit dem Quadrat des Abstandes Bild – Loch. Andererseits ist die Helligkeit des Bildes proportional der Fläche der Öffnung, durch die das Licht kommt, also proportional dem Quadrat des Lochdurchmessers. Bildet man analog zum photographischen Objektiv den Quotienten Lochdurchmesser/Abstand Loch–Bild, so erhält man wie beim photographischen Objektiv ein relatives Maß für die Bildhelligkeit und damit auch für die Belichtungszeit. Beim Objektiv nennt man den Quotienten: Blendendurchmesser/Brennweite die **relative Öffnung** oder das **Öffnungsverhältnis**. Beim photographischen Objekt steht dieser Quotient (als Kehrwert die *Blende*) auf dem Rand eingraviert: 1 : 2,8; 1 : 3,5; 1 : 4,5 usw. Beträgt nun bei einer Lochkamera der Durchmesser der Öffnung 1 mm, und der Abstand Loch–Bild 100 mm, so würde dies einer Blende von 100 entsprechen. Ist z. B. die Belichtungszeit bei der Aufnahme einer Landschaft mit einem Photoapparat $^1/_{100}$ Sekunde bei Blende 8, so folgt daraus für die oben angegebene Lochkamera eine 156fache Belichtungszeit, also 1,5 Sekunden.

Der Lochdurchmesser darf wegen der Beugung nicht zu klein gemacht werden. Als Faustformel kann man sich merken, daß das Beugungsscheibchen einen Durchmesser hat, der gleich der Blendenzahl in µm ist. Bei der angegebenen Lochkamera ist also der Durchmesser des Beugungsscheibchens etwa 0,1 mm.

Bezeichnet G die Größe des Gegenstandes, B die des Bildes und bedeuten g und b die Abstände von Gegenstand und Bild von der Lochebene (Abb. 1.4), so besteht die Beziehung:

$$B : G = b : g\,.$$

Das Verhältnis B/G heißt *Abbildungsmaßstab*.

Solange die Öffnung O klein ist gegenüber der Struktur des Gegenstandes, spielt ihre Form (ob rund oder eckig) keine Rolle. Hierfür bietet sich in der Natur ein schönes Beispiel in den runden Sonnenbildchen, die man häufig auf dem schattigen Waldboden unter einem Laubbaum beobachtet. Sie entstehen dadurch, daß die vielen unregelmäßig gestalteten Lücken zwischen den Blättern des Baumes wie kleine Öffnungen wirken und auf dem Boden kleine Bilder der Son-

nenscheibe erzeugen. Bei einer partiellen Sonnenfinsternis dagegen erhält man sichelförmige Bilder der Sonne.

Technische Anwendung findet die Lochkamera dort, wo eine Abbildung durch Linsen nicht möglich ist. Dies ist z. B. dann der Fall, wenn eine Röntgenlichtquelle abgebildet werden soll. Hierbei ist von großem Interesse, ob diese kreisrund, rechteckig oder elliptisch ist und welche Größe sie hat.

Die Lochkamera gibt ein gutes Beispiel für die Unabhängigkeit der sich in der Öffnung O durchkreuzenden Strahlenbüschel. Die von verschiedenen Stellen des Gegenstandes ausgehenden Wellen können sich in der engen Öffnung durchkreuzen, ohne sich zu stören.

1.3 Die Reflexion des Lichtes, ebene Spiegel

Aus der Erfahrung des täglichen Lebens weiß ein jeder, daß die Reflexion des Lichtes an der Oberfläche eines festen Körpers verschiedenartig sein kann: Ein ebener Metallspiegel reflektiert einen Lichtstrahl anders als eine weiß gekalkte Wand. Beim Spiegel erfährt das auffallende Licht eine Richtungsänderung; an der weißen Wand wird das Licht diffus in alle Richtungen reflektiert. Die weiße Wand sendet das Licht wie ein Selbstleuchter aus. Von allen Richtungen aus betrachtet erscheint die bestrahlte Fläche gleich hell, ganz im Gegensatz zum beleuchteten Spiegel oder zur spiegelnden Wasseroberfläche. Zwischen den beiden Extremen, der reinen Spiegelung und der vollkommen diffusen Reflexion, gibt es alle Übergänge (Abb. 1.5). Die **diffuse Reflexion** wird auch **Remission** genannt. Sie läßt sich für alle Wellenlängen des sichtbaren Spektrums gut verwirklichen an Schichten von $CaSO_4$ oder $BaSO_4$. Eine Fläche aus diesen Stoffen, mit weißem Licht bestrahlt, sieht daher auch vollkommen weiß aus. Die Ursache für eine mehr oder weniger diffuse Reflexion ist das *Streuvermögen* der Oberfläche. Je größer die Wellenlänge, desto kleiner wird das Streuvermögen. Das heißt, daß mit zunehmender Wellenlänge eine Oberfläche immer mehr spiegelnd wird. Dies gilt nicht nur für Lichtwellen. Das Echo von Schallwellen ist auch eine Spiegelung. Ein Waldrand oder eine Häuserwand ist für Wellen von einigen Me-

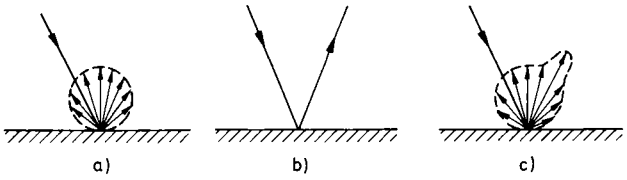


Abb. 1.5 Reflexion des Lichtes
a) diffus b) Spiegelung c) diffus mit Anteil von Spiegelung

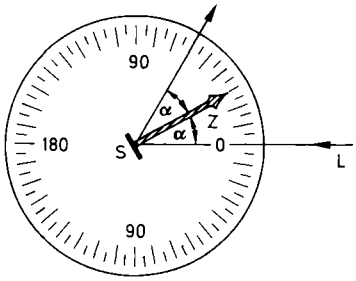


Abb. 1.6 Nachweis des Reflexionsgesetzes

tern Länge ein guter Spiegel. In den Alpen kann man beobachten, daß hohe Felswände die Radiowellen spiegeln und den Empfang von sehr entfernten UKW-Sendern (Wellenlänge einige Meter) in den Tälern ermöglichen.

In der Optik ist die **Spiegelung**, also die spiegelnde Reflexion, von besonders großem Interesse. Untersucht man die Zuordnung von einfallendem Strahl, reflektiertem Strahl und Lage der Spiegelfläche, die man durch die Normale, also die Senkrechte auf der Spiegelfläche kennzeichnet, so kommt man durch einfache Versuche schnell zu dem wichtigen **Reflexionsgesetz**:

- Einfallender und reflektierter Strahl bilden mit der Senkrechten gleiche Winkel; einfallender Strahl, Senkrechte und reflektierter Strahl liegen in einer Ebene.

Zum Nachweis dieses Gesetzes kann die in Abb. 1.6 skizzierte Anordnung dienen. Im Mittelpunkt einer größeren Scheibe mit Winkeleinteilung ist ein kleiner ebener Spiegel S drehbar angebracht. Der Spiegel trägt senkrecht zu seiner Fläche einen Zeiger. Man läßt ein schmales Lichtbündel derart auf den Spiegel fallen, daß es die große Scheibe streift. So kann man im Dunkeln den Lichtweg als helle Linie auf der Scheibe sehen. Man kann gleichzeitig folgendes erkennen: Wird der Spiegel um einen bestimmten Winkekel gedreht, so ändert sich die Richtung des reflektierten Strahls um den doppelten Winkel; denn es ändern sich sowohl der Einfalls- als auch der Reflexionswinkel um den Betrag, um den der Spiegel gedreht wird. Hiervon macht man Gebrauch bei der Messung kleiner Drehwinkel.

Die Entstehung von Bildern am ebenen Spiegel. In Abb. 1.7 befindet sich eine punktförmige Lichtquelle L in der Entfernung a vor einem ebenen Spiegel S. Wir zeichnen eine Anzahl Strahlen LP_1, LP_2, ... von L nach dem Spiegel und konstruieren nach dem Reflexionsgesetz die reflektierten Strahlen. Verlängern wir diese rückwärts über den Spiegel hinaus, so schneiden sie sich in einem Punkt L′ hinter dem Spiegel, der dieselbe Entfernung α vom Spiegel hat, wie die Lichtquelle L. In Abb. 1.7 ist z. B. $\triangle LOP_1 = \triangle L'OP_1$, da nach dem Reflexionsgesetz

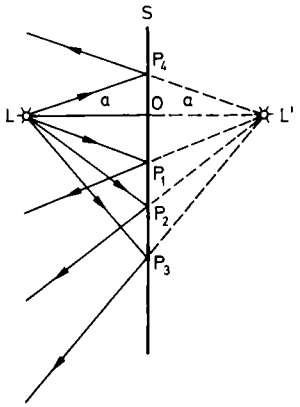


Abb. 1.7 Spiegelung einer punktförmigen Lichtquelle an einem ebenen Spiegel

$\sphericalangle LP_1O = \sphericalangle L'P_1O$; dasselbe gilt für jeden anderen Strahl. Das Auge verlängert die Strahlen rückwärts bis zu ihrem Schnittpunkt L′, der also für das Auge die Eigenschaft einer Lichtquelle zu haben scheint, nämlich nach allen Richtungen hin Strahlen auszusenden. Man nennt daher L′ – *ebenso in allen gleichartigen Fällen* – das **Bild** des wirklichen Gegenstandes (der Lichtquelle) L. Im besonderen nennt man hier, wo die Strahlen sich nicht wirklich in L′ schneiden, sondern erst nach Rückwärtsverlängerung, das Bild *virtuell* oder *scheinbar*. Virtuelle Bilder können im Gegensatz zu reellen Bildern, in denen die Strahlen sich wirklich schneiden, nicht auf einem Schirm aufgefangen werden.

Man findet bei der Spiegelung die Lage des virutellen Bildes eines Punktes, indem man von diesem das Lot auf die Spiegelfläche fällt, und dieses um sich selbst verlängert. Auf diese Weise kann man, wie Abb. 1.8 für einen Pfeil P zeigt, die Lage des virtuellen Bildes eines ausgedehnten Gegenstandes konstruieren; Bildgröße und Gegenstandsgröße sind dabei stets gleich. Nach Abb. 1.8 ist die

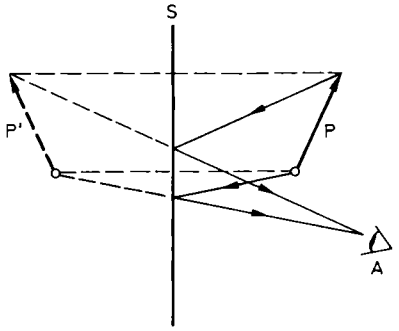


Abb. 1.8 Spiegelung eines Gegenstandes P an einem ebenen Spiegel

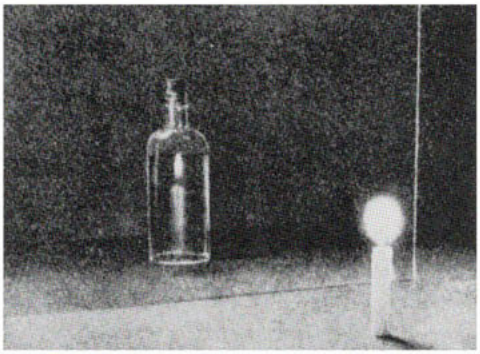


Abb. 1.9 Spiegelung einer brennenden Kerze an einer Glasplatte. Das Spiegelbild liegt ebenso weit hinter der Glasplatte, wie die im Vordergrund direkt sichtbare Kerze vor der Platte liegt. Die Flasche steht hinter der Glasplatte am Ort des Spiegelbildes, so daß der Eindruck erweckt wird, als ob die Kerze in der mit Wasser gefüllten Flasche brenne

dem Spiegel zugewandte Seite des Gegenstandes im Bild nach der anderen Seite, also auf den gegen den Spiegel schauenden Beobachter hingerichtet. Infolgedessen ist auch rechts und links, vom Standpunkt des Beobachters beurteilt, im Bilde vertauscht; vom Standpunkt des Bildes ist dagegen vorn und hinten vertauscht. Dies kann man leicht feststellen, wenn man z. B. in einem Spiegel seine rechte Hand betrachtet; sie erscheint im Spiegel als linke Hand. Gegenstand und Spiegelbild lassen sich also niemals zur Deckung bringen; sie sind also nicht gleich oder kongruent, sondern nur spiegelbildlich gleich. – Von der *symmetrischen Lage des Spiegelbildes zu seinem Gegenstand* und damit von der Richtigkeit des Reflexionsgesetzes kann man sich durch den in Abb. 1.9 wiedergegebenen Versuch überzeugen. Als Spiegel dient eine ebene Glasplatte, durch den man einen Gegenstand auch hinter der Spiegelebene erkennen kann. Man stellt vor diese eine brennende Kerze und hinter diese an den Ort ihres Spiegelbildes ein mit Wasser gefülltes Gefäß. Dann gewinnt man den Eindruck, als ob die Kerze in dem Gefäß unter Wasser brenne. Auf diese Weise werden häufig optische Täuschungen (z. B. Gespenstersehen) erzeugt, wenn Glasplatte und Gegenstand so aufgestellt sind, daß sie selbst vom Beschauer nicht gesehen werden können.

Da die vom Spiegel in Abb. 1.7 zurückgeworfenen Strahlen so verlaufen, als ob sie von einer hinter dem Spiegel befindlichen Lichtquelle L′ ausgesandt würden, kann man das Spiegelbild L′ an einer zweiten Spiegelfläche nochmals spiegeln usw. Stellt man z. B. zwei ebene Spiegel S_1 und S_2 parallel zueinander auf und zwischen sie einen Gegenstand G (Abb. 1.10), so erhält man außer den beiden Spiegelbildern erster Ordnung $B_{1,1}$ und $B_{1,2}$ (die erste Indexziffer soll die Ordnungszahl, die zweite den Spiegel angeben) noch eine beliebig große Zahl von Spiegelbildern höherer Ordnung, von denen die zweiter, dritter und vierter Ordnung in Abb. 1.10 gezeichnet sind. Man kann diese Bilder gut beobachten, wenn

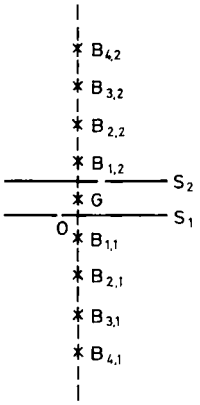


Abb. 1.10 Mehrfachspiegelung an zwei parallelen, ebenen Spiegeln

man in einem der Spiegel (etwa S_1) bei O eine kleine Öffnung anbringt und durch diese nach dem anderen Spiegel schaut.

Bei dem **Winkelspiegel** sind zwei ebene Spiegel S_1 und S_2 unter einem Winkel α gegeneinander geneigt. In Abb. 1.11 ist für $\alpha = 72°$ der Strahlenverlauf gezeichnet, der für ein bei O befindliches Auge vier Spiegelbilder von dem Gegenstand G liefert, und zwar die Spiegelbilder erster Ordnung $B_{1,1}$ am Spiegel S_1 und $B_{1,2}$ am Spiegel S_2, sowie die Spiegelbilder zweiter Ordnung $B_{2,1}$ und $B_{2,2}$. Mehr Bilder können nicht auftreten. Rechnet man den Gegenstand G als fünftes Bild hinzu, so sieht das Auge den Gegenstand so oft, wie der Winkel 72° im ganzen Kreisumfang von 360° enthalten ist. Allgemein sieht man also in einem Winkelspiegel vom Winkel α insgesamt $n = \frac{360}{\alpha}$ Bilder (den Gegenstand mit eingerechnet).

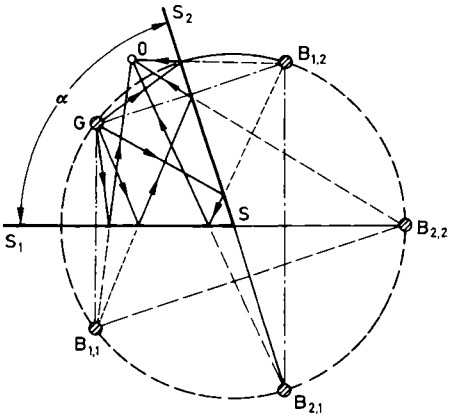


Abb. 1.11 Mehrfachspiegelung an einem Winkelspiegel von 72°

Wird $\alpha = 0$, so wird $n = \infty$, d.h. wir haben den bereits oben erledigten Fall unendlich vieler Spiegelbilder bei parallel gestellten Spiegeln. Wie man übrigens aus Abb. 1.11 sieht, liegen Gegenstand und sämtliche Spiegelbilder auf einem Kreis um den Schnittpunkt S der beiden Spiegelebenen mit GS als Radius. Eine endliche Zahl von Spiegelbildern ergibt sich nur, wenn α ein Teiler von 360° ist. In allen anderen Fällen zeigt der Versuch, daß man unendlich viele Spiegelbilder sieht, vorausgesetzt, daß die Spiegel unendlich groß sind. – Auf dem Prinzip des Winkelspiegels beruht das **Kaleidoskop**. Dieses besteht aus zwei Spiegelstreifen, die unter einem Winkel von 60° in einem innen geschwärzten Rohr stecken. An einem Ende des Rohres befindet sich eine kleine Öffnung zum Hineinblicken, am anderen Ende zwischen einer Glasplatte und einer Mattscheibe eine Anzahl farbiger Glasstückchen, Perlen usw. Beim Hineinblicken sieht man diese Gegenstände mit ihren Spiegelbildern zu einem sechsfachen Stern angeordnet, dessen Muster sich beim Schütteln immer wieder verändert. Auf diese Weise ist das Kaleidoskop für Musterzeichner ein oft benutztes Hilfsmittel.

Bei einem *rechtwinkligen Winkelspiegel* ($\alpha = 90°$) entstehen drei Spiegelbilder (ohne den Gegenstand). Sie sind in Abb. 1.12 gezeichnet, wobei als Gegenstand ein Pfeil gewählt ist. Blickt man von vorn in einen solchen Winkelspiegel mit vertikaler Winkelkante, so erscheint das mittlere Spiegelbild genau wie in einem gewöhnlichen einfachen Spiegel, nur mit dem Unterschied, daß jetzt rechts und links nicht mehr vertauscht sind. Man sieht also ein naturgetreues Bild und kein Spiegelbild in dem vorhin erwähnten Sinne. Das folgt daraus, daß nach Ausweis der Abb. 1.12 das Bild $B_{2,2}$ durch eine Drehung des Gegenstandes G um die Spiegelkante erhalten wird. Bei horizontaler Spiegelkante sind aus dem gleichen Grunde oben und unten vertauscht.

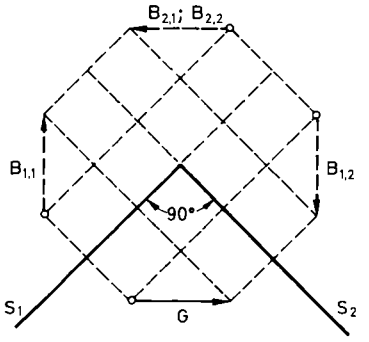


Abb. 1.12 Spiegelung an einem rechtwinkligen Winkelspiegel

Man klebe zwei gute Spiegel derart zusammen, daß ein 90°-Winkelspiegel entsteht. Die gemeinsame Kante der beiden Spiegel soll möglichst schmal, also fast unsichtbar sein. Dann versuche man, bei vertikal stehender Kante mit Blick in den Spiegel sich zu kämmen. Die Wirkung ist verblüffend.

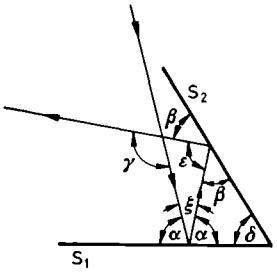


Abb. 1.13 Reflexion eines Lichtstrahls an zwei unter einem Winkel δ gegeneinander geneigten Spiegeln

Wird (Abb. 1.13) ein Lichtstrahl an zwei unter einem Winkel δ gegeneinander geneigten Spiegeln S_1 und S_2 zweimal reflektiert, so gilt der Satz:

- Der Winkel γ, um den der Strahl aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt wird, ist gleich dem doppelten Neigungswinkel der beiden Spiegel gegeneinander.

Wie man aus Abb. 1.13 abliest, gelten die Beziehungen:

$$\gamma = \varepsilon + \xi;\ \varepsilon = 180^\circ - 2\beta;\ \xi = 180^\circ - 2\alpha;\ \alpha + \beta = 180^\circ - \delta\,,$$

so daß wir erhalten:

$$\gamma = 180^\circ - 2\beta + 180^\circ - 2\alpha = 360^\circ - 2(\alpha + \beta) = 2\delta\,.$$

Von diesem Satz wird in der Meßtechnik verschiedentlich Gebrauch gemacht. Wählt man z. B. $\delta = 45^\circ$, so stehen einfallender und reflektierter Strahl aufeinander senkrecht. Ein solcher Winkelspiegel wird in der Geodäsie dazu gebraucht, um zwei zueinander senkrechte Richtungen abzustecken. Man hält dazu den Winkelspiegel so, daß man über ihn hinwegsehend, die eine Richtung im Auge hat; durch Hineinblicken in den Spiegel sieht man dann gleichzeitig in die dazu senkrechte Richtung. – Eine weitere Anordnung ist der von I. Newton (1742) erdachte und von J. Hadley (1751) ausgeführte **Spiegelsextant**, den Abb. 1.14 im Aufblick zeigt. Im Mittelpunkt eines Kreissektors ist ein kleiner Spiegel S_1 drehbar so angebracht, daß seine Ebene senkrecht auf der des Kreissektors steht. An dem Spiegel ist ein Zeiger Z befestigt, der die Verdrehung des Spiegels auf einer am Umfang des Kreissektors angebrachten Gradteilung abzulesen gestattet. Gegenüber S_1 ist ein zweiter Spiegel S_2, nur in seiner unteren Hälfte versilbert, fest angebracht, so daß seine Ebene dann parallel zu der von S_1 steht, wenn der Zeiger Z auf den Nullpunkt der Teilung weist. Blickt man nun durch die Öffnung einer Blende B (einen sog. *Diopter*), oder ein an dessen Stelle befestigtes kleines Fernrohr durch den unbelegten Teil von S_2 nach einem fernen Gegenstand, so kann man gleichzeitig über den spiegelnden Teil von S_2 und den Drehspiegel S_1 nach einer zweiten Richtung visieren. Der Winkel γ zwischen diesen beiden Richtun-

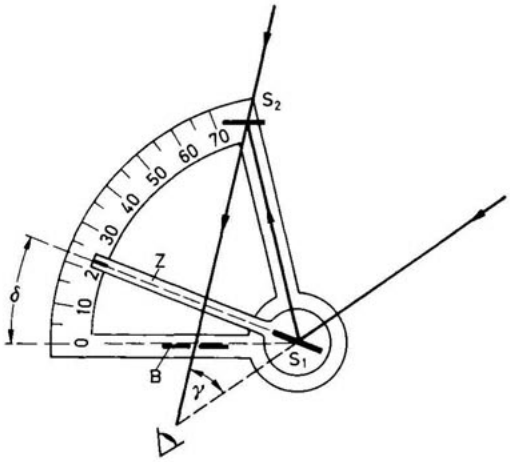


Abb. 1.14 Prinzip des Spiegelsextanten

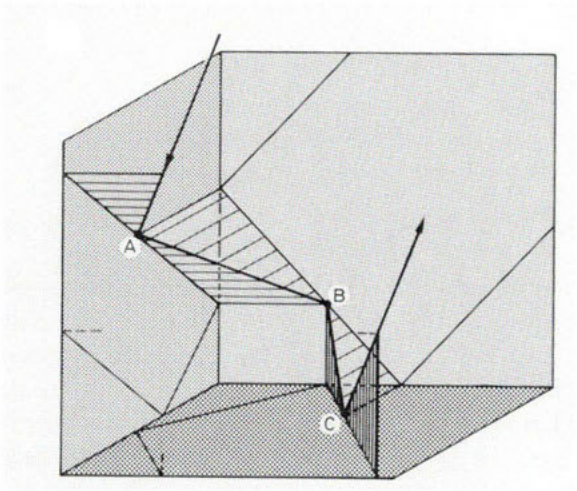


Abb. 1.15 Strahlenverlauf in einem Zentralspiegel

gen ist dann nach dem obigen gleich dem doppelten Wert des auf der Teilung abgelesenen Winkels δ. Der besondere Vorteil des Sextanten – der Name rührt daher, daß die Gradeinteilung nur ein Sechstel des Kreisumfanges zu sein braucht, um Winkel bis zu 120° zu messen – besteht darin, daß er keine feste Aufstellung benötigt, sondern frei in der Hand gehalten werden kann. Deshalb wird er in der Seefahrt dazu benutzt, um von Bord des Schiffes aus Sonnen- und Sternhöhen zu messen, aus denen sich die geographische Breite[1] des Schiffsortes

[1] Zur Bestimmung der geographischen Länge (z. B. relativ zum Meridian von Greenwich) dient die Differenz zwischen der Greenwicher Lokalzeit und der des Schiffes; vier Zeitminuten entsprechen dabei 1° Längendifferenz.

ergibt. – Ordnet man drei Spiegel so an, daß sie die Ecke eines Würfels darstellen, so erhält man den **Zentralspiegel** (Abb. 1.15). Bei diesem wird jeder in die Spiegelecke einfallende Lichtstrahl nach dreimaliger Reflexion um insgesamt 180° abgelenkt, so daß der aus dem Spiegelsystem herauskommende Strahl stets parallel zum einfallenden Strahl verläuft.

In der Abb. 1.15 wird der einfallende Strahl an der linken, vertikalen Wand bei A reflektiert, läuft zur hinteren, vertikalen Wand und wird bei B reflektiert. Der Lichtstrahl erhält nach der dritten Reflexion im Punkt C an der unteren, horizontalen Wand die ursprüngliche Richtung wieder, die er hatte, bevor er A erreichte. Die Ebenen sind schraffiert, in denen sich jeweils der einfallende und reflektierte Lichtstrahl befinden. Sie stehen senkrecht auf den Wänden, an denen die Reflexion erfolgt.

Man benutzt Zentralspiegel auch als *Rückstrahler* für Warnzwecke. Zum Beispiel bestehen die bei Verkehrszeichen, an Kraftwagen und an Warndreiecken befindlichen Rückstrahler oft aus einer Vielzahl von mosaikartig zusammengesetzten Zentralspiegeln. – Astronauten haben Zentralspiegel aus Quarzglas auf dem Mond hinterlassen, wodurch (Laser-)Lichtstrahlen von der Erde wieder zur Erde reflektiert werden können. Vgl. auch den Tripelspiegel in Abschn. 1.6.

Schließlich sei noch erwähnt, daß man in der Längenmeßtechnik sowie beim Ablesen von Zeigerausschlägen bei Meßinstrumenten zur Vermeidung der Parallaxe auf Glasspiegel gravierte Skalen benutzt. Wenn man den anzuvisierenden Objektpunkt entweder mit seinem eigenen Spiegelbild oder mit dem des Auges zur Deckung bringt, hat man die Gewähr dafür, daß die Visierlinie auf der Teilung senkrecht steht.

1.4 Gekrümmte Spiegel, Konkav- und Konvexspiegel

Da man jedes hinreichend kleine Flächenelement einer gekrümmten Fläche als eben betrachten kann, darf man auch bei gekrümmten Spiegeln das Gesetz der ebenen Reflexion anwenden.

Wir betrachten im allgemeinen nur *sphärische Spiegel*; darunter versteht man solche, die die Gestalt einer Kugelkalotte haben, also einen Teil einer Kugelfläche bilden. Ist die innere Seite der Kalotte verspiegelt, so haben wir es mit einem *Hohl-* oder *Konkavspiegel* zu tun, während Spiegel mit nach außen gewölbter Reflexionsfläche *Wölb-* oder *Konvexspiegel* genannt werden. Abb. 1.16 stellt einen ebenen Schnitt durch einen solchen Kugelspiegel dar; der Punkt S der Kalotte wird als *Scheitelpunkt* bezeichnet, die Verbindung von S mit dem Kugelzentrum M heißt die *Hauptachse* des Spiegels, die von M nach den einzelnen Punkten des Spiegels gezogenen Geraden (z. B. MA) sind Radien und daher die Normalen der Kugelfläche. Wir betrachten zunächst Strahlen, die parallel der Hauptachse auf den Spiegel auffallen; ein solcher treffe ihn in A, die Spiegelnormale ist AM,

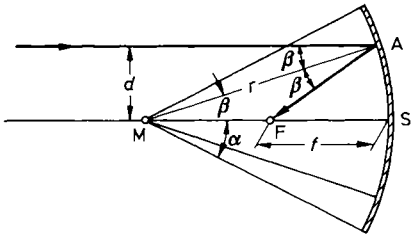


Abb. 1.16 Zur Definition des Brennpunktes eines Hohlspiegels

der Winkel, den der Strahl mit der Normalen bildet, sei β; dann wird der reflektierte Strahl unter dem gleichen Winkel β in die Richtung AF reflektiert. Da die Normale AM die Hauptachse auch unter dem Winkel β trifft, ist das Dreieck MAF gleichschenklig, und daraus folgt unmittelbar, daß

$$\mathrm{MF} = \mathrm{FA} = \frac{\mathrm{MA}}{2\cos\beta} = \frac{r}{2\cos\beta} \text{ ist.}$$

Da nach Abb. 1.16 $\sin\beta = \frac{d}{r}$ ist, wenn d den senkrechten Abstand des einfallenden Parallelstrahls von der Hauptachse bedeutet, so wird β um so kleiner, je kleiner d ist, d.h. je mehr der einfallende Strahl der Hauptachse benachbart ist. Wenn wir uns also auf (der Achse) benachbarte Strahlen, sog. *Paraxialstrahlen*, beschränken, so ist β klein und $\cos\beta \approx 1$, d.h. die Schnittweite aller Paraxialstrahlen mit der Achse ist unabhängig von β, d.h. alle der Hauptachse hinreichend benachbarten Parallelstrahlen schneiden sich in *einem* Punkt F, den man als den **Brennpunkt** bezeichnet: der Abstand des Brennpunktes vom Scheitel S des Spiegels heißt die **Brennweite** f; für f ergibt sich also aus der vorstehenden Gleichung:

$$f = \frac{1}{2} r,$$

d.h. die Brennweite eines sphärischen Spiegels ist gleich dem halben Kugelradius.

Bezeichnet man den Winkel α (Abb. 1.16), den ein vom Spiegelmittelpunkt nach der Spiegelbegrenzung gezogener Radius mit der Spiegelachse bildet, als *Öffnungswinkel* des Spiegels, so erkennt man, daß der maximale Wert von β gerade gleich α ist, und daher kann man auch sagen:

- Fällt auf einen sphärischen Hohlspiegel mit hinreichend kleinem Öffnungswinkel ein achsenparalleles Strahlenbündel, so werden alle Strahlen in einem Brennpunkt vereinigt, der den Abstand vom Scheitelpunkt zum Krümmungsmittelpunkt gerade halbiert.

Es folgt aus der obigen Darlegung, daß keineswegs alle achsenparallelen Strahlen sich in einem Punkt vereinigen, sondern nur die Paraxialstrahlen, da die Schnitt-

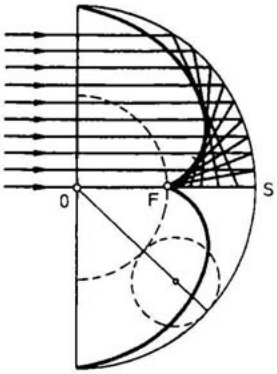


Abb. 1.17 Entstehung der Katakaustik am Hohlspiegel

weite SF im allgemeinen von β, d. h. vom Abstand der einfallenden Parallelstrahlen von der Achse, abhängt; je weiter der Strahl von der Achse entfernt ist, um so kleiner die Schnittweite.

Läßt man daher die Bedingung eines kleinen Öffnungswinkels fallen, so vereinigen sich von allen zur Achse parallel einfallenden Strahlen nur die innersten im Brennpunkt, während die achsenferneren Strahlen die Achse näher am Scheitelpunkt schneiden (Abb. 1.17). Man nennt diese Abweichung die **sphärische Aberration** oder den **Öffnungsfehler**. Die Gesamtheit der am Spiegel reflektierten Strahlen wird von einer Brennfläche eingehüllt, deren Schnitt mit einer durch die Achse gelegten Ebene die *Katakaustik* ergibt; ihre Spitze liegt im Brennpunkt des Spiegels. Die Katakaustik ist eine Epizykloide, die entsteht, wenn man einen

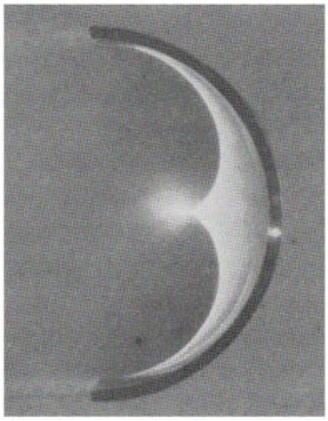


Abb. 1.18 Katakaustik

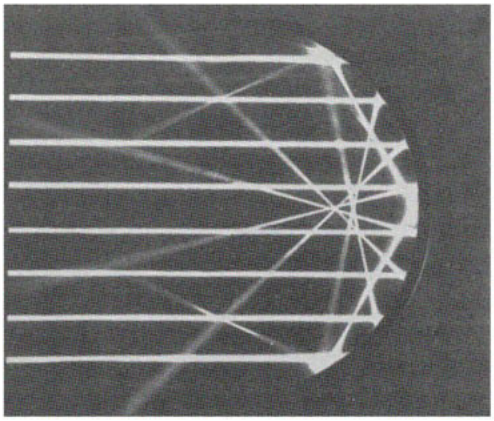


Abb. 1.19 Verlauf von acht parallel zur Achse in einen Hohlspiegel einfallenden Lichtstrahlen

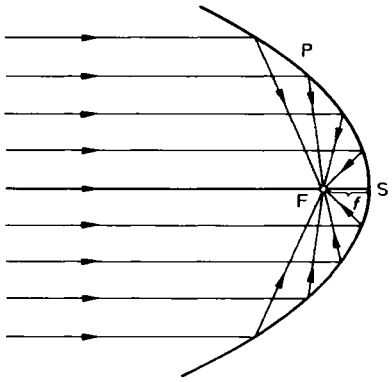


Abb. 1.20 Einfall eines parallelen Strahlenbündels in einen Parabolspiegel

Kreis vom Radius $f/2$ auf einem um den Spiegelmittelpunkt O beschriebenen Kreis mit dem Radius f abrollt; die Epizykloide ist dann die Bahn desjenigen Punktes des kleinen Kreises, der den großen Kreis ursprünglich in F berührt. Man kann (Abb. 1.18) die Katakaustik sichtbar machen, indem man paralleles Licht in einen blanken Metallring fallen läßt. Abb. 1.19 zeigt bei demselben Metallring den Verlauf von 8 isolierten, parallel zur Achse einfallenden Strahlen.

Die sphärische Aberration verhindert also im allgemeinen die Benutzung weit geöffneter sphärischer Hohlspiegel. Für manche Zwecke ist daher ein *Parabolspiegel* vorzuziehen, dessen Fläche durch Rotation einer Parabel um ihre Achse entstanden gedacht werden kann. Abb. 1.20 zeigt einen Achsenschnitt durch einen Parabolspiegel P, gleichzeitig ist eine Anzahl zur Achse paralleler Strahlen gezeichnet, die auf den Spiegel auffallen. Da bei einer Parabel die Normale den Winkel zwischen einem beliebigen achsenparallelen Strahl und dem zugehörigen Brennstrahl halbiert, wird *jeder* zur Achse parallel einfallende Strahl nach dem Brennpunkt F reflektiert. Wenn also ein achsenparalleles Strahlenbündel auf einen Parabolspiegel auffällt, so gehen die reflektierten Strahlen sämtlich durch den Brennpunkt des Spiegels. Wegen der Umkehrbarkeit des Strahlenganges kann man auch sagen: Bringt man eine möglichst punktförmige Lichtquelle in den Brennpunkt eines Parabolspiegels, so verlassen die von der Lichtquelle ausgehenden Strahlen den Spiegel als achsenparalleles Strahlenbündel. Man verwendet daher Parabolspiegel z. B. bei Scheinwerfern, Autolampen usw., bei denen es auf gute Bündelung der Strahlen ankommt. Auch bei astronomischen Fernrohren, bei Radioteleskopen und bei Radarantennen werden Parabolspiegel benutzt. Allerdings ist seit 1931 durch eine Korrekturplatte (Schmidt-Platte) die Möglichkeit gegeben, sphärische Spiegel in Fernrohren zu verwenden (siehe weiter unten und Abschn. 1.12 über Schmidt-Spiegel).

Wir wollen die Parabel durch einen Kreis mit dem Krümmungsradius R_0 ersetzen. Wie eine einfache Rechnung ergibt, ist dann dieser Radius gleich der doppelten Brennweite der Parabel ($R_0 = 2f$). In Abb. 1.21 ist der Krümmungsradius mit dem genannten Radius (= SM) an die Parabel im Punkt S konstruiert; man sieht daraus, daß für hinreichend kleinen Öffnungswinkel der Kugelspiegel sich praktisch nicht von einem Parabolspiegel unterscheidet.

Auch *elliptische Spiegel* werden benutzt. Die Lichtquelle steht in einem Brenn-

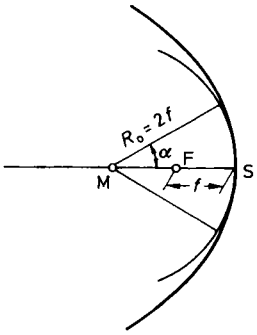


Abb. 1.21 Ersatz der Parabelkrümmung im Scheitelpunkt durch einen Krümmungskreis

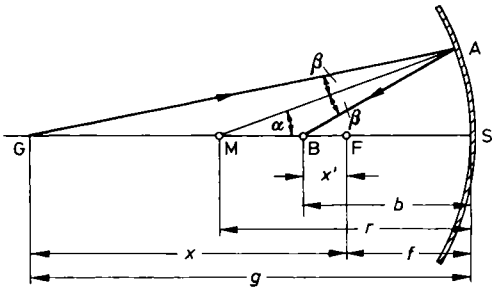


Abb. 1.22 Zur Ableitung der Abbildungsgleichung beim Hohlspiegel

punkt. Alle von ihr ausgehenden Lichtstrahlen werden im anderen Brennpunkt vereinigt.

Wir betrachten nun beim sphärischen Hohlspiegel an Hand der Abb. 1.22 den Verlauf eines Strahles, der von einem außerhalb des Spiegelmittelpunktes M auf der Achse liegenden Punktes G auf den sphärischen Spiegel fällt, diesen in A trifft und nach dem Punkt B auf der Achse reflektiert wird. Dann folgt aus den Dreiekken GAM und MAB nach dem Sinussatz:

$$\frac{\sin\beta}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\mathrm{MG}}{\mathrm{AG}} = \frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{AB}}.$$

Dafür können wir, da für paraxiale Strahlen (d. h. für kleine Winkel α und β) AG = SG = g und AB = SB = b ist, schreiben:

$$\frac{g-r}{g} = \frac{r-b}{b} \quad \text{oder:} \quad \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r}.$$

Da der Krümmungsradius r gleich der doppelten Brennweite f des Spiegels ist, erhalten wir statt dessen:

$$\frac{1}{g}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}. \tag{1.1}$$

Das, was wir hier für *einen* von G ausgehenden Strahl abgeleitet haben, gilt natürlich auch für alle anderen von diesem Punkt auf den Spiegel treffenden Strahlen, soweit diese ein paraxiales Strahlenbüschel bilden (Abb. 1.23). Man kann daher ganz allgemein sagen:

- Alle Strahlen, die von einem Achsenpunkt herkommen (homozentrische Strahlen) und unter kleinem Einfallswinkel auf einen Hohlspiegel treffen, gehen nach der Reflexion wieder durch einen einzigen Punkt, welcher auf der zu dem ersten Punkt gehörenden Achse liegt; die Strahlen bleiben also auch nach der Spiegelung homozentrisch.

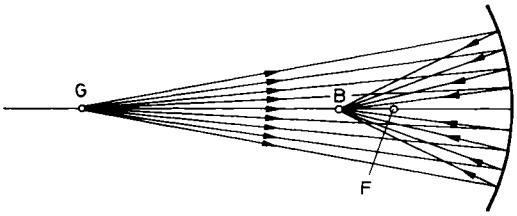


Abb. 1.23 Einfall eines homozentrischen Strahlenbüschels in einen Hohlspiegel

Wir nennen den Abstand g des Punktes G vom Spiegel die *Gegenstandsweite*, den Abstand b des Bildpunktes B vom Spiegel die *Bildweite*. Die Größen g, b, sowie r und f betrachten wir als algebraische Größen, die positive und negative Werte annehmen können. Wir setzen (willkürlich) fest, daß *positiven* Werten der physikalische Sachverhalt entspricht, daß sie alle *vor* dem Hohlspiegel liegen. Bei einem Hohlspiegel liegt es in der Natur der Sache, daß g, r, f positiv sein müssen; die Bildweite b kann aber nach Gl. (1.1) positiv und negativ ausfallen; das letztere entspricht dann dem Falle, daß das Bild *hinter* dem Spiegel liegt, worauf wir weiter unten genauer eingehen werden. Der Sinn unserer Festsetzungen ist der, daß Gl. (1.1) für alle Fälle gilt; man kann also Gl. (1.1) in Worten folgendermaßen aussprechen:

- Die Summe der reziproken Werte von Gegenstandsweite und Bildweite ist gleich dem reziproken Wert der Brennweite.

Es ist ferner üblich, die durch den Gegenstand G, Bildpunkt B und Brennpunkt F senkrecht zur Hauptachse des Spiegels gelegten Ebenen als *Gegenstands-* oder *Dingebene*, *Bild-* und *Brennebene* zu bezeichnen.

Da die Größen $1/g$ bzw. $1/b$ ein Maß für den Öffnungswinkel des von G kommenden bzw. nach B hingerichteten Strahlenbüschels sind, bezeichnet man diese Werte häufig als die

Konvergenz A_G bzw. A_B des Gegenstands- und Bildpunktes. Nennt man ferner die reziproke Brennweite $1/f$ die *Stärke* S des Hohlspiegels, so kann man Gl. (1.1) auch schreiben:

$$A_G + A_B = S, \tag{1.1a}$$

d.h. die Summe der Konvergenzen von Gegenstandspunkt und Bildpunkt ist gleich der Stärke des Hohlspiegels.

Es ist üblich, die Stärke eines Hohlspiegels in **Diotropien** anzugeben, indem man die Brennweite in Metern rechnet. Ein Hohlspiegel hat also die Stärke 1 Dioptrie, wenn seine Brennweite 1 m, d.h. sein Krümmungsradius 2 m, ist.

Bezeichnet man als Maß der Gegenstandsweite die Entfernung x des Punktes G in Abb. 1.22 vom Brennpunkt F statt vom Scheitel S des Spiegels und als Maß der Bildweite die Entfernung x' des Bildpunktes B ebenfalls vom Brennpunkt F, so daß die Beziehungen gelten:

$$g = x + f, \qquad b = x' + f, \tag{1.1b}$$

so erhalten wir an Stelle von Gl. (1.1):

$$\frac{1}{x+f} + \frac{1}{x'+f} = \frac{1}{f},$$

woraus eine zweite, von *Newton* angegebene, ebenfalls allgemein gültige Hohlspiegelgleichung

$$x \cdot x' = f^2 \tag{1.2}$$

folgt, die wir auch in der Form

$$(g-f)(b-f) = f^2 \tag{1.2a}$$

schreiben können. Aus den Gl. (1.1) oder (1.2) läßt sich zu jeder Gegenstandsweite g bei gegebener Brennweite f die Bildweite b und umgekehrt berechnen sowie aus g und b die Brennweite f bestimmen. Es gelten dafür die Beziehungen:

$$b = \frac{gf}{g-f}; \quad g = \frac{bf}{b-f}; \quad f = \frac{gb}{g+b}, \tag{1.3}$$

$$x' = \frac{f^2}{x}; \qquad x = \frac{f^2}{x'}; \qquad f = \sqrt{x \cdot x'}. \tag{1.3a}$$

Die durch die Gl. (1.1) und (1.2) bzw. (1.2a) gegebenen funktionalen Zusammenhänge zwischen den Größen g, b oder x, x' einerseits und f anderseits kann man in folgender Weise graphisch darstellen: In einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit den Achsen x und x' stellt Gl. (1.2) eine gleichseitige Hyperbel dar (Abb. 1.24). Der eine ihrer Scheitelpunkte hat die Koordinaten $(+f, +f)$, der andere die Koordinaten $(-f, -f)$. Legen wir durch letzteren ein dem ersten paralleles Koordinatenkreuz mit den Achsen g und b, so gibt dieselbe Hyperbel die Gl. (1.1) wieder. Aus Abb. 1.24 lesen wir z. B. ab, daß, wenn g aus dem Un-

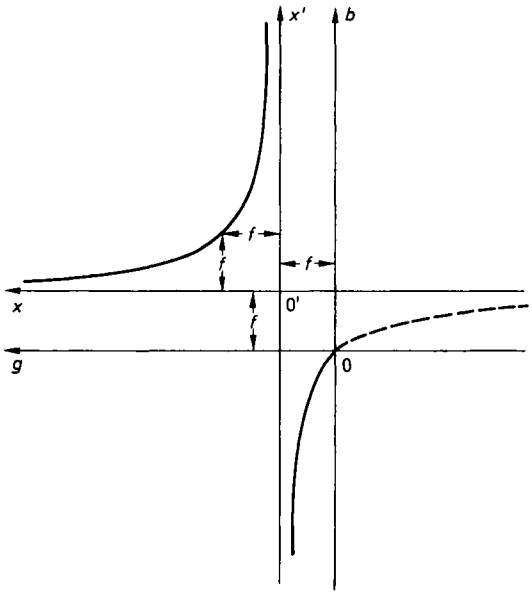


Abb. 1.24 Graphische Darstellung der Abbildungsgleichung beim Hohlspiegel

endlichen nach $+f$ wandert, d.h. wenn der Gegenstandspunkt sich aus dem Uenndlichen nach dem Brennpunkt verschiebt, die Bildweite b sich von $+f$ nach $+\infty$ verändert. Mit anderen Worten:

- Aus dem Unendlichen kommende Strahlen vereinigen sich im Brennpunkt, und aus dem Brennpunkt kommende Strahlen verlaufen als parallele Strahlenbündel nach dem Unendlichen. Für jeden zwischen $+\infty$ und $+f$ liegenden Gegenstandspunkt liegt der Bildpunkt ebenfalls vor dem Hohlspiegel zwischen $+f$ und $+\infty$.

Rückt aber der Gegenstandspunkt zwischen Brennpunkt und Scheitelpunkt des Spiegels, d.h. liegt g zwischen $+f$ und 0, so gilt der ausgezogene Teil des rechten Hyperbelastes, d.h. es wird sowohl x' als auch b negativ, der Bildpunkt liegt *hinter* dem Spiegel. In diesem Fall kann er nur *virtuell* sein, wie z.B. aus der Abb. 1.25 zu erkennen ist, in der die von G auf den Spiegel fallenden Strahlen so reflektiert werden, als ob sie von dem Punkt B kämen; wie aus Abb. 1.24 ersichtlich, rückt dabei das virtuelle Bild dem Spiegel um so näher, je dichter der Gegenstandspunkt an den Spiegel heranrückt. Da nur positive Werte von g möglich sind, d.h. x nicht kleiner als $-f$ werden kann, hat von dem unteren Hyperbelast nur der ausgezogene Teil physikalische Bedeutung.

Um graphisch aus Gegenstandsweite f und Bildweite b die zugehörige Brennweite f zu ermitteln, kann man folgendermaßen verfahren (Abb. 1.26): Man trägt rechtwinklig zueinander g und b ab, verbindet die Endpunkte durch eine Gerade und zieht vom Anfangs-

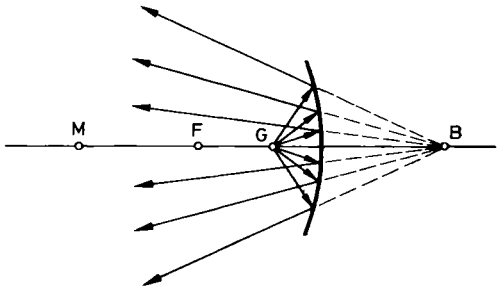


Abb. 1.25 Verlauf der von einem Punkt G zwischen Brennpunkt und Hohlspiegel ausgehenden Strahlen

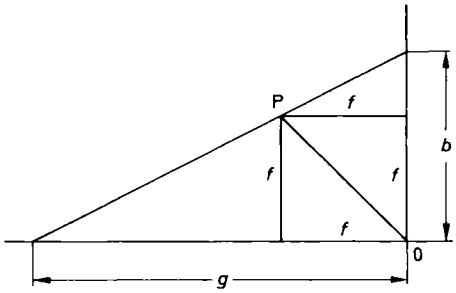


Abb. 1.26 Graphische Ermittlung von Brennweite f aus Gegenstandsweite g und Bildweite b

punkt 0 unter 45° eine zweite Gerade, die die erwähnte Gerade in dem Punkt P trifft. Fällt man sodann von P auf die beiden Strecken g und b die Lote, so haben diese die gesuchte Länge f. Denn man liest aus Abb. 1.26 sofort ab, daß $(g-f):f=f:(b-f)$ ist, was gerade der Gl. (1.2a) entspricht. Ebenso kann man, wenn f und einer der Werte b oder g gegeben sind, den dritten Wert graphisch ermitteln, indem man zunächst ein Quadrat mit der Seite f zeichnet, längs einer Seite entweder b oder g abträgt und von dem so erhaltenen Endpunkt eine Gerade nach der nächsten Ecke (Punkt P) des Quadrates zieht; diese schneidet dann auf der anderen Quadratseite (bzw. ihrer Verlängerung) die gesuchte Größe ab.

Diese Konstruktion liefert ein einfaches Beispiel für ein „Nomogramm": Drei Skalen G, F, B (Abb. 1.27) unter Winkeln von je 45° sind in geeignete Intervalle geteilt, die bei Anlegung eines Lineals durch je einen Punkt zweier Skalen den zugehörigen Punkt auf der dritten Skala ablesen lassen, wobei natürlich die Genauigkeit durch die Feinheit der Teilung beschränkt ist.

Bisher haben wir einen auf der Achse des Hohlspiegels liegenden Punkt G abgebildet; jetzt wollen wir zeigen, wie das Bild eines *ausgedehnten* Gegenstandes, z. B. des in Abb. 1.28 gezeichneten Pfeiles GG′, zustande kommt. Aus dem Vorhergehenden wissen wir, daß ein achsenparalleler Strahl nach dem Brennpunkt des Spiegels, daß ein durch den Brennpunkt gehender Strahl als achsenparalleler

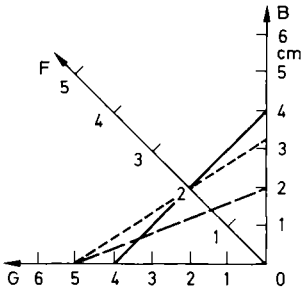


Abb. 1.27 Nomogramm zur Bestimmung von Brennweiten, Bildweiten oder Gegenstandsweiten

Beispiele: ——— $g = 4,\ b = 4,\ f = 2$
– – – – $g = 5,\ b = 2,\ f = 1{,}43$
..... $g = 5,\ b = 3{,}3\ f = 2$

Strahl reflektiert und daß jeder durch die Spiegelmittelpunkt M gehende Strahl in sich selbst zurückgeworfen wird sowie daß schließlich ein den Spiegel im Scheitelpunkt treffender Strahl vor und nach der Reflexion mit der Achse gleiche Winkel bildet. Ziehen wir diese vier Strahlen von Punkt G′ in Abb. 1.28a aus (sie sind durch die Ziffern 1–4 bezeichnet), so schneiden sie sich in einem Punkt B′, der somit das (in diesem Fall reelle) Bild von G′ darstellt. Da der Bildpunkt B von G auf der Achse des Spiegels liegen muß, stellt das Lot von B′ auf die Achse das Bild von GG′ dar.

Natürlich sind zu dieser Bildkonstruktion nur 2 von den 4 ausgezeichneten Strahlen notwendig; dies zeigt z. B. für einen speziellen Fall Abb. 1.28b. In dieser befindet sich der Gegenstand in der Entfernung $g = 2f$ vor dem Spiegel; dann entsteht an der gleichen Stelle $b = 2f$ das reelle umgekehrte Bild in der gleichen Größe wie der Gegenstand.

Wir erhalten also bei der Anordnung nach Abb. 1,28a und b vom Gegenstand GG′ ein reelles umgekehrtes Bild.

Für das Verhältnis von Bildgröße zur Gegenstandsgröße, das man als *Abbildungsmaßstab* v oder auch als *Lateralvergrößerung* bezeichnet, folgt aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke SBB′ und SGG′ (Abb. 1.28a) die Beziehung:

$$v = \frac{\mathrm{BB'}}{\mathrm{GG'}} = \frac{b}{g}; \tag{1.4}$$

hierfür kann man unter Benutzung von Gl. (1.3a) auch schreiben:

$$v = \frac{f}{g-f} = \frac{b-f}{f}. \tag{1.4a}$$

Aus Gl. (1.4) folgt, daß v gleichfalls positive und negative Werte annehmen kann; sind g und b beide positiv, so ist es auch v, d. h. ein positives v entspricht dem Fall,

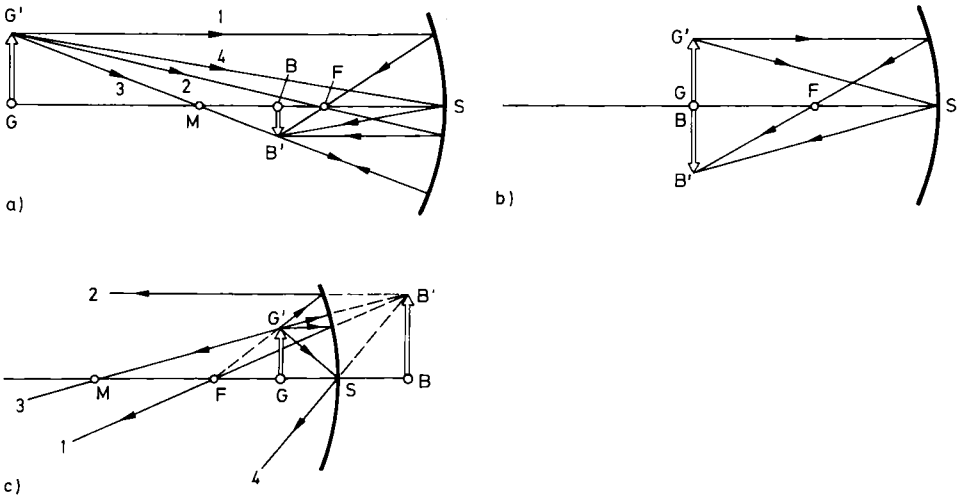


Abb. 1.28 Bildkonstruktion am Hohlspiegel
a) $g > f$; b) $g = 2f$; c) $g < f$

daß ein *umgekehrtes* Bild entsteht. In der Abb. 1.28a ist $0 < v < 1$, während in Abb. 1.28b $v = +1$ ist. Anders ist es im Fall der Abb. 1.28a ist $0 < v < 1$, während in Abb. 1.28b $v = +1$ ist. Anders ist es im Fall der Abb. 1.28c. Hier ist der Fall dargestellt, daß sich der Gegenstand zwischen Brennpunkt und Spiegel befindet. Dann entsteht *hinter* dem Spiegel in der Entfernung $|b|$ ein aufrechtes, vergrößertes, aber *virtuelles* Bild: b selbst ist < 0. Für den Abbildungsmaßstab gelten auch hier die Gl. (1.4) und (1.4a); v ist also hier selbst negativ, aber absolut genommen größer als 1, da das Bild aufrecht und vergrößert ist.

Man kann dies auch aus Abb. 1.28c entnehmen, wobei zu beachten ist, daß die im Bild auftretenden Strecken alle positiv zu nehmen sind. Es folgt nämlich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke SBB′ und SGG′:

$$|v| = \frac{\mathrm{BB'}}{\mathrm{GG'}} = \frac{|b|}{g} = \frac{f}{g-f} = \frac{|b|-f}{f}. \tag{1.4b}$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke MBB′ und MGG′ erhält man ferner:

$$\frac{|b|}{g} = \frac{r+|b|}{r-g} = \frac{2f+|b|}{2f-g}.$$

Aus dieser Gleichung folgt der Reihe nach

$$2f \cdot |b| - |b| \cdot g = 2fg + |b| \cdot g,$$

oder:

$$f \cdot |b| = fg + |b| \cdot g$$

und schließlich:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} - \frac{1}{|b|}.$$

Setzt man hier statt $-|b|$ den (negativen) Wert b ein, so folgt wieder die alte Abbildungsgleichung (1.1):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b},$$

wie es sein muß.

An Hand der Figuren von Abb. 1.28 können wir zusammenfassend sagen:

- Rückt der Gegenstand aus der Entfernung $g = \infty$ immer näher an den Hohlspiegel heran, so rückt sein reelles Bild, von der Stelle $b = f$ beginnend, immer weiter vom Spiegel ab. Dabei wächst der Abbildungsmaßstab zunächst von 0 bis $+1$, wenn der Gegenstand sich dem Spiegel von $g = \infty$ bis $g = r = 2f$ nähert, und dann weiter bis $+\infty$, wenn der Gegenstand bis in die Brennebene ($g = f$) rückt, wobei $b = \infty$ wird. Sobald der Gegenstand die Brennebene überschreitet, springt das reelle und bisher relativ zum Gegenstand umgekehrte Bild von $+\infty$ nach $-\infty$ und wird virtuell und aufrecht. Bei weiterer Annäherung des Gegenstandes an den Spiegel nähert sich auch von der anderen Seite das virtuelle Bild dem Spiegel. Dabei ändert sich der Abbildungsmaßstab von $-\infty$ bis -1, wenn der Gegenstand bis unmittelbar an den Spiegel herangeführt wird.

Einen Überblick über die gegenseitige Lage von Gegenstand und Bild beim Hohlspiegel gibt Tabelle 1.1.

Experimentell lassen sich diese Verhältnisse einfach verfolgen, indem man als Gegenstand eine Glühlampe vor dem Hohlspiegel verschiebt und das Bild auf einer Mattscheibe auffängt. Ein Demonstrationsversuch ist in Abb. 1.29 wiedergegeben. Im Abstand der doppelten Brennweite befindet sich vor einem Hohlspiegel eine leere Blumenvase und unterhalb derselben ist verdeckt für den in den

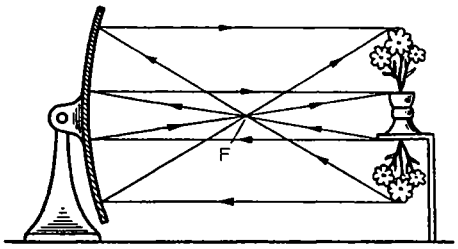


Abb. 1.29 Demonstrationsversuch zum Nachweis des von einem Hohlspiegel erzeugten reellen Bildes

Spiegel blickenden Beobachter ein Blumenstrauß in umgekehrter Lage aufgehängt. Von diesem entwirft der Spiegel über der Vase ein reelles Bild in natürlicher Größe, so daß der Betrachter den Eindruck gewinnt, als ob sich der Blumenstrauß in der Vase befinde. Natürlich wird die Täuschung sofort bemerkt, wenn das Auge so weit verschoben wird, daß die Verbindungslinie Auge–Bild nicht mehr den Spiegel trifft.

Tabelle 1.1 Beziehung zwischen Gegenstandsort, Bildort und Bildart beim Hohlspiegel.

Gegenstandsort	Bildort	Bildart
zwischen Unendlich und Spiegelmittelpunkt	zwischen Brennebene und Spiegelmittelpunkt	reell, umgekehrt, verkleinert; $0 \leqq v \leqq +1$
im Spiegelmittelpunkt	im Spiegelmittelpunkt	reell, umgekehrt, gleich groß; $v = +1$
zwischen Spiegelmittelpunkt und Brennebene	zwischen Spiegelmittelpunkt und Unendlich	reell, umgekehrt, vergrößert; $1 \leqq v \geqq \infty$
zwischen Brennebene und Scheitelpunkt	zwischen minus Unendlich und Scheitelpunkt	virtuell, aufrecht, vergrößert; $-\infty \leqq v \geqq -1$

Bisher wurde die Abbildung eines Gegenstandes durch einen Hohlspiegel nur längs der Hauptachse mittels paraxialer Strahlenbüschel vorgenommen. Wir können aber von jedem Punkt des Gegenstandes durch den Krümmungsmittelpunkt M des Spiegels eine *Nebenachse* zeichnen, z. B. G_1S_1, G_2S_2, $G'_1S'_1$, $G'_2S'_2$ in Abb. 1.30, und längs jeder Nebenachse den betreffenden Gegenstandspunkt durch ein zu dieser Achse paraxiales Strahlenbüschel abbilden. Wir erhalten dann eine Reihe von Bildpunkten B_1, B_2, B'_1, B'_2, die, wie man erkennt, keineswegs auf einer Geraden senkrecht zur Hauptachse, sondern (angenähert) auf einem Kreisbogen liegen: Das Bild $B_2BB'_2$ des zur Hauptachse senkrechten geraden Gegenstandes $G_2GG'_2$ ist *gekrümmt*. Je weiter entfernt sich ein Gegenstandspunkt seitlich von der Hauptachse befindet, um so mehr rückt sein Bildpunkt vom Spiegel aus der Bildebene heraus, welche durch den Bildpunkt auf der Hauptachse bestimmt ist. Entwirft man daher das reelle Bild auf einer Mattscheibe, um es sichtbar zu machen, so wird stets nur der mittlere Teil des Bildes scharf abgebildet, während die seitlichen Teile verschwommen erscheinen. Statt eines seitlichen Bildpunktes entsteht auf der Mattscheibe ein kleiner *Zerstreuungskreis*, da sich die Strahlen des abbildenden Büschels erst hinter der Mattscheibe in einem Punkt vereinigen. Hier zeigt sich im Gegensatz zu der sphärischen Aber-

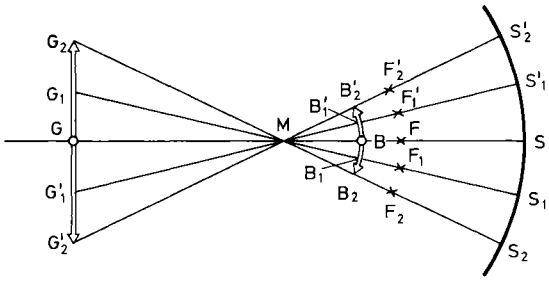


Abb. 1.30 Einfluß der sphärischen Aberration bei der Abbildung durch einen Hohlspiegel

ration, die bei Abbildung eines punktförmigen Gegenstands mit weit geöffneten Bündeln auftritt, eine andere Art von Abbildungsfehler, eine Bildwölbung bei Abbildung eines ebenen ausgedehnten Gegenstands mit paraxialen Strahlen (vgl. Abschn. 1.7 und 1.10.

Außer der Verwendung in Beleuchtungsanlagen zur Erzeugung eines parallelen oder eines konvergenten Lichtbüschels (z. B. bei einem Mikroskopspiegel) hat der Hohlspiegel als abbildendes System eine wichtige Anwendung in den astronomischen Spiegelteleskopen gefunden. Durch eine sinnreiche Erfindung von B. Schmidt an der Hamburger Sternwarte (1931) kann durch eine Platte (Schmidt-Platte) aus Glas, die im Abstand des Krümmungsradius vor dem Spiegel sitzt, die sphärische Aberration des Spiegels selbst bei großem Öffnungswinkel korrigiert werden. Die Dicke dieser Platte variiert etwas mit dem Radius, und zwar so, daß die sphärische Aberration des Spiegels gerade kompensiert wird. Die Bildfläche bleibt allerdings gewölbt. Ein sphärischer Spiegel mit Korrekturplatte wird auch **Schmidt-Spiegel** genannt und wird bei astronomischen Fernrohren sehr viel verwendet (s. a. Abschn. 1.12). – In der Augenheilkunde besteht der zuerst von H. v. Helmholtz (1851) angegebene **Augenspiegel** (in den späteren Ausführungen) aus einem Hohlspiegel H von etwa 10 cm Durchmesser und etwa

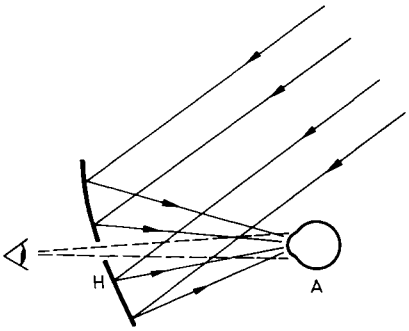


Abb. 1.31 Der Hohlspiegel als Augenspiegel

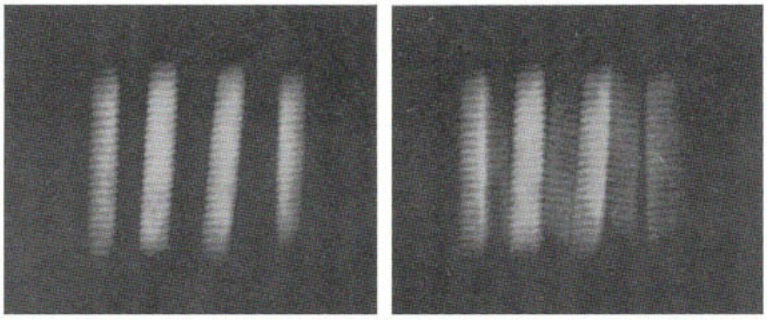


Abb. 1.32 Abbildung der Wendeln einer Projektionsglühlampe (a) in die Lücken zwischen den einzelnen Wendeln (b)

25 cm Brennweite, der in seinem Scheitelpunkt eine Öffnung von etwa 1 cm Durchmesser hat (Abb. 1.31). Wenn der Arzt durch diese Öffnung nach dem zu untersuchenden Auge A blickt, kann er dieses durch geeignete Haltung des Spiegels gleichzeitig intensiv beleuchten, ohne selbst geblendet zu werden. Auf diese Weise ist es möglich, innere Teile des Auges, namentlich die hintere Wand und den das Auge ausfüllenden Glaskörper, deutlich zu sehen und zu untersuchen. – Bei mit einer Glühlampe als Lichtquelle ausgestatteten Projektionsapparaten benutzt man einen Hohlspiegel, um die einzelnen Wendeln der Glühlampe in die dazwischenliegenden Lücken abzubilden (Abb. 1.32).

Zum Schluß gehen wir noch kurz auf die sphärischen **Konvex-** und **Wölbspiegel** ein, bei denen die nach außen gewölbte Fläche als Spiegel dient. Ein auf einen solchen Spiegel fallender achsenparalleler Strahl (1 in Abb. 1.33a) wird so reflektiert, als ob er von einem hinter dem Spiegel liegenden, also virtuellen Brennpunkt F herkäme. Der Abstand des Brennpunktes vom Scheitelpunkt S des Spiegels heißt wieder die Brennweite f, wobei wir aber beachten müssen, daß diese *hinter* dem Spiegel liegt und somit negativ anzusetzen ist. Aus der Gleichschenkeligkeit des Dreiecks MFA folgt wieder, daß $f = \frac{r}{2}$ ist. Ein von einem Gegenstandspunkt G auf der Spiegelachse ausgehender Strahl (2 in Abb. 1.33a) wird so reflektiert, als ob er von einem ebenfalls hinter dem Spiegel zwischen Brennpunkt und Scheitelpunkt liegenden virtuellen Bildpunkt B herkäme. Auch die Bildweite b hat einen negativen Wert. In Abb. 1.33b ist die Bildkonstruktion für einen Gegenstand GG′ wiedergegeben. Von G′ aus ist erstens ein Strahl 1 nach dem Spiegelmittelpunkt M hin gezeichnet, der in sich selbst reflektiert wird, zweitens ein zur Achse parallel verlaufender Strahl 2, der nach Reflexion vom Brennpunkt F herzukommen scheint, drittens ein nach dem Scheitelpunkt S gerichteter Strahl 3, der mit der Achse vor und nach der Reflexion gleiche Winkel bildet, und viertens ein nach dem Brennpunkt F gerichteter Strahl, der parallel zur Achse reflektiert wird. Die rückseitigen Verlängerungen dieser vier Strahlen schneiden

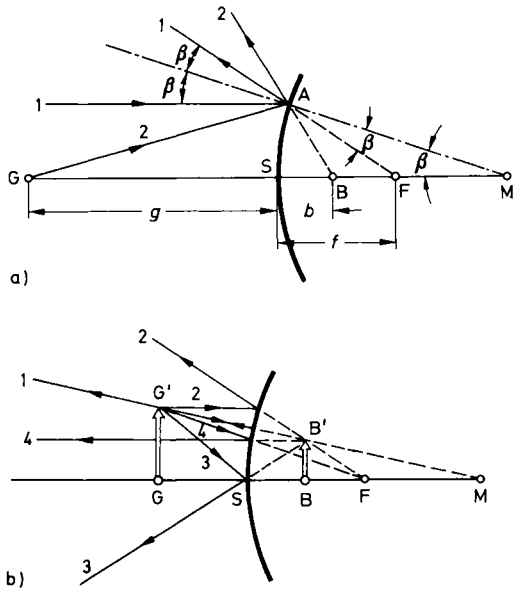


Abb. 1.33 Reflexion am sphärischen Wölbspiegel
a) zur Definition von Bild- und Brennpunkt b) Bildkonstruktion

sich im Bildpunkt B′; natürlich sind nur zwei von diesen Strahlen notwendig zur Konstruktion. Wir erhalten also von dem Gegenstand ein aufrechtes, verkleinertes, virtuelles Bild. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke SBB′ und SGG′ folgt für den Abbildungsmaßstab v und seinen Absolutbetrag $|v|$:

$$|v| = \frac{\mathrm{BB'}}{\mathrm{GG'}} = \frac{|b|}{g}; \quad v = \frac{b}{g} = -\frac{|b|}{g}. \tag{1.5}$$

Dabei bedeutet das negative Vorzeichen, daß jetzt das Bild die gleiche Richtung wie der Gegenstand hat (d.h. $v < 0$). Aus der Ähnlichkeit der beiden anderen Dreiecke MBB′ und MGG′ in Abb. 1.33b folgt ferner:

$$|v| = \frac{|b|}{g} = \frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{MG}} = \frac{2\,|f| - |b|}{2\,|f| + g}. \tag{1.5a}$$

Aus den Gl. (1.5) und (1.5a) findet man als Abbildungsgleichung für den Wölbspiegel wieder die alte Beziehung (1.1):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}. \tag{1.1}$$

Würde man – statt f, g, b als *algebraische* Größen zu betrachten – unter f, g, b die *Absolutbeträge* verstehen, so erhielte man eine andere Abbildungsgleichung, nämlich:

$$-\frac{1}{f}=\frac{1}{g}-\frac{1}{b}, \tag{1.5b}$$

die man zuweilen in Lehrbüchern findet; der Leser muß also stets prüfen, was gemeint ist. Unsere Darstellung hat den Vorzug, daß in allen Fällen Gl. (1.1) erhalten bleibt.

Setzt man nach Gl. (1.1a) auch hier

$$g = x + f, \quad b = x' + f,$$

so gilt natürlich auch die *Newton*sche Form der Abbildungsgleichung unverändert:

$$xx' = f^2. \tag{1.5c}$$

Den durch die Abbildungsgleichungen (1.1) und (1.5c) gegebenen funktionalen Zusammenhang zwischen g, b bzw. x, x' und f stellt Abb. 1.34 dar, die in vollkommener Analogie zur Abb. 1.24 steht. Man erkennt, daß nur der ausgezogene Teil der Hyperbel für die Abbildungsverhältnisse beim Konvexspiegel in Frage kommt.

Bewegt sich beim Konvexspiegel der Gegenstand vom Unendlichen her auf den Spiegel zu, so wandert sein virtuelles Bild vom Brennpunkt nach dem Spiegel, wobei sich der Abbildungsmaßstab von 0 bis -1 ändert. Ein Konvexspiegel liefert also stets nur verkleinerte virtuelle Bilder. – Sphärische Konvexspiegel dienen oft dazu, dem Fahrer eines Kraftwagens ein verkleinertes Bild der Vorgänge hinter seinem Fahrzeug zu liefern. Der Blickwinkel ist vergrößert.

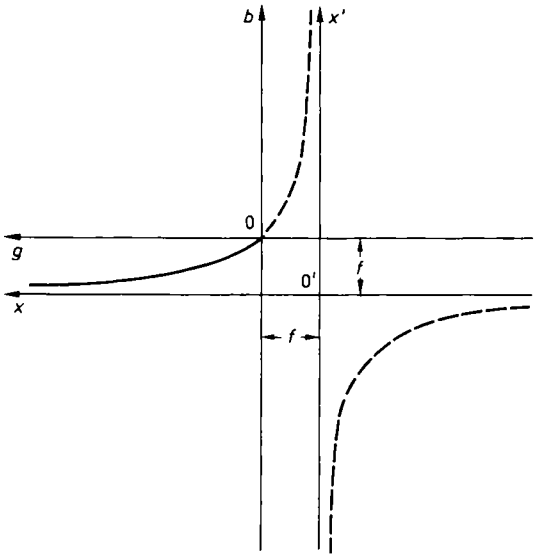


Abb. 1.34 Graphische Darstellung der Abbildungsgleichung beim Konvexspiegel

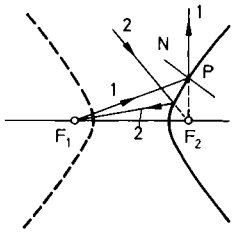


Abb. 1.35 Reflexion am hyperbolischen Konvexspiegel

Sowohl für den Konkav- als auch Konvexspiegel gilt übrigens, daß bei einer Bewegung des Gegenstandes auf den Spiegel zu oder von ihm fort das Bild sich stets in der entgegengesetzten Richtung verschiebt. Daher spricht man von einer *rückläufigen Abbildung*.

Ähnlich wie bei den Hohlspiegeln der parabolisch gekrümmte Spiegel eine ausgezeichnete Rolle spielt, kommt bei den Wölbspiegeln dem *hyperbolisch* gekrümmten Spiegel eine gewisse Bedeutung zu. Bekanntlich wird der Winkel zwischen zwei von einem Hyperbelpunkt P nach den beiden Brennpunkten F_1 und F_2 gezogenen Brennstrahlen von der Normalen N in diesem Punkt P halbiert (Abb. 1.35). Es wird daher jeder vom Brennpunkt F_1 nach dem gegenüberliegenden Hyperbelast gerichtete Strahl 1 von diesem so reflektiert, als ob er von dem andern Brennpunkt F_2 herkäme, und umgekehrt wird jeder nach dem Brennpunkt F_2 gerichtete Strahl 2 zum Brennpunkt F_1 gespiegelt. Man kann daher mit einem hyperbolischen Konvexspiegel, dessen Fläche man sich durch Rotation eines Hyperbelastes um die Hyperbelachse entstanden zu denken hat, die Konvergenz eines auf den Spiegel fallenden Strahlenbüschels verkleinern, ohne daß dabei die Homozentrizität des Büschels gestört wird, d.h. sämtliche Strahlen gehen nach der Spiegelung wieder durch einen Punkt. Über die Verwendung hyperbolischer Konvexspiegel beim Spiegelfernrohr siehe Abschn. 1.12.

1.5 Die Brechung des Lichtes, Totalreflexion

Fällt Licht auf die Trennungsfläche zweier durchsichtiger Körper (z. B. aus Luft in Glas oder Wasser), so wird nur ein Teil in das erste Medium zurückgeworfen, während der übrige Teil in das zweite Medium eindringt; dabei erleidet bei schrägem Auftreffen auf die Grenzflächen der Strahl im allgemeinen eine Richtungsänderung beim Übertritt in das andere Medium, die sogenannte *Brechung*.

Ähnlich wie bei der Reflexion gibt es auch eine *diffuse Brechung*, wenn nämlich die Trennungsfläche rauh ist. Bei der diffusen Brechung wird der Lichtstrahl mehr oder weniger nach allen Richtungen hin gebrochen. Diese Art der Brechung interessiert hier aber nicht, sondern nur diejenige, bei welcher der Lichtstrahl auch nach der Brechung eine bestimmte Richtung hat, die nur von der Richtung des einfallenden Strahls und der Natur der beiden Medien abhängt.

Von der Tatsache der Brechung beim Eintritt von Licht aus Luft in Wasser oder umgekehrt kann man sich durch einfache Versuche überzeugen. Legt man z. B. auf den Boden eines leeren Gefäßes mit undurchsichtigen Wänden eine Münze

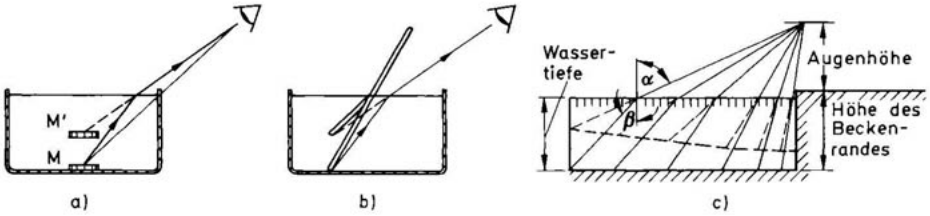


Abb. 1.36 Versuche zum Nachweis der Lichtbrechung
a) scheinbare Hebung einer im Wasser liegenden Münze
b) scheinbare Knickung eines schräg ins Wasser getauchten Stabes
c) scheinbare Hebung des Bodens eines Schwimmbeckens

und blickt in einer solchen Richtung schräg in das Gefäß, daß die Münze gerade durch die Seitenwand verdeckt wird, so wird sie sofort sichtbar, wenn man Wasser in das Gefäß gießt (Abb. 1.36a): die von der Münze kommenden Lichtstrahlen werden beim Austritt aus dem Wasser gebrochen und gelangen dadurch in das Auge; dieses sieht die Münze M in der Lage M′, d. h. in der Verlängerung der ins Auge gelangenden Strahlen, also etwas gehoben. Aus demselben Grunde erscheint ein schräg ins Wasser getauchter Stab an der Eintrittsstelle geknickt (Abb. 1, 36b), der Boden eines Schwimmbeckens gehoben und gekrümmt (Abb. 1.36c).[1]

Um die Gesetzmäßigkeit der Lichtbrechung zu finden, lassen wir ein schmales Lichtbündel schräg auf eine Wasseroberfläche im Inneren eines schmalen Glastroges fallen und verfolgen die Richtung der Lichtstrahlen in Luft und Wasser in der Weise, daß wir vertikal in das Wasser eine Mattscheibe stellen, auf der das

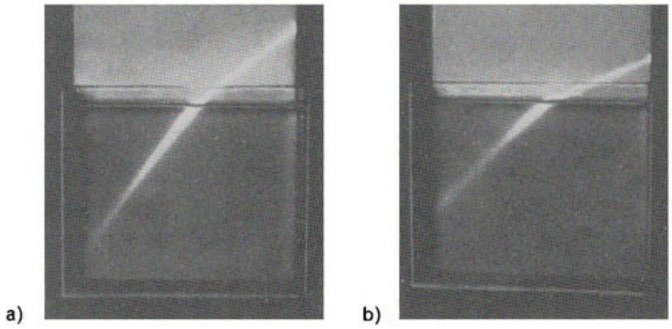


Abb. 1.37 Brechung eines Lichtstrahls beim Übergang von Luft nach Wasser
a) Einfallswinkel = 52° b) Einfallswinkel = 67°

[1] Betrachtet man einen unter Wasser befindlichen Gegenstand mit zwei Augen, so erscheint dieser senkrecht angehoben. Bei der Beobachtung mit nur einem Auge ergibt sich dazu eine seitliche Verschiebung. Außerdem muß man bei der Brechung eines Lichtbündels an der ebenen Grenzfläche Wasser – Luft noch einen auftretenden Abbildungsfehler (Astigmatismus) berücksichtigen.

Licht seinen Weg als helle Linie aufzeichnet (Abb. 1.37). Statt dessen kann man auch nach *J. Tyndall* Luft und Wasser durch Zusatz von Rauch bzw. Milch etwas trüben und so den Weg des Lichtes sichtbar machen. Man beobachtet, daß die Richtung des Strahles beim Eintritt in das Wasser einen Knick erfährt und (in dem betrachteten Fall) zum Einfallslot hin gebrochen wird, und zwar werden die Strahlen um so mehr von ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkt, je schräger sie auf die Grenzfläche fallen (Abb. 1.37b).

Immer liegen einfallender Strahl, Einfallslot und gebrochener Strahl in einer Ebene. Bezeichnen wir den Winkel des einfallenden Strahles mit dem Lot als den *Einfallswinkel* α und den Winkel, den der gebrochene Strahl mit dem Lot bildet, als *Brechungswinkel* β, so gilt das von W. Snellius (1620) gefundene **Brechungsgesetz**:

- Der Sinus des Einfallswinkels steht zum Sinus des Brechungswinkels in einem konstanten Verhältnis, das nur von der Natur der beiden Medien abhängt.

Es gilt also die Gleichung:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{21} = \text{Const.} \tag{1.6}$$

Die Konstante n_{21} heißt die **Brechzahl** (auch Brechungsindex, seltener Brechungsquotient) des Mediums 2 in bezug auf das Medium 1. Beim Übergang von Luft nach Wasser ist n_{21} annähernd $^4/_3$, beim Übergang von Luft nach gewöhnlichem Spiegelglas hat n_{21} etwa den Wert $^3/_2$. Abb. 1.38 zeigt die Brechung des Lichtes beim schrägen Eintritt in ein Stück Glas, und zwar für die beiden Einfalls-

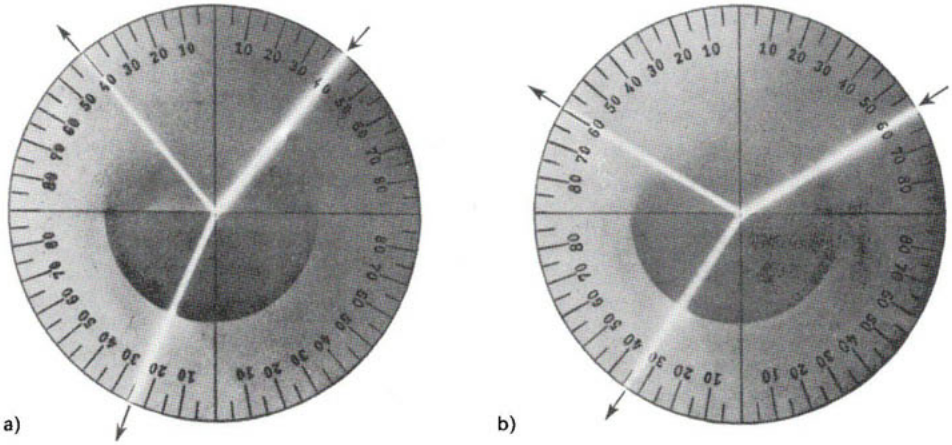


Abb. 1.38 Brechnung und Reflexion eines Lichtstrahls beim Übergang von Luft nach Glas

a) Einfallswinkel $\alpha = 40°$; Brechungswinkel $\beta = 24{,}5°$
b) Einfallswinkel $\alpha = 60°$; Brechungswinkel $\beta = 34°$

winkel 40° und 60°; als zugehörige Brechungswinkel entnimmt man aus den Aufnahmen 24,5° und 34°: dies liefert nach dem Brechungsgesetz (1.6) für n_{21} den Wert 1,55. Damit der Lichtstrahl beim Austritt aus dem Glas nach Luft keine erneute Brechung erfährt, hat das Glasstück halbkreisförmige Gestalt. Alle Strahlen befinden sich in der gemeinsamen *Einfallsebene*.

Wie bereits in Band I in der allgemeinen Wellenlehre gezeigt, ist die Ursache für die Brechung einer Welle die Änderung ihrer Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Die Brechzahl stellt, wie wir dort gezeigt haben, direkt das Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in den beiden Medien dar. Bezeichnen wir diese mit c_1 und c_2, so können wir schreiben:

$$n_{21} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}. \tag{1.7}$$

Da es nach dem Satz von der Umkehrbarkeit des Lichtweges gleichgültig ist, ob der Lichtstrahl vom Medium 1 nach 2 oder umgekehrt von 2 nach 1 läuft, kann man auch schreiben

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{c_2}{c_1} = n_{12},$$

wobei jetzt β den Einfallswinkel im Medium 2, α den Brechungswinkel im Medium 1 und n_{12} die Brechzahl des Mediums 1 in bezug auf 2 bedeuten. (Natürlich wird bei der Strahlungsumkehr der Strahl vom Einfallslot weg gebrochen, wenn er vorher aufs Lot zu gebrochen wurde.) Es gilt also

$$n_{12} = \frac{1}{n_{21}}.$$

Man nennt n_{12} bzw. n_{21} genauer die *relativen Brechzahlen* der beiden Stoffe im Gegensatz zu der *absoluten Brechzahl* eines Stoffes, die sich auf den Eintritt des Lichtes aus dem Vakuum in den betreffenden Stoff bezieht. In diesem Fall gilt:

$$\frac{c_0}{c_1} = n_{10} = n_1 \quad \text{und} \quad \frac{c_0}{c_2} = n_{20} = n_2;$$

da man das Vakuum als das normale Bezugsmedium betrachtet, läßt man den Index „0“ fort und schreibt die absoluten Brechzahlen nur mit einem Index. Aus den beiden letzten Gleichungen folgt durch Division und Berücksichtigung von Gl. (1.7):

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}; \tag{1.8}$$

d. h. die relative Brechzahl n_{21} zweier Stoffe 1 und 2 ist gleich dem Quotienten der absoluten Brechzahlen beider Stoffe. Hat man, wie das meistens der Fall ist, die relative Brechzahl eines Mediums gegen Luft gemessen – er sei n_{xL} –, so kann man

nach Gl. (1.8) seine absolute Brechzahl n_x ermitteln, wenn man die absolute Brechzahl der Luft n_L kennt. Es ist dann

$$n_x = n_{xL} \cdot n_L .$$

Nun ist, wie in Abschn. 6 noch gezeigt wird, die absolute Brechzahl der Luft $n_L = 1{,}000292$, so daß die gegen Luft gemessenen Werte der relativen Brechzahlen nur wenig von den absoluten abweichen.

In Tabelle 2 sind die Brechzahlen einiger Stoffe zusammengestellt. Sie gelten für das Licht der gelben Natriumlinie (D-Linie). Diese Angabe ist erforderlich, da die Brechzahl, wie später noch gezeigt wird, von der Farbe (Schwingungszahl) des Lichtes abhängt.

Tabelle 1.2 Absolute Brechzahlen einiger Stoffe für Na-Licht bei 20 °C

Feste Stoffe:		Flüssigkeiten:	
Eis	1,31	Wasser	1,3330
Lithiumfluorid	1,3915	Ethanol	1,3618
Calciumfluorid	1,4338	Leinöl	1,486
Kaliumchlorid	1,4903	Benzol	1,5012
Natriumchlorid	1,5443	Zedernöl	1,505
Caesiumiodid	1,7899	Kassiaöl	1,605
		Kohlenstoffdisulfid	1,6276
Optische Gläser:		Monobromnaphthalin	1,6582
Borkron BK 1	1,5100	Methyleniodid	1,7417
Schwerkron SK 1	1,6102		
Flint F 3	1,6128	Gase: (0 °C, 1,013 bar)	
Schwerflint SF 4	1,7550	Sauerstoff	1,000271
schwerstes Flint	1,9	Stickstoff	1,000298
Quarzglas	1,4588	Kohlendioxid	1,000449
Plexiglas	1,50 ... 1,52	Distickstoffoxid	1,000516
Diamant	2,4173	Luft	1,000292

Man nennt einen Stoff *optisch dichter* (*optisch dünner*) als einen anderen, wenn seine absolute Brechzahl *größer* (*kleiner*) ist als die des anderen. Die optische Dichte ist jedoch nicht mit der (stofflichen) Dichte zu verwechseln. Zum Beispiel hat Wasser trotz seiner größeren stofflichen Dichte eine kleinere Brechzahl als das spezifisch leichtere Benzol. Bei ein und demselben Stoff wächst allerdings die Brechzahl mit der Dichte des Stoffes; wird diese also z. B. durch Druck erhöht, so steigt auch die Brechzahl an.

Die Gl. (1.6) oder (1.7), die das Brechungsgesetz darstellen, kann man unter Berücksichtigung von Gl. (1.8) in der Form schreiben:

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta = \text{Const.} \tag{1.9}$$

Da man wegen der Umkehrbarkeit des Lichtweges auch den Winkel α als Brechungswinkel bezeichnen kann, läßt sich das Brechungsgesetz in folgender Form

aussprechen:

- Das Produkt aus Brechzahl und Sinus des Brechungswinkels ist bei der Brechung unveränderlich.

Das Produkt $n \sin\alpha$ heißt nach E. Abbe (1873) die **numerische Apertur** des Strahles gegen das Einfallslot. Das Brechungsgesetz sagt also aus, daß die numerische Apertur bei der Brechung eines Lichtstrahls unverändert bleibt. Auf diese Weise ist das Brechungsgesetz in Form einer sog. *optischen Invariante* dargestellt, indem der Wert der numerischen Apertur $n \sin\alpha$ bei beliebig vielen aufeinanderfolgenden Brechungen unverändert bleibt.

Rein formal enthält Gl. (1.9), d. h. das Brechungsgesetz, auch das Reflexionsgesetz; man hat nur $n_2 = -n_1$ zu setzen und erhält dann das Reflexionsgesetz in der Form $\beta = -\alpha$; das Minuszeichen rührt davon her, daß β im ersten Medium auf der anderen Seite des Lotes liegt. Diese Bemerkung gilt für alle Reflexionsprobleme, worauf wir später noch zurückkommen werden.

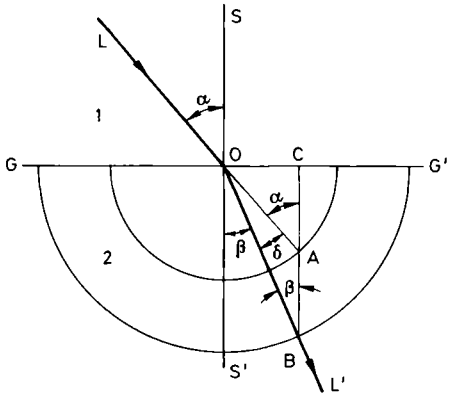


Abb. 1.39 Geometrische Ermittlung des gebrochenen Strahls

Wir zeigen zunächst, wie man die Richtung eines gebrochenen Strahles zu einem vorgegebenen einfallenden Strahl geometrisch ermitteln kann. In Abb. 1.39 falle im Punkt O ein Lichtstrahl LO auf die ebene Grenzfläche GG′ zwischen zwei Medien 1 und 2 auf. Wir errichten in O das Einfallslot SS′ und zeichnen um O im Medium 2 zwei Kreise, deren Radienverhältnis gleich der relativen Brechzahl n_{21} des Mediums 2 gegen Medium 1 ist (in der Abb. ist 2 als das optisch dichtere Medium angenommen). Die Verlängerung des einfallenden Strahls schneidet den kleineren Kreis in A. Von hier fällen wir das Lot AC auf die Grenzfläche GG′ und verlängern es rückwärts bis zum Schnittpunkt B mit dem größeren Kreis. Dann gibt die Verbindung OB die Richtung des gebrochenen Strahls im Medium 2 wieder. Es ist nämlich

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin \mathrm{CAO}}{\sin \mathrm{CBO}} = \frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{AO}} : \frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{BO}} = \frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{AO}} = n_{21},$$

was zu beweisen war. Ist umgekehrt der aus dem (dichteren) Medium 2 kommende Strahl L′O gegeben, so fällt man von B das Lot auf die Grenzfläche GG′, das den kleineren Kreis

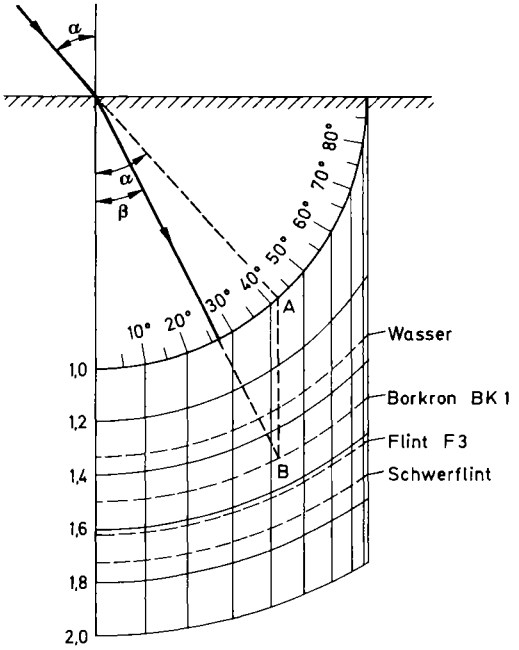


Abb. 1.40 Diagramm zur Ermittlung des gebrochenen Strahls beim Übergang von Luft nach Stoffen mit den Brechzahlen zwischen 1 und 2

in A schneidet. Die Verlängerung von AO über O hinaus liefert dann den in das (dünnere) Medium gebrochenen Strahl.

Abb. 1.40 gibt ein auf Grund dieser Konstruktion gezeichnetes Diagramm wieder, aus dem man sofort für den Übergang von Luft zu einem Stoff mit den Brechzahlen 1 bis 2 oder umgekehrt den gebrochenen Strahl finden kann.

Nach Abb. I, 39 ist die Ablenkung δ, die ein Strahl durch die Brechung erfährt, durch

$$\delta = \alpha - \beta \tag{1.10}$$

gegeben. Aus dem Brechungsgesetz (1.6) folgt $\sin\alpha = n_{21}\sin\beta$ und weiter

$$\sin\alpha - \sin\beta = (n_{21} - 1)\sin\beta .$$

Nach dem Additionstheorem der trigonometrischen Funktionen ist diese Gleichung identisch mit der folgenden:

$$2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = (n_{21} - 1)\sin\beta ,$$

woraus sich ergibt:

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{n_{21}-1}{2}\,\frac{\sin\beta}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Da β mit zunehmendem α wächst, ist die Ablenkung δ des Lichtes um so größer, je größer der Einfallswinkel α ist.

Beim Übergang von einem optisch dünneren zu einem optisch dichteren Medium wird der Lichtstrahl stets zum Einfallslot hin gebrochen, da die relative Brechzahl n_{21} dann größer als 1 ist; umgekehrt ist es, wenn Licht aus einem optisch dichteren Medium 1, z. B. Wasser oder Glas, in ein optisch dünneres Medium 2, z. B. Luft, übertritt. Dann findet eine Brechung vom Einfallslot weg statt (Strahl 1 und 2 in Abb. 1.41). Der Brechungswinkel ist nach dem Brechungsgesetz (1.6) gegeben durch:

$$\sin\beta = n_{12}\sin\alpha,$$

wobei jetzt $n_{12} = \frac{n_1}{n_2} > 1$, d. h. $n_1 > n_2$ ist. Nun ist aber der größte Wert, den $\sin\beta$ überhaupt annehmen kann, gleich 1, wenn nämlich β gleich 90° wird. In diesem Fall tritt der in das dünnere Medium gebrochene Strahl streifend zur Grenzfläche in dieses ein (Strahl 3 in Abb. 1.41). Der zugehörige Einfallswinkel α_g im dichteren Medium ist dann durch die Gleichung

$$\sin\alpha_g = \frac{1}{n_{12}} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1} \tag{1.11}$$

gegeben. Einfallswinkeln α, die größer als der durch Gl. (1.11) definierte **Grenzwinkel** α_g sind, entspricht kein reeller Brechungswinkel β mehr; daher kann ein Übertritt des Lichtes in das dünnere Medium nicht mehr erfolgen. Das Licht wird vielmehr an der Grenzfläche regulär reflektiert, und zwar mit seiner vollen Intensität (Strahl 4 in Abb. 1.41). Man bezeichnet daher diesen zuerst von J. Kepler (1611) beobachteten Vorgang als **Totalreflexion**. Man kann also sagen:

- Totalreflexion tritt stets dann ein, wenn Licht aus einem optisch dichteren Medium auf die Grenzfläche eines optisch dünneren fällt und der Einfallswinkel größer als der durch die Gleichung $\sin\alpha_g = n_{12}$ bestimmte Grenzwinkel ist.

Wir müssen uns hier mit dieser empirischen Feststellung begnügen. Auf die feineren Vorgänge bei der Totalreflexion kommen wir in Abschn. 4.3 zurück.

Beim Übergang von Wasser nach Luft ist $\sin\alpha_g = {}^3/_4$, d. h. $\alpha = 48°35'$. Abb. 1.42 zeigt für diesen Fall den in der vorangehenden Abb. 1.41 schematisch dargestellten Strahlenverlauf experimentell: Einige Zentimeter unter der Wasseroberfläche befindet sich eine (in der Abb. verdeckte) Lichtquelle, die durch mehrere Schlitzblenden einige scharf begrenzte Strahlenbündel schräg gegen die Wasseroberfläche strahlt. Von diesen werden nur die, deren Einfallswinkel kleiner als der Grenzwinkel von 48°35′ ist, in den Luftraum hinein gebrochen, während die

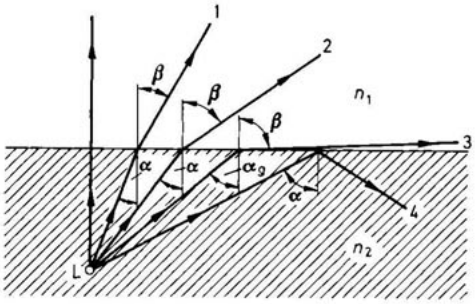


Abb. 1.41 Brechung und Totalreflexion beim Übergang des Lichts von einem dichteren in ein dünneres Medium

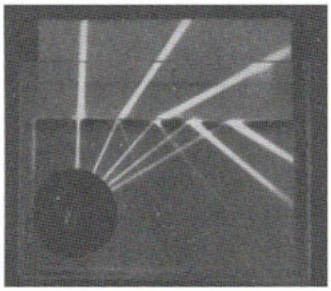


Abb. 1.42 Versuchsanordnung zum Nachweis der Brechung und Totalreflexion an der Grenzfläche Wasser – Luft. Die Lichtquelle befindet sich links unten im Wasser in einer mit Schlitzen versehenen Dose

anderen in das Wasser zurück totalreflektiert werden. Man sieht in der Abb. 1.42 auch deutlich die weit größere Intensität der totalreflektierten Strahlen gegenüber den normal reflektierten. – Abb. 1.43 zeigt den Übergang des Lichtes von Glas nach Luft. Bei den Einfallswinkeln 30° und 40° findet sowohl Brechung als auch Reflexion statt, bei den Einfallswinkeln 50° und 60° haben wir bereits totale Reflexion. Der Grenzwinkel liegt bei dem benutzten Glas mit $n = 1{,}55$ bei 40,5°. – Blickt man schräg von unten gegen eine Wasseroberfläche unter einem Einfallswinkel, der größer ist als der Grenzwinkel der Totalreflexion, so kann man nicht durch die Wasseroberfläche hindurchsehen; diese erscheint vollkommen spiegelnd. Aus dem Wasser heraus kann man nur innerhalb des durch den Grenzwinkel der Totalreflexion gegebenen räumlichen Winkels sehen. Abb. 1.44a zeigt, wie ein unter Wasser befindliches Auge eines Schwimmers mit Taucherbrille die Außenwelt erblickt: Er sieht sie – natürlich verzerrt! – innerhalb eines Kegels, dessen halber Öffnungswinkel gleich dem Grenzwinkel ist; außerhalb des Kegels sieht er nur totalreflektiertes Licht, z. B. den Grund des Bassins, in dem er sich befindet. –

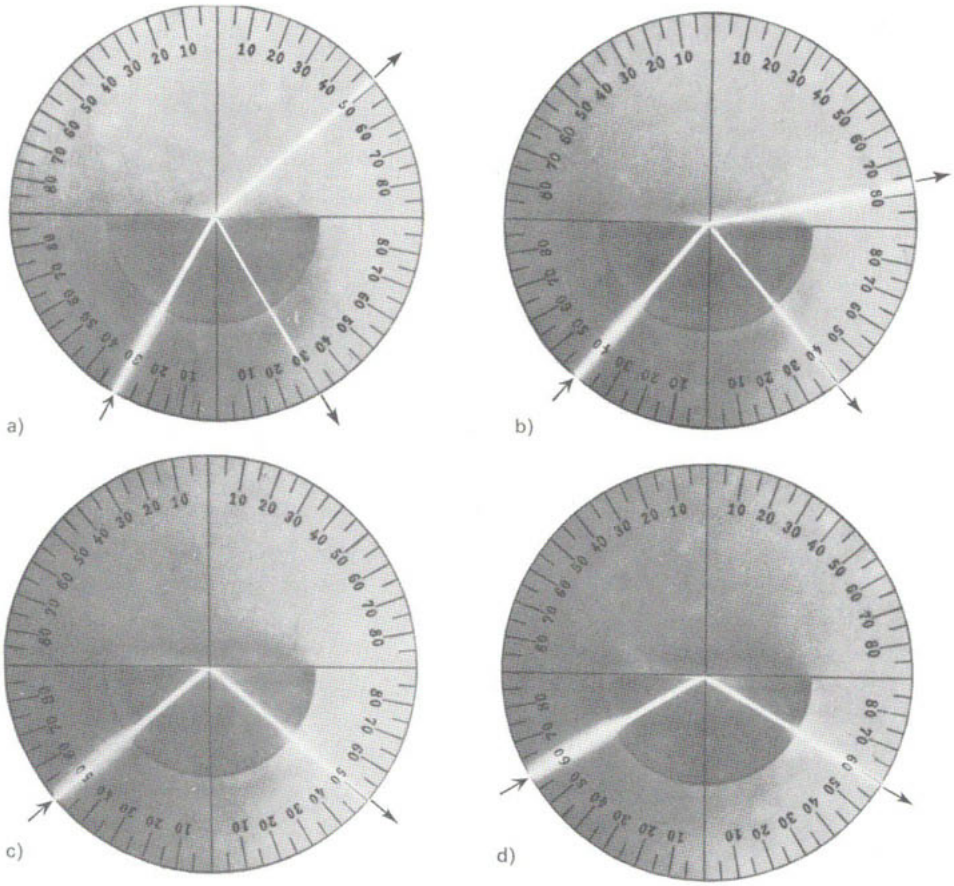


Abb. 1.43 Brechung und Reflexion des Lichtes beim Übergang von Glas nach Luft:
a, b) Einfallswinkel 30° bzw. 40° kleiner als Grenzwinkel 40,5° ergibt Brechung und Reflexion;
c, d) Einfallswinkel 50° bzw. 60° größer als Grenzwinkel 40,5° ergibt Totalreflexion

Ein leuchtender Punkt unmittelbar oberhalb der Wasserfläche strahlt in den Außenraum gleichmäßig nach allen Richtungen, im Wasser dagegen nur innerhalb eines Kegels, dessen halber Öffnungswinkel gleich dem Grenzwinkel ist (Abb. 1.44b).

Der in Abb. 1.44a dargestellte Fall, daß Licht von einem optisch dichteren Medium nach einem optisch dünneren strahlt, tritt regelmäßig beim Gebrauch eines Mikroskops auf. Denn das von einem Punkt P des beleuchteten Präparates kommende Licht verläuft, bevor es in die Frontlinse des Mikroskop-Objektives eintritt, zunächst durch das Deckglas mit der absoluten Brechzahl $n = 1{,}515$ und dann durch eine Luftschicht. Dabei kann wegen der Totalreflexion an der Grenze zwischen Glas und Luft nur ein Strahlenbüschel austreten, dessen äußerster

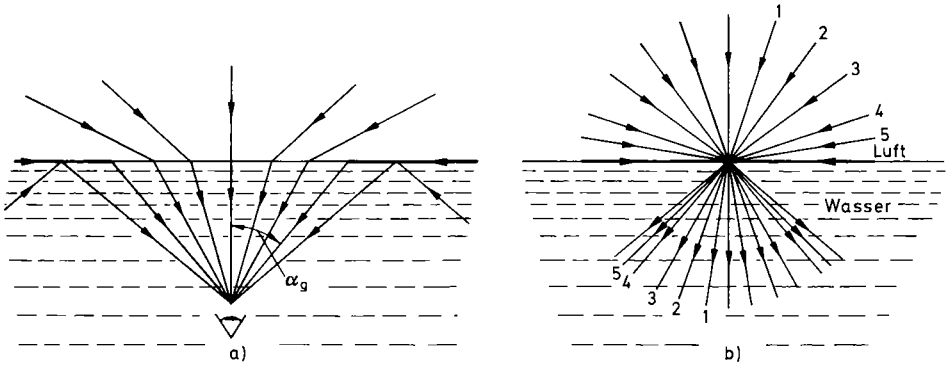


Abb. 1.44 Zur Brechung des Lichtes beim Übergang von Luft nach Wasser:
a) Ein unter Wasser befindliches Auge mit Taucherbrille sieht innerhalb eines durch den Grenzwinkel der Totalreflexion gegebenen Winkels ($2 \cdot 48° 30' = 97°$) die verzerrte Außenwelt;
b) Von einem leuchtenden Punkt unmittelbar oberhalb der Wasseroberfläche tritt das Licht in das Wasser nur innerhalb eines Kegels, dessen halber Öffnungswinkel gleich dem Grenzwinkel der Totalreflexion (48° 30′) ist

Strahl einen Winkel von 41,5° mit dem Einfallslot einschließt (Abb. 1.45a). Bringt man aber zwischen Deckglas und Frontlinse noch eine Wasserschicht, so vergrößert sich dieser Winkel auf 61,5° (Abb. 1.45b), während bei Verwendung von Öl, das die gleiche Brechzahl wie das Deckglas hat, der Winkel sogar 90° wird (Abb. 1.45c). Dies hat zur Folge, daß viel mehr Licht in das Objektiv ge-

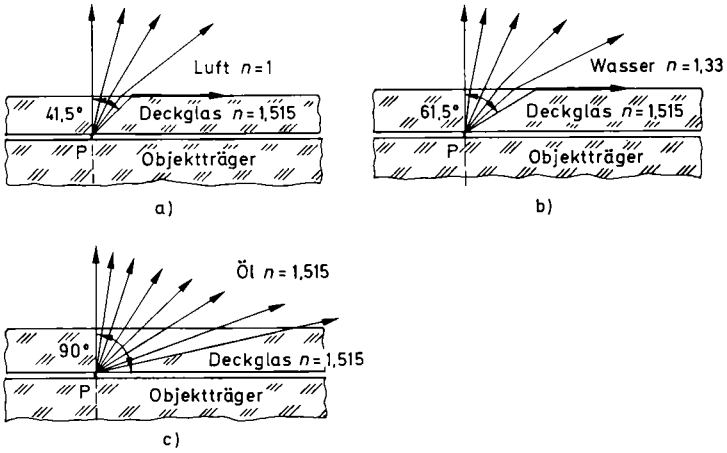


Abb. 1.45 Strahlenverlauf durch das Deckglas eines mikroskopischen Präparates:
a) Deckglas grenzt an Luft, numerische Apertur = 1;
b) Deckglas grenzt an Wasser, numerische Apertur = 1,33;
c) Deckglas grenzt an Öl gleicher Brechzahl wie Deckglas, numerische Apertur = 1,515

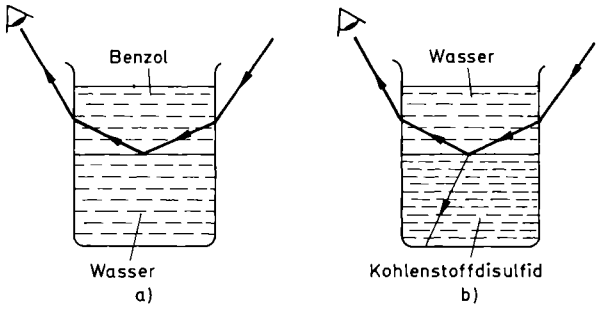


Abb. 1.46 Demonstration von totaler (a) und partieller (b) Reflexion

langt, also die Helligkeit des Bildes erheblich gesteigert wird. (Über die weitergehende Bedeutung dieser sog. *Immersion* s. Abschn. 1.12). In den in Abb. 1.45 dargestellten drei Fällen sind die numerischen Aperturen der äußersten noch austretenden Strahlen der Reihe nach

$$1{,}515 \sin 41{,}5° = 1{,}00; \quad 1{,}515 \sin 61{,}5° = 1{,}33 \quad \text{und}$$
$$1{,}515 \sin 90° = 1{,}515,$$

d.h. gleich den absoluten Brechzahlen der auf das Deckglas gebrachten Stoffe. Den quantitativen Unterschied zwischen totaler und partieller Reflexion zeigen folgende Versuche: In ein Becherglas gießt man etwas Wasser ($n = 1{,}33$) und schichtet darüber Benzol ($n = 1{,}496$), in ein zweites Becherglas bringt man Kohlenstoffdisulfid ($n = 1{,}618$) und darüber Wasser (Abb. 1.46). Blickt man schräg von oben auf die Trennungsfläche der beiden Flüssigkeiten, so sieht man im ersten Falle (Abb. 1.46a) infolge der totalen Reflexion eine in lebhaftem Silberglanz erscheinende Fläche, während im zweiten Falle (Abb. 1.46b) die Grenzfläche zwischen Kohlenstoffdisulfid und Wasser nur einen matten Glanz zeigt, da die Strahlen an ihr nur partiell gespiegelt werden. – Stellt man ein zum Teil mit

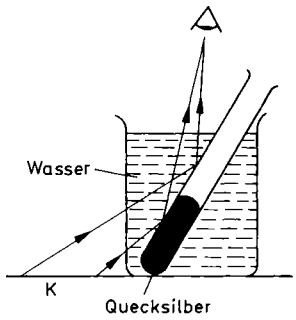


Abb. 1.47 Eine durch Totalreflexion an der Grenze Wasser – Luft gespiegelte weiße Fläche K erscheint heller als bei Spiegelung an reinem Quecksilber

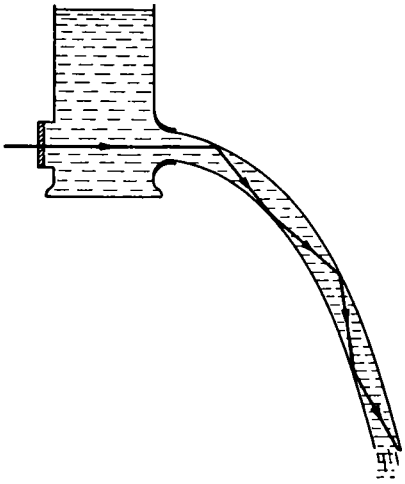


Abb. 1.48 Totalreflexion des Lichtes in einem ausfließenden Wasserstrahl

Quecksilber gefülltes Reagenzgläschen schräg in ein mit Wasser gefülltes Becherglas (Abb. 1.47) und blickt von oben darauf, so sieht man bei richtiger Neigung des Reagenzglases das von einer weißen Kartonpapierfläche K in das Glas fallende Licht an der Luft im Reagenzglas totalreflektiert. Diese Reflexion ist vollständiger als die an Quecksilber; man erkennt das deutlich daran, daß der mit Quecksilber gefüllte Teil des Reagenzglases grau im Vergleich zu dem oberen totalreflektierenden Teil erscheint. Gießt man Wasser in das Reagenzglas, so verschwindet der Silberglanz, soweit das Wasser steigt.

Auch die Tatsache, daß Luftblasen im Wasser wie silberglänzende Perlen erscheinen, ist eine Folge der Totalreflexion. Fällt dagegen Licht auf die Grenzfläche zweier Medien mit gleichen Brechzahlen, so findet weder Brechung noch Reflexion statt; das Licht geht vielmehr ungebrochen hindurch. Man kann daher einen (blasenfreien) Glasstab, den man in eine Flüssigkeit von gleicher Brechzahl, z. B. Zedernholzöl (oder besser in eine Lösung von Chloralhydrat in etwas Glycerin) taucht, überhaupt nicht mehr sehen. – Besonders effektvoll läßt sich die Totalreflexion des Lichtes zeigen, wenn man (Abb. 1.48) in die Achse eines ausfließenden Wasserstrahles ein intensives Lichtbündel einstrahlt. Das Licht kann dann aus dem Wasserstrahl nicht mehr austreten, da es infolge wiederholter totaler Reflexion gezwungen wird, innerhalb des Strahles diesem zu folgen. Der Wasserstrahl würde also vollkommen dunkel sein, wenn nicht die Oberfläche kleine Störungen und Kräuselungen aufwiese, durch die das Licht austreten kann, und so den Strahl in seiner ganzen Länge leuchtend macht; dies ist besonders der Fall, wenn der Strahl sich in Tropfen aufgelöst hat (Fontaines lumineuses). – Ersetzt man den Wasserstrahl durch einen gebogenen Glasstab, so kann man durch diesen Licht von einer Lichtquelle nach einem anderen Punkt, z. B.

unter das Präparat in einem Mikroskop, auch über mehrere Krümmungen hinwegleiten. – Dieses Prinzip wird heute in der sog. **Faseroptik** sehr vollkommen durchgeführt, indem Licht durch ein etwa 2–5 cm dickes Bündel von sehr vielen dünnen Glas- oder Kunststoffasern geleitet wird. Ein solcher *Lichtleiter* ist biegsam und gestattet die Fortleitung von Licht wie Wasser in einen Schlauch. Das Licht tritt an einem Ende in die Fasern ein und kann erst am anderen Ende wieder herauskommen, da es unterwegs infolge der Totalreflexion die einzelne Faser nicht verlassen kann. Voraussetzung für eine vollkommene Totalreflexion sind glatte, saubere Wände der Fasern, die von einem Medium geringerer Brechzahl umgeben sind (z. B. Luft). Die Berührungsstellen der Fasern gegeneinander heben zwar die Totalreflexion auf. Sofern aber kein Bild übertragen werden soll, stören diese Berührungsstellen nur wenig. Anderenfalls werden die Glasfasern mit einer dünnen Kunststoffschicht umgeben. Der Durchmesser der einzelnen Fasern beträgt für Lichtleiter- und Bildleiterbündel 10 bis 500 μm; für Leiter der Nachrichtentechnik herab bis zu 1 μm. Selbstverständlich darf die Glas- oder Kunststoffaser wegen des langen Weges das Licht nicht merklich absorbieren (wenige dB/km werden erreicht).

Bis zum Jahr 1988 wird das erste transatlantische Lichtleiterkabel installiert sein. Die Gesamtlänge beträgt 6500 km. Die Übertragungskapazität beträgt 520 Megabit pro Sekunde. Das Kabel kann gleichzeitig 40000 Gegensprechverbindungen abwickeln. Es werden GaAsP-Laserdioden verwendet, die Licht von 1300 nm Wellenlänge erzeugen. Unterwegs werden 125 bis 175 Leistungsverstärker installiert. Insgesamt enthält das Kabel drei Glasfaserpaare. Die Stromversorgung für die Verstärker erfolgt über Kupferleiter im Kabel. Die Lebensdauer soll 25 Jahre betragen.

In der Nachrichtentechnik wird moduliertes Licht in die Glasfaser geschickt. Unter Modulation versteht man die Überlagerung einer Trägerwelle mit den Signalen z. B. der Sprache oder der Musik oder mit Bildsignalen. Es gibt verschiedene Arten von Modulation: Amplituden-Modulation, Phasen-Modulation, Frequenzmodulation und andere.

Daß schließlich auch eine Totalreflexion des Lichtes an der Grenze zwischen zwei Gasschichten verschiedener Dichte stattfindet, kann man in der Weise zeigen, daß man ein schmales Lichtbündel schräg von unten gegen die Öffnung eines flachen, innen geschwärzten Kastens richtet. Heizt man nun die Luft in dem Kasten (z. B. elektrisch) auf, so wird das Lichtbündel an der Grenze zwischen heißer und kalter Luft total reflektiert. In der Natur tritt Totalreflexion des Lichtes häufig an den über stark erhitztem Boden lagernden Luftmassen ein. Über Vorgänge der Luftspiegelung in der Atmosphäre siehe Nr. I, 15.

Beim schrägen Durchgang durch eine **planparallele Glasplatte** erleidet ein Lichtbündel eine zweifache Brechung (Abb. 1.49a). Beim Eintritt in das Glas wird es zum Einfallslot hin, beim Austritt aus der Platte vom Einfallslot weg gebrochen. Im Glas läuft das Lichtbündel ebenso wie in der Luft geradlinig. Da schon aus Symmetriegründen der Einfallswinkel gleich dem Austrittswinkel ist,

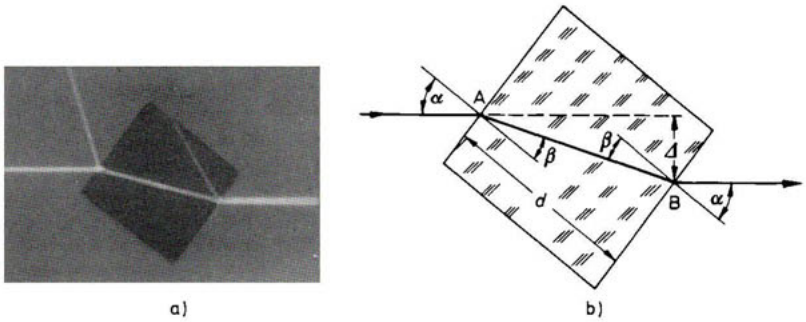


Abb. 1.49 Parallelverschiebung eines Lichtstrahls durch eine planparallele Platte; a) Versuch b) Strahlenkonstruktion

erfährt das Lichtbündel beim Durchgang durch eine planparallele Platte keine Richtungsänderung, sondern nur eine Parallelverschiebung Δ, die um so größer ist, je größer die Plattendicke d, die Brechzahl n und der Einfallswinkel α ist. Aus Abb. 1.49b findet man:

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{\Delta}{AB}; \quad AB = \frac{d}{\cos\beta},$$

also

$$\Delta = \frac{d\sin(\alpha - \beta)}{\cos\beta}. \tag{1.12}$$

Führt man mittels des Brechungsgesetzes (1.6) die Brechzahl n des Glases gegen Luft ein, so ist:

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} \quad \text{und} \quad \cos\beta = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\alpha}{n^2}}.$$

Damit folgt für die Parallelverschiebung Δ:

$$\Delta = d\sin\alpha\left(1 - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right). \tag{1.13}$$

Wie gesagt, wächst Δ mit d, α und n; Δ wird Null für $d = 0$ oder $\alpha = 0$ oder $n = 1$, was auch ohne Formel einleuchtend ist.

Die Parallelverschiebung eines Lichtstrahles durch eine planparallele Platte wird in dem von H. v. Helmholtz (1856) angegebenen **Ophthalmometer** zur optischen Messung der Abstände zweier Punkte an einem Objekt benutzt, an das man mit den gewöhnlichen Längenmeßmethoden nicht herankommen kann, z. B. Krümmungsradius der Hornhaut. Das Ophthalmometer besteht aus zwei dicht übereinander angebrachten gleich dicken Glasplatten G_1 und G_2, von de-

nen jede die Hälfte eines Fernrohrobjektivs F bedeckt (Abb. 1.50). Beide Platten lassen sich um eine gemeinsame Achse gleichzeitig um gleiche Winkel gegeneinander verdrehen. Dadurch werden die beiden Objektmarken P und P′ gleichmäßig um gleiche Beträge nach rechts und links verschoben, so daß man 4 Punkte P_1 und P'_1 sowie P_2 und P'_2 sieht. Verdreht man die Platten so weit, daß die mittleren Punkte P_2 und P'_1 zusammenfallen, so ist die gesuchte Entfernung a von P und P′ unter Benutzung von Gl. (1.13):

$$a = 2\Delta = 2d\sin\alpha\left(1 - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right) = d\left(2\sin\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right),$$

wenn α den Winkel bedeutet, um den jede der beiden Platten von der Dicke d und der Brechzahl n aus ihrer Nullage verdreht werden mußte. Bemerkenswerterweise geht der Abstand des auszumessenden Gegenstandes vom Ophthalmometer in die Formel *nicht* ein.

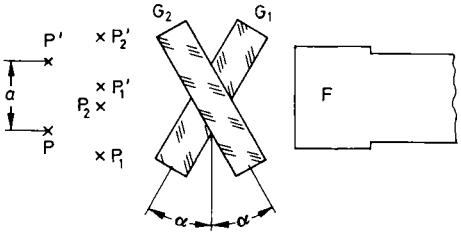


Abb. 1.50 Wirkungsweise des Ophthalmometers

Eine planparallele Platte kann in verschiedener Weise zur **Messung der Brechzahl** des Stoffes, aus dem sie besteht, verwendet werden. Man stellt mit Hilfe eines Mikroskopes, dessen Verschiebung längs der optischen Achse mikrometrisch gemessen werden kann, zunächst auf eine Marke M, zum Beispiel einen Strich auf einem Objektträger, scharf ein (Abb. 1.51a). Dann bringt man zwischen M und Mikroskop die planparallele Platte. Dadurch erscheint M in die Höhe gehoben nach M′. Um wieder ein scharfes Bild zu erhalten, muß man das Mikroskop um die Strecke MM′ = α anheben, die gleich der Strecke BC ist. Ist d die Dicke der Platte, so ist

$$\tan\alpha = \mathrm{AD} : (d - a) \quad \text{und} \quad \tan\beta = \frac{\mathrm{AD}}{d}.$$

Unter der Voraussetzung, daß die Winkel α und β und damit auch AD gegen d klein sind, so daß der Tangens der Winkel gleich ihrem Sinus gesetzt werden kann, erhält man:

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{d}{d - a}.$$

Für Platten der Dicke $d = 1$ cm läßt sich n bis auf eine Einheit der dritten Dezimale genau messen.

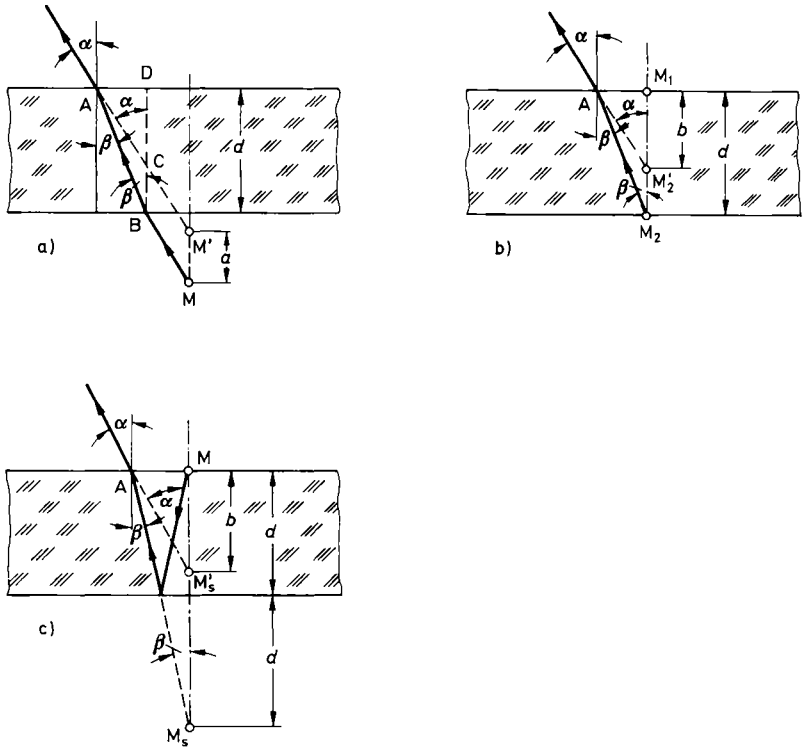


Abb. 1.51 Zur Messung der Brechzahl einer planparallelen Platte (nach de Chaulnes)

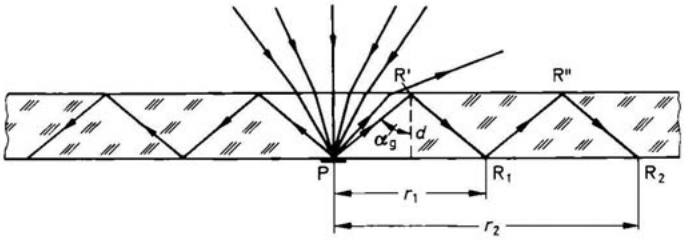
Dieses Verfahren kann in zweierlei Weise variiert werden. Bringt man auf der oberen und der unteren Seite der Platte je eine Marke M_1 und M_2 an und stellt nacheinander das Mikroskop auf beide Marken ein, so ist dazu eine Verschiebung b des Mikroskopes notwendig, da die Marke M_2 nach der Stelle M_2' gehoben erscheint (Abb. 1.51b). Für die Brechzahl n der Platte gilt dann (wieder unter den gleichen Voraussetzungen):

$$n = \frac{d}{b}.$$

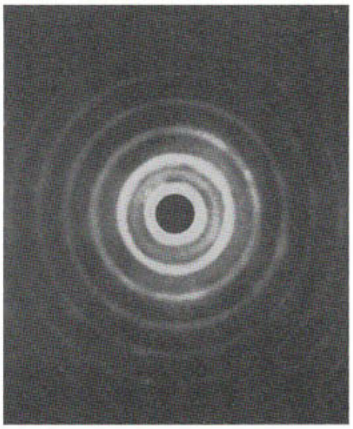
Bringt man schließlich auf der Oberfläche der Platte eine helle Marke an, die man schräg von oben beleuchtet, und stellt das Mikroskop einmal direkt auf die Marke M und dann auf ihr an der unteren Plattenfläche gespiegeltes Bild M_s ein, das von M den Abstand $2d$ hat und scheinbar bei M_s' liegt (Abb. 1.51c), so ist wieder eine Verschiebung b des Mikroskops erforderlich, und es gilt jetzt:

$$n = \frac{2d}{b}.$$

Ein weiteres Verfahren verwendet die Erscheinung der Totalreflexion. Beleuchtet man durch eine planparallele Platte hindurch einen auf ihrer Rückseite angebrachten weißen Fleck P aus Papier oder weißer Farbe möglichst punktförmig und recht intensiv, so tritt



a)



b)

Abb. 1.52 Messung der Brechzahl einer planparallelen Glasplatte mittels Totalreflexion
a) Strahlenverlauf in der Platte
b) Aufnahme der auf der bestäubten Platte durch Totalreflexion sichtbar werdenden Ringe mit den Radien r_1, r_2 ... Der zentrale Lichtfleck in der Mitte ist abgedeckt; der innerste Ring mit dem Radius r_1 ist stark überstrahlt

das diffus in die Platte zurückgestrahlte Licht nur bis zum Grenzwinkel der Totalreflexion aus der Platte wieder aus, während es vom Grenzwinkel der Totalreflexion ab zwischen der Vorder- und Rückseite der Platte hin und her totalreflektiert wird (Abb. 1.52a). Bestäubt man die Rückseite der Platte mit einem feinen Pulver, z. B. Bärlappsamen, so zeichnen sich die Reflexionsstellen, die dem Grenzwinkel der totalen Reflexion entsprechen, durch plötzliche Zunahme der Helligkeit ab, wie die photographische Aufnahme Abb. 1.52b zeigt, bei der der zentrale Fleck zur Vermeidung einer Überbelichtung abgeblendet ist. Statt der erwarteten Intensitätsstufen beobachtet man hier aber helle und dunkle Ringe. Infolge der Bestäubung sind die wirklichen Verhältnisse wesentlich weniger einfach, als unsere elementare Darstellung annimmt.

Wie man aus der Abb. 1.52a abliest, gelten die Beziehungen:

$$\sin\alpha_g = \frac{r_1/2}{\mathrm{PR}'} \quad \text{und} \quad \cos\alpha_g = \frac{d}{\mathrm{PR}'}.$$

so daß wir erhalten:

$$\sin\alpha_g = \frac{r_1}{2d}\sqrt{1-\sin^2\alpha_g}.$$

Nun ist aber nach Gl. (1.11) $\sin\alpha_g = \frac{1}{n}$; dies liefert nach Umrechnung:

$$n = \frac{\sqrt{r_1^2 + 4d^2}}{r_1}.$$

wenn r_1 der Radius des ersten Ringes ist; wenn r_k den Radius des k-ten Ringes bezeichnet, folgt allgemeiner:

$$n = \frac{\sqrt{r_k^2 + (2kd)^2}}{r_k}.$$

Durch Ausmessen der Kreisradien läßt sich also die Brechzahl des Glases bestimmen.

1.6 Brechung des Lichtes beim Durchgang durch Prismen; Spektrometer und Refraktometer

In der Optik versteht man unter einem **Prisma** einen von zwei ebenen, polierten, gegeneinander geneigten Flächen (ABED und CBEF in Abb. 1.53) begrenzten Körper aus Glas oder einem anderen durchsichtigen Material. Als *brechende Kante* des Prismas wird die Gerade bezeichnet, in der sich die genannten Flächen schneiden (BE in der Abbildung); der an dieser Kante liegende Prismenwinkel heißt der *brechende Winkel*, die der brechenden Kante gegenüberliegende dritte Fläche (ACFD in der Abb. 1.53) die *Basis*; ein auf der brechenden Kante senkrecht stehender Schnitt durch das Prisma wird *Hauptschnitt* genannt.

Wir betrachten den Strahlengang in der Ebene eines Hauptschnittes, der mit

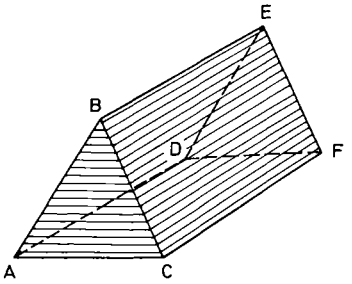


Abb. 1.53 Ansicht eines Prismas

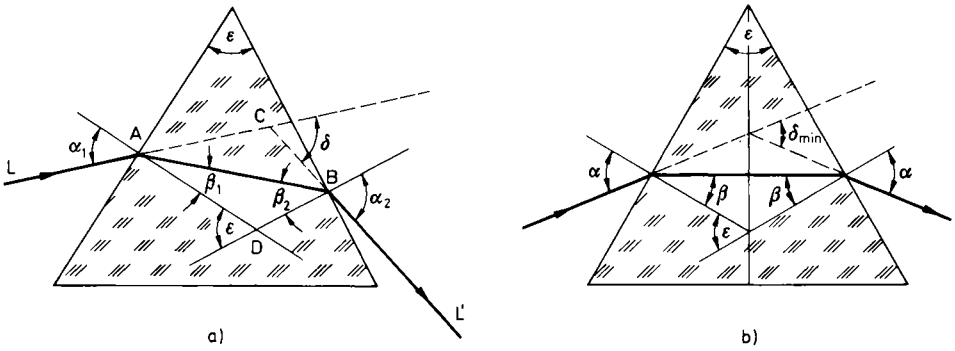


Abb. 1.54 Strahlenverlauf durch ein Prisma
a) bei bliebigem Einfallswinkel b) im Minimum der Ablenkung

der Papierebene zusammenfallen möge (Abb. 1.54a). Zu dem bei A auf das Prisma mit dem brechenden Winkel ε unter dem Einfallswinkel α_1 einfallenden Strahl LA konstruieren wir nach dem Brechungsgesetz den im Prisma verlaufenden Strahl, der bei B die zweite Prismenfläche trifft und hier vom Einfallslot weg eine zweite Brechung in den Außenraum hinein erfährt. Um die Ablenkung δ zwischen dem einfallenden Strahl LA und dem austretenden Strahl BL′ zu finden, verlängern wir beide Strahlen bis zum Schnittpunkt C. Als Außenwinkel am Dreieck ABC ist dann:

$$\delta = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2 .$$

Ferner ist, wie aus dem Dreieck ABD folgt:

$$\varepsilon = \beta_1 + \beta_2 ,$$

so daß wir erhalten:

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \varepsilon . \tag{1.14}$$

Nach dem Brechungsgesetz bestehen die Gleichungen:

$$\sin\alpha_1 = n \sin\beta_1 \quad \text{und} \quad \sin\alpha_2 = n \sin\beta_2 .$$

Wir können also schreiben:

$$\begin{aligned} \sin\alpha_2 &= n \sin(\varepsilon - \beta_1) = n \sin\varepsilon \cos\beta_1 - n \cos\varepsilon \sin\beta_1 \\ &= \sin\varepsilon \sqrt{n^2 - \sin^2\alpha_1} - \cos\varepsilon \sin\alpha_1 \end{aligned}$$

und erhalten damit für die totale Ablenkung nach Gl. (1.14):

$$\delta = \alpha_1 + \arcsin[\sin\varepsilon \sqrt{n^2 - \sin^2\alpha_1} - \cos\varepsilon \sin\alpha_1] - \varepsilon , \tag{1.14a}$$

eine Beziehung, die es ermöglicht, zu jedem Einfallswinkel bei gegebenem Prisma die gesamte Ablenkung δ zu bestimmen.

Wir fragen nach dem kleinsten Wert der Ablenkung δ bei gegebenem n und Prismenwinkel ε in Abhängigkeit vom Einfallswinkel α_1. Man hat zu diesem Zweck die Ableitung $\frac{d\delta}{d\alpha_1}$ zu bilden und gleich Null zu setzen.

Die elementare Rechnung verläuft folgendermaßen: Es ist nach Gl. (1.14):

$$\frac{d\delta}{d\alpha_1} = 1 + \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = 0\,.$$

Für $\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1}$ können wir schreiben:

$$\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = \frac{d\alpha_2}{d\beta_2} \cdot \frac{d\beta_2}{d\beta_1} \cdot \frac{d\beta_1}{d\alpha_1}\,.$$

Aus dem Brechungsgesetz $\sin\alpha_2 = n \sin\beta_2$ folgt durch Differentiation nach β_2:

$$\cos\alpha_2 \frac{d\alpha_2}{d\beta_2} = n\cos\beta_2 \quad \text{und daher} \quad \frac{d\alpha_2}{d\beta_2} = n\frac{\cos\beta_2}{\cos\alpha_2}\,.$$

Ebenso finden wir aus $\sin\alpha_1 = n\sin\beta_1$ durch Differentiation nach α_1:

$$\frac{d\beta_1}{d\alpha_1} = \frac{1}{n}\,\frac{\cos\alpha_1}{\cos\beta_1}\,.$$

Schließlich liefert die Beziehung $\varepsilon = \beta_1 + \beta_2$:

$$\frac{d\beta_2}{d\beta_1} = -1\,.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung für $\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1}$ ein, so erhält man:

$$\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = -\frac{\cos\alpha_1\cos\beta_2}{\cos\beta_1\cos\alpha_2}\,,$$

also schließlich:

$$\frac{d\delta}{d\alpha_1} = 1 + \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = 1 - \frac{\cos\alpha_1\cos\beta_2}{\cos\beta_1\cos\alpha_2} = 0\,.$$

Damit also ein Extremwert der Ablenkung δ eintritt, muß

$$\frac{\cos\alpha_1}{\cos\beta_1} = \frac{\cos\alpha_2}{\cos\beta_2}$$

sein. Indem man hier noch mit Hilfe des Brechungsgesetzes alles durch n, $\sin\alpha_1$ und $\sin\alpha_2$ ausdrückt, gewinnt man die Gleichung:

$$(n^2 - 1)(\sin^2\alpha_1 - \sin^2\alpha_2) = 0\,.$$

Da natürlich $n \neq 1$ und die Winkel α_1 und α_2 zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegen müssen, folgt daraus die Bedingung $\alpha_1 = \alpha_2$. Daß wirklich ein Minimum von δ vorliegt, zeigt die Untersuchung des zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2\delta}{d^2\alpha_1}$, der positiv ist. Es gilt also der Satz:

- Bei einem Prisma erreicht die Ablenkung eines Lichtstrahles ihren kleinsten Wert, wenn Eintritts- und Austrittswinkel gleich sind, d. h. wenn der Strahl das Prisma symmetrisch durchläuft, wobei der im Prisma verlaufende Strahl senkrecht auf der Winkelhalbierenden des brechenden Winkels steht (Abb. 1.54b).

Dreht man das Prisma um eine zu seiner brechenden Kante parallele Achse (Abb. 1.55), so daß der Einfallswinkel von Null an langsam wächst, so wandert der abgelenkte Strahl entgegengesetzt zu dieser Drehrichtung nach der Prismenkante zu, bleibt dann einen Augenblick stehen, um dann rückläufig zu werden. Während also der Einfallswinkel dauernd zunimmt, wird der Ablenkungswinkel zunächst kleiner, erreicht ein Minimum für $\alpha_1 = \alpha_2$ und wächst dann wieder.

Wie aus Abb. 1.54b folgt, ist bei symmetrischem Durchgang

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2}(\delta_{\min} + \varepsilon) \quad \text{und} \quad \beta_1 = \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

so daß das Brechungsgesetz die Form annimmt:

$$n = \frac{\sin[\frac{1}{2}(\delta_{\min} + \varepsilon)]}{\sin(\frac{1}{2}\varepsilon)}. \tag{1.15}$$

Für ein gegebenes Prisma ist beim Minimum der Ablenkung:

$$\delta_{\min} = 2\arcsin\left(n\sin\frac{\varepsilon}{2}\right) - \varepsilon \quad \text{oder} \quad \sin\frac{\delta_{\min} + \varepsilon}{2} = n \cdot \sin\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.15a}$$

Mißt man daher den brechenden Winkel ε sowie das Minimum der Ablenkung $\delta_{\min}$, das sich sehr scharf einstellen läßt, so kann man die Brechzahl des Prismenmaterials berechnen (J. Fraunhofer, 1817). Auch die Brechzahl von Flüssigkeiten läßt sich so bestimmen, indem man diese in ein Hohlprisma füllt, dessen brechende Flächen durch ebene Glasplatten mit parallelen Flächen, die ja selbst keine Ablenkung erzeugen, gebildet werden.

Das Brechungsvermögen von Luft und anderen Gasen kann man qualitativ auch mit einem Hohlprisma zeigen. Entfernt man mit einer Luftpumpe aus diesem die Luft, während ein Lichtstrahl hindurchgeht, so erfährt er eine geringe Ablenkung nach der Prismenkante zu, die sich auf einer mehrere Meter entfernten Skala nachweisen läßt. In diesem Fall ist die relative Brechzahl der Prismensubstanz $n_{\text{vak}}/n_{\text{Luft}} < 1$, und das bedeutet nach Gl. (1.15) oder (1.15a) $\delta_{\min} < 0$.

Das Fraunhofersche Verfahren wurde von E. Abbe (1874) folgendermaßen verändert: Halbiert man das Prisma der Abb. 1.54b, so entsteht ein rechtwinkeliges Prisma gemäß

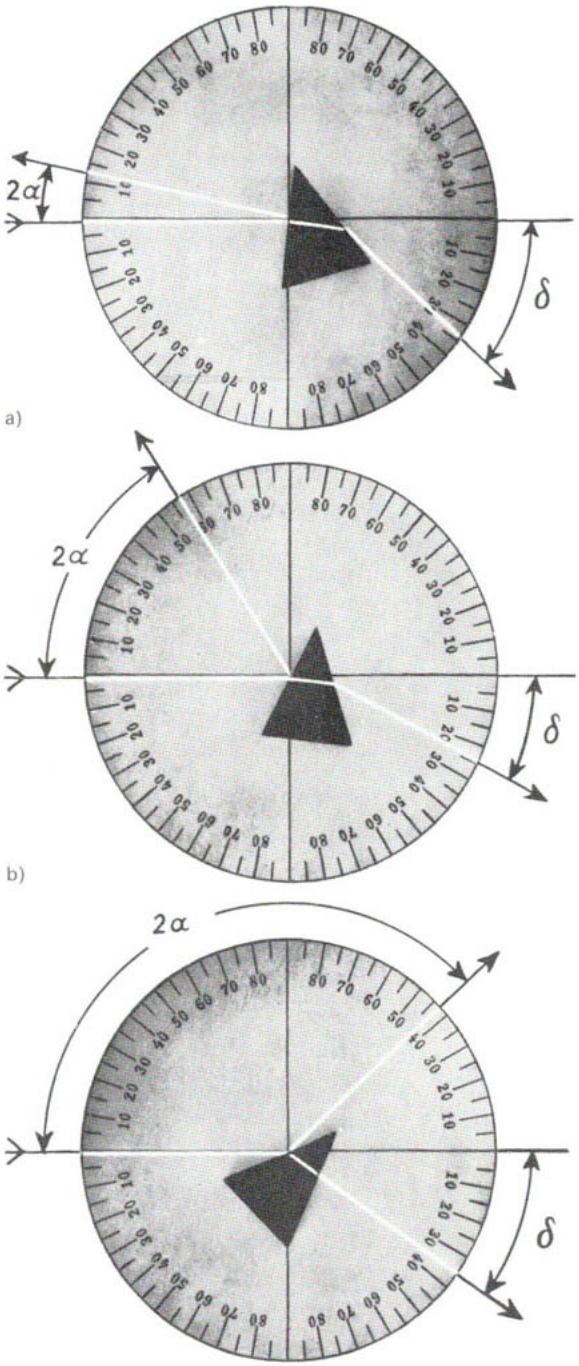


Abb. 1.55 Brechung des Lichtes in einem Glasprisma bei wechselndem Einfallswinkel α
a) $\alpha = 6{,}5°$, $\delta = 34°$; b) $\alpha = 28{,}5°$, $\delta = 25°$ (Minimum der Ablenkung);
c) $\alpha = 68{,}5°$, $\delta = 35°$

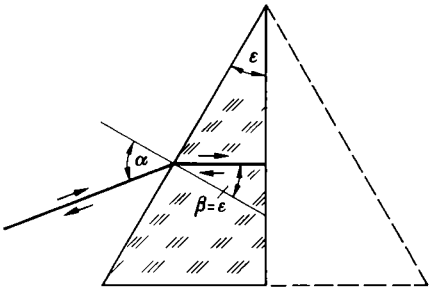


Abb. 1.56 Abbesches Prisma, bei dem der einfallende Strahl im Minimum der Ablenkung nach Reflexion an der Kathetenfläche in sich selbst zurückkehrt

Abb. 1.56. Stellt man nun das Prisma so, daß der in das Prisma eintretende Strahl an der Rückseite des Prismas in sich selbst reflektiert wird, so kehrt er nach dem Ausgangspunkt zurück. Bei dieser Anordnung ist, wie man aus Abb. 1.56 entnimmt, der Brechungswinkel $\beta = \varepsilon$. Mißt man daher für diese Prismenstellung den Eintrittswinkel α und den Prismenwinkel ε, so ist einfach:

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\varepsilon}.$$

Neben dem Vorteil der sehr einfachen Durchführung dieser Messung hat das Abbesche Verfahren den weiteren Vorzug, daß unter sonst gleichen Umständen für das Prisma nur die Hälfte des Materials wie beim Fraunhoferschen Verfahren benötigt wird.

Für *Prismen mit sehr kleinem brechenden Winkel* ε ist für Strahlen, die unter kleinem Einfallswinkel α auffallen, die Ablenkung δ unabhängig von α und stets dem brechenden Winkel proportional. Für kleine Einfallswinkel α und entsprechend kleine Brechungswinkel β kann man nämlich das Brechungsgesetz in der Form $\alpha_1 = n\beta_1$ bzw. $\alpha_2 = n\beta_2$ schreiben. Damit nimmt Gl. (1.14) die Gestalt an:

$$\delta = n(\beta_1 + \beta_2) - \varepsilon = (n-1)\varepsilon, \tag{1.14b}$$

aus der in der Tat hervorgeht, daß die Ablenkung δ proportional dem brechenden Winkel ε und unabhängig von α ist.

Zur genauen Bestimmung der Winkel bei derartigen Messungen dient das **Spektrometer** (Abb. 1.57). An einer vertikalen Achse ist ein horizontal gelagerter Teilkreis K drehbar angebracht, der in seiner Mitte ein kleines Tischchen T mit Prisma P trägt. Ein horizontal liegendes Fernrohr F ist an einem seitlichen Arm A so befestigt, daß es nach der Achse hinzielt, um die es mittels des Armes A gedreht werden kann. An einem mit der Achse fest verbundenen zweiten Arm B ist das ebenfalls nach der Achse hingerichtete Spalt- oder Kollimatorrohr S angebracht. Es enthält an seinem hinteren Ende einen in seiner Breite verstellbaren vertikalen, beleuchteten Spalt Sp und an seinem anderen Ende eine Sammellinse, in deren Brennebene sich der Spalt befindet, so daß die von einem Punkt des

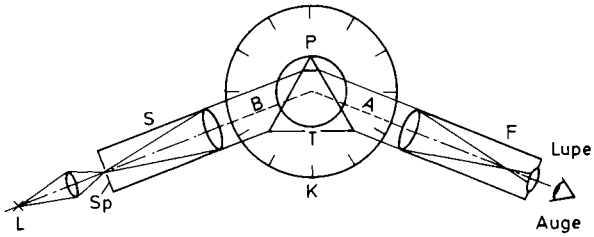


Abb. 1.57 Spektrometer, schematisch

Spaltes ausgehenden Strahlen die Linse als parallele Strahlenbündel verlassen. Dadurch wird erreicht, daß das Spaltbild im Unendlichen liegt; der Spalt wird dann mit dem auf unendlich gestellten Fernrohr F scharf gesehen. Ohne Prisma stehen Fernrohr und Spaltrohr in einer Richtung, wenn das Bild des Spaltes mit dem im Fernrohrokular angebrachten Fadenkreuz zusammenfällt. Stellt man auf das Tischchen T ein Prisma, so muß man das Fernrohr zur Seite drehen, um den abgelenkten Strahl und damit das Spaltbild wieder mit dem Fadenkreuz zur Deckung zu bringen. Sowohl die Fernrohr-Verdrehung als auch die Drehung des Tischchens läßt sich an dem Teilkreis K mittels Nonien sehr genau ablesen.

Wir haben bisher stets nur den Weg eines *einzelnen* Strahles betrachtet; in Wirklichkeit haben wir es aber stets mit einem Lichtbündel von endlichem Durchmesser zu tun. Fällt ein Lichtbündel mit kreisförmigem Querschnitt vom Durchmesser d auf die Grenzfläche eines optisch dichteren Mediums schräg auf, so wird sein Durchmesser nach der Brechung in der Brechungsebene auf d' vergrößert, wie man sofort aus der Abb. 1.58 erkennt. Umgekehrt wird beim Übergang von einem optisch dichteren Medium zu einem dünneren der Lichtbündeldurchmesser in der Brechungsebene verkleinert. Dagegen tritt in der zur Brechungsebene senkrechten Richtung keine Querschnittsveränderung auf. Betrachtet man z. B. (Abb. 1.59a) durch ein Prisma eine an der Stelle B befindliche

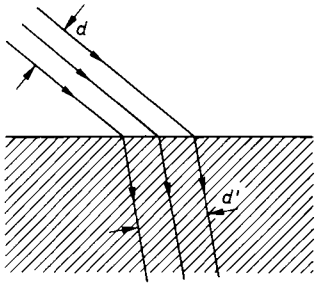


Abb. 1.58 Verbreiterung des Querschnitts eines Lichtbündels in der Brechungsebene bei Eintritt in ein optisch dichteres Medium

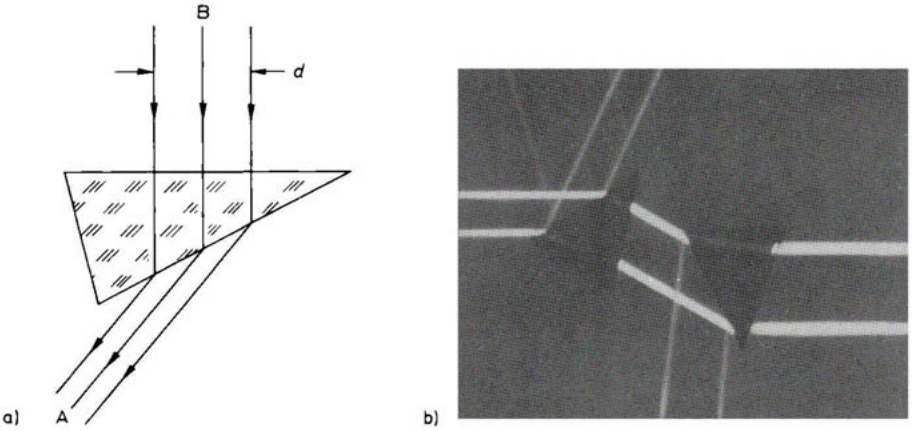


Abb. 1.59 Querschnittsveränderung eines Lichtbündels beim Durchgang durch ein (a) bzw. zwei Prismen (b)

kreisrunde Lochblende, die von einfarbigem (monochromatischem) Licht[1] beleuchtet wird, so erscheint sie dem bei A befindlichen Auge in Gestalt einer Ellipse, deren große Achse parallel zur Prismenkante liegt. Vertauscht man Lochblende und Auge, d.h. blickt man in der umgekehrten Richtung durch das Prisma, so sieht man an Stelle der kreisrunden Lochblende eine Ellipse, deren große Achse senkrecht zur Prismenkante liegt. Wie Abb. 1.59b zeigt, kann man diesen Effekt durch geeignete Hintereinanderstellung mehrerer Prismen verstärken und dabei gleichzeitig erreichen, daß die Strahlenrichtung nur eine seitliche Versetzung erfährt.

Ersetzt man die Lochblende durch einen schmalen Spalt, dessen Richtung parallel der Prismenkante verläuft, so erscheint dieser breiter oder schmaler je nach der Richtung, in der man bei dem in Abb. 1.59a gezeichneten Strahlenverlauf durch das Prisma blickt; dieses wirkt also in der zu seiner brechenden Kante senkrechten Richtung vergrößernd oder verkleinernd. Diese Erscheinung tritt um so stärker hervor, je flacher das Lichtbündel in das Prisma einfällt; sie ist jedoch nicht vorhanden, wie man leicht erkennt, im Falle der minimalen Strahlenablenkung, d.h. bei symmetrischem Strahlenverlauf durch das Prisma.

Eine große Bedeutung haben in der praktischen Optik Prismen erlangt, deren Hauptschnitt ein *rechtwinkliges* (meist gleichschenkliges) Dreieck darstellt. Läßt man (Abb. 1.60) Licht senkrecht zu einer Kathetenfläche eintreten, so wird es an

[1] Bei weißem Licht tritt bei allen Brechungsvorgängen eine Zerlegung (Dispersion) des Lichtes in seine Spektralfarben ein. Davon sehen wir hier und bei den folgenden Versuchen bewußt ab, indem wir nur einfarbiges Licht, z. B. das gelbe Natriumlicht, verwenden. Auf die Dispersion des Lichtes gehen wir in Abschn. 2.3 näher ein.

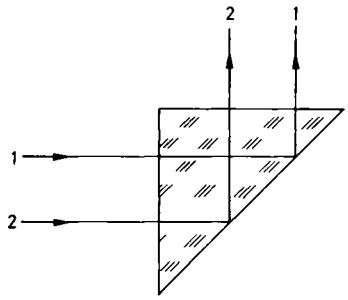


Abb. 1.60 Totalreflektierendes Prisma

der Hypothenusenfläche total reflektiert, da der Grenzwinkel der totalen Reflexion in diesem Falle kleiner als 45° ist. Der Lichtaustritt erfolgt dann senkrecht aus der anderen Kathetenfläche. Man kann daher ein solches **totalreflektierendes Prisma** statt eines ebenen Oberflächenspiegels benutzen, was in geeigneten Fällen von Vorteil sein kann.

Für geodätische Zwecke wird das gleichschenklig-rechtwinklige Prisma zum Abstecken rechter Winkel mit dem von K. M. v. Bauernfeind (1851) vorgeschlagenen Strahlengang (Abb. 1.61) benutzt. Der schräg unter dem Winkel α in eine Kathetenfläche eintretende Strahl LA wird an der anderen Kathetenfläche bei B totalreflektiert, darauf an der verspiegelten Hypothenusenfläche bei C zum zweitenmal reflektiert und verläßt bei D das Prisma. Bis auf die zweimalige Brechung bei A und D stellt das Prisma einen mit Glas ausgefüllten Winkelspiegel von 45° dar. Infolgedessen bilden die Strahlen AB und CD miteinander einen rechten Winkel. Da der Prismenwinkel bei R ein rechter Winkel ist, ist der Einfallswinkel α bei A gleich dem Austrittswinkel α bei D, so daß also auch die Strahlen LA und

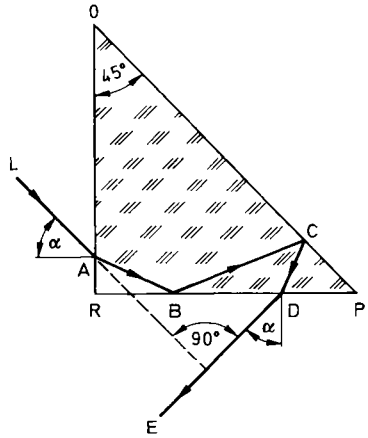


Abb. 1.61 Prisma für geodätische Zwecke zum Abstecken rechter Winkel

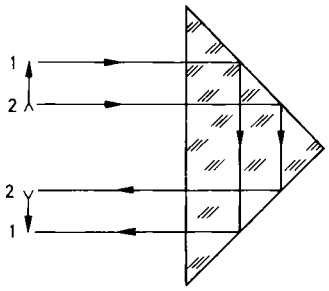


Abb. 1.62 Rechtwinklig gleichschenkliges Prisma für Bildumkehr

DE einen rechten Winkel bilden. Wenn man also ein längs ED direkt anvisiertes Objekt mit dem durch das Prisma in Richtung AL gesehenen zur Deckung bringt, kann man im Gelände rechte Winkel abstecken. Dabei bleibt der Strahlenverlauf erhalten, auch wenn man das Prisma um seine Kante bei R um kleine Winkel verdreht.

Läßt man ein Strahlenbündel senkrecht auf die Hypothenusenfläche eines rechtwinklig-gleichschenkligen Prismas fallen, so wird es zweimal um 90° an den beiden Kathetenflächen totalreflektiert, so daß der Strahlenweg insgesamt um 180° geknickt wird. Dabei vertauschen die beiden in Abb. 1.62 gezeichneten Strahlen ihre gegenseitige Lage zueinander, so daß das Bild eines Gegenstandes (Pfeil in Abb. 1.62) um 180° verdreht wird. – Fügt man (Abb. 1.63) in den Strahlengang ein zweites identisches, um die Strahlrichtung durch 90° gedrehtes Prisma hinzu, so erhält man das **Umkehrprisma** (*J. Porro* 1848); bei diesem findet infolge der viermaligen Totalreflexion um je 90° eine Drehung des Strahlenbündels um seine Achse von 2 × 180° statt, so daß rechts und links sowie oben und unten vertauscht werden, wobei die Strahlrichtung nur eine Parallelverschiebung erfährt. Man benutzt daher eine solche Prismenkombination zur Bildumkehrung in den Prismenfernrohren (s. Abschn. 1.12).

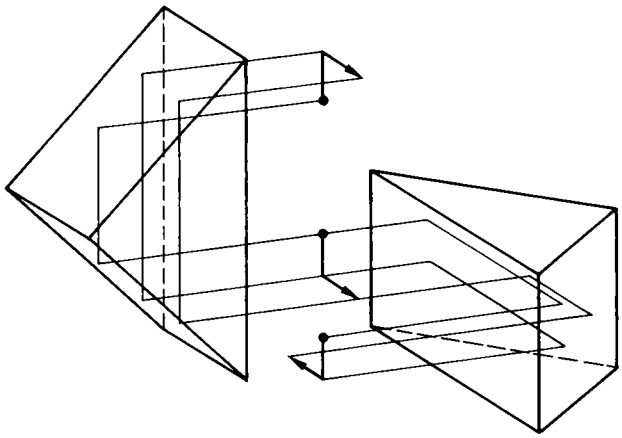


Abb. 1.63 Prismenanordnung nach *Porro* zur Bildumkehr

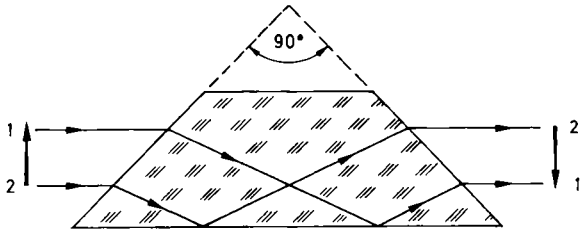


Abb. 1.64 Umkehrprisma nach *Amici*

Eine weitere Anwendung des gleichschenklig-rechtwinkligen Prismas zeigt Abb. 1.64. Ein parallel zur Hypothenusenfläche, also mit einem Einfallswinkel von 45° auf eine Kathetenfläche fallender Strahl wird in dem Prisma zur Hypothenusenfläche gebrochen, dort totalreflektiert und verläßt dann die andere Kathetenfläche nach nochmaliger Brechung wieder in der ursprünglichen Richtung, jedoch mit einer gewissen Parallelverschiebung. Blickt man daher parallel zur Hypothenusenfläche durch ein solches Prisma, so ist das Bild, das man sieht, höhen- oder seitenverkehrt, je nachdem die Hypothenusenfläche waagerecht oder senkrecht steht. Man benutzt daher dieses von *G. B. Amici* (1823) angegebene **Umkehr-** oder **Wendeprisma** bei vielen optischen Geräten zu einer Bildumkehr; dem Prisma gibt man meistens die Gestalt eines gleichschenkligen Trapezes (Abb. 1.64). Bringt man zwei solcher Prismen hintereinander, aber um 90° in der Strahlenrichtung gegeneinander verdreht an, so erhält man wieder eine Vorrichtung, die den Strahlengang um zwei mal 180° dreht. –

Ein weiteres in der Geodäsie und in der Optik viel gebrauchtes Prisma ist das von *Goulier* (1865) angegebene Pentagonalprisma, das im wesentlichen einen mit Glas ausge-

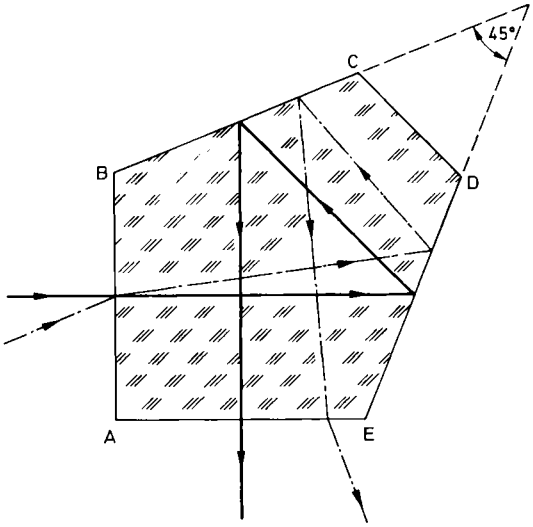


Abb. 1.65 Pentagonalprisma nach *Goulier*

füllten Winkelspiegel von 45° darstellt (Abb. 1.65). Die zu den Seiten BC und DE des Hauptschnittes senkrechten Flächen sind versilbert. Ein durch die zu AB senkrechte Fläche eintretender Strahl tritt nach zweifacher Reflexion genau senkrecht zu seiner ursprünglichen Richtung durch die zu AE senkrechte Fläche aus. Diese Strahlablenkung um 90° ist unabhängig von einer Drehung des Prismas um seine Kanten, solange der Winkel bei *A* genau 90° ist.

Als letztes Prisma sei der wichtige **Tripelspiegel** behandelt. Dieser ist ein Zentralspiegel (s. Abschn. 1.3), bei dem der Lichtstrahl ausschließlich durch Totalreflexion in die ursprüngliche Richtung zurückgeworfen wird. Der Tripelspiegel ist also ein mit Glas oder Kunststoff ausgefüllter Zentralspiegel. Er hat sehr große technische Bedeutung erlangt: Die **Rückstrahler** im Verkehr auf den Straßen (an Autos, Fahrrädern, Warndreiecken usw.) bestehen oft aus rot gefärbtem oder aus klar durchsichtigem Kunststoff, der so gepreßt ist, daß sich viele kleine, nebeneinander liegende Tripelspiegel ergeben. – Auch die auf dem Mond aufgestellten optischen Reflektoren, die die von der Erde ausgesandten Licht-(Laser-)strahlen zur Erde zurückwerfen, bestehen aus genau geschliffenen Tripelspiegeln aus Quarzglas.

Ein Tripelspiegel entsteht, wenn man von einem genau rechtwinklig geschliffenen Glaswürfel eine Ecke abschneidet, so daß die Schnittfläche mit den drei an der betreffenden Würfelecke zusammenstoßenden Flächen gleiche Winkel bildet (Abb. 1.66a). Fällt in eine solche Würfelecke durch die Schnittfläche ein Strahlenbündel ein, so wird dieses nach dreimaliger Totalreflexion an den drei Würfelflächen, und zwar in den Punkten S_1, S_2 und S_3, parallel zu seiner Einfallsrichtung wieder zurückgeworfen (Abb. 1.66b). Um dies zu übersehen, spiegeln wir den Tripelspiegel zunächst an der Fläche AOC, an der der einfallende Strahl zum erstenmal reflektiert wird. Wir erhalten das Spiegelbild AB′CO, das wir an der zweiten Reflexionsebene BOC in die Lage A′CB′O und schließlich an der dritten

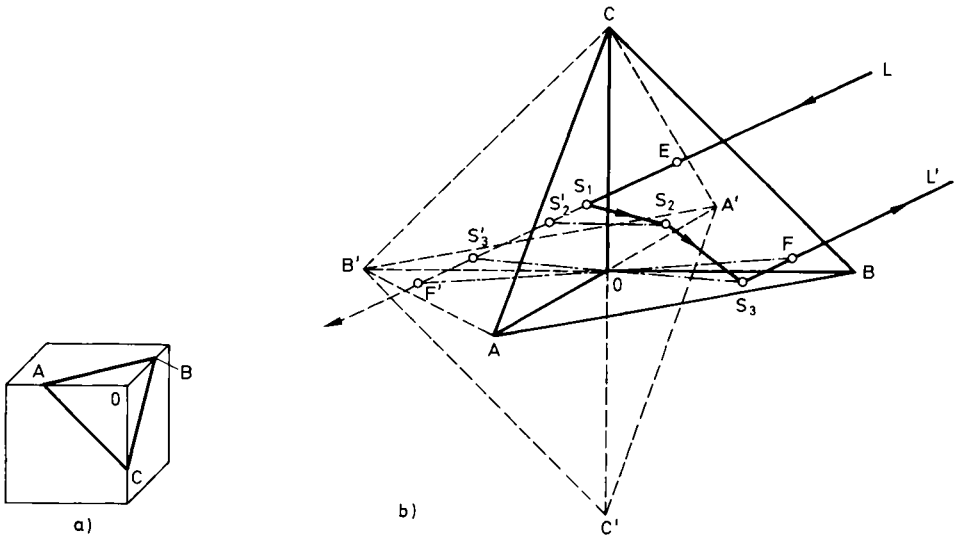


Abb. 1.66 Tripelspiegel;

a) Entstehung des Tripelspiegels als abgeschnittene Ecke eines Glaswürfels

b) Strahlenverlauf im Tripelspiegel (S'_2 ist Spiegelpunkt von S_2 an Fläche AOC; S'_3 ist Spiegelpunkt von S_3 in bezug auf (0)

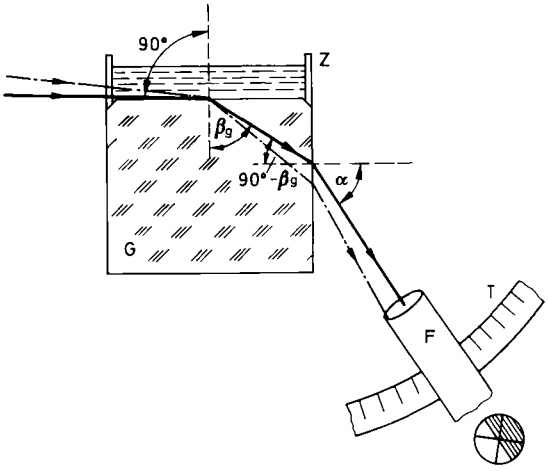


Abb. 1.67 Refraktometer nach Pulfrich

Reflexionsebene in die Lage A′B′C′O spiegeln. Dann liegt die Fläche A′B′C′ parallel zur Fläche ABC. Ein bei E in den Tripelspiegel einfallender Strahl LE würde also die planparallele Platte in F′ verlassen, ohne dabei eine Knickung zu erleiden. F′ ist aber der Spiegelpunkt des tatsächlichen Austrittpunktes F in bezug auf den Scheitel 0 des Tripelspiegels. Damit ist gezeigt, daß der Strahl FL′ parallel zum einfallenden Strahl LE den Tripelspiegel verläßt.

Auf dem Grundgedanken, daß sich nach Gl. (1.11), $\sin\alpha_g = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$, aus dem Grenzwinkel der Totalreflexion α_g das Verhältnis der Brechzahlen $\frac{n_2}{n_1}$ der beiden aneinander grenzenden Medien bestimmen läßt, beruhen die sog. **Refraktometer**. Es folgen die gebräuchlichsten Ausführungsformen.

Bei dem *Refraktometer nach Pulfrich* (1887) ist auf einem als Hilfsmedium benutzten Glaswürfel G von hoher Brechzahl ein Glaszylinder Z aufgekittet, in den die zu untersuchende Flüssigkeit, die eine kleinere Brechzahl als das Glas G haben muß, gefüllt wird (Abb. 1.67). Läßt man dann monochromatisches Licht (z. B. von einem Natriumbrenner) streifend auf die Grenzfläche zwischen Glaswürfel und Flüssigkeit auffallen, so daß der Einfallswinkel 90° ist, so wird es unter dem Grenzwinkel β_g in das Glas hinein gebrochen und gelangt nach nochmaliger Brechung beim Austritt aus dem Glaswürfel in Luft unter dem Winkel α in das Fernrohr F. Die unter kleinerem Winkel als 90° einfallenden Strahlen, z. B. der in Abb. I, 67 strich-punktierte Strahl, gelangen natürlich ebenfalls in das Fernrohr. Der Strahl, der genau unter dem Winkel β_g in das Glas eintritt, bildet daher die Grenze zwischen Hell und Dunkel im Gesichtsfeld des Fernrohres, auf die man das im Okular angebrachte Fadenkreuz einstellt; der Winkel α läßt sich

an dem Teilkreis T ablesen. Bezeichnen wir die Medien Luft, Glas und Flüssigkeit der Reihe nach mit 1, 2 und 3, so ist nach dem Brechungsgesetz für den aus Glas in Luft austretenden Strahl

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta_g\right)}{\sin\alpha} = \frac{\cos\beta_g}{\sin\alpha} = \frac{n_1}{n_2}, \quad \text{also} \quad \cos\beta_g = \frac{n_1}{n_2}\sin\alpha .$$

Für den Grenzwinkel β_g gilt ferner Gl. (1.11), die wir jetzt folgendermaßen schreiben müssen:

$$\sin\beta_g = \frac{n_3}{n_2} .$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich nach einfacher Rechnung:

$$\frac{n_3}{n_1} = \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2\alpha} ,$$

oder in etwas anderer Schreibweise:

$$n_{31} = \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2\alpha} .$$

n_{31} ist aber die gesuchte relative Brechzahl der Flüssigkeit gegen Luft, während n_{21} die relative Brechzahl des Glaswürfels gegen Luft ist; diese ermittelt man ein für allemal, indem man als Flüssigkeit Wasser mit $n_{31} = 1{,}333$ verwendet. Will man statt einer Flüssigkeit die Brechzahl eines festen Körpers bestimmen, so klebt man ihn auf die obere Fläche des Glaswürfels mit einem Tropfen Flüssigkeit von größerer Brechzahl, z. B. Monobromnaphthalin, auf. Bei den üblichen Ausführungsformen dieses Refraktometers wird n_{21} entweder gleich 1,755 oder 1,622 gewählt; die zu untersuchenden Flüssigkeiten können also Brechzahlen bis zu diesem Werte haben.

Zur Bestimmung der Brechzahl von Kristallplatten in Abhängigkeit von ihrer Orientierung dient das *Kristallrefraktometer nach Pulfrich*, das von E. Abbe (1890) modifiziert wurde; es unterscheidet sich von dem Pulfrich-Refraktometer nur dadurch, daß an Stelle des Glaswürfels G eine um eine vertikale Achse A in sich drehbare Glashalbkugel K mit genau horizontal liegender Planfläche benutzt wird (Abb. 1.68). Der zu untersuchende Kristallschnitt P wird auf die Planfläche mit einer stärker brechenden Flüssigkeit aufgeklebt und der Winkel β_g direkt mit dem Fernrohr an dem Teilkreis T abgelesen. Dreht man dann die Halbkugel um die vertikale Achse A, so läßt sich die Brechzahl der Kristallplatte für die verschiedenen in der Schnittebene liegenden Richtungen ermitteln.

Schließlich ist in Abb. 1.69 das häufig benutzte *Abbesche Refraktometer* wiedergegeben. Das von einer monochromatischen Lichtquelle (Natriumbrenner) kommende Licht fällt über einen Hohlspiegel S als konvergentes Strahlenbüschel

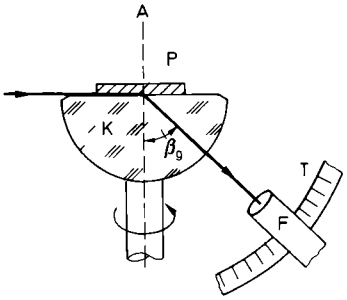


Abb. 1.68 Kristallrefraktometer nach Pulfrich

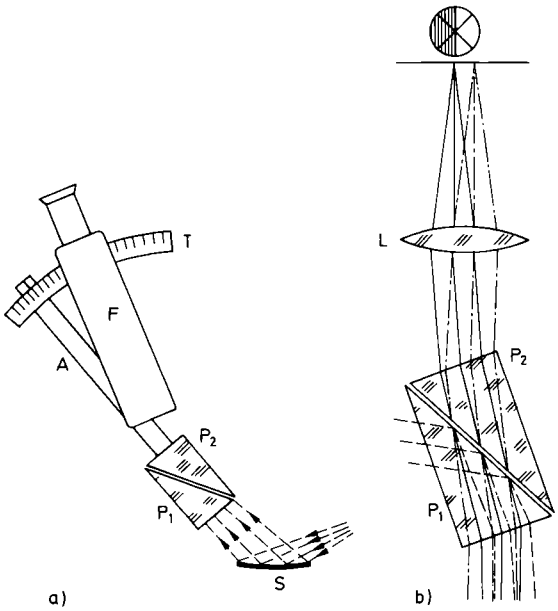


Abb. 1.69 Refraktometer nach Abbe
a) Aufbau b) Strahlenverlauf

auf ein Doppelprisma, das aus zwei rechtwinkligen Prismen P_1 und P_2 aus schwerem Flintglas mit hoher Brechzahl besteht. Zwischen die beiden Prismen wird die zu untersuchende Flüssigkeit, deren Brechzahl kleiner als die des Prismenglases sein muß, als planparallele Schicht gebracht. Beim Auftreffen auf diese Flüssigkeitsschicht durchsetzen nur jene aus dem dichteren Medium (Prisma P_1) kommenden Strahlen die Flüssigkeit, die unter einem Winkel auffallen, der kleiner als

der Grenzwinkel der totalen Reflexion ist (strichpunktierte Strahlen in Abb. 1.69b). Der letzte Strahl, der noch in die Flüssigkeit eindringt, ist der unter dem Grenzwinkel auffallende (in Abb. 1.69b ausgezogen). Alle folgenden Strahlen (gestrichelt) werden an der Flüssigkeitsschicht totalreflektiert. Aus dem Prisma P_2 tritt also nur Licht rechts von dem ausgezogenen Strahl, der Raum links davon ist dunkel. Zur Beobachtung der Trennungslinie zwischen hellem und dunklem Winkelraum dient das Fernrohr F, das im Okular ein Fadenkreuz besitzt. Das Fernrohr ist mit einer Teilung T fest verbunden, während das Doppelprisma mit dem Arm A gegen das Fernrohr drehbar ist; dadurch kann der Einfallswinkel des Lichtes so lange variiert werden, bis der Grenzwinkel der Totalreflexion erreicht ist; dann verdunkelt sich das Gesichtsfeld im Fernrohr von einer Seite her, und man stellt die Grenzlinie zwischen Hell und Dunkel auf den Schnittpunkt des Fadenkreuzes ein. Auf der Teilung T sind nicht die Grenzwinkel, sondern direkt die Brechzahlen aufgetragen. – Auch feste Körper lassen sich mit diesem Refraktometer untersuchen: Man nimmt zu diesem Zwecke das Prisma P_1 ab und klebt den festen Körper mit einer stärker brechenden Flüssigkeit gegen die Hypothenusenfläche des Prismas P_2.

1.7 Brechung des Lichtes an einer Kugelfläche

Abbildung eines leuchtenden Punktes. Wir denken uns zwei Medien 1 und 2 mit den Brechzahlen n_1 und n_2 durch eine Kugelfläche mit dem Radius r voneinander getrennt. Wir zeigen zunächst, wie man zu einem auf die Kugelfläche auffallenden Strahl den gebrochenen Strahl findet; denn im Gegensatz zu einer ebenen Trennungsfläche, bei der alle untereinander parallelen Strahlen den gleichen Einfalls- und Brechnungswinkel haben, ist dies bei einer kugelförmigen Trennungsfläche natürlich nicht der Fall. Von K. Weierstrass rührt folgende Konstruktion her (Abb. 1.70): Man zeichnet um den Mittelpunkt der Kugelfläche zwei Hilfskugeln 1 und 2 mit den Radien $r_1 = \frac{n_2}{n_1} r$ und $r_2 = \frac{n_1}{n_2} r$, wobei n_2 die Brechzahl des von der Kugelfläche mit dem Radius r eingeschlossenen Mediums 2 und n_1 die Brechzahl des die Kugelfläche umgebenden Mediums 1 ist. Den von L aus einfallenden, die Kugelfläche bei A treffenden Strahl verlängert man bis zum Schnittpunkt B mit der Kugel 1; B verbindet man mit dem Kugelmittelpunkt M; diese Verbindungslinie schneidet die Kugel 2 in C. Dann gibt die Gerade AC die Richtung des gebrochenen Strahles AL′ an. Es sind nämlich die beiden Dreiecke AMB und AMC einander ähnlich, da sie den Winkel AMB gemeinsam haben und die diesen Winkel einschließenden Seiten in gleichem Verhältnis stehen; denn es ist $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MC}} = \frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{AM}} = \frac{n_2}{n_1}$. Dann ist also $\sphericalangle\,\mathrm{ACM} = \sphericalangle\,\mathrm{BAM} = \alpha$, und nach dem Sinus-

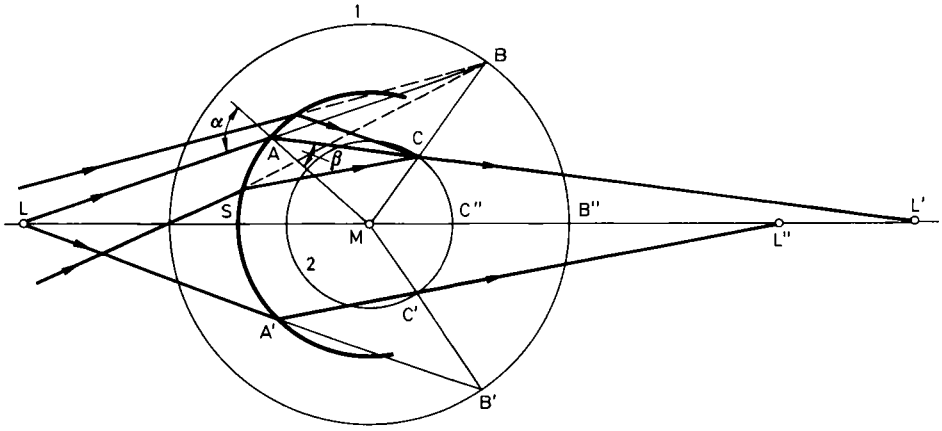


Abb. 1.70 Konstruktion des an einer Kugelfläche gebrochenen Lichtstrahls (nach Weierstrass)

satz folgt:

$$\frac{\sin \mathrm{ACM}}{\sin \mathrm{CAM}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{CM}} = \frac{n_2}{n_1},$$

woraus sich ergibt, daß β der zum Einfallswinkel α zugehörige Brechungswinkel ist. Konstruiert man so zu allen von einem leuchtenden Punkt L kommenden Strahlen die gebrochenen, so findet man, daß diese sich keineswegs wieder in einem Punkt schneiden; dies zeigt z. B. der in Abb. 1.70 gezeichnete Strahl LA′C′, der den senkrecht auf die Kugelfläche fallenden und daher ungebrochenen Strahl LSM in L″, statt wie der Strahl LAC in L′ schneidet.

Aus der Weierstrassschen Konstruktion folgt aber, daß alle nach dem Punkt B hinzielenden Strahlen sich nach der Brechung im Punkt C schneiden müssen. Nach dem Gesetz von der Umkehrbarkeit des Lichtweges bedeutet dies aber, daß alle von Punkt C im zweiten Medium ausgehenden Strahlen so gebrochen werden, als ob sie sämtlich vom Punkt B herkämen, mit anderen Worten: *zu dem reellen Gegenstandspunkt C gehört der virtuelle Bildpunkt B, bzw. zu dem virtuellen Gegenstandspunkt B existiert ein reeller Bildpunkt C.* In Abb. 1.70 sind drei von C ausgehende Strahlen gezeichnet, die bei ihrer Rückwärtsverlängerung sämtlich nach der Brechung durch B hindurchgehen; C und B sind *konjugierte Punkte*, und zwar für beliebig weit geöffnete Strahlenbüschel. Deshalb heißen C und B *aberrationsfreie Punkte der Kugel.* Es ist wesentlich, sich klar zu machen, daß zu jedem Punkt, z. B. C′, C″, ... in Abb. 1.70, auf der Hilfskugel 2, die gemäß Konstruktion *innerhalb* der brechenden Kugel mit der Brechzahl n_2 liegen, je ein zugehöriger aberrationsfreier Punkt B′, B″ ... auf der Hilfskugel 1, d.h. außerhalb der brechenden Kugel, gehört. In Abb. 1.71 ist dies für die Punkte C″ und B″ noch einmal ausgeführt: Ein von C″ ausgehendes, beliebig weit geöffnetes Strah-

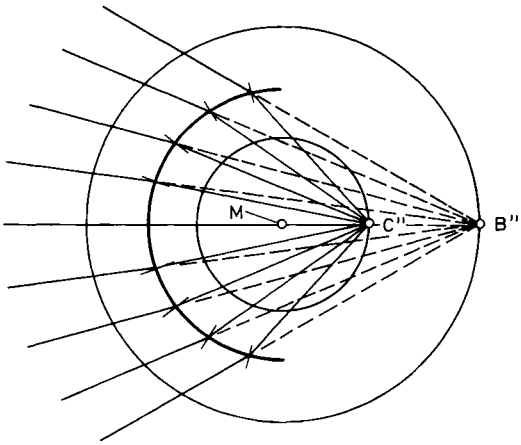


Abb. 1.71 Zur Erklärung der aberrationsfreien Punkte (C'' und B'') bei der Lichtbrechung an einer Kugelfläche

lenbüschel wird so gebrochen, als ob es von B'' herkäme. Da hier $n_2 > n_1$ angenommen ist, ist das von C'' ausgehende stark divergente Büschel durch die Brechung in das von B'' ausgehende weniger divergente Büschel übergeführt worden.

Abb. 1.72 stellt nochmals zwei Meridianschnitte durch eine brechende Kugelfläche dar, wobei $n_2 > n_1$, also das Medium auf der rechten Seite optisch dichter ist als das auf der linken Seite der brechenden Fläche. Im Fall der Abb. 1.72a handelt es sich für einen im Medium 1 befindlichen Beobachter um eine konvexe,

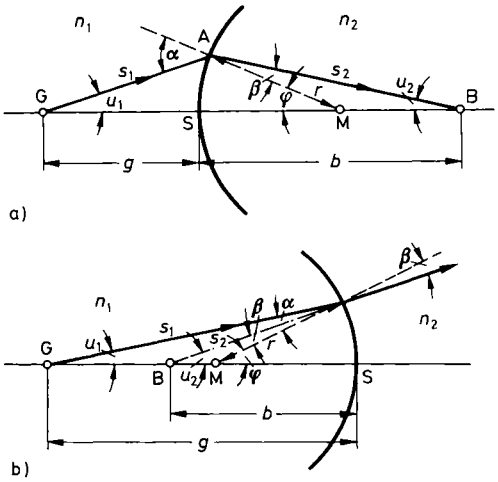


Abb. 1.72 Abbildung eines Achsenpunktes G durch die konvexe (a) bzw. konkave (b), brechende Kugelfläche

in Abb. 1.72b um eine konkave Trennungsfläche. Im Medium 1 befinde sich ein leuchtender Punkt G, den wir mit dem Kugelzentrum M verbinden. Die Verbindungslinie bzw. ihre Verlängerung über M hinaus schneidet die Kugelfläche im Scheitelpunkt S. Wir nennen BM die *optische Achse*. Ein von G unter dem Winkel u_1 gegen die Achse ausgehender Strahl schneidet im Falle der Abb. 1.72a nach Brechung an der Kugelfläche bei A die Achse in einem im Medium 2 liegenden reellen Punkt B, dem *Bildpunkt* von G; im Falle der Abb. 1.72b dagegen wird der Strahl so in das zweite Medium hineingebrochen, daß seine rückwärtige Verlängerung die optische Achse in dem virteuellen, im Medium 1 liegenden BildpunktB schneidet. Man nennt den Abstand GS des Punktes G vom Scheitel der Fläche die *Gegenstandsweite g* und den Abstand des Bildpunktes von S die *Bildweite b*; beide Größen werden auch häufig als *Scheitel-* oder *Schnittweiten* bezeichnet.

Über das Vorzeichen der angegebenen Größen gibt es verschiedene Auffassungen. Ein Physiker in der optischen Industrie, der gewohnt ist, mit diesen Größen umzugehen, wird anders darüber denken als jemand, der sich die Aufgabe gestellt hat, Lernenden diese Grundlagen verständlich zu machen. Um das Verstehen zu erleichtern, wird hier – rein willkürlich! – die folgende Vereinbarung getroffen: Bei den folgenden Zeichnungen und Beschreibungen verlaufe die Lichtrichtung stets von links nach rechts. Der Radius r der brechenden Fläche sei positiv, wenn diese nach der Seite, von welcher das Licht vom Gegenstandsraum her einfällt, konvex ist; ist die Fläche konkav, wird r negativ angesetzt. Die Gegenstandsweite g und die Bildweite b werden stets vom Scheitelpunkt der Fläche aus gezählt, und zwar g positiv nach links, b positiv nach rechts. Die Strahllängen s_1 und s_2 werden in demselben Sinne wir g und b gerechnet. Wir zählen ferner die Richtung eines Gegenstandes senkrecht zur Achse positiv nach oben und die eines Bildes positiv nach unten. Zu beachten ist dabei, daß wir hier die Vorzeichen für Bildweite, Brennweiten, Krümmungsradien umgekehrt wählen wie bei den Hohlspiegeln.

Diese Vorzeichenwahl wird in der Optik als das *anschauliche System* bezeichnet; sie ist rein willkürlich und wurde deswegen gewählt, weil bei den elementaren Abbildungsvorgängen die Objekte reell vor den abbildenden Systemen (bei unserer Darstellung also links) sich befinden, die Gegenstandsweite also positiv von der ersten abbildenden Fläche aus gerechnet wird, und weil bei der Sammellinse mit positiver Brennweite das Bild eine zum Objekt umgekehrte Lage aufweist. Im Gegensatz dazu findet man besonders in der rechnenden Optik das sog. *rationelle System*, bei dem alle Strecken positiv im Sinne der Lichtbewegung und negativ im entgegengesetzten Sinne gerechnet werden. In diesem Fall wird dann auch ein dem Objekt gleichgerichtetes Bild als positiv bezeichnet. In diesem System hat dann sowohl die Sammellinse wie auch die Zerstreuungslinse eine positive und eine negative Brennweite, während bei dem von uns benutzten anschaulichen System eine Sammellinse stets positive und eine Zerstreuungslinse stets negative Brennweiten erhält. Beide Systeme haben ihre Vorteile und Nachteile.

Aus den Abb. 1.72a und 1.72b finden wird auf Grund des Sinussatzes, den wir auf die Dreiecke GAM und BAM anwenden:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi} = \frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{GA}} \quad \text{und} \quad \frac{\sin\beta}{\sin\varphi} = \frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{BA}}.$$

Nach dem Brechungsgesetz ist aber $n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$, so daß sich aus obigen Gl. nach Erweiterung mit n_1 bzw. n_2 ergibt:

$$n_1 \frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{GA}} = n_2 \frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{BA}}.$$

Wie man aus der Abb. 1.72a entnimt, ist aber $\mathrm{GM} = g + r$ und $BM = b - r$; setzen wir ferner $\mathrm{GA} = s_1$ und $\mathrm{BA} = s_2$, so erhalten wir:

$$n_1 \frac{g+r}{s_1} = n_2 \cdot \frac{b-r}{s_2}. \tag{1.16}$$

Benutzen wir Abb. 1.72b, so haben wir

$$\mathrm{GM} = g - |r| = g + r, \quad \mathrm{BM} = |b| - |r| = r - b \quad \text{und} \quad \mathrm{AB} = |s_2| = -s_2$$

zu setzen und erhalten dann dieselbe Gleichung.

Gl. (1.16) gilt also ganz allgemein für jeden von G nach der brechenden Fläche ausgehenden Strahl. Es ergeben jedoch, wie man sich leicht überzeugt (s. auch Abb. 1.72), von G unter verschiedenen Öffnungswinkeln u_1 gezogene Strahlen verschiedene Bildpunkte. Diese Komplikation fällt aber, wie beim Hohlspiegel, fort, wenn wir nur achsennahe (paraxiale) Strahlen betrachten; dann können wir $s_1 \approx g$ und $s_2 \approx b$ setzen, da dann $\cos u_1$ und $\cos u_2$ nahezu gleich 1 sind, und erhalten an Stelle von Gl. (1.16) nach Umrechnung:

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r}. \tag{1.16a}$$

Diese Gleichung gilt für paraxiale Strahlen ganz allgemein, wenn man die Strecken g, b, r mit ihrem richtigen Wert – je nach den Umständen positiv oder negativ – einsetzt.

Ergibt sich aus Gl. (1.16a) der Wert von b, den man im allgemeinen sucht, positiv oder negativ, so heißt das, daß der Bildpunkt von G rechts oder links vom Scheitelpunkt der Kugelfläche liegt, d. h. reell oder virtuell ist.

Nach dem Satz von der Umkehrbarkeit des Lichtweges ist es für den Strahlenverlauf gleichgültig, welche Richtung das Licht hat. Werden also die von G ausgehenden Strahlen in B vereinigt, so treffen umgekehrt die von B ausgehenden Strahlen in G zusammen. Zwei so miteinander verknüpfte Punkte nennt man **konjugierte Punkte**. Gl. (1.16a) sagt dann aus, daß – immer unter der Voraussetzung paraxialer Strahlen – *ein homozentrisches Strahlenbüschel auch nach der Brechung an einer Kugelfläche homozentrisch bleibt*. Man bezeichnet diese punktweise Abbildung aller auf der Achse gelegenen Objektpunkte durch paraxiale Strahlen als *Gaußsche Abbildung*, weil sie von C. F. Gauß (1840) zuerst in allgemeiner Weise behandelt wurde. Aus Gl. (1.16a) entnimmt man noch, daß G und

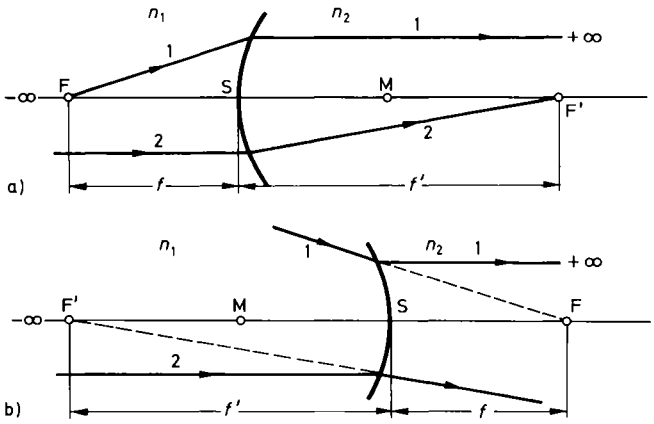


Abb. 1.73 Zur Definition der Brennpunkte bei einer konvexen (a) bzw. konkaven (b), brechenden Kugelfläche

B stets im gleichen Sinn auf der Achse wandern: geht G von links nach rechts auf der Achse, d. h. wird $|g|$ kleiner, so wandert B ebenfalls von links nach rechts, d. h. es wird bei positivem r (konvexe Kugelfläche) $|b|$ größer und bei negativem r (konkave Kugelfläche) $|b|$ kleiner. Man nennt daher diese Abbildung *rechtläufig*; sie kommt nur bei der Brechung vor, denn bei der Reflexion hatten wir es mit einer rückläufigen Abbildung zu tun.

Wir führen nun noch die **Brennpunkte** F und F′ ein: als solche bezeichnet man die zum unendlich fernen Gegenstandspunkt bzw. Bildpunkt gehörenden konjugierten Punkte, also diejenigen Punkte, in denen parallel zur Achse auf die Trennungsfläche fallende paraxiale Strahlen im anderen Medium die Achse schneiden (Abb. 1.73a) bzw. von denen parallel einfallende Strahlen nach der Brechung herzukommen scheinen (Abb. 1.73b). Die beiden Brennpunkte liegen also auf entgegengesetzten Seiten der brechenden Fläche. Wir wollen den dem unendlich fernen Achsenpunkt des Bildraumes entsprechenden Brennpunkt als den *objektseitigen* oder *vorderen Brennpunkt F* bezeichnen. Alle von ihm ausgehenden (Abb. 1.73a, Strahl 1) oder nach ihm hin zielenden (Abb. 1.73b, Strahl 1) Strahlen werden so gebrochen, daß sie im Bildraum parallel zur Achse laufen. Umgekehrt bezeichnen wir den anderen Brennpunkt als *bildseitign* oder *hinteren Brennpunkt F′*: alle von ihm ausgehenden (Abb. 1.73a, Strahl 2) oder nach ihm hin zielenden Strahlen (Abb. 1.73b, Strahl 2) werden so gebrochen, daß sie im Objektraum parallel zur Achse laufen. Die Abstände der Brennpunkte vom Scheitelpunkt nennen wir die Brennweiten f und f', die Wahl ihrer Vorzeichen soll denen von g und b entsprechen. Es bedeutet z. B. ein positives f' stets einen im Bildraum liegenden reellen Brennpunkt, während man an einem negativen Vorzeichen von f' erkennt, daß es sich um einen virteuellen bildseitigen, im Gegenstandsraum liegenden Brennpunkt handelt. Wie man aus Abb. 1.73b ersieht, sind

z. B. für eine konkave Fläche mit $n_2 > n_1$, wie hier angenommen war, die Brennpunkte virtuelle, da sowohl f als auch f' negative Werte annehmen.

Die Werte für f und f' erhält man aus Gl. (1.16a), wenn man darin g und b unendlich werden läßt. Für $b = \infty$ folgt:

$$f = \frac{n_1 r}{n_2 - n_1}, \tag{1.17a}$$

und für $g = \infty$:

$$f' = \frac{n_2 r}{n_2 - n_1}. \tag{1.17b}$$

Als Differenz der beiden Brennweiten ergibt sich:

$$f' - f = r, \tag{1.18}$$

und für ihr Verhältnis:

$$\frac{f}{f'} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{1.19}$$

Die beiden Brennweiten haben also stets das *gleiche* Vorzeichen, d. h. die beiden Brennpunkte liegen stets auf entgegengesetzten Seiten der brechenden Fläche (Abb. 1.73), und die beiden Brennweiten verhalten sich wie die Brechzahlen der beiden Medien, die durch die Kugelfläche getrennt werden. Aus Gl. (1.17b) erkennt man insbesondere, daß f' nur positiv wird, wenn r und $n_2 - n_1$ gleiches Vorzeichen haben. Eine brechende Fläche sammelt also parallele Strahlen in einem Punkt, wenn ihr Mittelpunkt im stärker brechenden Medium liegt, einerlei, von welcher Seite das Licht auf die Fläche fällt (Abb. 1.73a).

Führt man die Brennweiten in Gl. (1.16a) ein, so erhält man die **Abbildungsgleichung für paraxiale Strahlen:**

$$\frac{f}{g} + \frac{f'}{b} = 1. \tag{1.20}$$

Diese Grundgleichung, aus der man zu jeder Gegenstandsweite die zugehörige Bildweite berechnen kann, nimmt besonders einfache Gestalt an, wenn man statt der Scheitelwerte von g und b die auf die Brennpunkte bezogenen Koordinaten von Gegenstands- und Bildpunkt einführt. Bezeichnet man den Abstand des Gegenstandspunktes vom objektseitigen Brennpunkt F mit x, und den Abstand des Bildpunktes B vom bildseitigen Brennpunkt mit x', so ist $g = f + x$ und $b = f' + x'$. Setzt man diese Werte in Gl. (1.20) ein, so erhält man:

$$\frac{f}{f + x} + \frac{f'}{f' + x'} = 1,$$

woraus die **Newtonsche Form der Abbildungsgleichung** folgt:

$$xx' = ff'. \tag{1.21}$$

Im Abschn. 1.8 werden wir in anderem Zusammenhang eine allgemeinere Ableitung der Gl. (1.20) kennenlernen, in der für die Existenz punktweiser Abbildung nur vorausgesetzt werden muß, daß der Ablenkungswinkel, $\alpha - \beta$, proportional zum Abstand von A von der Achse, also proportional $\sin\varphi$ sein muß. Für paraxiale Strahlen ist dies hier der Fall, da

$$\alpha - \beta \approx \sin(\alpha - \beta) \approx \sin\alpha - \sin\beta = \left(\frac{g+r}{s_1} - \frac{b-r}{s_2}\right)\sin\varphi.$$

Gl. (1.16a) können wir unter Benutzung der Gl. (1.17a) und (1.17b) auch in folgender Form schreiben:

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r} = \frac{n_1}{f} = \frac{n_2}{f'}, \tag{1.16b}$$

aus der hervorgeht, daß den durch die zugehörigen Brechzahlen dividierten Größen g, b, f, f' eine besondere Bedeutung zukommt. Die Größen $\frac{f}{n_1}$ und $\frac{f'}{n_2}$ heißen die reduzierten Brennweiten, entsprechend sind $\frac{g}{n_1}$ und $\frac{b}{n_2}$ die reduzierten Schnittweiten. Man nennt $\frac{n_1}{g} = A_g$ die reduzierte Konvergenz der Gegenstandsweite, $\frac{n_2}{b} = A_b$ die reduzierte Konvergenz der Bildweite und $\frac{n_1}{f} = \frac{n_2}{f'} = S$ den Brechwert der brechenden Fläche. (Es ist üblich, Brechwert und Konvergenz in Dioptrien (s. Abschn. 1.4) anzugeben.) Mit diesen Bezeichnungen kann man Gl. (1.16b) in der Form schreiben:

$$A_g + A_b = S \tag{1.22}$$

und den Satz aussprechen:

- Bei einer brechenden Kugelfläche ist die Summe der reduzierten Konvergenzen von Gegenstands- und Bildweite gleich dem Brechwert der brechenden Fläche.

Entsprechend läßt sich Gl. (1.21) in die Form bringen

$$XX' = S^2 \tag{1.23}$$

wobei $X = \frac{n_1}{x}$ und $X' = \frac{n_2}{x'}$ die reduzierten Konvergenzen der von den Brennpunkten aus gerechneten Gegenstands- und Bildweite bedeuten. Gemäß Gl. (1.16b) kann man sich zur Bildung des Brechwertes einer Kugelfläche merken: Man durchdingt die Fläche in Richtung des Lichtes, schreibt die hinter der Fläche herrschende Brechzahl hin, zieht davon die Brechzahl vor der Fläche ab und dividiert (durch den in Metern ausgedrückten) Radius der Fläche.

Experimentell kann man die Brechung an einer Kugelfläche zeigen, indem man ein Bündel paralleler Lichtstrahlen von oben auf einen mit Wasser gefüllten Standzylinder fallen läßt und auf die Wasseroberfläche ein Uhrglas bringt, das die Oberfläche je nach seiner Lage konkav oder konvex gestaltet. Der Strahlen-

verlauf im Wasser und die Lage des Brennpunktes bei konvex gekrümmter Fläche läßt sich verfolgen, wenn man das Wasser mit etwas Fluorescein versetzt.

In Gl. (1.16a) ist übrigens formal auch der Fall der Reflexion enthalten. Setzt man nämlich $n_2 = -n_1$, so nimmt Gl. (1.16a) die Gestalt an:

$$\frac{1}{g} - \frac{1}{b} = -\frac{2}{r}.$$

Dies stimmt mit der Abbildungsgleichung (1.1) für sphärische Spiegel (s. Abschn. 1.4) überein, wenn man berücksichtigt, daß man beim Hohlspiegel die Bildweiten, Brennweiten, Krümmungsradien mit umgekehrten Vorzeichen einsetzt wie bei der Brechung.

Lassen wir ferner in Gl. (1.16a) $r = \infty$ werden, d. h. gehen wir von einer gekrümmten Trennungsfläche zwischen den beiden Medien zu einer ebenen Fläche über, so wird:

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = 0,$$

d. h.

$$b = -\frac{n_2}{n_1} g.$$

Diese Gleichung sagt aus, daß ein im Abstand g hinter einer brechenden Fläche liegender Gegenstand bei senkrechtem Einblick in die Fläche in der Entfernung $b = \frac{n_2}{n_1} g$ hinter der Fläche gesehen wird. Nun wird in praktischen Fällen das Medium 2, in das die vom Gegenstandspunkt ausgehenden Strahlen eindringen, Luft sein, also $n_2 = 1$. Beim Einblick in die brechende Fläche scheint also der Gegenstand um $g - \frac{n_2}{n_1} g = \frac{n_1 - n_2}{n_1} g$ der Fläche genähert. Dies ist der Grund dafür, daß der Boden von Gewässern bei senkrechtem Einblick gehoben erscheint, und zwar um $\frac{4/3 - 1}{4/3} g = \frac{1}{4} g$. Von dieser Erscheinung hatten wir bereits in Abschn. 1.5 bei der Messung einer Brechzahl der Glasplatte Gebrauch gemacht (Abb. 1.51b).

Diese Überlegung gilt wegen der Beschränkung auf paraxiale Strahlen nur bei senkrechtem Einblick in die Wasserfläche. Bei schiefem Einblick wird der betreffende Punkt P unter der Wasseroberfläche nicht nur stärker gehoben, sondern auch seitlich verschoben. Verlängert man z. B. zwei benachbarte, von P ausgehende, ins Auge gelangende Strahlen (Abb. 1.74) nach ihrer Brechung geradlinig rückwärts in der Blickrichtung, so schneiden sie sich bei P′. Je tiefer sich das Auge zur Wasseroberfläche senkt, umso näher rückt der virtuelle Blickpunkt P′ längs einer Kurve bis zur Wasseroberfläche. Man nennt diese Kurve die **Diakaustik** des Punktes P; es bilden nämlich sämtliche von P in die Luft gebrochenen Strahlen mit ihrer rückwärtigen Verlängerung Tangenten an die **kaustische Fläche,** die durch Rotation der Diakaustik um die Achse MP entsteht. Die Spitze S der Diakaustik ist der Punkt, in dem P bei senkrechtem Einblick gesehen wird.

Abbildung eines ausgedehnten Gegenstands. Bisher wurde nur die Abbildung eines auf der optischen Achse liegenden Punktes G durch eine Kugelfläche betrachtet. Wir wollen aber jetzt einen senkrecht zur Achse ausgedehnten Gegenstand abbilden. Zu diesem Zweck kann man folgendermaßen vorgehen: Um den Mittelpunkt M der brechenden Kugelfläche denken wir uns eine konzentrische Kugel

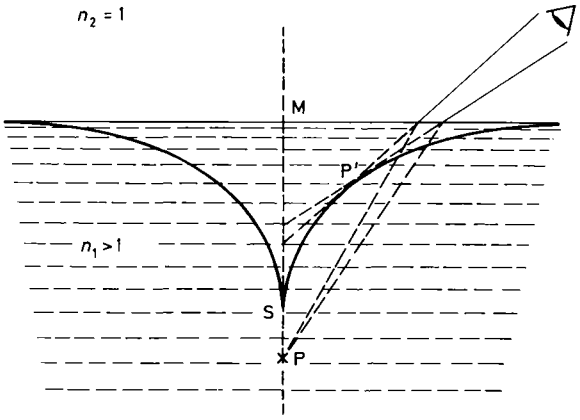


Abb. 1.74 Entstehung der Diakaustik

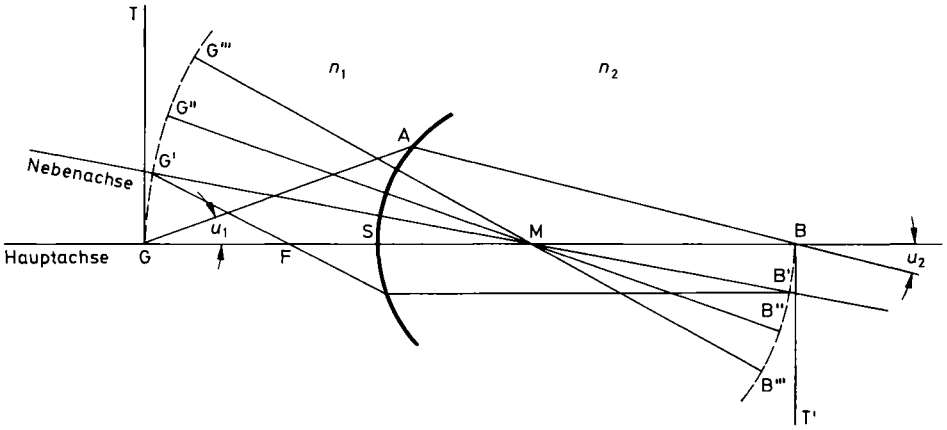


Abb. 1.75 Zur Abbildung eines ausgedehnten Gegenstandes durch eine brechende konvexe Kugelfläche

mit dem Radius MG (in Abb. I,75 gestrichelt) und nehmen auf dieser Kugelfläche irgendeinen Punkt G′ an. Verbinden wir nun auch G′ mit dem Mittelpunkt M der brechenden Fläche, so können wir G′M ebenfalls als optische Achse (*Nebenachse*) betrachten und nun dieselben Überlegungen wie bisher anstellen, um den Bildpunkt B′ zu G′ zu finden: dieser liegt offenbar auf einer mit dem Radius MB um M gedachten zweiten konzentrischen Kugelfläche, die in der Abbildung ebenfals gestrichelt ist. Was für G′ und B′ gilt, gilt für jeden Punkt G″, G‴ ... der ersten Kugelfläche: jedem ihrer Punkte entspricht je ein Bildpunkt B″, B‴ ... der zweiten Kugelfläche. Das heißt es gilt der Satz:

- Liegen die Objektpunkte auf einer zur brechenden Fläche konzentrischen Kugelfläche, so liegen die konjugierten Bildpunkte ebenfalls auf einer mit der brechenden Fläche konzentrischen Kugelfläche.

Beschränken wir uns aber auf einen zylindrischen, rings um die Hauptachse gelegenen sehr engen Raum, d. h. auf paraxiale Strahlen, so können wir offenbar die kleinen Stücke der beiden Kugelflächen innerhalb dieses Raumes als eben, d. h. mit den Tangentialebenen T bzw. T' zusammenfallend betrachten. In dieser Näherung können wir also sagen, daß *senkrecht zur Hauptachse gelegene Ebenen durch Paraxialstrahlen wieder in senkrecht zur Achse liegende Ebenen abgebildet werden.* Man vergleiche das analoge Problem beim Spiegel (Abschn. 1.4). Um also einen senkrecht zur Achse orientierten Gegenstand geringer Ausdehnung durch eine Kugelfläche abzubilden, kann man drei ausgezeichnete Strahlen ziehen, nämlich:

1. Ein vom Endpunkt G′ des Gegenstandes parallel zur Achse einfallender Strahl (1 in Abb. 1.76a) wird so gebrochen, daß er bei einer konvex gekrümmten Fläche für $n_1 < n_2$ durch den bildseitigen Brennpunkt F′ hindurchgeht und bei einer konkav gekrümmten Fläche (1 in Abb. 1.76b) vom virtuellen bildseitigen Brennpunkt F′ herzukommen scheint.
2. Ein von G′ durch den objektseitigen Brennpunkt F gehender Strahl (2 in Abb. 1.76a) bzw. bei einer konkaven Fläche nach dem Brennpunkt F hinziehender Strahl (2 in Abb. 1.76b) wird für $n_1 < n_2$ so gebrochen, daß er parallel zur Achse weiterläuft.
3. Ein von G′ nach dem Mittelpunkt M der brechenden Fläche gezogener Strahl (3 in Abb. 1.76a und b) erfährt keine Brechung.

Ist umgekehrt $n_1 > n_2$, so gilt der Strahlverlauf von Abb. 1.76a für eine konkave, der von Abb. 1.76b für eine konvexe Kugelfläche. Man erhält demnach von einem außerhalb des Brennpunktes F befindlichen Gegenstand im Falle $n_1 < n_2$ bei einer konvexen Brechungsfläche ein umgekehrtes reelles Bild und bei einer konkaven ein virtuelles aufrechtes Bild. Im Falle $n_1 > n_2$ liegen die Verhältnisse gerade umgekehrt.

Die optischen Vergrößerungen, Satz von Lagrange. Wie bei den sphärischen Spiegeln bezeichnen wir das Verhältnis von Bildgröße y_2, gemessen in der zur Achse senkrechten Richtung, zu der Gegenstandsgröße y_1 als **laterale** oder **transversale Vergrößerung** v. Aus den einander ähnlichen Dreiecken BB′M und GG′M in Abb. 1.76a folgt:

$$v = \frac{y_2}{y_1} = \frac{b-r}{g+r}.$$

Unter Benutzung von Gl. (1.16a) folgt hieraus nach Umrechnung:

$$v = \frac{y_2}{y_1} = \frac{n_1 b}{n_2 g}. \tag{1.24}$$

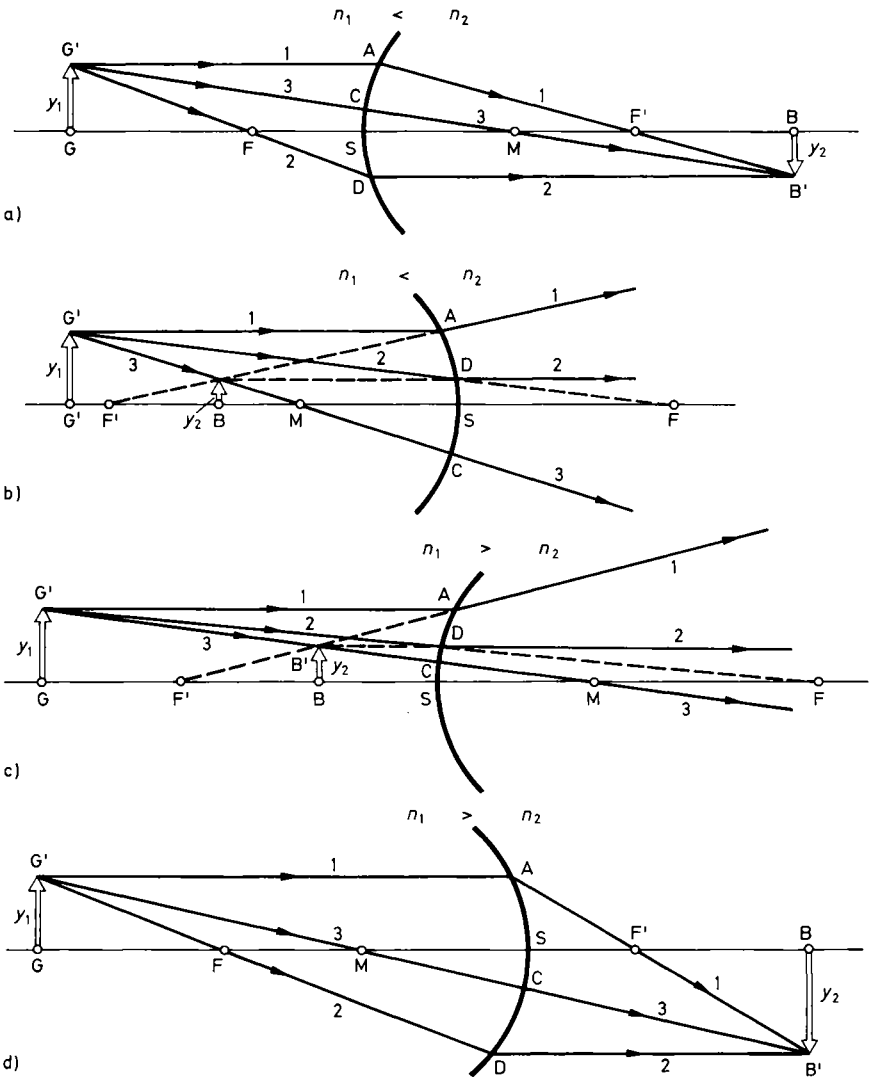


Abb. 1.76 Abbildung eines Gegenstandes durch eine konvexe (a, c) bzw. konkave (b, d) brechende Kugelfläche für die beiden Fälle, daß $n_1 < n_2$ (a, b) und $n_1 > n_2$ (c, d) ist

Aus Abb. 1.76b erhalten wir die gleiche Formel:

$$v = \frac{b-r}{g+r} = \frac{n_1 b}{n_2 g}.$$

Nur ist zu beachten, daß im letzteren Falle nach unserer Vorzeichenbestimmung b einen negativen Wert hat, also auch v negativ ausfällt. Das bedeutet, daß das virtuelle Bild oberhalb der optischen Achse liegt. Umgekehrt bedeutet ein positi-

ver Wert von v, daß das Bild dem Gegenstand entgegengesetzt, also umgekehrt ist. Da v bei einem gegebenen brechenden System nur von g und b abhängt und von der Gegenstandsgröße y_1 unabhängig ist, gilt der Satz:

- Die laterale Vergrößerung ist in konjugierten Ebenenpaaren konstant und variiert nur von Ebenenpaar zu Ebenenpaar.

Setzt man in Gl. (1.24) für $\frac{n_1}{n_2}$ nach Gl. (1.19) den Wert $\frac{f}{f'}$ ein und ersetzt g und b durch $g = f + x$, $b = f' + x'$, so kann man schreiben:

$$v = \frac{f(f' + x')}{f'(f + x)}.$$

Ersetzt man schließlich im Zähler ff' nach Gl. (1.21) durch xx', so ergibt sich:

$$v = \frac{xx' + fx'}{ff' + f'x} = \frac{x'}{f'}. \tag{1.24a}$$

Unter nochmaliger Benutzung von Gl. (1.21) kann man dafür auch schreiben:

$$v = \frac{f}{x}. \tag{1.24b}$$

Außer der Lateralvergrößerung kann man auch eine **Tiefen-** oder **axiale Vergrößerung** definieren. Denken wir uns einen längs der Achse liegenden Gegenstand GG' von der Länge Δx, so entspricht ihm ein Bild BB′ von der Größe $\Delta x'$ (Abb. 1.77). Das Verhältnis $\frac{\Delta x'}{\Delta x}$ ist die Tiefenvergrößerung t. Um sie zu berechnen, differenzieren wir am einfachsten die Newtonsche Form der Abbildungsgleichung (1.21). Das liefert:

$$x\Delta x' + x'\Delta x = 0$$

und folglich

$$t = \frac{\Delta x'}{\Delta x} = -\frac{x'}{x}. \tag{1.25}$$

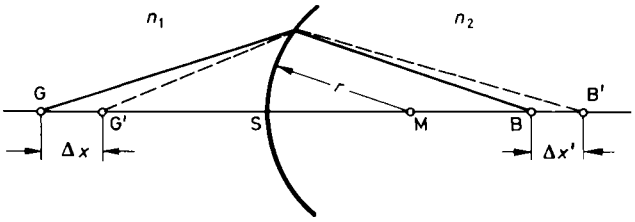


Abb. 1.77 Zur Definition der Tiefenvergrößerung

Multipliziert man die rechte Seite im Zähler und Nenner mit x oder x' und ersetzt nach Gl. (1.21) das Produkt xx' durch ff', so erhält man:

$$t = \frac{ff'}{x^2} = -\frac{x'^2}{ff'}; \tag{1.25a}$$

$t = -\dfrac{x'}{x}$ kann man mit Hilfe der Gl. (1.16a) und (1.17) auch in folgende Form bringen:

$$t = -\frac{n_1}{n_2}\frac{b^2}{g^2}, \tag{1.25b}$$

eine Gleichung, die man auch durch direktes Differenzieren der Gl. (1.16a) erhalten kann. Man erkennt am einfachsten an dieser Form von t, daß die Tiefenvergrößerung für ein gegebenes System nur von g und b abhängt und von der Gegenstandsgröße Δx gänzlich unabhängig ist. Daher gilt auch für t – wie für v – der Satz:

- Die Tiefenvergrößerung t ist in konjugierten Ebenenpaaren konstant und variiert nur von Ebenenpaar zu Ebenenpaar.

Schließlich kann man noch eine dritte, die **angulare Vergrößerung** w einführen. Den Winkel, unter dem ein vom Gegenstandspunkt G auf der Achse ausgehender Strahl diese verläßt bzw. im Bildraum vom Bildpunkt auf der Achse gegen diese geneigt weiterläuft, nennt man die *Strahlneigung*. Die Winkel u_1 und u_2 (Abb. 1.75) der beiden konjugierten Strahlen mit der optischen Achse bilden zwei konjugierte Neigungswinkel. Sie werden beide von der Achse aus gezählt, und zwar im Gegenstandsraum (u_1) positiv in dem der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzten Sinn, im Bildraum (u_2) positiv im Uhrzeigersinn. Anders ausgedrückt: u_1 ist positiv und stets kleiner als 90°, wenn der Strahl von links unten nach rechts oben geht, u_2 ist positiv und stets kleiner als 90°, wenn der Strahl von links oben nach rechts unten verläuft; in Abb. 1.75 sind beide Winkel positiv. Man nennt nun das Verhältnis der Tangenten der Strahlneigungen vor und nach der Brechung die **angulare Vergrößerung** oder das **Konvergenzverhältnis** w. Aus den beiden Dreiecken GAS′ und BAS′ in der Abb. 1.75 (S′ sei der Fußpunkt des von A auf die Achse gefällten Lotes) folgt:

$$\tan u_1 = \frac{\mathrm{AS'}}{\mathrm{GS'}} \quad \text{und} \quad \tan u_2 = \frac{\mathrm{AS'}}{\mathrm{BS'}}$$

also:

$$\frac{\tan u_2}{\tan u_1} = \frac{\mathrm{GS'}}{\mathrm{BS'}}.$$

Wegen der Kleinheit der Winkel u_1 und u_2 – in Abb. 1.75 sind sie der Deutlichkeit halber viel zu groß gezeichnet – fällt nun der Punkt S′ praktisch mit S zusammen,

und die letzte Gleichung kann daher annähernd geschrieben werden:

$$w = \frac{\tan u_2}{\tan u_1} = \frac{\mathrm{GS}}{\mathrm{BS}} = \frac{g}{b}. \tag{1.26}$$

Auch die angulare Vergrößerung w ist also konstant in konjugierten Ebenenpaaren und variiert nur von Ebenenpaar zu Ebenenpaar. Führen wir wieder für g und b die Ausdrücke $f + x$ und $f' + x'$ ein, so können wir schreiben:

$$w = \frac{f + x}{f' + x'},$$

und mit Bezug auf Gl. (1.21):

$$w = \frac{f + ff'/x'}{f' + x'} = \frac{xx'/f' + x}{f' + x'} = \frac{f}{x'} = \frac{x}{f'}. \tag{1.27}$$

Zwischen den drei Vergrößerungen v, t, w bestehen verschiedene Beziehungen. Aus den Gl. (1.24), (1.25b) und (1.26) ergibt sich, wie man sofort sieht:

$$v = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{1}{w}; \quad t = -\frac{n_1}{n_2} \frac{1}{w^2} = -\frac{n_2}{n_1} \cdot v^2;$$

insbesondere folgt aus der ersten dieser Gleichungen

$$vw = \frac{n_1}{n_2} = \frac{f}{f'},$$

wenn man noch Gl. (1.16b) berücksichtigt. Das bedeutet: *Das Produkt vw ist nicht nur für konjugierte Ebenenpaare, sondern für das ganze gegebene System konstant.*

Gl. (1.26) für die Angularvergrößerung läßt sich noch anders formulieren, indem man für g/b den Wert aus Gl. (1.24) einsetzt:

$$w = \frac{\tan u_2}{\tan u_1} = \frac{n_1 y_1}{n_2 y_2}, \tag{1.27a}$$

oder schließlich:

$$n_1 y_1 \tan u_1 = n_2 y_2 \tan u_2, \tag{1.28}$$

bzw. für die in Frage kommenden kleinen Winkel:

$$n_1 y_1 u_1 = n_2 y_2 u_2. \tag{1.28a}$$

Diese beiden Gleichungen sagen aus **(Satz von J. L. Lagrange, 1803):**

- Wird ein achsensenkrechter Gegenstand durch eine Kugelfläche abgebildet, die zwei brechende Medien voneinander trennt, so bleibt das Produkt aus seiner Größe, der Brechzahl und dem Tangens der Strahlneigung (bzw. dieser selbst) konstant.

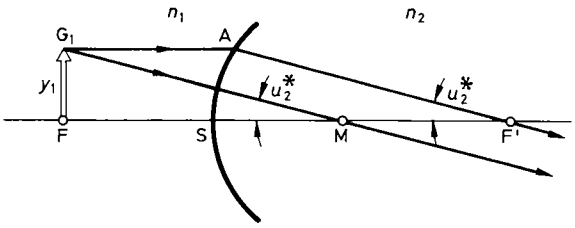


Abb. 1.78 Zur Definition der Brennweite einer brechenden Kugelfläche nach Gauß

Bezeichnet man $n \tan u$ als **optische Divergenz**, so läßt sich dieser Satz in folgender Form aussprechen: *Das Produkt aus optischer Divergenz und achsensenkrechter Gegenstandsgröße bleibt bei jeder Brechung konstant.* Die Größe $ny \tan u$ (bzw. nyu) stellt also wieder eine optische Invariante dar.

Unter Benutzung der Strahlneigung kommt man nach C. F. Gauß zu einer neuen Definition der Brennweite. Rückt nämlich (Abb. 1.78) ein Gegenstand y_1 in die Brennebene des Gegenstndsraumes, so läuft in bekannter Weise der achsenparallele Strahl nach der Brechung durch den bildseitigen Brennpunkt F′ zu dem im Umendlichen liegenden Bildpunkt und schneidet dabei die Achse unter dem Winkel u_2^*. Auch der von G_1 nach dem Mittelpunkt M der brechenden Fläche gezogene Strahl verläuft daher unter derselben Neigung u_2^* nach dem unendlich fernen Bildpunkt. Obwohl das Bild von $y_1 = FG_1$ unendlich groß wird, erscheint es doch unter dem bestimmten endlichen Winkel u_2^* von jedem Punkt der Achse aus, und man nennt daher $\tan u_2^*$ die **angulare** oder **scheinbare Größe** des Bildes von FG_1. Nach Abb. 1.78 besteht die Beziehung:

$$f' = \frac{y_1}{\tan u_1^*}, \tag{1.29}$$

in Worten:

- Die Brennweite des Bildraumes ist gleich dem Verhältnis der Größe y_1 eines in der Brennebene des Gegenstandsraumes liegenden achsensenkrechten Gegenstandes zur angularen Größe $\tan u_2^*$ seines im Unendlichen liegenden Bildes.

Analog erhält man für die Brennweite f des Gegenstandsraumes:

$$f = \frac{y_2}{\tan u_1^*}. \tag{1.29a}$$

1.8 Brechung und Abbildung durch ein zentriertes System brechender Kugelflächen

Der bisher behandelte Fall der Brechung des Lichtes durch eine einzige, brechende Kugelfläche tritt in der Praxis nur selten auf; im allgemeinen haben wir es mit brechenden Körpern zu tun, die mindestens von zwei solchen Flächen begrenzt werden oder bei denen mehrere Kugelflächen Medien mit verschiedenen Brechzahlen voneinander trennen. Wir wollen daher jetzt den Strahlenverlauf durch eine Anzahl brechender Kugelflächen verfolgen, deren Krümmungsmittelpunkte auf einer Geraden, der optischen Achse des Systems, liegen (**zentriertes optisches System**). In Abb. 1.79 ist der Längsschnitt durch ein solches System mit vier

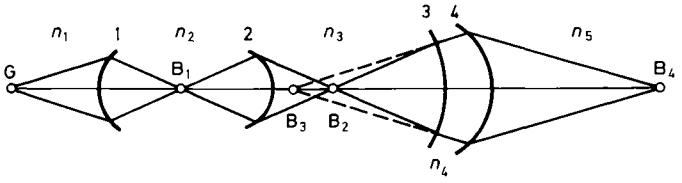


Abb. 1.79 Strahlenverlauf durch ein aus vier brechenden Kugelflächen bestehendes zentriertes optisches System

brechenden Kugelflächen gezeichnet, die 5 verschiedene Medien mit den Brechzahlen $n_1 < n_2 > n_3 < n_4 > n_5$ voneinander trennen. Wie wir wissen, werden die von einem auf der Achse liegenden leuchtenden Punkt ausgehenden paraxialen Strahlen durch die erste brechende Fläche in einem Achsenpunkt B_1 vereinigt, der in Abb. 1.79 reell ist und im Medium n_2 liegt. Dieser Bildpunkt B_1 kann als Objektpunkt für die zweite Fläche aufgefaßt werden, die von ihm ein Bild B_2 entwirft, das im Medium n_3 wieder auf der Achse liegt und im Fall der Abb. 1.79 ebenfalls reell ist. Die nächste Fläche 3 erzeugt von B_2 einen (virtuellen) Bildpunkt B_3, der den Gegenstandspunkt für die letzte Fläche 4 bildet, die von ihm einen reellen Bildpunkt B_4 auf der Achse im Medium n_5 erzeugt. Man sieht aus der Abbildung, daß auch beim Durchgang durch beliebig viele brechende Kugelflächen eines zentrierten Systems ein homozentrisches Strahlenbüschel homozentrisch bleibt. Die folgende Abb. 1.80 zeigt wieter, wie ein kleiner achsensenkrechter Gegenstand GG′ durch drei Kugelflächen in ein reelles Bild $B_3 B_3'$ abgebildet wird. Es ist klar, daß man die Lage des letzten Bildes berechnen kann, wenn man die Krümmungsradien der einzelnen Flächen, ihre gegenseitigen Abstände und die Brechzahlen der verschiedenen Medien kennt. Man hat zu diesem Zweck die Gl. (1.16a) mehrmals anzuwenden und dabei zu berücksichtigen, daß $b_1 + g_2 = d_{12}$, $b_2 + g_3 = d_{23}$ usw. ist, wobei d_{ik} die Abstände der i-ten von der k-ten Fläche bedeuten.

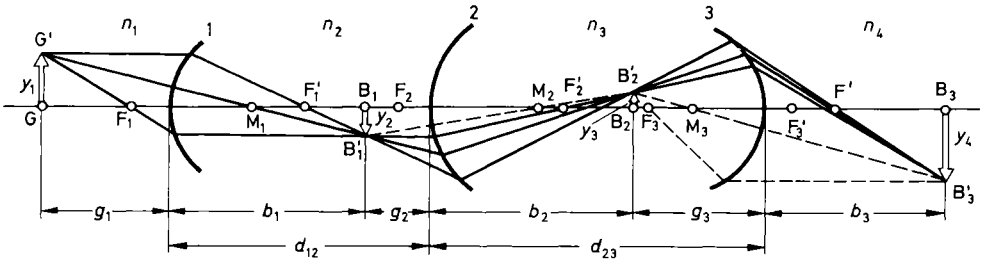


Abb. 1.80 Abbildung eines Gegenstandes durch ein aus drei brechenden Kugelflächen bestehendes zentriertes optisches System

Bezeichnet y_1 die Größe des Gegenstandes und y_m die des Bildes nach einem Strahlenverlauf durch $m-1$ brechende Flächen eines zentrierten Systems, so gilt für die Lateralvergrößerung v:

$$v = \frac{y_m}{y_1};$$

hierfür kann man unter Benutzung von Gl. (1.24) schreiben:

$$v = \frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{y_3}{y_2} \cdot \frac{y_4}{y_3} \cdots \frac{y_m}{y_{m-1}} = \left(\frac{n_1}{n_2}\frac{b_1}{g_1}\right)\left(\frac{n_2}{n_3}\frac{b_2}{g_2}\right)\cdots\left(\frac{n_{m-1}}{n_m} \cdot \frac{b_{m-1}}{g_{m-1}}\right).$$

Dies ergibt:

$$v = \frac{n_1}{n_m} \cdot \frac{b_1}{g_1} \cdot \frac{b_2}{g_2} \cdot \frac{b_3}{g_3} \cdots \frac{b_{m-1}}{g_{m-1}}; \tag{1.30}$$

hierbei sind $g_1, g_2, g_3, \ldots g_{m-1}$ bzw. $b_1, b_2, b_3, \ldots b_{m-1}$ die einzelnen (auf die verschiedenen Brechungsflächen bezogenen) Gegenstands- bzw. Bildweiten (siehe z. B. Abb. 1.80).

Analog finden wir für die Angularvergrößerung (das Konvergenzverhältnis) unter Beachtung von Gl. (1.27a):

$$w = \frac{\tan u_m}{\tan u_1} = \frac{n_1 y_1}{n_m y_m} = \frac{n_1}{n_m}\frac{1}{v}. \tag{1.31}$$

Die für eine einzige brechende Fläche von Lagrange aufgestellte Gl. (1.28) oder Gl. (1.28a) gilt nämlich auch für ein zentriertes System mehrerer brechender Flächen; wir können ja schreiben:

$$n_1 y_1 \tan u_1 = n_2 y_2 \tan u_2 = \ldots n_m y_m \tan u_m,$$

so daß auch gilt:

$$n_1 y_1 \tan u_1 = n_m y_m \tan u_m \tag{1.32}$$

bzw. (für kleine Winkel):

$$n_1 y_1 u_1 = n_m y_m u_m, \tag{1.32a}$$

wobei sich die Buchstaben mit dem Index 1 auf das Objektmedium und die mit dem Index m auf den Bildraum beziehen: das ist aber bereits die zu beweisende Gl. (1.31). Da die Gl. (1.32) bzw. (1.32a) für ein System mit mehreren Flächen von H. von Helmholtz aufgestellt wurden, werden sie als **Lagrange-Helmholtzsche Gleichungen** bezeichnet.

Es ist klar, daß genau wie eine einzelne Kugelfläche auch ein zentriertes System brechender Flächen zwei Brennpunkte besitzen muß, einen hinteren oder bildseitigen F′, in dem sich parallel aus dem Objektraum einfallende Strahlen schneiden (bzw. von dem sie nach der Brechung herzukommen scheinen), und einen objektseitigen vorderen Brennpunkt F, in dem sich diejenigen Strahlen schneiden (bzw. wenn er virtuell ist, herzukommen scheinen), die im Bildraum das System parallel zur Achse verlassen. In Abb. 1.80 schneidet z. B. der von G′ parallel zur Achse einfallende Strahl beim Austritt aus der letzten Fläche 3 die Achse im bildseitigen Brennpunkt F′. Entsprechend läßt sich der objektseitige Brennpunkt finden, indem man vom Bildraum achsenparallele Strahlen durch das System schickt, die sich dann im vorderen Brennpunkt F schneiden (in der Abb. nicht geteichnet). Eine scheinbare Ausnahme bildet das sog. **teleskopische System**, bei dem Lage und Krümmung der einzelnen Flächen derartig sind, daß ein parallel einfallendes Bündel das System auch wieder als Parallelstrahlenbündel verläßt; in diesem Fall liegen beide Brennpunkte im *Unendlichen*.

Außer diesen Brennpunkten des Gesamtsystems hat natürlich jede der brechenden Flächen je einen vorderen und hinteren Brennpunkt (F_k, F'_k für die k-te Fläche) und entsprechende Brennweiten (f_k, f'_k), die jeweils von den Scheitelpunkten an gerechnet werden, wie bisher. Abb. 1.80 zeigt auch die Einzelbrennpunkte (F_1, F'_1, F_2, F'_2, F_3, F'_3), während die entsprechenden Brennweiten nicht bezeichnet sind, um die Abbildung nicht noch mehr zu komplizieren.

Haupt- und Knotenebenen. Es ist nun wohl zu beachten, daß mit der Kenntnis der Brennpunkte F und F′ des Gesamtsystems noch nicht die zugehörigen Brennweiten f und f' bekannt sind, da nicht von vornherein feststeht, von welchen Punkten des Systems aus sie zu rechnen sind; eine zweckmäßige Festsetzung werden wir aber weiter unten treffen. Ebensowenig ermöglicht die Kenntnis der Lage der beiden Systembrennpunkte – anders wie bei der einzelnen brechenden Fläche –, Lage und Größe des von dem System entworfenen Bildes zu konstruieren; es sieht also so aus, als müsse man zu dem Zweck den Strahlenverlauf von Fläche zu Fläche verfolgen, wie es z. B. in Abb. 1.80 für 3 Flächen in der Tat geschehen ist. Es gibt aber, wie zuerst Gauß gezeigt hat, für jedes beliebige zentrierte optische System zwei ausgezeichnete Ebenen, die es ermöglichen, zu jedem Objekt Lage und Größe des Bildes zu finden, wenn außer ihnen noch die beiden Brennpunkte F und F′ gegeben sind. Man findet diese **Gaußschen Hauptebenen** in folgender Weise: Blendet man aus einem Parallelstrahlenbündel (Abb. 1.81) durch zwei

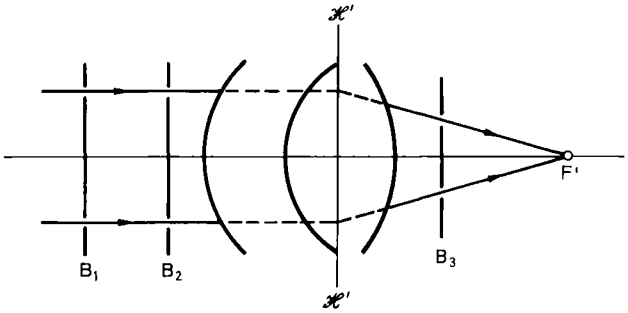


Abb. 1.81 Experimentelle Bestimmung der Hauptebenen eines optischen Systems

gleich große ringförmige Blenden B_1 und B_2 ein ringförmiges Strahlenbündel aus, das parallel zur Achse auf das zentrierte System fällt, so werden die Strahlen so gebrochen, daß sie die letzte Fläche auf einem Kegelmantel verlassen, dessen Spitze der bildseitige Brennpunkt F′ auf der Achse des Systems ist. Dieser kann reell (wie in Abb. 1.81) oder auch virtuell sein. Der wirkliche Strahlenverlauf innerhalb des Systems ist in Abb. 1.81 nicht gezeichnet und braucht nicht bekannt zu sein. Wir setzen in das austretende konvergente Büschel eine dritte ringförmige Blende B_3, die das konische Lichtbüschel gerade durchläßt. Entfernen wir nun das brechende System und bringen an Stelle des Brennpunktes F′ eine punktförmige Lichtquelle, so werden die von F′ ausgehenden und die Blende B_3 durchsetzenden Strahlen das von der anderen Seite einfallende ringförmige Strahlenbündel in einer Ebene $\mathscr{H}'\mathscr{H}'$ schneiden, deren Lage man dadurch finden kann, daß man die Blende B_2 so lange parallel zur Achse verschiebt, bis sie die von F′ kommenden Strahlen gerade durchläßt. $\mathscr{H}'\mathscr{H}'$ ist die *bildseitige Gaußsche Hauptebene*. Führt man den gleichen Versuch in der umgekehrten Richtung aus, indem man das parallele Licht von der anderen Seite auf das System brechender Flächen auffallen läßt, so erhält man den objektseitigen Brennpunkt F und eine zweite *objektseitige Hauptebene* $\mathscr{H}\mathscr{H}$, in der die vom Bildraum einfallenden parallelen Strahlen bei gedachtem geradlinigem Durchgang durch das System eine Knickung nach dem Systembrennpunkt F im Objektraum erfahren. Die Schnittpunkte H und H′ der beiden Hauptebenen mit der Systemachse heißen die **Hauptpunkte**.

Man sieht nun sofort ein, daß man bei Kenntnis der Lage der Brennpunkte und der Hauptebenen Lage und Größe des Bildes eines vorgegebenen Gegenstandes finden kann, ohne den wirklichen Strahlenverlauf durch das System zu kennen. In Abb. 1.82 befinde sich bei G ein achsensenkrechter Gegenstand GG_1. Wir ziehen von G_1 einen achsenparallelen Strahl sowie einen Strahl durch den objektseitigen Brennpunkt F. Damit erhält man auf der objektseitigen Hauptebene $\mathscr{H}\mathscr{H}$ die Schnittpunkte A und C. Diesen beiden Punkten entsprechen auf der bildseitigen Hauptebene $\mathscr{H}'\mathscr{H}'$ zwei Punkte A′ und C′ in gleichem Abstand von

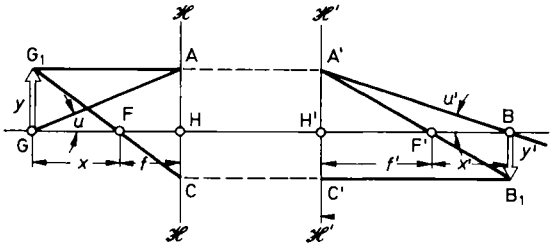


Abb. 1.82 Bildkonstruktion mit Hilfe der Hauptebenen und Brennpunkte
Man beachte: $n_1 \neq n_2$; daher ist $f \neq f'$

der Achse wie A und C. Von A′ ziehen wir einen Strahl durch den bildseitigen Brennpunkt F′ und von C′ aus einen achsenparallelen Strahl, die sich beide in dem Bildpunkt B_1 von G_1 schneiden. Nach dieser Methode kann man zu jedem Punkt des Gegenstandes GG_1 den zugehörigen Bildpunkt finden. Des weiteren folgt nun, da jedem Punkt der ersten Hauptebene $\mathscr{H}\mathscr{H}$ ein gleich weit von der Achse entfernter Punkt auf der zweiten Hauptebene $\mathscr{H}'\mathscr{H}'$ entspricht, *daß ein in der Hauptebene $\mathscr{H}\mathscr{H}$ gedachter Gegenstand in der anderen Hauptebene $\mathscr{H}'\mathscr{H}'$ in gleicher Größe und Lage abgebildet wird.* Es muß daher für die beiden Hauptebenen – nach unserer Vorzeichenfestsetzung – die Lateralvergrößerung $v = -1$ sein. Aus Abb. 1.82 liest man ab, daß die Lateralvergrößerung v allgemein gegeben ist durch die beiden Gleichungen:

$$v = \frac{B_1B}{G_1G} = \frac{HC}{G_1G} = \frac{FH}{FG} = \frac{FH}{x},$$

und ebenso:

$$v = \frac{B_1B}{G_1G} = \frac{B_1B}{H'A'} = \frac{F'B}{F'H'} = \frac{x'}{F'H'}.$$

Denn die Strecke FG ist die vom objektseitigen Brennpunkt F gerechnete Gegenstandsweite, die wir immer mit x bezeichnet haben; entsprechend ist F′B die mit x' bezeichnete Größe, d. h. die vom bildseitigen Brennpunkt F′ gerechnete Bildweite. Sollen nun die Gl. (1.24a) und (1.24b), die für eine einzige brechende Kugelfläche gelten, auch für das ganze System ihre Gültigkeit behalten, so muß man FH als objektseitige Brennweite f, F′H′ als bildseitige Brennweite f' bezeichnen. Damit gewinnt man in der Tat die Gl. (1.24a) und (1.24b) für das Gesamtsystem wieder:

$$v = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f'}. \tag{1.33}$$

Da für die Hauptebene $v = -1$ ist, muß gleichzeitig $x = -f$ und $x' = -f'$ sein, d. h. die Hauptpunkte liegen zwischen den Brennpunkten und sind von diesen um

die Brennweiten f und f' entfernt. Damit ist auch festgelegt, daß die Gegenstandsweite $g = f + x$ und die Bildweite $b = f' + x'$ von den Hauptebenen ab gerechnet werden.

Aus Gl. (1.33) ergibt sich ferner:

$$xx' = ff', \tag{1.34}$$

das ist die uns bereits bekannte Newtonsche Form der Abbildungsgleichung, sowie

$$v = \frac{y'}{y} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f'}. \tag{1.35}$$

Die Gl. (1.34) und (1.35), die sog. *Abbeschen Abbildungsgleichungen*, gelten ganz allgemein und liefern alle möglichen Abbildungsverhältnisse, die an einem System brechender Kugelflächen auftreten können.

Eine allgemein übliche Charakterisierung und Bezeichnungsweise der zentrierten Systeme sei noch eingeführt: Wenn im Sinne der Lichtbewegung der objektseitige Brennpunkt F *vor* dem objektseitigen Hauptpunkt H und entsprechend der bildseitige Hauptpunkt H′ *vor* dem bildseitigen Brennpunkt F′ liegt, d. h. wenn die Brennweiten f und f' positiv sind – dies ist nach Ausweis der Abb. 1.91 z. B. bei einer normalen Bikonvexlinse der Fall –, so nennt man das System *kollektiv*. Liegt dagegen H vor F und entsprechend F′ vor H′, wie z. B. bei einer Bikonkavlinse (Abb. 1.92), so nennt man das System *dispansiv*. Diese Bezeichnung ist eine naturgemäße, leicht verständliche Verallgemeinerung des Verhaltens der einfachen Linsen.

Schreiben wir Gl. (1.34) in der Form $f/x = x'/f'$, so liefert Addition von 1 auf beiden Seiten die Beziehung:

$$\frac{f+x}{x} = \frac{f'+x'}{f'}.$$

Aus der Abb. 1.82 finden wir, wenn wir die Neigungen der beiden einander zugeordneten Strahlen GA und A′B gegen die Hauptachse mit u und u' bezeichnen:

$$\tan u = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HG}} = \frac{\mathrm{AH}}{f+x} \quad \text{und} \quad \tan u' = \frac{\mathrm{A'H'}}{\mathrm{H'B}} = \frac{\mathrm{A'H'}}{f'+x'},$$

und da AH = A′H′ ist, erhalten wir unter Bezug auf die letzte Gleichung

$$x \tan u = f' \tan u'.$$

Nun ist aber nach Gl. (1.35)

$$x = \frac{fy}{y'},$$

so daß wir erhalten:

$$fy \tan u = f'y' \tan u' \tag{1.36}$$

oder in etwas anderer Schreibweise:

$$\frac{\tan u'}{\tan u} = \frac{f}{f'} \cdot \frac{y}{y'} = \frac{f}{f'}\,\frac{1}{c} = w = \text{Const.} \tag{1.36a}$$

Man nennt diese Relation das **Konvergenzverhältnis**. Es sagt aus, daß das Tangentenverhältnis $\tan u'/\tan u$, d. h. die Angularvergrößerung w, für alle konjugierten Punktpaare in der Gegenstands- und Bildebene konstant sein muß, wie bei einer einzigen brechenden Kugelfläche.

Ein Vergleich des Konvergenzverhältnisses in der Form der Gl. (1.36) mit der Helmholtz-Lagrangeschen Beziehung (1.32) liefert für paraxiale Strahlen die Gleichung:

$$\frac{f}{n} = \frac{f'}{n'}, \tag{1.37}$$

die wir bereits in Gl. (1.19) für eine einzige brechende Kugelfläche abgeleitet haben. Gl. (1.37) sagt jetzt aus, *daß sich die Brennweiten eines Systems wie die Brechzahlen der beiden Medien vor und hinter dem System verhalten.*

Wir können noch zwei weitere ausgezeichnete Punkte unseres Systems festlegen, wenn wir verlangen, daß für eine bestimmte Lage zweier einander zugeordneter Gegenstands- und Bildpunkte auf der Achse des Systems die angulare Vergrößerung (das Konvergenzverhältnis) $w = -1$ werden soll. Mit anderen Worten: Die Strahlneigung aller vom Objektpunkt ausgehenden Strahlen soll mit der Neigung derselben Strahlen im Bildpunkt übereinstimmen. D. h. zum Beispiel, daß ein von links oben nach rechts unten durch den Objektpunkt verlaufender Strahl auch im Bildpunkt wieder von links oben nach rechts unten unter dem gleichen Winkel die optische Achse schneiden soll, so daß $-\tan u' = \tan u$, also nach Gl. (1.36a) $w = -1$ ist. Die so ausgezeichneten Achsenpunkte werden **Knotenpunkte** genannt. Aus Gl. (1.36a) folgt unter Berücksichtigung von Gl. (1.35), daß die Bedingung $w = -1$ nur erfüllt ist, wenn gleichzeitig $x = -f'$ und $x' = -f$. Die Knotenpunkte K und K′ sind demnach von den Brennpunkten F und F′ um die Brennweiten f' bzw. f entfernt, d. h. sie liegen von den Hauptpunkten um die Differenz beider Brennweiten im gleichen Sinne entfernt (Abb. 1.83). Nur in dem besonderen, freilich meistens vorkommenden Fall, daß $f' = f$ ist, also das

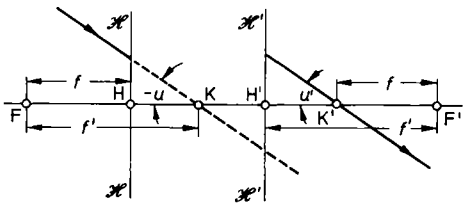


Abb. 1.83 Bestimmung der Knotenpunkte eines optischen Systems

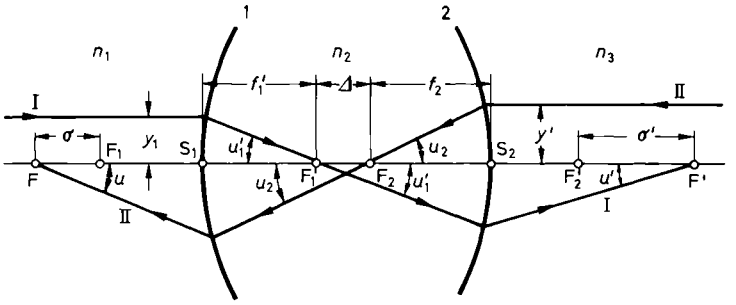


Abb. 1.84 Bestimmung der Brennweiten eines Systems zweier zentrierter brechender Kugelflächen (schematische Darstellung; die Brechungswinkel sind übertrieben groß gezeichnet)

erste und letzte Medium gleiche Brechzahlen haben, fallen die Knotenpunkte mit den Hauptpunkten zusammen.

Wir wollen nun zur Vorbereitung des folgenden Abschnitts unsere Darlegungen auf den in der Praxis am häufigsten vorkommenden Fall *zweier zentrierter brechender Kugelflächen* anwenden und bei diesen die Lage der beiden Brennpunkte und Hauptpunkte sowie die resultierenden Brennweiten aus den Einzelwerten der beiden Flächen, d. h. den beiden Radien und den drei Brechzahlen n_1, n_2, n_3 vor, zwischen und hinter den beiden Flächen, berechnen. Wir betrachten zu diesem Zweck die Abb. 1.84. Die Entfernung des vorderen Brennpunktes F_2 der Fläche 2 vom hinteren Brennpunkt F_1' der ersten Fläche, die wir als *optisches Intervall* bezeichnen, sei Δ. Wir rechnen Δ positiv, wenn F_2 rechts von F_1' liegt. Ein von links auf die Fläche 1 parallel zur Achse einfallender Strahl I wird an dieser so gebrochen, daß er durch F_1' hindurchgeht; beim Hindurchtreten durch die Fläche 2 erfährt Strahl I eine weitere Brechung zum hinteren Brennpunkt F′ des Gesamtsystems. In bezug auf die Fläche 2 sind F_1' und F′ konjugierte Punkte, F′ ist so das Bild des Punktes F_1'. Wenden wir also die Gl. (1.21) an, so gilt, wenn wir die Entfernung $F_2'F'$ mit σ' bezeichnen:

$$\sigma' \Delta = f_2 f_2'$$

und somit:

$$\sigma' = \frac{f_2 f_2'}{\Delta}. \tag{1.38}$$

Betrachten wir analog einen von rechts auf die Fläche 2 parallel zur Achse auffallender Strahl II, so geht dieser durch F_2 und nach Brechung an der Fläche 1 durch den objektseitigen Brennpunkt F des Gesamtsystems. Jetzt sind F und F_2 konjugierte Punkte in bezug auf die Fläche 1, so daß wir in analoger Bezeichnungsweise schreiben können (s. Abb. 1.84):

$$\sigma \Delta = f_1 f_1'$$

und somit:

$$\sigma = \frac{f_1 f_1'}{\Delta}. \tag{1.39}$$

Damit sind also die Lagen der Brennpunkte F und F′ des Systems relativ zur Lage des objektivseitigen Brennpunktes F_1 von Fläche 1 und des bildseitigen Brennpunktes F_2' von Fläche 2 gefunden. Um die Brennweiten f und f' des Systems zu gewinnen, wenden wir die Gaußsche Definition der Brennweite (s. am Ende von Abschn. 1.7) auf das System an.
Danach ist

$$f' = \frac{y_1}{-\tan u'},$$

wobei u' den Winkel darstellt, den der Strahl I auf der Bildseite des Systems mit der Achse bildet. Betrachten wir ferner das Konvergenzverhältnis für den Strahl I zwischen den beiden konjugierten Punkten F_1' und F′, so ist nach Gl. (1.26):

$$\frac{\tan u'}{\tan u_1'} = \frac{\Delta}{f_2'}.$$

Eliminieren wir aus diesen beiden Gleichungen $\tan u'$, so erhalten wir

$$f' = \frac{y_1}{-\tan u_1'} \cdot \frac{f_2'}{\Delta}.$$

Nun ist aber

$$\frac{y_1}{\tan u_1'} = f_1',$$

so daß sich ergibt:

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta}. \tag{1.40}$$

Analog erhält man durch die Betrachtung des Strahles II:

$$f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta}. \tag{1.41}$$

In Worten bedeutet das:

- Die vordere (hintere) Brennweite eines Systems von zwei zentrierten brechenden Kugelflächen ist gleich dem negativen Produkt der vorderen (hinteren) Brennweiten der beiden einzelnen Flächen, dividiert durch die Entfernung der beiden einander zugewandten Brennpunkte.

Das in Gl. (1.38) bis (1.41) vorkommende *optische Intervall* Δ können wir noch durch den Abstand d der brechenden Flächen ausdrücken. Nach Abb. 1.84 ist:

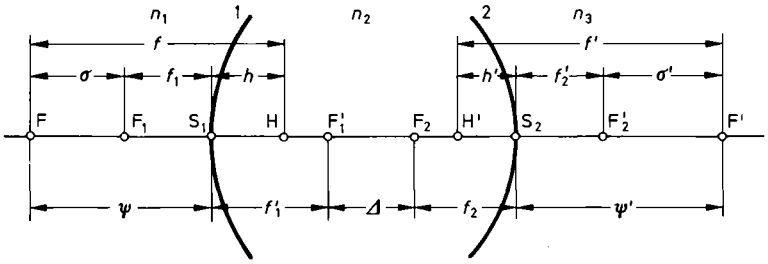


Abb. 1.85 Lage der verschiedenen Brennpunkte und Hauptpunkte bei einem System zweier brechender Kugelflächen

$$\Delta = d - f_1' - f_2 . \tag{1.42}$$

Durch die beiden Brennweiten f und f' ist nun auch die Lage der beiden Hauptpunkte H und H′ des Systems, d. h. ihre Entfernung von den beiden Brennpunkten F und F′, gegeben. Häufig interessieren auch noch die beiden Entfernungen h und h' der Hauptpunkte von den zugehörigen Scheitelpunkten S_1 und S_2 sowie die Entfernungen ψ und ψ' der Brennpunkte F und F′ von den Scheitelpunkten. Nach Abb. 1.85 ist:

$$\psi = \sigma + f_1, \quad \psi' = \sigma' + f_2' \tag{1.43}$$

sowie

$$\begin{aligned} h &= f - \psi = f - \sigma - f_1 , \\ h' &= f' - \psi' = f' - \sigma' - f_2' . \end{aligned} \tag{1.44}$$

Setzen wir nun in Gl. (1.38) bis (1.44) die Werte für f_1, f_1', f_2, f_2' aus Gl. (1.17) ein, so finden wir für den Fall, daß die beiden Kugelflächen 1 und 2 die drei Medien mit den Brechzahlen n_1, n_2, n_3 voneinander trennen, die folgenden Gleichungen:

$$\sigma' = \frac{n_2 n_3 r_2^2 (n_2 - n_1)}{(n_3 - n_2) N} , \tag{1.38a}$$

$$\sigma = \frac{n_1 n_2 r_1^2 (n_3 - n_2)}{(n_2 - n_1) N} , \tag{1.39a}$$

$$f' = -\frac{n_2 n_3 r_1 r_2}{N} , \tag{1.40a}$$

$$f = -\frac{n_1 n_2 r_1 r_2}{N} , \tag{1.41a}$$

$$\Delta = \frac{(n_2 - n_1)(n_3 = n_2) d - n_2 r_1 (n_3 - n_2) - n_2 r_2 (n_2 - n_1)}{(n_2 - n_1)(n_3 - n_2)} , \tag{1.42a}$$

$$\psi = \frac{n_1 r_1 (n_2 - n_1)\,[n_3 - n_2)\,d - n_2 r_2]}{(n_2 - n_1)\,N},$$
$$\psi' = \frac{n_3 r_2 (n_3 - n_2)\,[n_2 - n_1)\,d - n_2 r_1]}{(n_3 - n_2)\,N}, \tag{1.43a}$$

$$h = \frac{n_1 r_1 (n_3 - n_2)\,d}{N},$$
$$h' = \frac{n_3 r_2 (n_2 - n_1)\,d}{N}, \tag{1.44a}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$N = (n_2 - n_1)\,(n_3 - n_2)\,d - n_2 r_1 (n_3 - n_2) - n_2 r_2 (n_2 - n_1).$$

1.9 Abbildung durch Linsen

Unter einer (sphärischen) Linse[1] versteht man einen von zwei zentrierten Kugelflächen bzw. von einer Kugelfläche und einer Ebene begrenzten Körper aus einem lichtdurchlässigen Stoff. Je nach Anordnung der begrenzenden Flächen gibt es sechs verschiedene Formen, deren Querschnitte in Abb. 1.86 wiedergegeben sind. Die ersten drei Arten, die in der Mitte dicker als am Rande sind, heißen allgemein **Sammellinsen**; sie haben die Eigenschaft, achsenparallel auffallende Strahlen konvergent zu machen, so daß sich diese in einem (im allgemeinen) außerhalb auf der anderen Seite der Linse liegenden reellen Brennpunkt vereinigen (*kollektives System*)[2]. Man nennt daher Sammellinsen häufig auch *positive Linsen*. Man unterscheidet *bikonvexe* (Abb. 1.86a), *plankonvexe* (Abb. 1.86b) und *konkavkonvexe* (Abb. 1.86c) Sammellinsen; Linsen der letzten Art werden vielfach auch *positive Menisken* genannt. Die übrigen drei Arten, die in der Mitte dünner als am Rande sind, heißen **Zerstreuungslinsen**; durch sie werden achsenparallel auffallende Strahlen divergent gemacht, so daß sie von einem auf der Seite des einfallenden Lichtes liegenden virtuellen Brennpunkt herzukommen scheinen. Diese Linsen werden daher auch häufig als *negative Linsen* bezeichnet. Man unterscheidet *bikonkave* (Abb. 1.86d), *plankonkave* (Abb. 1.86e) und *konvexkonkave* (Abb. 1.86f) Zerstreuungslinsen; letztere heißen auch *negative Menisken*. – In Abb. 1.87 ist der typische Verlauf achsenparalleler paraxialer Strahlen durch eine Sammellinse und eine Zerstreuungslinse wiedergegeben.

[1] Außer den am häufigsten benutzten sphärischen Linsen gibt es in der Optik auch *asphärische Linsen*, bei denen an Stelle der Kugelflächen andere Rotationsflächen z.B. parabolische Flächen treten. Eine besondere Linsenart sind die *Zylinderlinsen*, die entweder von zwei achsenparallelen Zylinderflächen oder von einer Zylinderfläche und einer Kugelfläche oder Ebene begrenzt werden.

[2] Dies gilt nicht mehr, wenn die Linse sehr dick ist (sog. *Stablinse*); hier kann es vorkommen, daß eine solche Linse ein dispansives System ist. Weiter unten folgt ein Beispiel dafür.

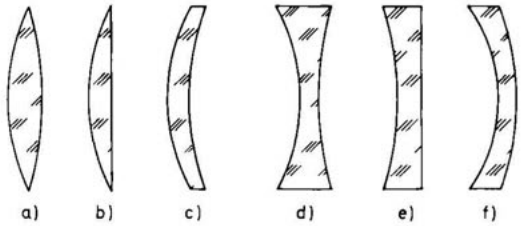


Abb. 1.86 Querschnitte verschiedener Sammel- (a, b, c) und Zerstreuungslinsen (d, e, f) a) bikonvex; b) plankonvex; c) konkavkonvex; d) bikonkav; e) plankonkav; f) konvex-konkav

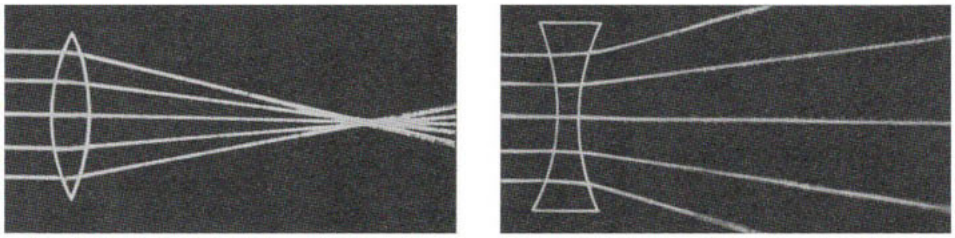


Abb. 1.87 Verlauf achsenparalleler Strahlen durch eine bikonvexe (a) und eine bikonkave (b) Linse

Diese Aufnahmen sowie die weiter unten folgenden Abb. 1.100, 1.106 und 1.112 wurden so gewonnen, daß aus einem parallelen Strahlenbündel mittels fünf schmaler Blenden fünf Lichtstrahlen ausgeblendet wurden, deren Bahn auf einem weißen Schirm sichtbar wird, über den die Strahlen entlanglaufen. Als Linse diente ein von Zylinderflächen begrenztes Glasstück vom Querschnitt der Abb. 1.86a bzw. 1.86d.

Allgemein gesprochen unterscheiden sich die Linsenarten nur durch den Abstand d der begrenzenden Flächen, durch die Größe und das Vorzeichen der beiden Kugelradien r_1 und r_2 und die Brechzahl des Linsenmaterials. Bezeichnen wir letztere mit $n_2 = n$ und nehmen wir an, was meistens der Fall ist, daß die Linsen sich in Luft mit $n_1 = n_3 = 1$ befinden, so nehmen die Gl. (1.38a) bis (1.44a) die folgende Gestalt an:

$$\sigma' = \frac{n r_2^2}{(n-1)\,[(r_2 - r_1)n + d(n-1)]}, \tag{1.38b}$$

$$\sigma = \frac{n r_1^2}{(n-1)\,[(r_2 - r_1)n + d(n-1)]}, \tag{1.39b}$$

$$f' = \frac{n r_1 r_2}{(n-1)\,[(r_2 - r_1)n + d(n-1)]} = f, \tag{1.40b}$$

$$f = \frac{n r_1 r_2}{(n-1)\,[(r_2 - r_1)n + d(n-1)]} = f', \tag{1.41b}$$

$$\Delta = \frac{n(r_2 - r_1) + d(n-1)}{n-1}, \tag{1.42b}$$

$$\psi = \frac{n r_1 r_2 + r_1 (n-1) d}{(n-1)\,[r_2 - r_1)n + d(n-1)]}, \tag{1.43b}$$

$$\psi' = \frac{n r_1 r_2 - r_2 (n-1) d}{(n-1)\,[r_2 - r_1)n + d(n-1)]},$$

$$h = \frac{-r_1 d}{(r_2 - r_1)n + d(n-1)}, \tag{1.44b}$$

$$h' = \frac{r_2 d}{(r_2 - r_1)n + d(n-1)}.$$

Aus den Gl. (1.40b) und (1.41b) ersieht man zunächst, daß die beiden Brennweiten einer Linse gleich sind, da das Medium vor und hinter der Linse dieselbe Brechzahl hat. Für das Verhältnis von h/h' ergibt sich:

$$\frac{h}{h'} = -\frac{r_1}{r_2};$$

d.h. die Abstände der Hauptpunkte von den Flächenscheiteln verhalten sich, abgesehen vom Vorzeichen, wie die Krümmungsradien der zugehörigen Flächen. *Die Hauptpunkte rücken also den Scheiteln der Linse immer näher, je stärker diese gekrümmt sind.*

Für das Produkt der beiden Scheitelweiten der Linsenbrennpunkte ergibt sich die einfache Beziehung:

$$\psi\psi' = f\left(f - \frac{d}{n}\right),$$

die man zur Kontrolle der ψ-Werte benutzen kann.

Wie bei einer einzelnen brechenden Fläche bezeichnet man auch bei einer Linse als *Brechwert D* den reziproken Wert der Brennweite f (*s. Abschn.* 1.7). *Es ist also:*

$$D = \frac{1}{f} = (n-1)\left\{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{(n-1)d}{n r_1 r_2}\right\}. \tag{1.45}$$

Als Beispiele betrachten wir die folgenden Linsentypen:

1. *Bikonvexlinse mit gleichen Krümmungsradien* (Abb. 1.88a). Hier ist $r_1 = r$, $r_2 = -r$. Dann folgt aus Gl. (1.40b oder 1.41b):

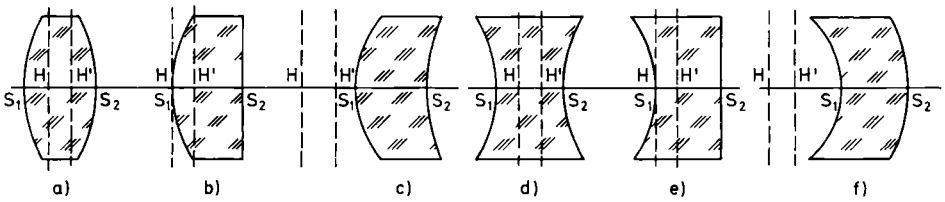


Abb. 1.88 Lage der Hauptpunkte bzw. -ebenen bei den verschiedenen Linsenarten

$$f = f' = \frac{nr^2}{(n-1)\,[2rn - d(n-1)]}\,.$$

Die Brennweiten sind also positiv, solange die Linsendicke $d < \dfrac{2rn}{n-1}$ ist, was fast immer der Fall ist (daher die Bezeichnung *positive Linse*). Für den Brechwert D folgt aus Gl. (1.45):

$$D = (n-1)\left\{\frac{2}{r} - \frac{(n-1)d}{nr^2}\right\}.$$

Aus den Gl. (1.43b) ergibt sich für die Scheitelweiten der Brennpunkte:

$$\psi = \psi' = \frac{nr^2 - r(n-1)d}{(n-1)\,[2rn - d(n-1)]}\,,$$

und aus den Gl. (1.44b) folgt für die Abstände der Hauptpunkte von den Scheitelpunkten:

$$h = h' = \frac{rd}{2rn - d(n-1)}\,.$$

Die Hauptpunkte liegen also gleich weit von den Scheitelpunkten ab, und zwar im *Linseninneren* (Abb. 1.88a), solange $d < \dfrac{r(2n-1)}{n-1}$ ist; wenn nämlich $d = \dfrac{r(2n-1)}{n-1}$ ist, wird, wie man leicht ausrechnet, $h = \dfrac{r(2n-1)}{n-1} = d$, d.h. die Hauptpunkte fallen in die Scheitelpunkte.

Für eine Glassorte mit $n = 1{,}5$ finden wir als Brennweiten der Bikonvexlinse:

$$f = f' = \frac{6r^2}{6r - d} = \frac{r}{1 - d/6r}$$

und als Brechwert

$$D = \frac{6r - d}{6r^2} = \frac{1 - d/6r}{r}\,.$$

Ist $d/6r$ klein gegen 1, so können wir hierfür setzen:

$$f = f' = r(1 + d/6r) = r + d/6$$

und

$$D = \frac{1}{r + d/6}.$$

Ferner ist

$$\psi = \psi' = \frac{6r^2 - 2rd}{6r - d} \quad \text{und} \quad h = h' = \frac{2dr}{6r - d},$$

bzw. für d klein gegen $6r$:

$$\psi = \psi' = r - \frac{1}{3}d \quad \text{und} \quad h = h' = \frac{1}{3}d.$$

Aus diesen letzten Gleichungen kann man ein sehr merkwürdiges Verhalten sehr dicker bikonvexer Linsen von kugel- bzw. stabförmiger Gestalt (Abb. 1.89) ablesen. Für eine Linse von Kugelform, d.h. $d = 2r$, rückt der Brennpunkt bis auf $\psi = \psi' = r/2$ an die Linsenfläche heran (Abb. 1.89a). Wird $d = 3r$, so wird $\psi = \psi' = 0$, d.h. die Brennpunkte liegen in den Scheitelpunkten (Abb. 1.89b). Mit weiter zunehmender Dicke rücken die Brennpunkte sogar in das Linseninnere hinein (Abb. 1.89c), um schließlich bei $d = 6r$, ebenso wie die beiden Hauptpunkte, nach beiden Seiten ins Unendliche zu wandern (Abb. 1.89d). In diesem Fall stellt die stabförmige Linse ein *teleskopisches System* dar. Vergrößert man die Linsendicke noch weiter ($d > 6r$), so rücken die Brenn- und Hauptpunkte von den entgegengesetzten Seiten wieder auf die Scheitelpunkte der Linse zu. In

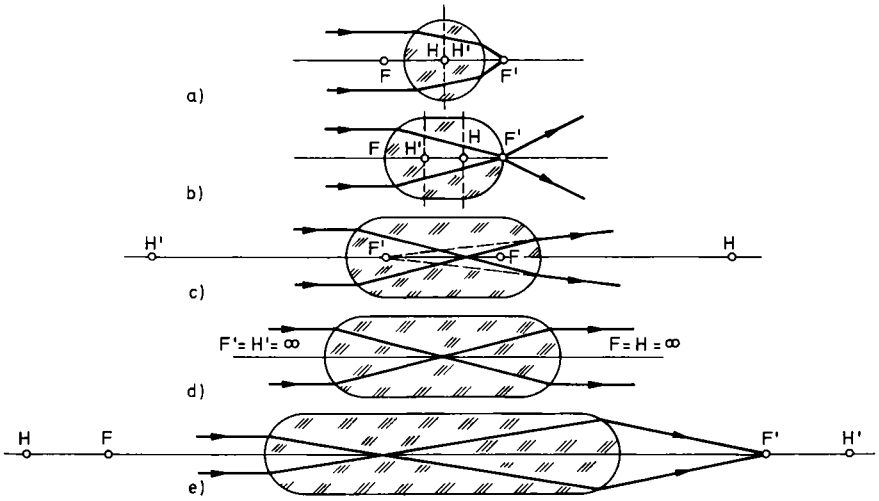


Abb. 1.89 Lage der Brenn- und Hauptpunkte bei bikonvexen Linsen von kugel- bzw. stabförmiger Gestalt

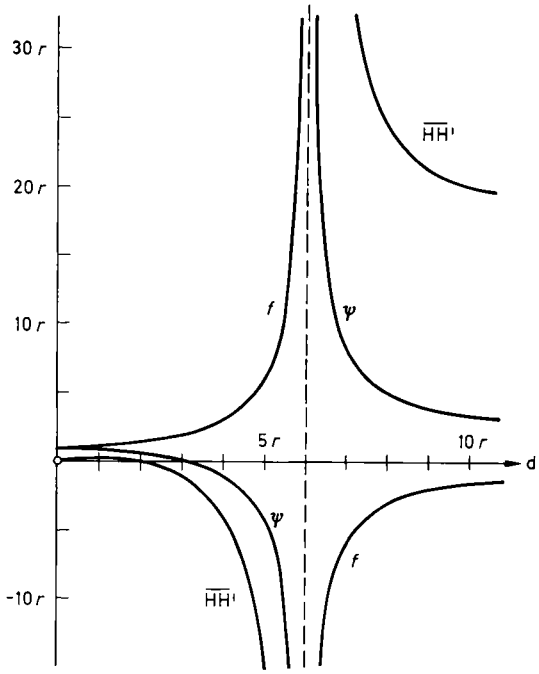


Abb. 1.90 Diagramm zur graphischen Ermittlung der Brennweite f (Abstand des Brennpunktes von dem Hauptpunkt), der Größe ψ (Abstand des Brennpunktes vom Scheitelpunkt) und des gegenseitigen Abstandes $\overline{HH'}$ der beiden Hauptpunkte bei bikonvexen Linsen von kugel- bzw. stabförmiger Gestalt

den Fällen der Abb. 1.89a bis c liegt – im Sinne der Lichtbewegung – F vor H und H′ vor F′: Die Stablinse wirkt also als *kollektives System* mit positiven Brennweiten f (und f'). Dagegen ist im Falle der Abb. 1.89e die Lage der genannten Punkte umgekehrt: die Brennweiten f (und f') sind negativ, das System ist jetzt *dispansiv*. Den Übergang bildet der teleskopische Fall der Abb. 1.89d. Ausdrücklich sei bemerkt, daß diese Bezeichnung nichts mit der Frage zu tun hat, ob die Linse reelle oder virtuelle Bilder erzeugt. Die Stablinse Abb. 1.89e kann reelle, aufrechte Bilder erzeugen, obwohl das System dispansiv genannt wird. Man vergleiche auch die graphische Darstellung in Abb. 1.90, aus der hervorgeht, daß der teleskopische Fall die Grenze zwischen positiven und negativen Brennweiten darstellt.

2. *Bikonkavlinse mit gleichen Krümmungsradien* (Abb. 1.88d). Hier ist $r_1 = -r$; $r_2 = r$. Dann folgt aus Gl. (1.40b) bzw. (1.41b):

$$f = f' = \frac{-nr^2}{(n-1)\,[2rn + d(n-1)]}\,.$$

Da der Nenner immer positiv ist, bleiben die Brennweiten stets negativ (daher die Bezeichnung *negative Linse*).

Für den Brechwert folgt aus Gl. (1.45):

$$D = -(n-1)\left\{\frac{2}{r} + \frac{d(n-1)}{nr^2}\right\}.$$

Aus Gl. (1.43b) bzw. (1.44b) ergibt sich:

$$\psi = \psi' = -\frac{nr^2 + r(n-1)d}{(n-1)\,[2rn + d(n-1)]}$$

und

$$h = h' = \frac{rd}{2rn + d(n-1)}.$$

Die Hauptpunkte liegen also stets innerhalb der Linse in gleichen Abständen von den Linsenscheiteln.

Für $n = 1{,}5$ *ergeben sich die Ausdrücke:*

$$f = f' = \frac{-6r^2}{6r + d} = \frac{-r}{1 + d/6r}$$

und

$$D = -\frac{6r + d}{6r^2} = -\frac{1 + d/6r}{r}.$$

Ist $d/6r$ klein gegen 1, so kann man dafür schreiben:

$$f = f' = -r(1 - d/6r) = -(r - d/6)$$

und

$$D = \frac{-1}{r - d/6}.$$

Ferner ist:

$$\psi = \psi' = -\frac{6r^2 + 2rd}{6r + d} \quad \text{und} \quad h = h' = \frac{2dr}{6r + d},$$

bzw. für d klein gegen $6r$:

$$\psi = \psi' = -\left(r + \frac{1}{3}d\right) \quad \text{und} \quad h = h' = \frac{1}{3}d.$$

3. Plankonvexlinse (Abb. 1.88b). Bei dieser ist entweder $r_1 = r$, $r_2 = \infty$, oder $r_2 = -r$ und $r_1 = \infty$. Im ersten Fall dividieren wir in Gl. (1.40b) oder (1.41b) Zähler und Nenner durch r_2. Dies liefert:

$$f = f' = \frac{nr}{(n-1)\left[\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)n + d\frac{(n-1}{r_2}\right]}$$

und ergibt:

$$f = f' = \frac{r}{n-1}$$

und

$$D = \frac{n-1}{r}.$$

Zu derselben Gleichung gelangt man aber auch im zweiten Fall. Die Brennweiten der Plankonvexlinse sind also stets positiv, und zwar unabhängig von der Dicke der Linse. Diese wirkt immer als Sammellinse.

In derselben Weise erhalten wir aus (Gl. 1.43b) oder (1.44b) für $r_1 = r$ und $r_2 = \infty$:

$$\psi = \frac{r}{n-1}; \quad \psi' = \frac{nr-(n-1)d}{(n-1)n}$$

und

$$h = 0; \quad h' = \frac{d}{n}.$$

Der Hauptpunkt H fällt also mit dem Scheitelpunkt S_1 der Kugelfläche 1 zusammen, während H′ ins Linseninnere fällt.

Für $r_1 = \infty$ und $r_2 = -r$ sind die Werte von ψ und ψ' bzw. von h und h' gerade vertauscht.

Für $n = 1{,}5$ erhalten wir:

$$f = f' = 2r; \quad D = \frac{1}{2r};$$

$$\psi = 2r; \quad \psi' = 2\left(r - \frac{d}{3}\right);$$

$$h = 0; \quad h' = \frac{2d}{3}.$$

4. Plankonkavlinse (Abb. 1.88e). Bei dieser ist auch eine Fläche eben, die andere aber konkav. Es ist also entweder $r_1 = -r$, $r_2 = \infty$ oder aber $r_1 = \infty$, $r_2 = r$. Dies ergibt in beiden Fällen:

$$f = f' = \frac{-r}{n-1}; \quad D = -\frac{n-1}{r}.$$

Infolge der negativen Brennweite wirkt die Linse stets zerstreuend. Für $r_1 = -r$, $r_2 = \infty$ erhalten wir ferner: