Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik

Von Dr. Josef Lense

o. ö. Professor der Technischen Hochschule München

Mit 48 Abbildungen

Dritte, verbesserte Auflage

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung
Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin W 35

1953

Archiv-Nr. 12 07 52
Satz und Druck: VEB Deutsche Wertpapier-Druckerei, Leipzig (III/18/185)
Amt für Literatur und Verlagswesen Berlin 722/128/50.

Vorwort zur ersten Auflage

Ziel dieses Buches ist, die bei den wichtigsten Reihenentwicklungen der mathematischen Physik verwendeten Funktionen eingehender in ihren wesentlichen Eigenschaften zu behandeln, soweit die betreffenden Reihen nicht Potenz- oder Fouriersche Reihen sind. Es kommen also in erster Linie Bessel-, Kugel- und Lamésche Funktionen in Betracht, daneben auch wegen ihrer Anwendungen in der Wellenmechanik Laguerresche und Hermitesche Funktionen. Alle schließen sich wegen ihrer Orthogonalitätseigenschaften unmittelbar an die Fourierschen Reihen an.

Es gibt gewiß viele ausgezeichnete Darstellungen über jede einzelne dieser Funktionsklassen, doch sind sie gewöhnlich so umfangreich, daß sich der Leser nur mit großen Schwierigkeiten über die wesentlichen Eigenschaften der betreffenden Funktion ein Bild machen kann. Diese werden daher in den ersten vier Abschnitten des vorliegenden Buches ausführlich behandelt. Dabei habe ich mich mit Rücksicht auf die physikalischen Anwendungen immer auf das reelle Gebiet beschränkt, ausgenommen die Besselschen Funktionen. Während nämlich alle erwähnten Funktionen, die in der Physik verwendet werden, im wesentlichen Polynome, also in ihrem funktionentheoretischen Verhalten leicht zu übersehen sind, ist dies bei den Besselschen Funktionen nicht der Fall. Hier sind schon die einfachsten dieser Funktionen ganze transzendente Funktionen. Sie werden daher in vollster Allgemeinheit für komplexe Veränderliche und Zeiger behandelt, wodurch man gleich einen allgemeinen Überblick über ihr funktionentheoretisches Verhalten gewinnt. Die für die Anwendung wichtigen Fälle ergeben sich dann durch Aussonderung. Die Darstellung schließt sich hauptsächlich an Watson (vgl. S. 35), im ersten Abschnitt an Courant (vgl. S. 12) an.

Warum nicht auch die Kugelfunktionen in ähnlicher Weise behandelt werden, hat darin seinen Grund, daß sie im wesentlichen hypergeometrische Funktionen sind und die Theorie dieser Funktionen nicht vorausgesetzt wird, während sich die für physikalische Anwendungen wichtigen Fälle reeller Veränderlicher und ganzzahliger positiver Zeiger leicht ohne eine derartige Theorie entwickeln lassen. Es wird daher auch nicht auf die Legendreschen Kugelfunktionen zweiter Art eingegangen. Ähnlich liegen die Verhältnisse bei den Laméschen Funktionen. Hier ist die Behandlung im Anschluß an Hobson (vgl. S. 98) und im Gegensatz zu Poincaré (vgl. S. 133) so gehalten, daß die Kenntnis der elliptischen Funktionen entbehrt werden kann, doch mußte die Darstellung bei Hobson und Poincaré in einigen Punkten vervollständigt werden, um volle Strenge zu erzielen.

Der fünfte Abschnitt bringt das Wichtigste über asymptotische Reihen im Anschluß an Knopp (vgl. S. 152), der sechste die wesentlichen Eigenschaften der Gammafunktion mit Rücksicht darauf, daß im zweiten Abschnitt verschiedene Eigenschaften dieser Funktion gebraucht werden, die in den gewöhnlichen Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung und Funktionentheorie meistens nicht behandelt werden, und die Theorie der Gammafunktion nicht vorausgesetzt werden soll. Am nächsten kommt dem Buch wohl das erwähnte Werk von Courant, doch da dieses infolge seiner ganz anderen Zielrichtung über die in den Abschnitten 4—6 behandelten Dinge fast gar nichts bringt, dürfte auch das vorliegende Buch daneben in Ehren bestehen.

An mathematischen Kenntnissen setzt es Vertrautheit mit den Grundlehren der Funktionentheorie und Differentialgleichungen voraus. Von besonderen Funktionen ist nur eine genaue Kenntnis der sogenannten elementaren Transzendenten, d. h. also im wesentlichen des Logarithmus im komplexen Gebiet erforderlich. Häufig verwendet wird die Integration im Komplexen. Um dem hierin ungeübten Leser die Sache zu erleichtern, sind immer die einzelnen Schritte möglichst ausführlich angegeben. Gelegentlich wird einmal der sogenannte Sturmsche Satz aus der Lehre von den Gleichungen verwendet. Um die Integraleigenschaften der Kugel- und Laméschen Funktionen abzuleiten und die Randwertaufgaben für Kugel und Ellipsoid zu lösen, werden die grundlegenden Sätze der Potentialtheorie benützt.

Das Buch ist in sechs Abschnitte, jeder Abschnitt in Ziffern eingeteilt. Von den Formeln sind nur jene mit Nummern bezeichnet, auf die im Text verwiesen wird. Ihre Bezifferung beginnt in jeder Ziffer von neuem. Bei Verweisen auf Formeln anderer Ziffern werden diese angegeben. So bedeutet z. B. (3) Gleichung (3) derselben Ziffer, (2, 3) Gleichung (3) der Ziffer 2 desselben Abschnittes, (I, 2, 3) Gleichung (3) der Ziffer 2 des ersten Abschnittes, (I, 2) Ziffer 2 des ersten Abschnittes. Definitionen und Lehrsätze sind durch gesperrten Druck hervorgehoben.

Die Niederschrift des Manuskriptes hat meine Frau besorgt, die Abbildungen Herr Dr. Nikol gezeichnet. Bei der Durchsicht des Manuskriptes stand mir Herr Dr. Winkler mit wertvollen Ratschlägen zur Seite. Die Korrekturen haben die Herren Prof. Dr. Sauer, Privatdozent Dr. Duschek, Dr. Baier, Dr. Lehr, Dr. Nikol und meine Frau mitgelesen. Ihnen allen sei hier mein herzlicher Dank für ihre treue Hilfe ausgesprochen.

München, im Juli 1933. J. Lense.

Vorwort zur zweiten Auflage

Infolge der immer wachsenden Bedeutung der in diesem Buche behandelten Funktionen für die mathematische Physik ist die Nachfrage nach dem Werke in den letzten Jahren größer geworden. In der hier vorliegenden zweiten Auflage nahm ich die Gelegenheit wahr, um gewisse Ergänzungen vorzunehmen, die sich im Lauf der Zeit als notwendig herausgestellt hatten.

Die beiden Abschnitte über asymptotische Reihen und Gammafunktion sind nunmehr an die Spitze gestellt, da ihr Inhalt in den übrigen Teilen gebraucht wird. Im Abschnitt über asymptotische Reihen sind die Ziffern über die Grundrechnungsarten und das Differenzieren und Integrieren bei solchen Reihen als für das Folgende nicht wichtig fortgelassen, dafür ein Satz über die Nullstellen der Bernoullischen Polynome und das Verfahren von Wirtinger für die näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale eingeschoben. Der Abschnitt über die Gammafunktion wird jetzt durch die Produktdarstellung des Sinus eingeleitet, sonst sind in ihm nur einige kleine Änderungen und Umstellungen vorgenommen. Hierauf folgt fast unverändert der Abschnitt über Orthogonalfunktionen, nur vermehrt um zwei Ziffern über Tschebyscheffsche Polynome. Völlig neu geschrieben sind die beiden folgenden Abschnitte über Besselsche und Kugelfunktionen. Im einleitenden Teil des vierten Abschnittes über die geschichtliche Entwicklung der Besselschen Funktionen wird die Verwendung dieser Funktionen bei den Schwingungen einer Kette und Membran sowie in der Wärmeleitung behandelt. Die Neumannschen Funktionen werden eingehender berücksichtigt. Neu aufgenommen sind die Sommerfeldsche Integraldarstellung und die Debyeschen asymptotischen Formeln für die Besselschen und Hankelschen Funktionen, die Integrale von Airy, Lipschitz und Weber. Der Abschnitt über Kugelfunktionen wurde ergänzt durch die Integraldarstellungen der Legendreschen Polynome von Laurent, Jacobi, Mehler und Dirichlet, durch ihre asymptotische Darstellung und den Zusammenhang der Legendreschen mit den Besselschen Funktionen. Ferner sind neu aufgenommen die Reihenentwicklungen von $e^{iz\cos\vartheta}$ und $\frac{e^{iR}}{iR}$ sowie die Legendreschen Funktionen zweiter Art. Im Abschnitt über die Laméschen Funktionen beschränken sich die Änderungen auf einige wenige Stellen.

Wie die erste, so enthält auch die zweite Auflage keine Tafeln der behandelten Funktionen. In dieser Hinsicht sei der Leser auf folgende Tafelwerke hingewiesen:

F. Emde, Tafeln elementarer Funktionen, Leipzig und Berlin 1940, B. G. Teubner;

E. Jahnke u. F. Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, 3. Aufl., Leipzig und Berlin 1938, B. G. Teubner;

K. Hayashi, Tafeln der Besselschen, Theta-, Kugel- und anderer Funktionen, Berlin 1930, J. Springer;

K. Hayashi, Fünfstellige Funktionentafeln (Kreis-, zyklometrische, Exponential-, Hyperbel-, Kugel-, Besselsche, elliptische Funktionen; Thetanullwerte, natürlicher Logarithmus, Gammafunktion u. a. m. nebst einigen häufig vorkommenden Zahlenwerten), Berlin 1930, J. Springer.

Als Formelzusammenstellung käme in Betracht:

W. Magnus u. F. Oberhettinger, Formeln und Sätze für die speziellen Formeln der mathematischen Physik, Berlin 1943, Springerverlag.

Das Buch ist wieder in sechs Abschnitte, jeder Abschnitt in Ziffern eingeteilt. Von den Formeln sind nur jene mit Nummern bezeichnet, auf die im Text verwiesen wird. Ihre Bezifferung beginnt in jeder Ziffer von neuem. Bei Verweisen auf Formeln anderer Ziffern werden diese angegeben. So bedeutet z. B. (3) Gleichung (3) derselben Ziffer, (2, 3) Gleichung (3) der Ziffer 2 desselben Abschnittes, (I, 2, 3) Gleichung (3) der Ziffer 2 des ersten Abschnittes, (I, 2) Ziffer 2 des ersten Abschnittes. Ziffernbezeichnungen ohne römische Ziffer beziehen sich auf Ziffern desselben Abschnittes. Definitionen und Lehrsätze sind durch gesperrten Druck hervorgehoben. Der Leser wird gebeten, beim Gebrauch des Buches die Berichtigungen und Zusätze auf S. 221 zu beachten. An mathematischen Kenntnissen werden die Grundlehren der Funktionentheorie und Differentialgleichungen vorausgesetzt.

Herr Dr. E. Lehr hat die Abbildungen für die Drucklegung gezeichnet und den Abschnitt über die Besselschen Funktionen im Manuskript gelesen, meine Frau die Reinschrift der neu zu schreibenden Teile des Buches besorgt und die Korrekturen mitgelesen. Ihnen beiden sei hier mein herzlicher Dank ausgesprochen. Wie ich erfahren habe, konnte das Buch in seiner ersten Auflage manchem theoretischen Physiker ein erwünschtes Hilfsmittel für seine Arbeiten sein. Möge diese freundliche Aufnahme auch der verbesserten und erweiterten zweiten Auflage beschieden sein.

München, im Juni 1947. J. Lense.

Vorwort zur dritten Auflage

Daß schon fünf Jahre nach Erscheinen der zweiten Auflage eine dritte notwendig wird, ist ein Zeichen dafür, daß durch das Buch eine Lücke in der Literatur ausgefüllt wird. Die dritte Auflage unterscheidet sich nicht wesentlich von der zweiten. Es wurde die Gelegenheit benützt, sämtliche bekannt gewordenen Druck- und Schreibfehler zu verbessern. Ferner wurden neben kleinen Textänderungen manche Beweise vereinfacht und einige Ziffern umgestellt.

Herr Dipl.-Phys. H. Hochmuth und meine Frau haben die Korrekturen mitgelesen. Ich spreche ihnen meinen herzlichen Dank aus ebenso wie dem Verlag, der bereitwillig wie bei den früheren Auflagen meine Wünsche erfüllt hat. Möge auch die dritte Auflage des Buches dieselbe freundliche Aufnahme finden wie die beiden anderen.

München, im November 1952. J. Lense.

Inhaltsverzeichnis

Seite

V. Abschnitt. **Kugelfunktionen**

a) Räumliche Kugelfunktionen

b) Zonale Kugelfunktionen

c) Zugeordnete Funktionen

Einleitung

1. Reihenentwicklung. Annäherung durch Polynome. Die Reihenentwicklung einer Funktion einer reellen Veränderlichen $f(x)$ in einem bestimmten Intervall führt zu folgender Frage: Gegeben sei eine Folge von Funktionen der Veränderlichen x

$$\varphi_1(x),\quad \varphi_2(x),\quad \varphi_3(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots$$

Man bestimme die Zahlen $c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots,\ c_n,\ \ldots$ so, daß der Ausdruck $\left|f(x) - \sum_{n=1}^{r} c_n \varphi_n(x)\right|$ für jedes x des Intervalls bei passender Wahl von r beliebig klein gemacht werden kann. Die Wahl von r wird dabei im allgemeinen von x abhängen. Man sagt in diesem Fall, die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ konvergiert gegen $f(x)$, und schreibt $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$. Die Kenntnis der Koeffizienten c_n gestattet dann, die Funktion $f(x)$ aus den bekannten Funktionen $\varphi_n(x)$ mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen. Um die Rechenarbeit so weit als möglich abzukürzen, wird man die Funktionen $\varphi_n(x)$ möglichst einfach wählen.

Als solche bieten sich vor allem die einzelnen Potenzen von $x-b$ dar, wo b im betrachteten Intervall liegt:

$$(1)\qquad 1,\ x-b,\ (x-b)^2,\ (x-b)^3,\ \ldots,\ (x-b)^n,\ \ldots,$$

also eine Darstellung von der Gestalt $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n$. Diese unter dem Namen der Potenzreihenentwicklung einer Funktion bekannte Reihenentwicklung soll uns hier nicht näher beschäftigen. Es möge nur auf einen Umstand hingewiesen werden. Funktionen, welche eine derartige Entwicklung gestatten, heißen bekanntlich in der Umgebung der Stelle b analytisch. Bei ihnen wird die Annäherung durch Polynome entsprechend hohen Grades bewerkstelligt. Sie setzen unter anderem die Existenz sämtlicher Ableitungen der Funktionen an der betreffenden Stelle voraus. Nun hat Weierstraß[1]) gezeigt, daß man bei einer viel größeren Funktionenklasse eine Annäherung durch Polynome erreichen kann, nämlich bei jeder stetigen Funktion. Der Unterschied zwischen beiden Arten von Annäherungen ist folgender: Bei den analytischen Funktionen erfolgt die Annäherung so, daß bei der Berechnung

[1]) K. Weierstraß, Sitzungsberichte Akad. Berlin, 1885, S. 633—639, S. 789—805 wie auch Werke Bd. 3, S. 1—37, Berlin 1903.

jedes neuen Koeffizienten die schon vorhandenen Koeffizienten unverändert bleiben. Hat man also einen bestimmten Grad der Annäherung durch ein Polynom n-ten Grades $a_0 + a_1(x-b) + a_2(x-b)^2 + \cdots + a_n(x-b)^n$ erreicht, so erfolgt der nächste Annäherungsschritt dadurch, daß dieses Polynom durch ein solches $(n+1)$-ten Grades ersetzt wird, das sich vom vorhergehenden nur durch Hinzufügung des Gliedes $a_{n+1}(x-b)^{n+1}$ unterscheidet, während die schon berechneten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dieselben bleiben. Im Falle der Annäherung einer nicht analytischen stetigen Funktion jedoch erfolgt die Annäherung so, daß in diesem Fall auch die schon berechneten Koeffizienten durch neue zu ersetzen sind.

2. Fouriersche Reihen. Orthogonalfunktionen. Eine zweite Art der Reihenentwicklungen einer willkürlichen Funktion, die besonders bei periodischen Funktionen am Platze ist, besteht darin, daß man für die Funktionen $\varphi_n(x)$ die Funktionen

$$(1)\qquad 1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots$$

wählt, also eine Darstellung von der Gestalt

$$(2)\qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

versucht. Man nennt die Entwicklung (2) eine Fouriersche Reihe, weil sich Fourier[1]) zum erstenmal mit derartigen Reihen beschäftigt hat. Die Grundeigenschaften dieser Entwicklung sind gegenwärtig fast in allen Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung enthalten, so daß wir uns damit begnügen können, sie für das Folgende kurz zusammenzustellen. Eine über die gewöhnliche Darstellung hinausgehende, aber dennoch nicht zu ausgedehnte Behandlung findet man in dem Büchlein von W. Rogosinski[2]).

Vor allem ist aus Gleichung (2) klar, daß sich nur periodische Funktionen mit der Periode 2π in dieser Art darstellen lassen. Will man eine im Intervall $a \leq x \leq b$ definierte nicht periodische Funktion in eine solche Reihe entwickeln, so hat man anzusetzen:

$$(3)\qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n x}{b-a} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{b-a}\right).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung hat die Periode $b-a$. Die Gleichung ist also sicher außerhalb des Intervalls ungültig, falls nicht auch die Funktionswerte von $f(x)$ dort als periodische Wiederholung der innerhalb des Intervalles gelegenen Werte definiert werden. Da man durch Einführung einer neuen Veränderlichen immer von Gleichung (3) auf Gleichung (2) zurückgehen kann, genügt es, Entwicklungen von der Gestalt (2) zu betrachten. Durch Einführung der neuen Veränderlichen wird das Intervall auf die Länge

[1]) J. B. Fourier, Théorie analytique de la chaleur, Paris 1822 (Werke Bd. 1, deutsch von R. Weinstein, Berlin 1884).

[2]) W. Rogosinski, Fouriersche Reihen, Samml. Göschen Bd. 1022, Berlin und Leipzig 1930, W. de Gruyter & Co.

2π gestreckt oder verkürzt. Um einem Mißverständnis vorzubeugen, sei noch folgendes bemerkt: Wenn $f(x)$ in einem größeren Intervall $A \leqq x \leqq B$ definiert ist, in dem das kleinere Intervall $a \leqq x \leqq b$ enthalten ist, so erhält man gemäß (3) für das größere Intervall die Darstellung

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2\pi n x}{B - A} + B_n \sin \frac{2\pi n x}{B - A} \right).$$

Dann ist durch diese Reihe die Funktion $f(x)$ natürlich auch im kleineren Intervall gegeben, d. h. die Darstellung (3) ist insofern nicht eindeutig, da in (3) Vielfache des Winkels $\frac{2\pi x}{b - a}$, in der neuen dagegen solche des Winkels $\frac{2\pi x}{B - A}$ auftreten.

Setzt man die Gültigkeit der Gleichung (2) und gleichmäßige Konvergenz der Reihe voraus, so erhält man die Koeffizienten a_k, b_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ in folgender Weise: Man multipliziert die Gleichung mit $\cos kx$ bzw. $\sin kx$ und integriert von $-\pi$ bis $+\pi$. Berücksichtigt man die Beziehungen

$$(4) \qquad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \cos nx \, dx = \begin{cases} 1 & \text{für } n = k \\ 0 & \text{für } n \neq k, \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \sin nx \, dx = \begin{cases} 1 & \text{für } n = k \\ 0 & \text{für } n \neq k, \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \sin nx \, dx = 0,$$

so erhält man die bekannten Formeln

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

Die erste gilt auch für $k = 0$, wie durch direkte Integration der Gleichung (2) von $-\pi$ bis $+\pi$ folgt.

Die in den Formeln (4) festgelegte Tatsache, auf der diese Berechnung der Koeffizienten beruht, läßt sich in Worten so ausdrücken: Multipliziert man irgend zwei verschiedene der Funktionen in der Folge (1) miteinander und integriert das Produkt von $-\pi$ bis $+\pi$, so ergibt sich immer Null. Man bezeichnet diese Eigenschaft als Orthogonalität und sagt: Irgend zwei verschiedene Funktionen der Folge (1) sind zueinander orthogonal. Es wird sich herausstellen, daß diese Eigenschaft nicht auf die Folge (1) allein beschränkt ist, sondern einer sehr allgemeinen Klasse von Funktionen zukommt, die man passend als orthogonale Funktionen bezeichnet.

Die Frage, welche Eigenschaft eine im Intervall $-\pi \leqq x \leqq +\pi$ definierte und darüber hinaus periodisch fortgesetzte Funktion haben muß, damit

Gleichung (2) möglich sei, ist seit Dirichlet[1]) in zahlreichen Abhandlungen untersucht worden. Für die physikalischen Anwendungen seien folgende hinreichenden (aber keineswegs notwendigen) Bedingungen hier ohne Beweis angegeben:

1. Die Funktion sei samt ihrer ersten Ableitung stetig bis auf eine endliche Anzahl von Unstetigkeitsstellen mit endlichen Sprüngen, so daß jedesmal an einer Sprungstelle links- und rechtsseitiger Grenzwert der Funktion beziehungsweise der Ableitung vorhanden ist. In diesem Fall konvergiert die Reihe in abgeschlossenen Stetigkeitsintervallen der Funktion gleichmäßig und stellt dort die Funktion dar. An den Sprungstellen der Funktion konvergiert die Reihe ebenfalls und stellt dort das arithmetische Mittel des links- und rechtsseitigen Grenzwertes der Funktion dar.

2. Dasselbe gilt, wenn die erste Ableitung der Funktion eine endliche Anzahl von Unendlichkeitsstellen hat, aber absolut integrierbar bleibt. Näheres siehe in dem erwähnten Buch von Rogosinski.

Wir haben bis jetzt sowohl bei der Entwicklung in eine Potenzreihe als auch in eine Fourierreihe immer eine Funktion einer reellen Veränderlichen zugrunde gelegt. In ähnlicher Weise kann man aber auch vorgehen, wenn eine Funktion von mehreren Veränderlichen vorliegt, oder wenn die Veränderliche als komplex vorausgesetzt wird. Im Fall der komplexen Veränderlichen zeigt sich bei der Potenzreihenentwicklung erst die ganze Tragweite der betreffenden Theorie, indem sich die differenzierbaren Funktionen als identisch mit jenen herausstellen, die sich in Potenzreihen entwickeln lassen, eine der Grunderkenntnisse der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

Es gibt aber noch eine andere Art der Reihenentwicklung, die wir zuerst genauer betrachten wollen, weil sie später gebraucht wird. Wir meinen die sogenannten asymptotischen Reihen, die im folgenden behandelt werden sollen.

I. Abschnitt

Asymptotische Reihen

1. Asymptotische Reihen. In dieser Ziffer bedeutet x eine positive Veränderliche. Ferner seien alle Funktionen dieses Abschnittes reelle Funktionen reeller Veränderlicher. Es ist bekanntlich

$$e^{-x} = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{x^m}{m!} + R_n(x),$$

wobei $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$ ist. Die Reihe konvergiert für jedes x und gestattet daher, e^{-x} mit jeder gewünschten Genauigkeit zu berechnen. Aber nur theo-

[1]) L. Dirichlet, J. f. M. 4 (1829), S. 157—169 oder Werke 1, S. 117—132, Berlin 1889.

retisch, wie wir uns leicht überlegen. Die Reihe gehört nämlich zu den alternierenden Reihen, der Rest $R_n(x)$ hat somit immer dasselbe Zeichen wie das erste vernachlässigte Glied und ist absolut kleiner als dieses, sobald die absoluten Beträge der vernachlässigten Glieder fortwährend gegen Null abnehmen. Das ist in unserer Reihe erst für $m > x$ der Fall. Es folgt hiernach, wenn wir $n > x$ wählen,

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \vartheta \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

wo $0 < \vartheta < 1$ ist. Es ist aber praktisch unmöglich, für große x hieraus den Wert e^{-x} zu berechnen. Ist z. B. $x = 1000$, so ist das tausendste Glied $\frac{10^{3000}}{1000!} > 10^{432}$ nach (II, 6, 10). Die theoretische Konvergenz der Reihe nützt hier für die praktische Berechnung gar nichts.

Gerade umgekehrt liegen die Verhältnisse bei der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{x^n}$. Sie divergiert, weil $\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{x^n} = +\infty$ ist. (Da nämlich die Reihe für e^{-x} konvergiert, ist $\lim_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.) Hat man aber für eine Funktion $f(x)$ die Entwicklung

$$f(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{m!}{x^m} + R_n(x) \tag{1}$$

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \vartheta \frac{(n+1)!}{x^{n+1}} \qquad (0 < \vartheta < 1),$$

so lassen sich ihre Werte für große x leicht berechnen. Will man z. B. $f(1000)$ auf 10 Dezimalstellen genau haben, so muß man n so wählen, daß der Rest

$$\vartheta \frac{(n+1)!}{1000^{n+1}} < \tfrac{1}{2}\, 10^{-10}$$

wird. Das ist schon für $n = 3$ der Fall, also ist mit der gewünschten Genauigkeit

$$f(1000) = 1 - \frac{1}{10^3} + \frac{2}{10^6} - \frac{6}{10^9} = 0{,}9990019940\,.$$

Diese Tatsache rührt davon her, daß die Glieder der Reihe zuerst sehr stark abnehmen; später aber wachsen sie schnell und über alle Grenzen (im vorliegenden Fall allerdings erst beim tausendsten Glied). Obwohl demnach diese Reihe, über alle Grenzen fortgesetzt, divergiert, ist sie doch für die praktische Berechnung gut brauchbar, weil in ihr ein Restglied auftritt. Allgemein ist man nicht in der Lage, auch theoretisch nicht, den Funktionswert mit jeder beliebigen Genauigkeit zu berechnen, weil das Restglied von der Größenordnung eines der Glieder der Reihe ist, nämlich ein Bruchteil des ersten vernachlässigten Gliedes. Die Genauigkeit kann also nicht unter diesen Bruchteil des Wertes des kleinsten Gliedes der Reihe herabgedrückt werden. Dieses kleinste Glied gibt es sicher, weil die Glieder schließlich wieder über alle Grenzen wachsen, es ist durch $n = [x]$ gegeben. Dabei bedeutet $[x]$ die größte ganze Zahl $\leqq x$.

Erscheinungen dieser Art wurden zuerst von Euler[1]) bemerkt. Solche Reihen nannte Legendre[2]) semikonvergent oder halbkonvergent, weil sie sich für zahlenmäßige Berechnungen fast wie konvergente Reihen verhalten. Jetzt pflegt man sie nach H. Poincaré[3]) asymptotisch zu nennen, und zwar auf Grund folgender Eigenschaft: Halten wir in (1) n fest und lassen x über alle Schranken wachsen, so ergibt sich für den Rest $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n R_n(x) = 0$, d. h. der Wert von $f(x)$ wird um so genauer durch die Summe in (1) dargestellt, je größer x ist. Der Unterschied zu den konvergenten Reihen läßt sich in folgender Weise ganz deutlich angeben: Es sei

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x), \quad S_n(x) = \sum_{m=1}^{n} f_m(x).$$

Ist $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$ bei festem x, dann ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ eine konvergente Reihe, ist dagegen $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n R_n(x) = 0$ für alle festen n, während über $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n(x)$ nichts vorausgesetzt wird, dann ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ eine asymptotische Reihe.

2. Bernoullische Polynome. Asymptotische Reihen treten zum erstenmal im Zusammenhang mit der Eulerschen Summenformel auf, die wir jetzt betrachten wollen. Wir folgen dabei den Darstellungen von W. Wirtinger[4]),

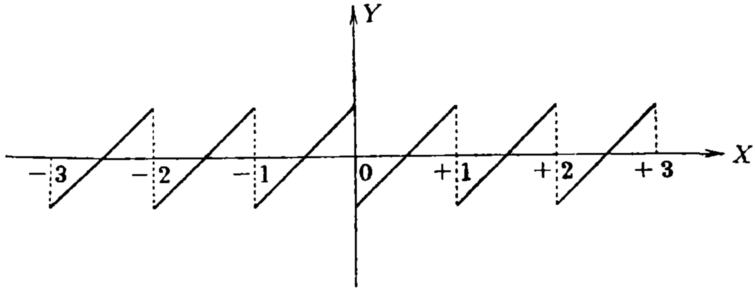

Abb. 1

K. Knopp[5]) und G. Kowalewski[6]) und untersuchen vorerst einige Funktionen, die später verwendet werden.

Die Funktion $B_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ ist durch das Schaubild der Abb. 1 gegeben. An den Sprungstellen $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ hat sie definitionsgemäß

---

[1]) L. Euler, Petrop. Comm. **11** (1739 [50]), S. 116—127 oder Werke (1) **14**, S. 350 bis 363.

[2]) A. M. Legendre, Exerc. de calc. intégr. **1**, S. 267.

[3]) H. Poincaré, Acta math. **8** (1886), S. 295—344.

[4]) W. Wirtinger, Acta math. **26** (1902), S. 255—271.

[5]) K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 4. Aufl., Kap. 14, Berlin 1947.

[6]) G. Kowalewski, Interpolation und genäherte Quadratur, Kap. 3 und 4, Leipzig und Berlin 1932.

immer den Wert $-\frac{1}{2}$, die Größe des Sprunges ist 1. Sie ist periodisch mit der Periode 1, ungerade und außer in den genannten Sprungstellen samt ihren Ableitungen stetig. Sie läßt sich daher nach den Betrachtungen der Einleitung in eine Fouriersche Reihe entwickeln, die in jedem die Sprungstellen nicht enthaltenden abgeschlossenen Intervall gleichmäßig konvergiert (weil die Funktion ungerade ist, fallen die Kosinusglieder weg), nämlich

$$B_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin 2n\pi x,$$

dabei ist

$$c_n = 2\int_0^1 B_1(x) \sin 2n\pi x\,dx = 2\int_0^1 x \sin 2n\pi x\,dx$$

$$= -\left[\frac{x\cos 2n\pi x}{n\pi}\right]_0^1 = -\frac{1}{n\pi},$$

also

$$B_1(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n\pi}.$$

Wenn wir diese Reihe fortwährend gliedweise integrieren, erhalten wir lauter durchwegs stetige Funktionen, die Sprungstellen von $B_1(x)$ sind nicht mehr vorhanden. Es ergibt sich so

$$B_2(x) = \int B_1(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{2n^2\pi^2},$$

$$B_3(x) = \int B_2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{2^2 n^3 \pi^3}$$

usw., allgemein

(1) $$B_{2k}(x) = (-1)^{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{2^{2k-1} n^{2k} \pi^{2k}},$$

$$B_{2k+1}(x) = (-1)^{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{2^{2k} n^{2k+1} \pi^{2k+1}};$$

dabei ist

(2) $$B_k(x) = \frac{dB_{k+1}(x)}{dx}$$

und die Integrationskonstante immer so bestimmt, daß

(3) $$\int_0^1 B_k(x)\,dx = 0.$$

Die absoluten Beträge der Glieder in der Reihe für $B_k(x)$ sind nach (1) $< \frac{1}{n^k}$, d. h. die Reihen konvergieren für $k \geqq 2$ absolut und gleichmäßig für alle Werte von x in jedem noch so großen Intervall, die betreffenden Funktionen sind also, wie wir schon erkannt haben, für alle x stetig. Nur die erste der Funktionen $B_1(x)$ hat die erwähnten Sprungstellen $0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ Alle diese Funktionen haben die Periode 1, die mit geradem Zeiger sind gerade, die anderen ungerade.

Wir betrachten daher die Funktionen $B_k(x)$ nur im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$. Der Einfachheit halber wollen wir hier, abweichend von der obigenDefinition, $B_1(1) = \frac{1}{2}$ setzen. Dann ist in unserem Intervall $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$. Gemäß (2) kann man die Funktionen so erhalten, daß man, von $B_0(x) = 1$ ausgehend, immer die unbestimmten Integrale bildet und die Integrationskonstante nach (3) bestimmt, den Funktionen also im Intervall (0, 1) den Mittelwert Null vorschreibt. So erhält man der Reihe nach

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1, \\ B_1(x) &= x - \tfrac{1}{2}, \\ B_2(x) &= \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{12}, \\ B_3(x) &= \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{12}x, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Wir können aber auch so vorgehen, daß wir die neue Veränderliche $u = x - \frac{1}{2}$ einführen. Das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ geht dabei in das Intervall $-\frac{1}{2} \leqq u \leqq \frac{1}{2}$ über. Ferner ist allgemein

$$B_{k+1}(x) = \Phi_{k+1}(u) + C_{k+1} \text{ mit } \Phi_{k+1}(0) = 0,$$

$$\Phi'_{k+1}(u) = B_k(x), \quad C_{k+1} = -\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \Phi_{k+1}(u)\, du,$$

daher

$$\begin{aligned} B_1(x) &= u, \\ B_2(x) &= \tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{1}{24}, \end{aligned}$$

weil $C_2 = -\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{1}{2}u^2 du = -\frac{1}{24}$ ist,

$$B_3(x) = \tfrac{1}{6}u^3 - \tfrac{1}{24}u,$$

weil $C_3 = -\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} (\frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{24}u)\, du = 0$ ist, denn der Integrand ist ungerade.

Wenn wir so fortfahren, erhalten wir folgendes Ergebnis: $B_k(x)$ ist ein Polynom k-ten Grades von u und daher auch von x, und zwar enthält es nur gerade Potenzen von u, wenn k gerade, dagegen nur ungerade Potenzen von u, wenn k ungerade ist. Man nennt die Polynome $B_k(x)$, weil sie zuerst bei Jakob Bernoulli[1]) auftreten, Bernoullische Polynome. Die Schaubilder von $B_k(x)$ für gerades k sind also spiegelbildlich zur Geraden $x = \frac{1}{2}$, für ungerades k spiegelbildlich zum Punkt $(\frac{1}{2}, 0)$.

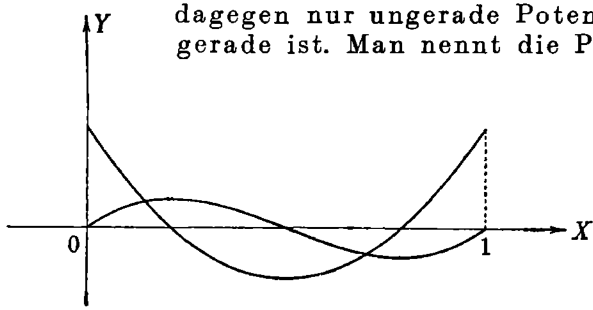

Abb. 2

[1]) Jakob Bernoulli, Ars conjectandi, Basel 1713, S. 96 oder Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 107, S. 99 (Leipzig 1899).

Abb. 2 zeigt die Schaubilder von $B_2(x)$ und $B_3(x)$. Die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von u oder x sind rationale Zahlen.

Aus den Formeln (1) folgt für $k \geqq 1$

$$B_{2k+1}(0) = B_{2k+1}(\tfrac{1}{2}) = B_{2k+1}(1) = 0,$$

$$B_{2k}(0) = B_{2k}(1) = \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}\pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}},$$

daher

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} 2^{2k-1} \pi^{2k} B_{2k}(0).$$

Wir setzen

$$B_n = n!\, B_n(0). \tag{4}$$

Die Zahlen B_n pflegt man als Bernoullische Zahlen zu bezeichnen. Sie sind rational, weil $B_n(0)$ rational ist. Es ist

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad B_{2k+1} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ konvergiert gleichmäßig bezüglich k für $k \geqq 1$, daher ist

$$\lim_{k \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \cdots\right) = 1,$$

also $\lim\limits_{k \to +\infty} B_{2k}(0) = 0$ und

$$\lim_{k \to +\infty} |B_{2k}| = \lim_{k \to +\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k-1}\pi^{2k}} = +\infty. \tag{5}$$

(Die letzte Beziehung ergibt sich aus II, 6, 10.) Für die ersten Bernoullischen Zahlen B_{2k} erhält man

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66},$$

$$B_{12} = -\frac{691}{2730}, \quad B_{14} = \frac{7}{6}, \quad B_{16} = -\frac{3617}{510},$$

$$B_{18} = \frac{43867}{798}, \quad B_{20} = -\frac{174611}{330}.$$

Nach (1) ist

$$|B_{2k}(\tfrac{1}{2})| < |B_{2k}(0)|. \tag{6}$$

Aus den erwähnten Eigenschaften der Bernoullischen Polynome ergibt sich für $n \geqq 1$, $k \geqq 0$, wenn wir teilweise integrieren,

$$\int_0^1 B_n(x) B_{n+2k}(x)\, dx = -\int_0^1 B_{n+1}(x) B_{n+2k-1}(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 B_{n+2}(x) B_{n+2k-2}(x)\, dx = (-1)^k \int_0^1 B_{n+k}(x)^2\, dx \neq 0$$

und

$$\int_0^1 B_n(x)\, B_{n+2k+1}(x)\, dx = 0.$$

Denn führen wir in diesem Integral die Veränderliche u ein, so erhalten wir ein Polynom, das nur ungerade Potenzen von u enthält und zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ zu integrieren ist. Ferner ist

$$\int_0^1 B_0(x)\, B_n(x)\, d\,x = 0, \quad \int_0^1 B_0(x)^2 d\,x = 1\,.$$

Die Bernoullischen Polynome sind also keine orthogonalen Funktionen im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$.

Weil $B_k(x)$ vom k-ten Grad in x ist, lassen sich die einzelnen Potenzen von x durch die $B_k(x)$ ausdrücken, und zwar ist

$$x^n = \sum_{m=0}^{n} a_m B_m(x)\,.$$

Ferner ergibt sich leicht die lineare Unabhängigkeit der Bernoullischen Polynome, denn eine Identität $\sum\limits_{m=0}^{n} b_m B_m(x) = 0$ bei beliebigem n würde $b_m = 0$ für $m = n,\ n-1,\ n-2, \ldots, 0$ nach sich ziehen: Weil nämlich $B_n(x)$ gerade vom n-ten Grad in x ist, müßte $b_n = 0$ sein, damit x^n wegfalle, dann aus denselben Gründen $b_{n-1} = 0$, usw.

3. Nullstellen der Bernoullischen Polynome. Die Bernoullischen Polynome mit ungeradem Zeiger haben nach Ziffer 2 die drei Nullstellen 0, $\frac{1}{2}$, 1. $B_1(x)$ bildet eine Ausnahme, denn wie aus seiner Definition hervorgeht, ist $B_1(0) = -\frac{1}{2}$, $B_1(1) = \frac{1}{2}$, die einzige Nullstelle ist $\frac{1}{2}$. Man sieht leicht ein, daß die Bernoullischen Polynome $B_3(x)$, $B_5(x)$, ..., nur die Nullstellen 0, $\frac{1}{2}$, 1 haben. Hätte nämlich $B_{2k+1}(x)$ nicht nur eine Nullstelle zwischen 0 und 1, sondern mindestens deren zwei, a und b, $(0 < a < b < 1)$, so hätte $B_{2k}(x)$ als Ableitung von $B_{2k+1}(x)$ nach einem bekannten Satz der Differentialrechnung mindestens drei Nullstellen α, β, γ, die der Ungleichung $0 < \alpha < a < \beta < b < \gamma < 1$ genügen. Die Ableitung $B_{2k-1}(x)$ hätte dann sicher eine zwischen α und β und eine zwischen β und γ liegende Nullstelle, also ebenso wie $B_{2k+1}(x)$ zwei zwischen 0 und 1 gelegene Nullstellen. So könnten wir weiter schließen und würden zu dem Widerspruch gelangen, daß schließlich auch $B_1(x)$ zwei zwischen 0 und 1 gelegene Nullstellen hat. Damit ist die Behauptung bewiesen.

$B_{2k}(x)$ hat als Ableitung von $B_{2k+1}(x)$ nach dem eben benützten Satz der Differentialrechnung mindestens eine zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ und eine zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegende Nullstelle, die wegen der in Ziffer 2 erkannten Symmetrieeigenschaft von $B_{2k}(x)$ spiegelbildlich zum Punkt $(\frac{1}{2}, 0)$ liegen. Außer diesen Nullstellen hat $B_{2k}(x)$ einschließlich der Grenzen 0 und 1 keine weiteren. Hätte nämlich $B_{2k}(x)$ drei Nullstellen, so hätte $B_{2k-1}(x)$ mindestens zwei zwischen 0 und 1 liegende Nullstellen, im Widerspruch zu dem eben bewiesenen Satz. Die Bernoullischen Polynome $B_2(x)$, $B_4(x)$, ... haben also nur zwei Nullstellen, sie liegen im Innern des Intervalls (0, 1) spiegelbildlich zu seiner Mitte. Sämtliche Nullstellen der Bernoullischen Polynome sind einfach, weil niemals gleichzeitig $B_k(x)$ und $B_{k+1}(x)$ verschwinden.

$B_{2k}(x)$ hat seine größten und kleinsten Werte an den Stellen 0, $\frac{1}{2}$, 1, den Nullstellen von $B_{2k-1}(x)$. $B_{2k}(x)$ verläuft monoton zwischen 0 und $\frac{1}{2}$, hat also nach (2, 1) für gerades k die Gestalt der Abb. 3, für ungerades k die der Abb. 4 (ausgenommen $k = 1$, siehe Abb. 2). Die entsprechende Kurve hat nach (2, 2) zwei Wendepunkte an den Nullstellen von $B_{2k-2}(x)$. $B_{2k+1}(x)$ hat seinen größten und kleinsten Wert an den Nullstellen von $B_{2k}(x)$ und wächst in der Umgebung von $x = 0$, wenn $B_{2k}(0) > 0$, nimmt dagegen ab, wenn $B_{2k}(0) < 0$ ist, hat daher für gerades k die Gestalt der Abb. 5, für ungerades die der Abb. 6. Wegen (2, 6) ist daher $|B_{2k}(x)| \leqq |B_{2k}(0)|$.

Für die Nullstellen der Bernoullischen Polynome gilt folgender Satz[1]: Die zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ gelegenen Nullstellen von $B_{2k}(x)$ nehmen mit wachsendem k fortwährend zu und haben für $k \to +\infty$ den Grenzwert $\frac{1}{4}$.

Wir beweisen den Satz in mehreren Schritten.

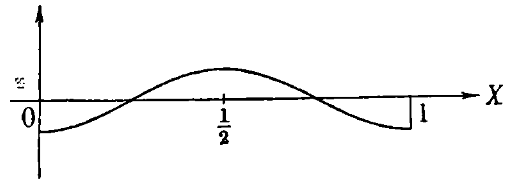

Abb. 3

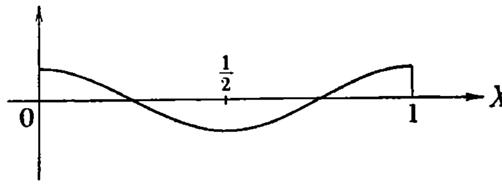

Abb. 4

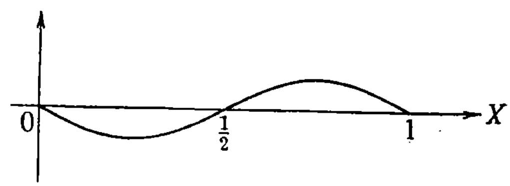

Abb 5.

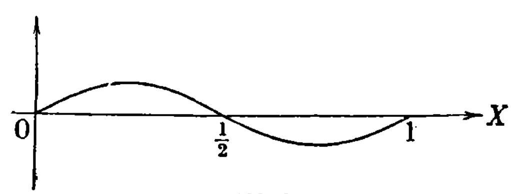

Abb. 6

1. $F(x, k) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2 n \pi x}{n^{2k}}$ konvergiert absolut und gleichmäßig für alle reellen x und alle reellen $k \geqq 1$. Denn es ist $\left|\frac{\cos 2 n \pi x}{n^{2k}}\right| \leqq \frac{1}{n^2}$ für $k \geqq 1$. Es ist also $\lim\limits_{k \to +\infty} F(x, k) = \cos 2\pi x$ und hat sonach zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ die Nullstelle $\frac{1}{4}$.

2. $\frac{\partial F}{\partial x} = -2\pi \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2 n \pi x}{n^{2k-1}}$ für $k \geqq 2$. Denn die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig für alle reellen x und alle reellen $k \geqq 2$, weil $\left|\frac{\sin 2 n\pi x}{n^{2k-1}}\right| \leqq \frac{1}{n^3}$ für $k \geqq 2$ ist. Aus ähnlichen Gründen ist

$$\frac{\partial F}{\partial k} = -2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n \cos 2 n \pi x}{n^{2k}} \text{ für } k \geqq 2.$$

[1] J. Lense, Mh. Math. Phys. **41** (1934), S. 188—190.

Ist also $F(\xi, k) = 0$, so gilt für alle reellen $k \geqq 2$

$$\frac{d\xi}{dk} = -\frac{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{2k}} \cos 2 n \pi \xi}{\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2 n \pi \xi}{n^{2k-1}}},$$

sobald der Nenner von Null verschieden ist.

3. $\frac{d\xi}{dk} > 0$ für $\xi = \frac{1}{4} - \varepsilon\,(0 \leqq \varepsilon \leqq \frac{1}{100})$ und $k \geqq 2$. Es ist nämlich

$$\frac{d\xi}{dk} = \frac{\frac{\ln 2}{2^{2k}} \cos 4\pi\varepsilon - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{2k}} \cos\left(\frac{n\pi}{2} - 2 n \pi \varepsilon\right)}{\pi \cos 2\pi\varepsilon + \pi \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2k-1}} \sin\left(\frac{\pi n}{2} - 2 n \pi \varepsilon\right)}.$$

Der Nenner ist positiv, denn es ist $\cos 2\pi\varepsilon > 0{,}997$ und die Summe ihrem absoluten Betrag nach kleiner als $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3} < 0{,}203$. Aber auch der Zähler ist positiv. Um das einzusehen, gehen wir von der Ungleichung

$$\frac{\log 2 \cdot \cos 4\pi\varepsilon}{16} > \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log n}{n^4}$$

aus, deren Richtigkeit wir nachher gleich beweisen werden. Aus ihr folgt

$$\ln 2 \cdot \cos 4\pi\varepsilon > \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{\left(\frac{n}{2}\right)^4} > \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{\left(\frac{n}{2}\right)^{2k}} \cos\left(\frac{n\pi}{2} - 2 n \pi \varepsilon\right)$$

und daraus die Behauptung.

Die verwendete Ungleichung kann man so beweisen:

$$\frac{\log 2 \cdot \cos 4\pi\varepsilon}{16} > 0{,}01886 \text{ wegen } 0 \leqq \varepsilon \leqq \tfrac{1}{100};$$

ferner ist $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log n}{n^4} < \sum_{n=3}^{12} \frac{\log n}{n^4} + \frac{\log 13}{13} \sum_{n=13}^{\infty} \frac{1}{n^3} < 0{,}01119$, weil $\frac{\log n}{n}$ abnimmt, wenn n wächst und $\geqq 3$ ist.

4. $F(\frac{1}{4}, k) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)^{2k}} < 0$ für alle reellen $k \geqq 1$.

5. $B_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}$ hat zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ die Nullstelle $\xi_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0{,}2113\ldots$, $B_4(x) = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} - \frac{1}{720}$ im selben Intervall die Nullstelle $\xi_4 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{30}}} = 0{,}2403\ldots$ (man erhält sie durch die Substitution $x = u + \frac{1}{2}$); dabei ist $\xi_2 < \xi_4$ und $0 < \frac{1}{4} - \xi_4 < \frac{1}{100}$.