Einführung in die Analytische Geometrie

Von

Dr. Gerhard Kowalewski
o. Professor an der Sächsischen Technischen Hochschule
in Dresden

Dritte, unveränderte Auflage

Mit 112 Figuren

Walter de Gruyter & Co.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg
Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.
Berlin W 10 und Leipzig
1929

Manuldruck von F. Ullmann G. m. b. H., Zwickau Sa.

Dem Andenken
des Herrn Geheimen Regierungsrats

Prof. Dr. Thomé

seines hochverehrten Lehrers
widmet dieses Buch
der Verfasser

Vorwort

Dieses Buch ist aus meinen Universitätsvorlesungen in Leipzig, Greifswald und Bonn entstanden. Die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes wird gewöhnlich in einem vierstündigen Semesterkolleg erledigt. Will man nicht ganz in den Elementen stecken bleiben, so muß man an manchen Stellen etwas schneller vorgehen. Da die Zuhörer von der Schule her schon eine ganze Menge analytisch-geometrischer Kenntnisse mitbringen, hat dies keine Gefahr.

Eine große Schwierigkeit in der analytischen Geometrie ist die exakte Behandlung des Imaginären. Bei einer ersten Einführung ist es aber vielleicht zu verzeihen, wenn man in dieser Beziehung etwas zu wünschen übrig läßt Die Hörer können sich diese Dinge in einem besonderen Kolleg über „Geometrie im komplexen Gebiet" aneignen, wie es Herr E. Study, der größte Meister der genannten Disziplin, in Bonn zu halten pflegte. Freilich wird eine solche Vorlesung anderswo selten geboten.

Prag, den 15. Oktober 1910.

Gerhard Kowalewski

Inhalt

Erstes Kapitel.

Vorbereitende Betrachtungen über Strecken und Winkel.

§ 1. Strecken im Raume.

Eine Strecke ist ein endliches Geradenstück, bei dem man Anfangspunkt und Endpunkt unterscheidet.

Der Anfangspunkt sei A, der Endpunkt B. Dann sprechen wir von der Strecke AB. Der erste Punkt gibt also den Anfangspunkt an, der zweite den Endpunkt. Auch einzelne (und zwar große deutsche) Buchstaben werden wir zur Bezeichnung von Strecken benutzen. In den Figuren markieren wir (wenn dies nötig ist) den Endpunkt durch eine Pfeilspitze (vgl. Fig. 1).

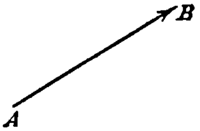

Fig. 1.

Die Gerade A, B heißt der Träger der Strecke AB, die Entfernung der Punkte A und B (gemessen mit der zugrunde gelegten Längeneinheit) die Länge der Strecke AB.

Eine Strecke von der Länge 1 wird als Einheitsstrecke, eine Strecke von der Länge 0 als Nullstrecke bezeichnet. Als Symbol für eine Nullstrecke benutzt man die 0.

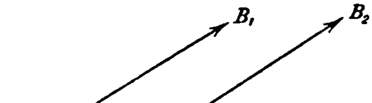

Fig. 2.

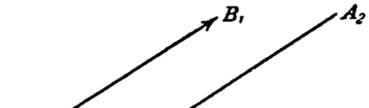

Fig. 3.

Strecken mit parallelen Trägern heißen parallel. Sie können gleichsinnig sein (vgl. Fig. 2) oder gegensinnig (vgl. Fig. 3).

Zwei Strecken $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ werden als gleich (oder äquivalent) betrachtet, wenn die eine aus der andern durch eine Parallelverschiebung (Translation) entsteht. Man schreibt in solchem Falle

$$A_1 B_1 = A_2 B_2 .$$

Gleiche Strecken sind zunächst parallel. Ferner haben sie gleiche Länge. Endlich sind sie gleichsinnig. In Fig. 3 sind $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ zwar parallel und gleich lang, aber nicht gleichsinnig.

Der Leser muß sich daran gewöhnen, daß bei der obigen Definition der Gleichheit eine Strecke allen Parallelverschiebungen unterworfen werden darf. Man kann dadurch ihren Anfangspunkt an eine beliebige Stelle des Raumes bringen und hat immer noch die gleiche Strecke.

§ 2. Addition von Strecken.

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien zwei Strecken. Nehmen wir irgend einen Punkt P, so läßt sich ein zweiter Punkt Q derart wählen, daß

$$PQ = \mathfrak{A}$$

ist. Ferner läßt sich ein dritter Punkt R derart wählen, daß

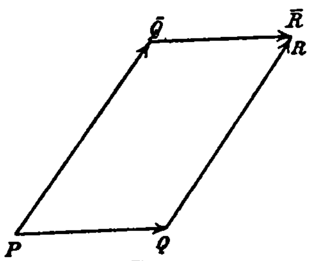

Fig. 4.

$$QR = \mathfrak{B}$$

ist.

Die Strecke PR definieren wir als die Summe der Strecken $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Diese Summe wird mit $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ bezeichnet. Es ist also

$$PR = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}.$$

Fängt man die Konstruktion mit irgend einem anderen Punkte P' an. d. h. bestimmt man Q' und R' in der Weise, daß

$$P'Q' = \mathfrak{A}, \quad Q'R' = \mathfrak{B}$$

ist, so wird offenbar

$$P'R' = PR.$$

Es kommt also immer die gleiche Strecke heraus, wie man auch den Ausgangspunkt P wählen mag.

Um die Strecke $\mathfrak{B} + \mathfrak{A}$ zu erhalten, muß man nach der obigen Regel zuerst $\bar{Q}$ so wählen, daß $P\bar{Q} = \mathfrak{B}$ wird, und dann $\bar{R}$ so, daß $\bar{Q}\bar{R} = \mathfrak{A}$ wird. Man sieht aus Fig. 4, daß die Punkte R und $\bar{R}$ zusammenfallen, daß also

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A} \tag{1}$$

ist.

Nehmen wir noch eine dritte Strecke $\mathfrak{C}$ hinzu und wählen den Punkt S derart, daß

$$RS = \mathfrak{C}$$

ist, so wird

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C} = PR + RS = PS$$

und

$$\mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = PQ + QS = PS,$$

also

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C} = \mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}). \tag{2}$$

Für die Streckenaddition gilt also nicht nur das kommutative Gesetz (1), sondern auch das assoziative Gesetz (2), gerade so wie bei der Addition von Zahlen.

Statt $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C}$ schreibt man einfach $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$.

Was unter $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots + \mathfrak{A}_n$, der Summe der n Strecken $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ zu verstehen ist, bedarf jetzt keiner weiteren Erklärung. Um diese Summe zu konstruieren, geht man von einem beliebigen Punkte P_0 aus und wählt die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ der Reihe nach so, daß

$$P_0P_1 = \mathfrak{A}_1, \quad P_1P_2 = \mathfrak{A}_2, \ldots, P_{n-1}P_n = \mathfrak{A}_n$$

ist. Dann hat man

$$\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots + \mathfrak{A}_n = P_0P_n.$$

Wenn $\mathfrak{A} + \mathfrak{A}' = 0$ ist (also $\mathfrak{A} + \mathfrak{A}'$ eine Nullstrecke), so heißen die Strecken $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ entgegengesetzt. Ist $PQ = \mathfrak{A}$, $QR = \mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A} + \mathfrak{A}' = PR = 0$, so bedeutet dies, daß die Punkte P und R zusammenfallen. $\mathfrak{A}'$ ist also gleich QP. Für $\mathfrak{A}'$ pflegt man zu schreiben $-\mathfrak{A}$. Die Strecken $\mathfrak{A}$ und $-\mathfrak{A}$ sind gleich lang und parallel, aber gegensinnig (vgl. Fig. 3).

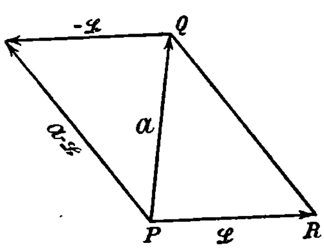

Fig. 5.

$\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ wird definiert als die Summe der beiden Strecken $\mathfrak{A}$ und $-\mathfrak{B}$,

$$\mathfrak{A} - \mathfrak{B} = \mathfrak{A} + (-\mathfrak{B}).$$

Ist (vgl. Fig. 5)

$$PQ = \mathfrak{A}, \quad PR = \mathfrak{B},$$

so wird

$$RQ = \mathfrak{A} - \mathfrak{B}.$$

Dies läßt sich aus der Figur entnehmen oder aus der Gleichung

$$RQ = RP + PQ = PQ + (-PR).$$

$\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ ist also hier gleich der Strecke, die von dem Endpunkt von $\mathfrak{B}$ nach dem Endpunkt von $\mathfrak{A}$ führt.

§ 3. Parallelstrecken zu einer orientierten Geraden.

Auf einer Geraden g kann man in zwei verschiedenen Richtungen fortschreiten. Hat man die eine als die positive (die andere als die negative) festgesetzt, so ist g, wie man zu sagen pflegt, orientiert. Die positive Richtung markieren wir durch einen beigesetzten Pfeil.

Alle Strecken, die auf der orientierten Geraden g liegen, zerfallen in zwei Klassen. Durchläuft man eine solche Strecke von ihrem Anfangspunkt bis zu ihrem Endpunkt, so schreitet man entweder in der positiven oder in der negativen Richtung von g fort. Im ersten Falle sprechen wir von einer positiven, im zweiten Falle von einer negativen Strecke.

In Fig. 6 ist $P_1 Q_1$ eine negative, $P_2 Q_2$ eine positive Strecke.

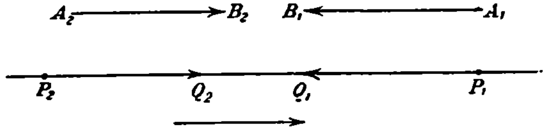

Fig. 6.

Da man jede Strecke, die zu g parallel ist, durch Translation auf g bringen kann, so bezieht sich diese Klassifikation auf alle Parallelstrecken zu g. In Fig. 6 ist z. B. $A_1 B_1$ eine negative und $A_2 B_2$ eine positive Strecke.

Wenn die Strecke AB zu g parallel ist und die Länge l hat, so wollen wir ihr die Maßzahl l oder $-l$ beilegen, je nachdem es eine positive oder negative Strecke ist. Wir bezeichnen die Maßzahl von AB mit $\overline{AB}$. Offenbar sind die Maßzahlen von AB und BA entgegengesetzt gleich. Es ist also

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0.$$

Eine Nullstrecke hat die Maßzahl 0.

AB ist durch seine Maßzahl vollkommen bestimmt. Wenn $A'B'$, eine andere Parallelstrecke zu g, dieselbe Maßzahl hat wie AB, so ist $AB = A'B'$. In der Tat sind beide Strecken gleich lang, parallel und gleichsinnig.

Ist m eine beliebige reelle Zahl, so gibt es immer Parallelstrecken zu g mit der Maßzahl m. Um eine solche Strecke zu erhalten, nehme man auf g einen Punkt P und trage von ihm aus, je nachdem $m > 0$ oder $m < 0$ ist, in der positiven oder negativen Richtung ein Stück von der Länge $|m|$ ab.[1]

P, Q, R seien drei beliebige Punkte auf g. Dann ist

$$\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RP} = 0.$$

Zunächst bemerken wir, daß $\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RP}$ bei einer beliebigen Vertauschung der Punkte P, Q, R höchstens sein Zeichen ändert. Vertauschen wir z. B. P mit Q, so ergibt sich $\overline{QP} + \overline{PR} + \overline{RQ} = -(\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RP})$. PQ und QP haben nämlich entgegengesetzt gleiche Maßzahlen, ebenso QR und RQ sowie RP und PR.

Gelingt es uns für irgend eine Permutation P', Q', R' von P, Q, R zu beweisen, daß $\overline{P'Q'} + \overline{Q'R'} + \overline{R'P'} = 0$ ist, so folgt daraus $\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RP} = 0$. Nun läßt sich aber die Permutation P', Q', R' derart wählen, daß $P'Q'$, $P'R'$ und $Q'R'$ positive Strecken sind, daß man also von P' aus der positiven Richtung auf g folgend zuerst nach Q' und dann nach R' gelangt. $\overline{P'Q'}$, $\overline{P'R'}$ und $\overline{Q'R'}$ sind jetzt einfach die Längen von $P'Q'$, $P'R'$, $Q'R'$. Die Strecke $P'R'$ ist offenbar so lang wie $P'Q'$ und $Q'R'$ zusammen, d. h. man hat

$$\overline{P'R'} = \overline{P'Q'} + \overline{Q'R'} \quad \text{oder} \quad \overline{P'Q'} + \overline{Q'R'} + \overline{R'P'} = 0.$$

Setzen wir $PQ = \mathfrak{A}$, $QR = \mathfrak{B}$, so wird $PR = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ und die Formel $\overline{PR} = \overline{PQ} + \overline{QR}$ besagt, daß die Maßzahl von $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ gleich der Summe der Maßzahlen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist.

§ 4. Charakterisierung der Strecken durch Zahlentripel.

Durch einen Punkt O des Raumes denke man sich drei Geraden g_1, g_2, g_3 gezogen, die aber nicht in einer Ebene liegen dürfen.

$\mathfrak{A}$ sei eine beliebige Strecke. Wir bringen sie durch Translation mit ihrem Anfangspunkt nach O. Ihr Endpunkt falle dabei nach P. Es sei also $OP = \mathfrak{A}$.

Jetzt konstruieren wir das in Fig. 7 angedeutete Parallelepipedon, indem wir durch P Parallelebenen zu den drei Ebenen g_2, g_3 und g_3, g_1 und g_1, g_2 legen. Dann ist

$$OP = OP_1 + P_1 Q_3 + Q_3 P$$

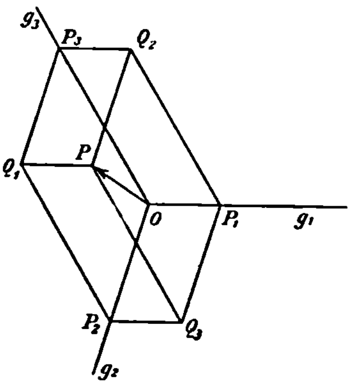

Fig. 7.

[1] $|m|$ ist der absolute Betrag von m, also m oder $-m$, je nachdem $m \geqq 0$ oder $m \leqq 0$.

oder, da $P_1 Q_3 = O P_2$, $Q_3 P = O P_3$,

$$O P = O P_1 + O P_2 + O P_3.$$

OP ist auf diese Weise als Summe von drei Strecken dargestellt, die zu g_1 bzw. g_2 bzw. g_3 parallel sind. Diese drei Strecken nennt man die **Komponenten** von $\mathfrak{A}$ in bezug auf g_1, g_2, g_3. Durch ihre Komponenten $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ ist offenbar die Strecke $\mathfrak{A}$ vollkommen bestimmt.

Wir wollen uns $\mathfrak{A}$ wieder in einer beliebigen Lage AB vorstellen, nicht gerade mit dem Anfangspunkt in O. Legen wir durch A und B Parallelebenen zu der Ebene g_2, g_3, so entstehen auf g_1 die Schnittpunkte A_1 bzw. B_1. Die Strecke $A_1 B_1$ nennt man die **Projektion** von AB auf g_1, parallel zur Ebene g_2, g_3. Unterwerfen wir AB und die beiden durch A und B gelegten Ebenen einer beliebigen Translation, so bleibt die Projektion $A_1 B_1$ die gleiche. Da wir nun insbesondere AB in OP überführen können, ist $A_1 B_1 = O P_1 = \mathfrak{A}_1$. Ebenso ist $\mathfrak{A}_2$ gleich der Projektion von $\mathfrak{A}$ auf g_2, parallel zu g_3, g_1 und $\mathfrak{A}_3$ gleich der Projektion von $\mathfrak{A}$ auf g_3, parallel zu g_1, g_2.

Ziehen wir durch A und B Parallelen zu g_1, so entstehen in der Ebene g_2, g_3 die Schnittpunkte A_1 bzw. B_1'. Die Strecke $A_1' B_1'$ heißt die **Projektion** von $\mathfrak{A}$ auf die Ebene g_2, g_3 parallel zu g_1. Bei einer Translation der Strecke AB und der durch A und B gezogenen Geraden bleibt die Projektion $A_1' B_1'$ die gleiche. Da wir AB nach OP bringen können, so folgt $A_1' B_1' = O Q_1$. Nun ist aber $O Q_1 = O P_3 + P_3 Q_1 = \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3$, also $A_1' B_1' = \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3$. Ebenso wird die Projektion von $\mathfrak{A}$ auf die Ebene g_3, g_1 (parallel zu g_2) gleich $\mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}_1$ und die Projektion auf die Ebene g_1, g_2 (parallel zu g_3) gleich $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$.

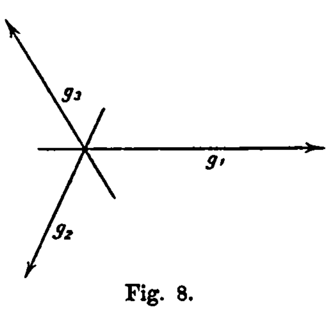

Fig. 8.

Jetzt wollen wir die drei Geraden g_1, g_2, g_3 orientieren (vgl. Fig. 8).

Dann hat $\mathfrak{A}_1$ in bezug auf g_1 eine Maßzahl x_1, ebenso $\mathfrak{A}_2$ in bezug auf g_2 eine Maßzahl x_2 und $\mathfrak{A}_3$ in bezug auf g_3 eine Maßzahl x_3. Durch diese drei Maßzahlen x_1, x_2, x_3 sind $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ bestimmt, folglich auch $\mathfrak{A}$. x_1, x_2, x_3 nennen wir die **Koordinaten** von $\mathfrak{A}$ in bezug auf die drei orientierten Geraden g_1, g_2, g_3. Die Koordinaten einer Nullstrecke sind alle gleich 0.

Wenn x_1, x_2, x_3 die Koordinaten von $\mathfrak{A}$ und y_1, y_2, y_3 die Koordinaten von $\mathfrak{B}$ sind, wie lauten dann die Koordinaten von $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$?

Es sei

$$AB = \mathfrak{A}, \quad BC = \mathfrak{B}.$$

Bedeuten A_1, B_1, C_1 die Projektionen von A, B, C auf g_1 (parallel zur Ebene g_2, g_3), so hat man

$$A_1 B_1 = \mathfrak{A}_1, \quad B_1 C_1 = \mathfrak{B}_1,$$

mithin

$$A_1 C_1 = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1.$$

$A_1 C_1$ ist aber die Projektion von $AC = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$. Wir sehen also, daß die Projektion der Summe zweier Strecken gleich der Summe ihrer Projektion ist. Aus § 3 wissen wir, daß

$$\overline{A_1 C_1} = \overline{A_1 B_1} + \overline{B_1 C_1} = x_1 + y_1$$

ist. Die Projektionen von $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ auf g_2 (parallel zur Ebene g_3, g_1) und auf g_3 (parallel zur Ebene g_1, g_2) haben aus demselben Grunde die Maßzahlen $x_2 + y_2$ bzw. $x_3 + y_3$.

Die Koordinaten von $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ lauten also

$$x_1 + y_1, \quad x_2 + y_2, \quad x_3 + y_3.$$

Die Koordinaten einer Streckensumme sind gleich den Koordinatensummen der einzelnen Strecken. Jedesmal werden die gleichnamigen Koordinaten summiert.

Wenn $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = 0$ ist, so wird $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = x_3 + y_3 = 0$. Die Strecke $-\mathfrak{A}$ hat also die Koordinaten $-x_1, -x_2, -x_3$.

Die Strecke $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ hat die Koordinaten $x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3$.

§ 5. Definition des Winkels zwischen zwei Geraden.

g und h seien zwei orientierte Geraden, die durch den Punkt O hindurchgehen. Es empfiehlt sich, nur die positiven Hälften von g und h zu zeichnen, d. h. die Halbgeraden, die der Punkt O beschreibt, wenn er auf g oder h in der positiven Richtung fortschreitet. Diese Halbgeraden schneiden wir noch bis zur Länge 1 ab, so daß die beiden Einheitsstrecken OG und OH übrig bleiben.

Wir wollen OG in der Ebene OGH um den Punkt O drehen, wie man einen Uhrzeiger dreht. Das geht nach zwei verschiedenen Richtungen. Die eine setzen wir als die positive fest und markieren sie durch einen Pfeil. Der Weg, den der Endpunkt G zurücklegt, sei α. Dann sagen wir, daß es sich um die Drehung α oder $-\alpha$

handelt, je nachdem in positiver oder negativer Richtung gedreht wird. So hat jede Drehung ihre Maßzahl. Die Drehung 2π ist eine vollständige Umdrehung,[1] die in positiver Richtung vor sich geht. Der Zeiger wird also dabei in der positiven Richtung einmal ganz herumgedreht. $\pi/2$ ist eine Drehung in positiver Richtung um einen rechten Winkel, $-\pi/2$ eine Drehung in negativer Richtung, aber ebenfalls um einen rechten Winkel.

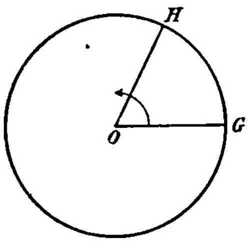

Fig. 9.

Jetzt können wir erklären, was unter dem Winkel GOH oder (gh) zu verstehen ist. Das ist eine Drehung, die g in h überführt, oder vielmehr die Maßzahl einer solchen Drehung. Man sieht sofort, daß es unendlich viele Drehungen gibt, die g nach h bringen, daß also der Winkel (gh) etwas unendlich Vieldeutiges ist. Wenn wir g im positiven Sinne drehen, so wird es nach einer gewissen Drehung φ eine erste Koinzidenz mit h geben. Drehen wir g weiter im positiven Sinne, so müssen wir einmal ganz herumdrehen, um wieder eine Koinzidenz mit h herbeizuführen. Die positiven Drehungen, die g nach h bringen, sind also folgende

$$\varphi, \quad \varphi + 2\pi, \quad \varphi + 6\pi, \quad \ldots$$

Jetzt wollen wir g durch eine negative Drehung in h überführen. Bis zur ersten Koinzidenz beschreibt G den Weg $2\pi - \varphi$. Wenn wir nämlich in derselben Richtung weiter drehen, so daß G noch den Weg φ zurücklegt, sind wir gerade einmal herumgekommen, d. h. G hat den Weg 2π beschrieben. Man sieht, daß die negativen Drehungen, die g in h überführen, folgende sind

$$\varphi - 2\pi, \quad \varphi - 4\pi, \quad \varphi - 6\pi, \quad \ldots$$

Der Winkel (gh) hat also die Werte

$$\varphi + 2\nu\pi \quad (\nu = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots)$$

Je zwei dieser Werte differieren um ein Vielfaches von 2π.

Man spricht auch dann von dem Winkel (gh), wenn die Geraden g und h nicht durch einen Punkt O hindurchgehen. Man nimmt auf jeder von ihnen eine Strecke mit der Maßzahl 1, auf g etwa $G_1 G_2$, auf h etwa $H_1 H_2$ und macht $OG = G_1 G_2$, $OH = H_1 H_2$,

---

[1] Man bedenke, daß 2π der Umfang des Einheitskreises ist (d. h. des Kreises vom Radius 1).

d. h. man bringt durch Translation die Anfangspunkte der Strecken zusammen. Der Winkel GOH wird als der Winkel $(g\,h)$ definiert.

g, h, l seien drei Geraden durch O, die in einer Ebene liegen. Wir denken sie uns orientiert. Durch die positive Drehung α gelange g nach h, durch die positive Drehung β aber h nach l und durch die positive Drehung γ schließlich l nach g. Unterwerfen wir g der positiven Drehung $\alpha+\beta+\gamma$, so gelangen wir wieder zu g. Daher ist $\alpha+\beta+\gamma$ ein Vielfaches von 2π. Dasselbe gilt von $(g\,h)+(h\,l)+(l\,g)$ und es ist ganz gleich, welche Werte der einzelnen Winkel wir nehmen, weil je zwei Werte eines Winkels immer um ein Vielfaches von 2π differieren. Es gilt also für drei orientierte Geraden, die zu einer Ebene parallel sind,[1] stets die Relation

$$(g\,h)+(h\,l)+(l\,g)=2\nu\pi,$$

wobei ν einen der Werte $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ hat. Man pflegt hierfür zu schreiben

$$(g\,h)+(h\,l)+(l\,g)\equiv 0 \pmod{2\pi},$$

in Worten: „$(g\,h)+(h\,l)+(l\,g)$ kongruent 0 modulo 2π." Insbesondere ist

$$(g\,h)+(h\,g)\equiv 0$$

oder

$$(h\,g)\equiv -(g\,h).$$

Was bedeutet $(g\,h)$, wenn die Geraden g und h nicht orientiert sind? Man kann jede Gerade auf zwei Weisen orientieren. Aus g mögen die beiden orientierten Geraden g_1, g_2 und aus h die beiden orientierten Geraden h_1, h_2 entstehen. Dann wollen wir vereinbaren, daß $(g\,h)$ jeden der Winkel

$$(g_1\,h_1),\ (g_1\,h_2),\ (g_2\,h_1),\ (g_2\,h_2)$$

bedeuten kann. Da nun

$$(g_1\,h_1)+(h_1\,h_2)+(h_2\,g_1)\equiv 0 \pmod{2\pi}$$

und

$$(h_1\,h_2)\equiv\pi$$

ist, so folgt

$$(g_1\,h_2)\equiv\pi+(g_1\,h_1).$$

Ebenso ergibt sich

$$(g_2\,h_1)\equiv\pi+(g_1\,h_1)$$

und

$$(g_2\,h_2)\equiv(g_1\,h_1).$$

---

[1] Drei solche Geraden kann man durch Translation in die vorhin betrachtete Lage bringen.

Ist φ ein Wert von $(g_1 h_1)$, so sind alle Werte von $(g h)$ in der Formel $\varphi + \nu\pi$ enthalten ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Der Winkel zwischen zwei nicht orientierten Geraden ist also nur bis auf ein Vielfaches von π bestimmt (der Winkel zwischen zwei orientierten Geraden bis auf ein Vielfaches von 2π). Für drei nicht orientierte Geraden g, h, l, die zu einer Ebene parallel sind, gilt die Relation

$$(g h) + (h l) + (l g) \equiv 0 \quad (\text{mod. } \pi).$$

§ 6. Die Funktionen Kosinus, Sinus, Tangens und Kotangens.

Wir denken uns in einer Ebene eine orientierte Gerade g und auf ihr eine Strecke OG mit der Maßzahl 1 (vgl. Fig. 10). Wir wollen Drehungen von g um O vornehmen und setzen daher noch fest, wie die positiven Drehungen laufen sollen.

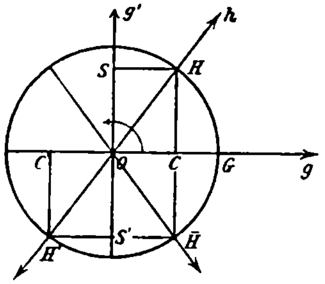

Fig. 10.

Wird uns nun eine reelle Zahl φ vorgelegt, so können wir mit g die Drehung φ vornehmen. Dabei gelange g nach h und OG nach OH. Projizieren wir OH senkrecht auf g, d. h. fällen wir von H aus auf g das Lot HC, so entsteht auf g die Strecke OC. Ihre Maßzahl definieren wir als den **Kosinus** der Zahl φ und schreiben

$$\overline{OC} = \cos\varphi.$$

Man sieht aus der Figur, daß es ganz gleichgültig ist, wie man den positiven Drehungssinn festgelegt hat, d. h. es gilt die Relation

$$\cos(-\varphi) = \cos\varphi.$$

Ferner ergibt sich aus der Figur, daß

$$\cos(\varphi + \pi) = -\cos\varphi$$

ist. $\cos\varphi$ multipliziert sich mit -1, wenn man φ um π vermehrt. Vermehrt man φ zweimal um π, so multipliziert sich der Kosinus zweimal mit -1. Es ist also

$$\cos(\varphi + 2\pi) = \cos\varphi,$$

was auch direkt aus der Figur folgt. $\cos\varphi$ hat, wie man sagt, die **Periode** 2π.

Wächst φ von 0 bis $\pi/2$, so nimmt $\cos\varphi$ von 1 bis 0 ab. Wächst φ von $\pi/2$ bis π, so nimmt $\cos\varphi$ von 0 bis -1 ab.

Wächst φ von π bis $3\pi/2$, so nimmt $\cos\varphi$ von -1 bis 0 zu. Wächst endlich φ von $3\pi/2$ bis 2π, so nimmt $\cos\varphi$ von 0 bis 1 zu. Wegen der Periodizität genügt es, wenn man $\cos\varphi$ in dem Intervall $\langle 0,\ 2\pi\rangle$, d. h. für $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$, kennt.

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ definieren wir als den **Sinus** von φ und schreiben

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi .$$

Aus dieser Definition folgt

$$\sin(-\varphi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\varphi ,$$

$$\sin(\varphi + \pi) = \cos\left(-\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin\varphi ,$$

$$\sin(\varphi + 2\pi) = \sin\varphi .$$

$\sin\varphi$ multipliziert sich also auch mit -1, wenn man φ um π vermehrt, und hat die Periode 2π.

Aus der Definition des Sinus ergibt sich auch

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi .$$

Wir notieren ferner noch die Formeln

$$\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(-\varphi) = -\sin\varphi ,$$

$$\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(-\varphi) = \cos\varphi ,$$

$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ und $\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$ pflegt man mit $\operatorname{tg}\varphi$ (Tangens φ) bzw. $\cot\varphi$ (Kotangens φ) zu bezeichnen. Man bestätigt sofort, daß

$$\operatorname{tg}(\varphi + \pi) = \operatorname{tg}\varphi , \qquad \cot(\varphi + \pi) = \cot\varphi$$

ist. Tangens und Kotangens haben also die Periode π.

Man kann übrigens $\sin\varphi$ auch so definieren. g' gehe aus g durch die Drehung $\pi/2$ hervor, d. h. durch eine Drehung um einen rechten Winkel im positiven Sinne. OS sei die senkrechte Projektion von OH auf g' (vgl. Fig. 10). Dann ist

$$\overline{OS} = \sin\varphi .$$

In der Tat ist

$$\overline{OS} = \cos(g'h) = \cos(hg')$$

und

$$(hg') \equiv (hg) + (gg'),$$

d. h.

$$(hg') \equiv \frac{\pi}{2} - \varphi \,(\text{mod. } 2\pi),$$

also

$$\overline{OS} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi.$$

Nach dieser Definition ist es leichter zu verfolgen, wie $\sin\varphi$ variiert, wenn φ von 0 bis 2π währt. Es ergibt sich folgendes:

φ von 0 bis $\pi/2$: $\sin\varphi$ von 0 bis 1 (zunehmend),
φ „ $\pi/2$ „ π : $\sin\varphi$ „ 1 „ 0 (abnehmend),
φ „ π „ $3\pi/2$: $\sin\varphi$ „ 0 „ -1 (abnehmend),
φ „ $3\pi/2$ „ 2π : $\sin\varphi$ „ -1 „ 0 (zunehmend).

Der Leser mache sich klar, wie $\operatorname{tg}\varphi$ und $\cot\varphi$ variieren, wenn φ von 0 bis π wächst.

Für die Funktionen $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi$, $\cot\varphi$ gibt es Tafeln, die der Leser von der Schule her kennt.

§ 7. Senkrechte Projektion einer Strecke von einem Träger auf einen andern.

g und h seien zwei orientierte Geraden durch den Punkt O.

Wir nehmen auf h eine Strecke OH und projizieren sie senkrecht auf g. Die Projektion heiße OG. Dann ist also G der Fußpunkt des von H auf g gefällten Lotes.

Macht man dasselbe mit einer andern Strecke auf h, etwa mit OH_1, so stellt sich heraus, daß

(1) $\overline{OG} : \overline{OH} = \overline{OG_1} : \overline{OH_1}$

ist. Die Ähnlichkeit der Dreiecke OGH und OG_1H_1 zeigt, daß diese Proportion abgesehen vom Zeichen richtig ist, daß sie also richtig ist, wenn man statt der Maßzahlen die Längen nimmt.

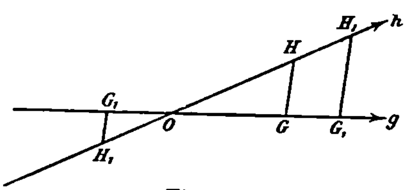

Fig. 11.

Haben $\overline{OH}$ und $\overline{OH_1}$ dasselbe Zeichen, d. h. liegen H und H_1 auf derselben Seite von O, so liegen auch G und G_1 auf derselben Seite von O, d. h. $\overline{OG}$ und $\overline{OG_1}$ haben dasselbe Zeichen.

Haben $\overline{OH}$ und $\overline{OH_1}$ verschiedene Zeichen, d. h. liegen H und H_1 auf verschiedenen Seiten von O, so liegen auch G und G_1 auf verschiedenen Seiten von O, d. h. $\overline{OG}$ und $\overline{OG_1}$ haben verschiedene Zeichen.

Man sieht hieraus, daß Formel (1) nicht nur abgesehen vom Zeichen, sondern überhaupt richtig ist.

Nun wollen wir $\overline{OH_1} = 1$ machen. Dann wird nach § 6

$$\overline{OG_1} = \cos(gh)$$

und (1) verwandelt sich in

$$\overline{OG} = \overline{OH}\cos(gh). \tag{2}$$

$H_1 H_2$ sei eine beliebige Parallelstrecke zu h und $G_1 G_2$ ihre senkrechte Projektion auf g (also G_1 und G_2 die Fußpunkte der von H_1 bzw. H_2 auf g gefällten Lote). Macht man $OH = H_1 H_2$, so wird $OG = G_1 G_2$. Man hat daher

$$\overline{G_1 G_2} = \overline{H_1 H_2}\cos(gh).$$

Projiziert man eine Strecke senkrecht auf einen andern Träger, so multipliziert sich die Maßzahl mit dem Kosinus des Winkels, den die beiden Träger bilden.

Wir können schlechthin von dem Winkel zwischen den beiden Trägern reden, weil $\cos(gh) = \cos(hg)$ ist. Auch brauchen wir gar nichts von dem positiven Drehungssinn zu sagen, weil seine Festsetzung für den Kosinus ohne Belang ist.

Der obige Satz ist sehr wichtig, wie sich später bei verschiedenen Gelegenheiten zeigen wird.

§ 8. Strecken, bezogen auf ein rechtwinkliges Achsensystem.

Durch einen Punkt O des Raumes legen wir drei orientierte Geraden Ox, Oy, Oz, die zueinander senkrecht sind. Man nennt diese Figur ein rechtwinkliges (oder orthogonales) Achsensystem, Ox die x-Achse, Oy die y-Achse, Oz die z-Achse.

AB sei eine Strecke auf der orientierten Geraden g und $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ ihre senkrechten[1] Projektionen auf die Achsen Ox, Oy, Oz.

Setzen wir

$$\overline{A_1 B_1} = \mathfrak{x}, \quad \overline{A_2 B_2} = \mathfrak{y}, \quad \overline{A_3 B_3} = \mathfrak{z},$$

so sind $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Koordinaten

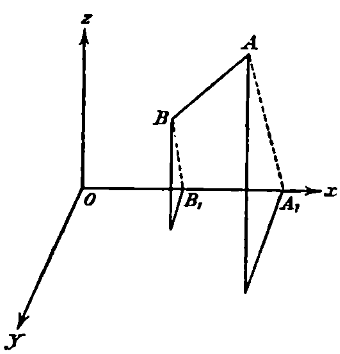

Fig. 12.

[1] Wir könnten auch sagen: die Projektionen von AB auf Ox, Oy, Oz parallel zu den Ebenen Oyz, Ozx, Oxy.

von AB in bezug auf das rechtwinklige Achsensystem (vgl. S. 6).

r sei die Maßzahl von AB auf g, also $r = \overline{AB}$.

Dann ist nach § 7

$$\mathfrak{x} = r\cos\alpha,\quad \mathfrak{y} = r\cos\beta,\quad \mathfrak{z} = r\cos\gamma; \tag{1}$$

α, β, γ haben folgende Bedeutung

$$\alpha = (xg),\quad \beta = (yg),\quad \gamma = (zg),$$

sind also die Winkel, die g mit den Achsen Ox, Qy, Oz bildet.

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ nennt man die Richtungskosinus der orientierten Geraden g. Sie sind die Koordinaten einer zu g parallelen Strecke mit der Maßzahl 1. Setzt man nämlich in (1) $r = 1$, so werden $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ gleich $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

Man sieht hieraus, daß g durch die Richtungskosinus bis auf eine Parallelverschiebung bestimmt ist.

g_1 und g_2 seien zwei orientierte Geraden mit den Richtungskosinus λ_1, μ_1, ν_1 bzw. λ_2, μ_2, ν_2. Auf g_1 liege die Strecke $\mathfrak{A}_1$ mit der Maßzahl r_1 und auf g_2 die Strecke $\mathfrak{A}_2$ mit der Maßzahl r_2. Die Projektion von $\mathfrak{A}_1$ auf g_2 hat die Maßzahl

$$r_1 \cos(g_1 g_2).$$

Multiplizieren wir noch mit r_2, so entsteht

$$r_1 r_2 \cos(g_1 g_2), \tag{2}$$

ein Ausdruck, der bei Vertauschung der Indizes 1, 2 ungeändert bleibt.

Der Ausdruck (2) ist von der Orientierung der beiden Geraden g_1, g_2 ganz unabhängig. g_1' und g_2' mögen aus g_1 bzw. g_2 durch Umkehrung der positiven Richtung entstehen. r_1', r_2' seien die Maßzahlen von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ in bezug auf g_1' und g_2'. Dann ist

$$r_1' = -r_1,\quad r_2' = -r_2,$$
$$(g_1' g_2) \equiv (g_1 g_2') \equiv \pi + (g_1 g_2),\quad (g_1' g_2') \equiv (g_1 g_2),$$
$$(\text{mod. } 2\pi)$$

also

$$\cos(g_1 g_2) = \cos(g_1' g_2') = -\cos(g_1' g_2) = -\cos(g_1 g_2')$$

und daher

$$r_1 r_2 \cos(g_1 g_2) = r_1' r_2 \cos(g_1' g_2) = r_1 r_2' \cos(g_1 g_2') = r_1' r_2' \cos(g_1' g_2').$$

Der Ausdruck (2) hängt, wie man sieht, nur von den beiden Strecken $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ ab. Man bezeichnet ihn als das **innere Produkt** von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ und schreibt dafür $(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2)$ oder $(\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_1)$.

$\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$ seien die Koordinaten von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{y}_2$, $\mathfrak{z}_2$ die von $\mathfrak{A}_2$. Ferner seien $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}_1$ die Komponenten von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{Y}_2$, $\mathfrak{Z}_2$ die von $\mathfrak{A}_2$ in bezug auf das rechtwinklige Achsensystem (also die orthogonalen Projektionen von $\mathfrak{A}_1$ bzw. $\mathfrak{A}_2$ auf die Achsen). Dann sind die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Maßzahlen der $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$.

Die Projektion von $\mathfrak{A}_1$ auf g_2 ist, weil $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{X}_1 + \mathfrak{Y}_1 + \mathfrak{Z}_1$, die Summe der Projektionen von $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}_1$. Bezeichnen wir die Projektionen durch einen angehängten Strich, so ist

$$\mathfrak{A}_1' = \mathfrak{X}_1' + \mathfrak{Y}_1' + \mathfrak{Z}_1'$$

und nach § 3

$$\overline{\mathfrak{A}_1'} = \overline{\mathfrak{X}_1'} + \overline{\mathfrak{Y}_1'} + \overline{\mathfrak{Z}_1'}.$$

Aus § 7 wissen wir aber, daß

$$\overline{\mathfrak{A}_1'} = r_1 \cos(g_1 g_2), \quad \overline{\mathfrak{X}_1'} = \lambda_2 \mathfrak{x}_1, \quad \overline{\mathfrak{Y}_1'} = \mu_2 \mathfrak{y}_1, \quad \overline{\mathfrak{Z}_1'} = \nu_2 \mathfrak{z}_1$$

ist. Also gilt die Gleichung

$$r_1 \cos(g_1 g_2) = \lambda_2 \mathfrak{x}_1 + \mu_2 \mathfrak{y}_1 + \nu_2 \mathfrak{z}_1.$$

Daraus folgt durch Multiplikation mit r_2, bei Beachtung von (1),

$$(3) \qquad (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2) = r_1 r_2 \cos(g_1 g_2) = \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{y}_1 \mathfrak{y}_2 + \mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2.$$

Das innere Produkt zweier Strecken ist gleich der Summe der Produkte aus den gleichnamigen Koordinaten.

Man kann dies Resultat auch so ableiten.

Zunächst verifiziert man, daß für drei Strecken $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Relation

$$(4) \qquad (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A}\mathfrak{C}) + (\mathfrak{B}\mathfrak{C})$$

gilt. $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ seien die Projektionen von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{C}$. Dann ist die Projektion von $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ gleich $\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}'$. Die Maßzahlen dieser Projektionen sind

$$\overline{\mathfrak{A}'}, \overline{\mathfrak{B}'}, \overline{\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}'}.$$

Multipliziert man sie mit $\overline{\mathfrak{C}}$, der Maßzahl von $\mathfrak{C}$, so erhält man

$$\overline{\mathfrak{A}'}\overline{\mathfrak{C}}, \quad \overline{\mathfrak{B}'}\overline{\mathfrak{C}}, \quad (\overline{\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}'})\overline{\mathfrak{C}}.$$

Dies sind aber gerade die Produkte

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{C}), \quad (\mathfrak{B}\mathfrak{C}), \quad (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$$

und man sieht, daß das letzte gleich der Summe der beiden ersten ist.

Aus (4) folgt nun, wenn wir wieder zu den Strecken $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ zurückkehren,

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2) &= (\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{Y}_1 + \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{X}_2 + \mathfrak{Y}_2 + \mathfrak{Z}_2) \\ &= (\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2) + (\mathfrak{Y}_1 \mathfrak{Y}_2) + (\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}_2) \\ &+ (\mathfrak{Y}_1 \mathfrak{Z}_2) + (\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Y}_2) + (\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{X}_2) + (\mathfrak{X}_1 \mathfrak{Z}_2) + (\mathfrak{X}_1 \mathfrak{Y}_2) + (\mathfrak{Y}_1 \mathfrak{X}_2).\end{aligned}$$

Aus der Definition des inneren Produktes sieht man, daß es verschwindet, wenn die Träger der beiden Strecken einen rechten Winkel bilden. Dann ist nämlich (vgl. § 6) $\cos(g_1 g_2) = 0$. Daher sind in $(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2)$ alle Glieder gleich Null bis auf $(\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2)$, $(\mathfrak{Y}_1 \mathfrak{Y}_2)$, $(\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}_2)$. Das sind nun innere Produkte von Strecken, deren Träger den Winkel Null bilden. Ein solches Produkt ist aber gleich dem Produkt der beiden Maßzahlen, weil $\cos(g_1 g_2) = 1$ ist. Es ergibt sich also wieder die Formel (3).

Aus (3) folgt, wenn man $r_1 = r_2 = 1$ setzt und (1) berücksichtigt,

$$\cos(g_1 g_2) = \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2. \tag{5}$$

Der Kosinus des Winkels, den zwei orientierte Geraden bilden, ist gleich der Summe der Produkte aus den gleichnamigen Richtungskosinus.

Ersetzt man $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ beide durch die Strecke $\mathfrak{A}$ mit den Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und der Maßzahl r (in bezug auf ihren orientierten Träger g), so verwandelt sich (3) in

$$r^2 = \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2. \tag{6}$$

Hieraus folgt für $r = 1$, wenn λ, μ, ν die Richtungskosinus von g sind,

$$1 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2. \tag{7}$$

Formel (6) zeigt uns, daß die Länge einer Strecke mit den Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ gleich der (positiven) Quadratwurzel aus der Quadratsumme der Koordinaten ist.

Aus Formel (7) ersehen wir, daß die Richtungskosinus immer die Quadratsumme 1 haben.

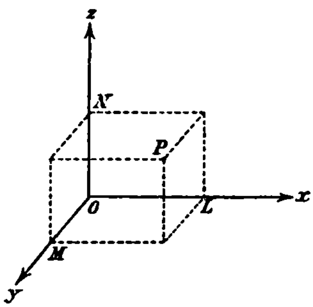

Fig. 13.

Wenn drei reelle Zahlen λ, μ, ν die Quadratsumme 1 haben, so sind sie die Richtungskosinus einer orientierten Geraden g. Wir wählen auf den Achsen Ox, Oy, Oz die Punkte L, M, N so, daß

$$\overline{OL} = \lambda, \quad \overline{OM} = \mu, \quad \overline{ON} = \nu$$

ist, und bilden die Summe OP der Strecken OL, OM, ON (vgl. Fig. 13). Nach Formel (6) ist OP eine Einheitsstrecke, d. h. sie hat die Länge 1. Wählen wir auf der Geraden O, P die positive Richtung derart, daß sie von O nach P führt, so hat auf dieser orientierten Geraden g die Strecke OP die Maßzahl 1. Aus dem Formelsystem (1) ersieht man jetzt, daß λ, μ, ν die Richtungskosinus von g sind.

Wenn wir eine orientierte Gerade g in der x, y-Ebene betrachten, so ist $\cos(zg) = 0$. Setzen wir $(xg) = \varphi$, so wird $(yg) \equiv (xg) - (xy)$. Wir können den positiven Drehungssinn so wählen, daß $(xy) = \frac{\pi}{2}$ ist. Dann haben wir $(yg) \equiv \varphi - \frac{\pi}{2}$ und die Richtungskosinus von g lauten (vgl. S. 11)

$$\cos\varphi, \quad \sin\varphi, \quad 0.$$

Nach (7) ist

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1,$$

und das gilt für jeden Wert von φ.

g_1, g_2 seien zwei orientierte Geraden in der x, y-Ebene und $(xg_1) = \varphi_1$, $(xg_2) = \varphi_2$. Dann lauten ihre Richtungskosinus

$$\cos\varphi_1, \ \sin\varphi_1, \ 0 \quad \text{bzw.} \quad \cos\varphi_2, \ \sin\varphi_2, \ 0.$$

Da $(g_1 g_2) \equiv (g_1 x) + (x g_2) \equiv \varphi_2 - \varphi_1$ ist, so liefert Formel (5)

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2.$$

Hieraus folgt, wenn man $\frac{\pi}{2} + \varphi_1$ für φ_1 einsetzt,

$$\sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 \sin\varphi_1.$$

φ_1, φ_2 können alle positiven und negativen Werte annehmen.

Zweites Kapitel.

Punktkoordinaten.

§ 9. Cartesische Punktkoordinaten.

Wir wissen, daß die Strecken des Raumes sich durch Zahlentripel charakterisieren lassen. Hieraus ergibt sich leicht, daß man auch die Punkte des Raumes durch Zahlentripel charakterisieren kann.

Durch einen Punkt O, den sogenannten Anfangspunkt, legt man drei Geraden Ox, Oy, Oz, die sich nicht in einer Ebene befinden. Jede von ihnen wird orientiert, d. h. es wird auf ihr die positive Fortschreitungsrichtung markiert.

Diese Figur heißt ein räumliches Achsensystem, Ox, Oy, Oz die x-Achse, y-Achse und z-Achse. Ein spezielles Achsensystem, das besonders häufig benutzt wird, ist das rechtwinklige (vgl. § 8).

Hat man ein räumliches Achsensystem und eine Längeneinheit zugrunde gelegt, so hat jede Strecke drei Koordinaten (nämlich die Maßzahlen ihrer Komponenten in bezug auf das Achsensystem). Nun bildet aber jeder Punkt P mit dem Anfangspunkt O eine Strecke OP. Die Koordinaten von OP nennen wir die Koordinaten des Punktes P in bezug auf das betrachtete Achsensystem. Durch seine Koordinaten ist P vollkommen bestimmt; denn aus $OP = OP'$ folgt, daß P und P' zusammenfallen.

Wir wollen uns die Bedeutung der Koordinaten noch einmal klar machen. Die Achsen bestimmen paarweise drei Ebenen, nämlich Oyz, Ozx, Oxy. Man nennt sie die Koordinatenebenen. Legt man durch P Parallelebenen zu diesen Koordinatenebenen, so entstehen auf den Achsen die Schnittpunkte A, B, C. Die Koordinaten x, y, z des Punktes P sind nichts anderes als die Maßzahlen der Strecken OA, OB, OC, d. h. es ist

$$x = \overline{OA}, \quad y = \overline{OB}, \quad z = \overline{OC}.$$

Wenn P in der Ebene Oxy liegt, so ist $z = 0$. P ist dann vollkommen bestimmt durch x und y, die Maßzahlen von OA und OB. Man erhält diese Strecken, indem man durch P Parallelen zu Ox und Oy zieht. Die Punkte einer Ebene lassen sich durch ihre Koordinaten x, y in bezug auf das Achsensystem Ox, Oy charakterisieren.

Liegt P auf der Geraden Ox, so ist $y = z = 0$. P ist dann vollkommen bestimmt durch x, d. h. durch die Maßzahl der Strecke OP. Diese nennt man seine Abszisse in bezug auf Ox.

x, y, z lassen sich also, wenn P ein beliebiger Punkt des Raumes ist, auch auffassen als die Abszissen der Punkte A, B, C, die man durch Projektion von P auf die Achsen (parallel zu den Koordinatenebenen) erhält.

Wir wollen jetzt noch im Falle des rechtwinkligen Achsensystems eine andere Betrachtungsweise auseinandersetzen. Bei jeder Ebene gibt es zwei Seiten, wir können die Ebene auf der einen Seite weiß, auf der andern schwarz anstreichen. Der Raum wird durch die Ebene in zwei Gebiete geteilt. Einem Punkt des einen Gebiets erscheint die Ebene weiß, einem Punkt des andern Gebiets schwarz. Wir wollen nun bei unsern Koordinatenebenen Oyz, Ozx, Oxy diejenigen Seiten weiß anstreichen, die von den positiven Hälften[1] der Achsen Ox, Oy, Oz aus sichtbar sind. Dann ist

[1] Die positive Hälfte wird von dem Punkt O beschrieben, wenn er der positiven Richtung der betreffenden Achse folgt.

z. B. die Koordinate x der Abstand des Punktes P von der Ebene Oyz, versehen mit dem Zeichen $+$ oder $-$, je nachdem P auf der weißen oder schwarzen Seite von Oyz liegt. Die Koordinaten sind also die Abstände des Punktes P von den Koordinatenebenen, und zwar positiv oder negativ gerechnet, je nachdem die betreffende Ebene dem Punkt P weiß oder schwarz erscheint.

Ähnlich ist es in der Ebene. Wir wollen uns eine Gerade in der Ebene als ein äußerst dünnes Band vorstellen, dessen einer Rand weiß gefärbt ist, während der andere schwarz aussieht (vgl. Fig. 14). Die Ebene wird durch die Gerade in zwei Gebiete geteilt. Die Punkte des einen sehen von der Geraden den weißen, die Punkte des andern den schwarzen Rand. Liegt nun in der

Fig. 14.

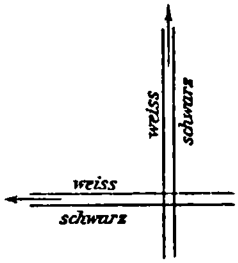

Fig. 15.

Ebene ein rechtwinkliges Achsensystem Ox, Oy vor, so wollen wir bei jeder Achse den Rand weiß färben, der von der positiven Hälfte der andern Achse aus sichtbar ist (vgl. Fig. 15). Dann sind die Koordinaten x, y des Punktes P die Abstände dieses Punktes von den Achsen und zwar positiv oder negativ gerechnet, je nachdem die betreffende Achse dem Punkt P weiß oder schwarz erscheint.

Handelt es sich um die Punkte auf einer orientierten Geraden Ox, so kann man sich den Anfangspunkt O als ein äußerst kleines Stückchen dieser Geraden denken, das an dem einen Ende weiß, an dem andern schwarz gefärbt ist. Richtet man die Färbung so ein, daß O für die positive Hälfte von Ox weiß erscheint, so ist die Abszisse x eines Punktes P der Abstand dieses Punktes vom Anfangspunkt, und zwar positiv oder negativ gerechnet, je nachdem O von P aus betrachtet, weiß oder schwarz erscheint.

Die in diesem Paragraphen betrachteten Koordinaten nennt man **cartesische** Punktkoordinaten nach CARTESIUS oder DESCARTES, der sie in seiner 1637 erschienenen „Géométrie" benutzte. Wenn das Achsensystem rechtwinklig ist, spricht man von rechtwinkligen Koordinaten.

§ 10. Änderung der Koordinaten bei einer Parallelverschiebung des Achsensystems.

Wir wollen das Achsensystem Ox, Oy, Oz durch eine Translation in die neue Lage $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ überführen.

Der Punkt P habe in bezug auf das alte Achsensystem die Koordinaten x, y, z, in bezug auf das neue Achsensystem die Koordinaten x', y', z'.

x, y, z sind, wie wir wissen, die Koordinaten von OP und x', y', z' die von $O'P$. Hier brauchen wir gar nicht zu sagen, ob die Koordinaten in bezug auf das alte oder neue System gemeint sind. Denn die Koordinaten einer Strecke sind die Maßzahlen ihrer Komponenten und bleiben bei allen Translationen des Achsensystems dieselben.

Nun ist

$$OP = OO' + O'P.$$

Die Koordinaten von OP sind also die Summen der gleichnamigen Koordinaten von OO' und $O'P$. Nennen wir die Koordinaten von OO' (oder, was dasselbe ist, die Koordinaten von O' in bezug auf Ox, Oy, Oz) a, b, c, so wird

$$(1) \qquad x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c.$$

Bei einer Parallelverschiebung des Achsensystems ändern sich also die Koordinaten um additive Konstanten.

Die Bedeutung der Konstanten a, b, c, ergibt sich auch aus den Gleichungen (1). Setzt man $x' = y' = z' = 0$, läßt man also P mit O' zusammenfallen, so wird $x = a$, $y = b$, $z = c$. Daraus ersieht man, daß a, b, c die Koordinaten des neuen Anfangspunktes sind, in bezug auf das alte System.

Wenn man in der Ebene ein Achsensystem Ox, Oy durch Parallelverschiebung in die Lage $O'x'$, $O'y'$ überführt, so ändern sich die Koordinaten x, y um additive Konstanten. Dies ergibt sich aus (1), indem man z, z', c gleich Null setzt.

Verschiebt man die orientierte Gerade Ox in sich derart, daß sie die Lage $O'x'$ annimmt, so ändern sich die Abszissen x um eine additive Konstante. Das folgt aus (1), wenn man y, y', b, z, z', c gleich Null setzt.

Eine Strecke $P_1 P_2$ sei dadurch gegeben, daß man die Koordinaten x_1, y_1, z_1 des Anfangspunktes und die Koordinaten x_2, y_2, z_2 des Endpunktes kennt (in bezug auf Ox, Oy, Oz). Wie lauten dann die Koordinaten von $P_1 P_2$? Läßt man P mit P_2 und O' mit P_1

zusammenfallen, so werden x', y', z' in (1) gleich $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$. Andererseits sind x', y', z' die Koordinaten von $O'P$, d. h. von $P_1 P_2$. Man kann aber auch so argumentieren. Es ist $P_1 P_2 = O P_2 - O P_1$, also sind die Koordinaten von $P_1 P_2$ gleich $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$.

Sind die Achsen rechtwinklig, so ist die Länge von $P_1 P_2$, d. h. die Entfernung der Punkte P_1, P_2 gleich (vgl. § 8) der positiven Quadratwurzel aus

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

§ 11. Änderung der rechtwinkligen Koordinaten bei einer Drehung des Achsensystems um den Anfangspunkt.

Ox, Oy, Oz und Ox', Oy', Oz' seien zwei rechtwinklige Achsensysteme mit demselben Anfangspunkt, x, y, z die Koordinaten des Punktes P in bezug auf das erste (das alte) und x', y', z' die Koordinaten von P in bezug auf das zweite (das neue) System.

Wie hängen x, y, z mit x', y', z' zusammen?

Wir zerlegen OP in seine drei Komponenten in bezug auf Ox', Oy', Oz' und projizieren auf eine der Achsen Ox, Oy, Oz. Die Projektion von OP ist dann gleich der Summe der Projektionen der Komponenten. Benutzen wir ferner den Satz, daß auf einer orientierten Geraden die Maßzahl einer Streckensumme gleich der Maßzahlensumme der einzelnen Strecken ist, so können wir schreiben (vgl. § 7)

$$\begin{aligned} x &= x' \cos(x x') + y' \cos(x y') + z' \cos(x z'), \\ y &= x' \cos(y x') + y' \cos(y y') + z' \cos(y z'), \\ z &= x' \cos(z x') + y' \cos(z y') + z' \cos(z z') \end{aligned}$$

oder

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z', \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z', \\ z &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'. \end{aligned} \right.$$

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ sind die Richtungskosinus von Ox', ebenso $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ die von Oy' und $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ die von Oz' in bezug auf das alte System. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sind die Richtungskosinus von Ox in bezug auf das neue System, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ die von Oy und $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ die von Oz.

Setzt man in dem Schema

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{matrix}$$

eine Reihe (Zeile oder Spalte) mit einer andern parallelen Reihe zusammen (d. h. summiert man die Produkte gleichnamiger Elemente) so kommt Null heraus. Setzt man eine Reihe mit sich selbst zusammen, so kommt 1 heraus. Daher ist[1]

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}^2 = 1 .$$

Die Determinante der α, β, γ, die sogenannte Transformationsdeterminante[2], hat also den Wert 1 oder -1.

Geht Ox', Oy', Oz' aus Ox, Oy, Oz durch eine Bewegung hervor, lassen sich also beide Achsensysteme derart zur Deckung bringen, daß auch die positiven Hälften der gleichnamigen Achsen zusammenfallen, so ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1 .$$

Zunächst wollen wir den Spezialfall betrachten, daß zwei Achsen, also etwa Oz und Oz', zusammenfallen (incl. Orientierung). Dann ist $z = z'$ und $\cos(xz') = \cos(yz') = 0$, mithin

$$x = x' \cos(xx') + y' \cos(xy') ,$$
$$y = x' \cos(yx') + y' \cos(yy') .$$

Wenn wir den positiven Drehungssinn so wählen, daß $(xy) \equiv \frac{\pi}{2}$ ist, so kann zweierlei passieren. Entweder ist $(x'y') \equiv \frac{\pi}{2}$ oder $(x'y') \equiv -\frac{\pi}{2}$. Nur im ersten Falle lassen sich die beiden Achsensysteme zur Deckung bringen. In diesem Falle ist, wenn wir $(xx') = \varphi$ setzen,

$$(xy') \equiv (xx') + (x'y') \equiv \frac{\pi}{2} + \varphi ,$$
$$(yx') \equiv (yx) + (xx') \equiv -\frac{\pi}{2} + \varphi ,$$
$$(yy') \equiv (yx) + (xy') \equiv \varphi ,$$

[1] Vgl. meine „Einführung in die Determinantentheorie“, S. 160.

[2] Ein Gleichungssystem wie (1) nennt man eine **lineare Transformation**. Erfüllen die α, β, γ die oben angegebenen Relationen, so spricht man von einer **orthogonalen Transformation**. Die Determinante der α, β, γ heißt eine **orthogonale Determinante**.

so daß man hat (vgl. S. 11)

$$(2) \qquad \begin{cases} x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \\ y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi. \end{cases}$$

Die Determinante der α, β, γ lautet hier

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi, & -\sin\varphi, & 0 \\ \sin\varphi, & \cos\varphi, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}$$

Sie hat den Wert $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$.

Wenn $(xy) \equiv \frac{\pi}{2}$, aber $(x'y') \equiv -\frac{\pi}{2}$ ist, so wird

$$(xy') \equiv -\frac{\pi}{2} + \varphi, \quad (yx') \equiv -\frac{\pi}{2} + \varphi, \quad (yy') \equiv \varphi - \pi,$$

also

$$x = x' \cos\varphi + y' \sin\varphi,$$
$$y = x' \sin\varphi - y' \cos\varphi$$

und die Determinante der α, β, γ gleich -1.

Wir wollen jetzt das System Ox, Oy, Oz kurz mit S und das System Ox', Oy', Oz' kurz mit S' bezeichnen. Durch eine Drehung um die x-Achse können wir sicher erreichen, daß Oy in die Ebene $Oy'z'$ gelangt. S gehe dabei in S_1 über. Die y-Achse von S_1 liegt in der Ebene $Oy'z'$, steht also senkrecht auf Ox'. Daher können wir S_1 so um seine y-Achse drehen, daß seine x-Achse mit Ox' zusammenfällt (incl. Orientierung). Dieses gedrehte System S_1 möge S_2 heißen. Da sind nun zwei Fälle möglich. Entweder läßt sich S_2 durch Drehung um seine x-Achse mit S' zur Deckung bringen oder nicht. Wir wissen, daß im ersten Falle beim Übergange von S_2 zu S' die Transformationsdeterminante gleich 1, im zweiten Falle dagegen gleich -1 ist. Wir haben also folgenden Sachverhalt. Die Transformationsdeterminante ist

beim Übergange	von	S	zu	S_1	gleich	1,
„	„	S_1	„	S_2	„	1,
„	„	S_2	„	S'	„	1 oder -1,

je nachdem S und S' sich durch eine Bewegung zur Deckung bringen lassen oder nicht.

Nun müssen wir uns auf eine Eigenschaft der linearen Transformationen stützen.

Hat man (für $\nu = 1, 2, \ldots, n$)

$$x_\nu = a_{\nu 1} y_1 + \ldots + a_{\nu n} y_n$$

und

$$y_\nu = b_{\nu 1} z_1 + \ldots + b_{\nu n} z_n,$$

so ist

$$x_\nu = c_{\nu 1} z_1 + \ldots + c_{\nu n} z_n$$

und dabei

$$c_{\nu\varrho} = \sum_{k=1}^{n} a_{\nu k}\, b_{k\varrho}.$$

Das Element $c_{\nu\varrho}$ in der Determinante

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

entsteht also durch Zusammensetzung der ν^{ten} Zeile von

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

mit der ϱ^{ten} Spalte von

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Nach dem Multiplikationssatz der Determinanten ist dann aber die erste Determinante gleich dem Produkt der beiden letzten.

Daraus folgt, daß beim Übergange von S zu S_2 die Transformationsdeterminante 1 auftritt, und durch nochmalige Anwendung desselben Schlusses auf S, S_2, S' ergibt sich, daß beim Übergange von S zu S' die Transformationsdeterminante gleich 1 oder -1 ist, je nachdem diese beiden Achsensysteme kongruent sind oder nicht.

Sind S und S' nicht kongruent, so werden sie es dadurch, daß man bei einer Achse die Orientierung umkehrt. Man nennt solche Systeme symmetrisch.

§ 12. Koordinaten eines Punktes in bezug auf zwei beliebige rechtwinklige Achsensysteme.

Es ist jetzt leicht, den Zusammenhang zwischen den Koordinaten eines Punktes P in bezug auf zwei beliebige rechtwinklige Achsensysteme Ox, Oy, Oz und $O'x'$, $O'y$, $O'z'$ anzugeben. Wir verschieben zuerst das erste System parallel mit sich, so daß O nach O' gelangt. Dieses verschobene System heiße $O'x_1$, $O'y_1$, $O'z$. Dann ist nach § 10

$$x = x_1 + a, \quad y = y_1 + b, \quad z = z_1 + c$$

und nach § 11

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z', \\ y_1 &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z', \\ z_1 &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z', \end{aligned}$$

also

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= a + \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z', \\ y &= b + \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z', \\ z &= c + \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'. \end{aligned} \right.$$

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ sind die Richtungskosinus von Ox', ebenso $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ die von Oy' und $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ die von Oz' in bezug auf Ox_1, Oy_1, Oz_1 oder, was auf dasselbe hinauskommt, in bezug auf Ox, Oy, Oz.

Sind die Systeme Ox, Oy, Oz und $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ kongruent, so ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1.$$

Sind die Systeme symmetrisch, so ist die Determinante der α, β, γ gleich -1.

Vertauscht man in der obigen Betrachtung die beiden Systeme, so ergibt sich[1]

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' &= a' + \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \\ y' &= b' + \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \\ z' &= c' + \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z. \end{aligned} \right.$$

Die Formeln (2) sind nichts anderes als die Auflösung der Gleichungen (1) nach x', y', z'. Diese Auflösung läßt sich so bewerkstelligen, daß man die Gleichungen (1) der Reihe nach mit α_k, β_k, γ_k multipliziert und addiert ($k = 1, 2, 3$).

Wir wollen jetzt den Fall betrachten, daß die Systeme kongruent sind, und eine andere Interpretation der Gleichungen (2) darlegen.

Man denke sich P mit dem Achsensystem $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ fest verbunden und dieses Achsensystem mit Ox, Oy, Oz zur Deckung

[1] $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sind nämlich die Richtungskosinus von Ox in bezug auf $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$, ebenso $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ die von Oy und $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ die von Oz.

gebracht. Dadurch wird P in die neue Lage P' übergeführt, und dieser Punkt hat offenbar in bezug auf Ox, Oy, Oz die Koordinaten x', y', z'.

Daraus ersehen wir folgendes. Wenn ein Körper irgend eine Bewegung im Raume ausführt, so geht jeder Punkt P dieses Körpers

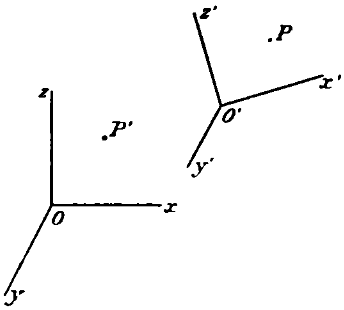

Fig. 16.

in eine andere Lage P' über und die Koordinaten x', y', z' von P drücken sich durch die Koordinaten x, y, z von P mittels der Formeln (2) aus. Die Koordinaten beziehen sich auf das feste Achsensystem Ox, Oy, Oz. Die α, β, γ bilden eine orthogonale Determinante, die gleich 1 ist.

Wenn die dritte Gleichung in (2) $z' = z$ lautet, so nehmen die beiden ersten folgende Gestalt an (vgl. S. 22)

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi + a', \\ y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi + b'. \end{cases}$$

Bewegt man eine Figur in der x, y-Ebene, ohne daß sie diese Ebene verläßt, so wird die Bewegung durch die obigen Gleichungen dargestellt. Ist $\varphi = 0$, so hat man eine Translation. Sind a', b' beide gleich Null, so hat man eine Drehung um den Anfangspunkt.

Wenn wir das Achsensystem Ox, Oy in der Ebene parallel mit sich verschieben, so ändern sich die Koordinaten um additive Konstanten A, B, d. h. es wird

$$x = x_1 + A, \quad y = y_1 + B,$$
$$x' = x_1' + A, \quad y' = y_1' + B$$

und die Gleichungen (3) lauten dann

$$x_1' = y_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi + a_1',$$
$$y_1' = -x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi + b_1'.$$

Dabei ist

$$a_1' = A\cos\varphi + B\sin\varphi - A + a',$$
$$b_1' = -A\sin\varphi + B\cos\varphi - B + b'.$$

Wir wollen versuchen, A, B so zu wählen, daß $a_1' = b_1' = 0$ wird, d. h.

$$A(\cos\varphi - 1) + B\sin\varphi + a' = 0,$$
$$-A\sin\varphi + B(\cos\varphi - 1) + b' = 0.$$

Das sind zwei lineare Gleichungen mit den beiden Unbekannten A, B. Wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi - 1, & \sin\varphi \\ -\sin\varphi, & \cos\varphi - 1 \end{vmatrix} = (\cos\varphi - 1)^2 + \sin^2\varphi = 2(1 - \cos\varphi)$$

nicht verschwindet, gibt es eine Lösung A, B. Das Verschwinden der Determinante bedeutet aber, daß $\cos\varphi = 1$, also $\sin\varphi = 0$ ist, und dann reduziert sich (3) auf eine Translation.

Sobald also die Bewegung (3) keine Translation ist, läßt sie sich als eine Drehung um den Punkt A, B (d. h. den Punkt mit den Koordinaten $x = A$, $y = B$) ansehen.

Wir kehren jetzt wieder zu den Bewegungen im Raume zurück und stellen zunächst folgende Frage:

Gibt es eine Strecke $P_1 P_2$, die bei der Bewegung (2) in eine gleiche Strecke $P_1' P_2'$ übergeht,[1] so daß also $P_1 P_2 = P_1' P_2'$ ist?

Bezeichnen wir die Koordinaten von P_1 und P_2 mit x_1, y_1, z_1 bzw. x_2, y_2, z_2, die von P_1' und P_2' mit x_1', y_1', z_1' bzw. $x_2' y_2', z_2'$, so haben wir zwei Gleichungssysteme, die aus (2) dadurch entstehen, daß man einmal x, y, z, x', y', z' mit dem Index 1 und ein zweites Mal mit dem Index 2 versieht. Subtrahieren wir die entsprechenden Gleichungen dieser Systeme und nennen die Koordinaten von $P_1 P_2$ und $P_1' P_2'$

$$l,\ m,\ n \quad \text{bzw.} \quad l',\ m',\ n',$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} l' &= \alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n, \\ m' &= \alpha_2 l + \beta_2 m + \gamma_2 n, \\ n' &= \alpha_3 l + \beta_3 m + \gamma_3 n. \end{aligned}$$

Diese Formeln sagen uns, wie die Bewegung (2) mit den Strecken des Raumes umgeht. Wollen wir haben, daß $P_1 P_2 = P_1' P_2'$ sein soll, d. h.

$$l' = l, \quad m' = m, \quad n' = n,$$

so müssen die Gleichungen

$$(4) \qquad \begin{cases} (\alpha_1 - 1) l + \beta_1 m + \gamma_1 n = 0, \\ \alpha_2 l + (\beta_2 - 1) m + \gamma_2 n = 0, \\ \alpha_3 l + \beta_3 m + (\gamma_3 - 1) n = 0 \end{cases}$$

stattfinden.

[1] Natürlich schließen wir Nullstrecken aus.

Die Determinante dieser Gleichungen ist Null. Man hat nämlich

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - 1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \alpha_2, & \beta_2 - 1, & \gamma_2 \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3 - 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\alpha_1, & -\beta_1, & -\gamma_1 \\ -\alpha_2, & 1-\beta_2, & -\gamma_2 \\ -\alpha_3, & -\beta_3, & 1-\gamma_3 \end{vmatrix}$$

Dabei muß man die Relationen

$$\begin{aligned} \alpha_k^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2 &= 0, \\ \alpha_k \alpha_j + \beta_k \beta_j + \gamma_k \gamma_j &= 0 \qquad (k \gtreqless j) \end{aligned}$$

benutzen.

Die Determinante der α, β, γ ist gleich 1. Also lautet die obige Gleichung

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - 1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \alpha_2, & \beta_2 - 1, & \gamma_2 \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3 - 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \alpha_1 - 1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \alpha_2, & \beta_2 - 1, & \gamma_2 \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3 - 1 \end{vmatrix},$$

d. h. die betrachtete Determinante ist Null. Infolgedessen gibt es Lösungen l, m, n, die nicht aus lauter Nullen bestehen, d. h. es gibt Strecken, die bei der Bewegung (3) in gleiche Strecken übergehen.

Wir wollen das Achsensystem so drehen, daß die z-Achse parallel zu einer solchen Strecke wird. Wir wollen aber nach Ausführung dieser Drehung der Einfachheit wegen alle Bezeichnungen beibehalten. Dann ist $l = m = 0$. Die Gleichungen (4) zeigen, daß

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1$$

wird. Da die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{vmatrix}$$

orthogonal ist, so folgt weiter $\alpha_3 = \beta_3 = 0$, und die Gleichungen (2) lassen sich schreiben

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi + a', \\ y' &= - x \sin \varphi + y \cos \varphi + b', \\ z' &= z + c'. \end{aligned}$$

Setzen wir noch[1]

$$\begin{aligned} x &= x_1 + A, & y &= y_1 + B, & z &= z_1, \\ x' &= x_1' + A, & y' &= y_1' + B, & z' &= z_1', \end{aligned}$$

[1] A, B haben dieselben Werte wie auf S. 26.

was eine Translation des Achsensystems bedeutet, so nehmen die Formeln folgende Gestalt an

$$\begin{aligned} x_1' &= \quad x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi, \\ y_1' &= -x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi, \\ z_1' &= \quad z_1 + c'. \end{aligned}$$

Setzen wir zuerst $c' = 0$, so haben wir eine Rotation um die z-Achse vor uns. Nachher müssen noch alle z um dieselbe Konstante vermehrt werden. Das bedeutet eine Translation parallel zur z-Achse. Beide Bewegungen zusammen stellen eine Schraubenbewegung um die z-Achse dar. Man muß sich die z-Achse als eine Schraube vorstellen, auf die der bewegte Körper aufgeschraubt ist. Dreht man den Körper, so führt er eine Schraubenbewegung aus.

Wir haben hier angenommen, daß $\cos\varphi \neq 1$ ist. Im Falle $\cos\varphi = 1$ handelt es sich um die Translation

$$x' = x + a', \quad y' = y + b', \quad z' = z + c'.$$

Jede Bewegung, die keine Translation ist, läßt sich, wenn man nur auf die Anfangs- und Endlage achtet, als eine Schraubenbewegung ansehen.

§ 13. Andere Koordinatensysteme.

1. Polarkoordinaten in der Ebene.

In der Ebene sei eine orientierte Gerade g gegeben und ein Punkt O auf ihr. Außerdem sei für die Drehungen um O ein positiver Drehungssinn festgesetzt.

Ein Punkt P der Ebene, der nicht mit O zusammenfällt, bestimmt mit O eine Gerade h. Wir orientieren diese Gerade und bezeichnen die Maßzahl von OP mit r. Wir können die Lage von P dadurch bestimmen, daß wir den Winkel $(gh) = \varphi$ und außerdem r angeben. Wir wissen dann nämlich, daß OP auf der um φ gedrehten Geraden g die Maßzahl r hat.

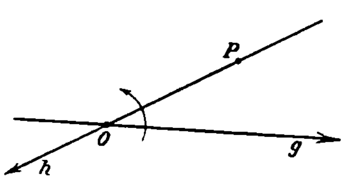

Fig. 17.

r, φ nennt man die Polarkoordinaten von P. Der Punkt O heißt der Pol und g die Polarachse. Außerdem braucht man noch den positiven Drehungssinn und natürlich auch eine Längeneinheit.

r wird als der **Radiusvektor** und φ als **Amplitude** von P bezeichnet.

r, φ und $-r, \varphi + \pi$ sind offenbar Polarkoordinaten desselben Punktes. Außerdem darf man jedesmal die Amplitude um ein Vielfaches von 2π ändern. Wenn P mit O zusammenfällt, ist $r = 0$ und φ völlig unbestimmt.

Auch eine Strecke AB in der Ebene kann man durch Polarkoordinaten charakterisieren. Man orientiert den Träger h der Strecke und setzt $\overline{AB} = r$, $(g h) = \varphi$. Dann sind r, φ die Polarkoordinaten der Strecke. Die Polarkoordinaten von P sind offenbar die Polarkoordinaten der Strecke $\bar{O}P$.

Wie hängen die Polarkoordinaten mit den cartesischen zusammen?

Die Gerade g machen wir zur x-Achse. Die y-Achse entstehe aus g durch die Drehung $\pi/2$. Dann ist $(h y) \equiv (h x) + (x y)$, d. h. $(h y) = \frac{\pi}{2} - \varphi$ und die Koordinaten x, y des Punktes P sind nach § 8 folgende

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Mit Hilfe der Polarkoordinaten lassen sich die Drehungen um den Pol O in sehr einfacher Weise ausdrücken.

Führen wir die Drehung α aus, so nehmen alle Amplituden um α zu.[1] Alle Radienvektoren bleiben aber ungeändert. Die neuen Polarkoordinaten sind also $r, \varphi + \alpha$, d. h. der Punkt mit den Polarkoordinaten r, φ geht über in den Punkt mit den Koordinaten

$$(*) \qquad r' = r, \quad \varphi' = \varphi + \alpha.$$

Sind x, y und x', y' die cartesischen Koordinaten der Punkte r, φ bzw. r', φ', so hat man

$$\begin{aligned} x' &= r' \cos \varphi' = r \cos(\varphi + \alpha) \\ &= r \cos \varphi \cdot \cos \alpha - r \sin \varphi \cdot \sin \alpha, \\ y' &= r' \sin \varphi' = r \sin(\varphi + \alpha) \\ &= r \cos \varphi \cdot \sin \alpha + r \sin \varphi \cdot \cos \alpha, \end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha, \\ y' &= x \sin \alpha + y \sin \alpha. \end{aligned}$$

[1] α ist positiv oder negativ, je nachdem die Drehung im positiven oder im negativen Sinne erfolgt. $|\alpha|$ ist die Weglänge, die ein Punkt zurücklegt, der von dem Drehpunkt O die Entfernung 1 hat. Vgl. § 5.

Das sind dieselben Formeln, die wir schon (mit anderer Bezeichnung des Drehungswinkels) in § 12 hatten.

Auf Grund der Formeln (*) können wir sagen, daß eine Rotation sich in Polarkoordinaten so schreibt wie eine Translation in cartesischen.

2. Zylinderkoordinaten im Raume.

Durch einen Punkt O legen wir die orientierte Gerade Oz und senkrecht zu ihr durch O eine Ebene E. In dieser ziehen wir die orientierte Gerade Ox und setzen den positiven Drehungssinn fest.

P sei ein Punkt im Raume und P' seine Projektion auf die Ebene E. Wir setzen

$$\overline{P'P} = z$$

und bezeichnen mit r, φ die Polarkoordinaten von P' in bezug auf den Pol O und die Polarachse Ox.

Durch z, r, φ ist die Lage von P vollkommen bestimmt. Man nennt z, r, φ Zylinderkoordinaten.

Ihr Zusammenhang mit den cartesischen Koordinaten ist folgender.

Wir drehen Ox in der Ebene E um $\pi/2$ und machen die so entstehende orientierte Gerade zur y-Achse. Dann sind

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \quad \text{und } z$$

die Koordinaten von P in bezug auf Ox, Oy, Oz.

3. Polarkoordinaten im Raume.

Durch einen Punkt O legen wir die orientierte Gerade Oz (sie heiße die Achse) und senkrecht zu ihr durch O eine Ebene E, die Äquatorebene. Dann brauchen wir noch eine Ebene durch die Achse, die Nullebene. Sie schneidet die Äquatorebene in einer Geraden Ox, die wir orientieren. Sowohl in der Äquatorebene, als auch in der Nullebene setzen wir einen positiven Drehungssinn fest.

Nun sei P ein Punkt, der nicht gerade auf der Achse liegt. Wir orientieren die Gerade h, die er mit O bestimmt, und setzen

$$\overline{OP} = r.$$

Jetzt drehen wir die Nullebene so lange um die Achse, bis sie durch P hindurchgeht. Ox habe sich dabei um λ gedreht. Endlich lassen wir in der gedrehten Nullebene Ox eine solche Drehung β ausführen, daß es mit h zusammenfällt (incl. Orientierung).