Einführung

in die

Determinantentheorie

einschließlich der Fredholmschen Determinanten

Von

Prof. Dr. Gerhard Kowalewski

Deutsche Karls-Universität zu Prag

Dritte, verbesserte und erweiterte Auflage

1 9 4 2

Verlag von Walter de Gruyter & Co. / Berlin

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Archiv-Nr. 123042

Printed in Germany / C. G. Röder, Leipzig

Vorwort zur ersten Auflage.

Dieses Buch ist aus Vorlesungen und Übungen entstanden, die ich während meiner mehr als zehnjährigen Lehrtätigkeit in Leipzig, Greifswald und Bonn gehalten habe. Dem entspricht die Begrenzung des Stoffs und die Art der Darstellung. Es soll hier eine Einführung in eine große und wichtige Disziplin geboten werden, die in neuester Zeit durch Übertragung des Determinantenbegriffs ins abzählbar und ins kontinuierlich Unendliche noch erheblich angewachsen ist.

Die Fredholmschen Determinanten, die für die linearen Integralgleichungen dieselbe Bedeutung haben, wie die gewöhnlichen Determinanten für lineare Gleichungssysteme mit n Unbekannten, habe ich in der Hilbertschen Weise durch Grenzübergang aus gewöhnlichen Determinanten abgeleitet. Auf diesem Wege ergeben sich auch sehr einfach die Fredholmschen Minoren und die Relationen zwischen ihnen, auf denen Fredholms Auflösung der linearen Integralgleichungen beruht.

In dem Kapitel über unendliche Determinanten ist bei der Betrachtung der linearen Gleichungssysteme mit unendlich vielen Unbekannten auch die schöne Theorie dargestellt, die Erhard Schmidt für diese Systeme begründet hat. Ebenso wird am Schluß des Buches E. Schmidts Behandlung der linearen Integralgleichungen in ihren Hauptpunkten entwickelt. Dieser Teil des Buches kann daher zur Einführung in das Studium der Integralgleichungen dienen, die sich unter den Händen Hilberts zu einer der umfassendsten und bedeutsamsten mathematischen Theorien entwickelt haben.

Am Schlusse findet der Leser die hauptsächlichsten Literaturnachweise. Wünscht er eine vollständigere Bibliographie, so verweisen wir ihn auf den Artikel von E. Netto im ersten Bande der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften oder auf das groß angelegte, ausgezeichnete Werk von T. Muir: The theory of determinants in the historical order of its development, London 1906.

Bonn, im April 1909.

Gerhard Kowalewski.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Nachdem ein anastatischer Neudruck meines Buches vergriffen ist, hat die Verlagsbuchhandlung die Herstellung einer zweiten Auflage beschlossen, die sie jedoch nicht in erweiterter, sondern in verkürzter Form wünschte. Ich habe deshalb starke Streichungen vorgenommen. Z. B. ist das 13. Kapitel (Elementarteilertheorie) fortgefallen, das in modernisierter Form einen noch größeren Raum beansprucht hätte, das 16. Kapitel (Unendliche Normaldeterminanten), ebenso das 19. Kapitel, das sich zu sehr in die Einzelheiten der Theorie der Integralgleichungen verlor. Auch im 18. Kapitel (Fredholmsche Theorie) ist vieles gestrichen. Die Eigenart meines Buches, das von der Kritik seinerzeit sehr freundlich aufgenommen wurde, hat durch die vorgenommenen Änderungen keinerlei Einbuße erlitten, und ich hoffe, daß es auch in der jetzigen Gestalt, insbesondere den Studierenden, gute Dienste leisten wird.

Dresden, Mai 1924.

Gerhard Kowalewski.

Vorwort zur dritten Auflage.

Die zweite Auflage meines Determinantenbuches unterschied sich von der ersten hauptsächlich dadurch, daß die Fredholmsche Theorie auf einen etwas engeren Raum beschränkt wurde. Ich habe mich bei der Vorbereitung der dritten Auflage nicht entschließen können, diese Kürzung wieder aufzuheben, zumal inzwischen im gleichen Verlag ein besonderes Buch über Integralgleichungen von mir erschienen ist.

Eine zweite Änderung, welche die zweite Auflage gegenüber der ersten brachte, war die Fortlassung der Äquivalenztheorie von Büscheln bilinearer Formen, also die Elementarteilertheorie. Hierfür bietet die dritte Auflage Ersatz in einem besonderen Kapitel, wobei ich mich an ein von mir selbst stammendes Verfahren halte, das sich in meinen Vorlesungen sehr bewährt hat und zuerst in den Leipziger Akademieberichten 1917, S. 325—35 veröffentlicht wurde.

Die unendlichen Determinanten, deren Theorie, abgesehen von der besonderen Klasse der Kochschen Normaldeterminanten, noch nicht recht geklärt ist, lasse ich auch diesmal beiseite.

Meine Determinantentheorie gehört zu den zerlesensten und zerfetztesten Büchern der Seminarbibliotheken, wie ich von vielen Seiten höre, und auch jetzt bei meiner Rückkehr auf die Prager Professur wieder feststellen konnte.

Möchte auch die neue Auflage sich gleicher Beliebtheit erfreuen!

Prag, Januar 1942.

Gerhard Kowalewski.

Inhalt.

Erstes Kapitel.

Historische Bemerkungen.

§ 1. Die Determinanten bei Leibniz.

Leibniz kam auf die Determinanten bei Behandlung der Aufgabe, aus $n+1$ linearen Gleichungen mit n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ diese Unbekannten zu eliminieren.

Er führte eine sehr zweckmäßige Bezeichnungsweise ein, die im wesentlichen auch heute noch in der Determinantentheorie benutzt wird. Er schrieb nämlich die $n+1$ Gleichungen in folgender Weise:

$$\begin{aligned}
10 + 11 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 + \ldots + 1n \cdot x_n = 0\,, \\
20 + 21 \cdot x_1 + 22 \cdot x_2 + \ldots + 2n \cdot x_n = 0\,, \\
30 + 31 \cdot x_1 + 32 \cdot x_2 + \ldots + 3n \cdot x_n = 0\,, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Jeder Koeffizient ist hier durch zwei Indizes symbolisiert, von denen der erste die Gleichung, der zweite die Stelle innerhalb der Gleichung anzeigt.

Im Falle $n = 1$ findet man als Eliminationsresultat

$$10 \cdot 21 - 11 \cdot 20 = 0\,,$$

im Falle $n = 2$

$$\begin{aligned}
&10 \cdot 21 \cdot 32 + 11 \cdot 22 \cdot 30 + 12 \cdot 20 \cdot 31 \\
&- 10 \cdot 22 \cdot 31 - 11 \cdot 20 \cdot 32 - 12 \cdot 21 \cdot 30 = 0
\end{aligned}$$

und so fort.

Leibniz gelangte durch Induktion zu einem allgemeinen Theorem, das er in einem Brief an den Marquis de l'Hospital (vom 28. April 1693) ausspricht:

„Datis aequationibus quotcunque sufficientibus ad tollendas quantitates, quae simplicem gradum non egrediuntur, pro aequatione prodeunte primo sumendae sunt omnes combinationes possibiles, quas ingreditur una tantum coefficiens uniuscunque aequationis; secundo eae combinationes opposita habent signa, si in eodem prodeuntis aequationis latere ponantur, quae habent tot coefficientes communes, quot sunt unitates in numero quantitatum tollendarum unitate minuto; caeterae habent eadem signa."

Es seien beliebig viele Gleichungen gegeben, die zur Elimination der den ersten Grad nicht überschreitenden Unbekannten ausreichen. Um die resultierende Gleichung zu erhalten, hat man zunächst alle möglichen Kombinationen zu bilden, in die aus jeder Gleichung nur ein Koeffizient eingeht [d. h. die Produkte $1r_0 \cdot 2r_1 \ldots n+1, r_n$]. Bringt man dann in der resultierenden Gleichung alles auf eine Seite, so haben diejenigen Kombinationen entgegengesetzte Zeichen, die so viele gemeinsame Koeffizienten enthalten, als es Einheiten in der um 1 verminderten Zahl der zu eliminierenden Unbekannten gibt. Die übrigen haben dieselben Zeichen.

Wenn zwei Produkte

$$1\,r_0 \cdot 2r_1 \ldots n+1,\ r_n$$

und

$$1\,s_0 \cdot 2s_1 \ldots n+1,\ s_n$$

$n-1$ gemeinsame Faktoren haben, so entsteht $s_0, s_1, \ldots, s_n$ aus $r_0, r_1, \ldots, r_n$ durch eine **Transposition**, d. h. durch Vertauschung zweier Glieder.

Das nach der Leibnizschen Vorschrift gebildete Eliminationsresultat lautet also

$$\sum \varepsilon \cdot 1\,r_0 \cdot 2r_1 \ldots n+1,\ r_n = 0\,.$$

Die Summation erstreckt sich über alle $(n+1)!$ Permutationen $r_0, r_1, \ldots, r_n$ der Indizes $0, 1, \ldots, n$, und ε ist gleich $+1$ oder -1, je nachdem $r_0, r_1, \ldots, r_n$ aus $0, 1, \ldots, n$ durch eine gerade oder ungerade Anzahl von Transpositionen hervorgeht.

$$\sum \varepsilon \cdot 1\,r_0 \cdot 2r_1 \ldots n+1,\ r_n$$

ist das, was wir heutzutage eine $(n+1)$-reihige Determinante nennen.

§ 2. Die Determinanten bei Cramer.

Leibniz fand nicht die Zeit, seine Erfindung, von deren großer Tragweite er bei verschiedenen Gelegenheiten spricht, weiter zu verfolgen. So geriet sie ganz in Vergessenheit.

Als Gabriel Cramer, der Verfasser der „Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques“ (1750), sich mit Systemen linearer Gleichungen beschäftigte, stieß er ganz unabhängig von Leibniz noch einmal auf die Determinanten.

Im Anhang seines großen Werkes zeigt er, wie man n lineare Gleichungen mit n Unbekannten durch Determinanten auflöst. Wir wollen die kurze Note hier vollständig wiedergeben:

„Man habe mehrere Unbekannte

$$z,\ y,\ x,\ v,\ \ldots$$

und ebenso viele Gleichungen

$$\begin{aligned}
A^1 &= Z^1 z + Y^1 y + X^1 x + V^1 v + \ldots,\\
A^2 &= Z^2 z + Y^2 y + X^2 x + V^2 v + \ldots,\\
A^3 &= Z^3 z + Y^3 y + X^3 x + V^3 v + \ldots,\\
A^4 &= Z^4 z + Y^4 y + X^4 x + V^4 v + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Dabei sollen die Buchstaben

$$A^1,\ A^2,\ A^3,\ A^4,\ \ldots$$

nicht wie gewöhnlich die Potenzen von A bedeuten, sondern die als bekannt vorausgesetzte linke Seite der ersten, zweiten, dritten, vierten, ... Gleichung. Ebenso sind

$$Z^1,\ Z^2,\ \ldots$$

die Koeffizienten von z,

$$Y^1,\ Y^2,\ \ldots$$

die von y,

$$X^1,\ X^2,\ \ldots$$

die von x,

$$V^1,\ V^2,\ \ldots$$

die von $v, \ldots$, in der ersten, zweiten, ... Gleichung.

Diese Bezeichnungsweise vorausgesetzt hat man, wenn nur eine Gleichung mit einer Unbekannten z vorliegt,

$$z = \frac{A^1}{Z^1}.$$

Sind zwei Gleichungen und zwei Unbekannte z und y da, so findet man

$$z = \frac{A^1 Y^2 - A^2 Y^1}{Z^1 Y^2 - Z^2 Y^1}$$

und

$$y = \frac{Z^1 A^2 - Z^2 A^1}{Z^1 Y^2 - Z^2 Y^1}.$$

Sind drei Gleichungen und drei Unbekannte z, y und x da, so findet man

$$z = \frac{A^1 Y^2 X^3 - A^1 Y^3 X^2 - A^2 Y^1 X^3 + A^2 Y^3 X^1 + A^3 Y^1 X^2 - A^3 Y^2 X^1}{Z^1 Y^2 X^3 - Z^1 Y^3 X^2 - Z^2 Y^1 X^3 + Z^2 Y^3 X^1 + Z^3 Y^1 X^2 - Z^3 Y^2 X^1},$$

$$y = \frac{Z^1 A^2 X^3 - Z^1 A^3 X^2 - Z^2 A^1 X^3 + Z^2 A^3 X^1 + Z^3 A^1 X^2 - Z^3 A^2 X^1}{Z^1 Y^2 X^3 - Z^1 Y^3 X^2 - Z^2 Y^1 X^3 + Z^2 Y^3 X^1 + Z^3 Y^1 X^2 - Z^3 Y^2 X^1},$$

$$x = \frac{Z^1 Y^2 A^3 - Z^1 Y^3 A^2 - Z^2 Y^1 A^3 + Z^2 Y^3 A^1 + Z^3 Y^1 A^2 - Z^3 Y^2 A^1}{Z^1 Y^2 X^3 - Z^1 Y^3 X^2 - Z^2 Y^1 X^3 + Z^2 Y^3 X^1 + Z^3 Y^1 X^2 - Z^3 Y^2 X^1}.$$

Die Prüfung dieser Formeln liefert folgende allgemeine Regel.

Die Anzahl der Gleichungen und der Unbekannten sei n. Man findet dann den Wert jeder Unbekannten, indem man n Brüche bildet, deren gemeinsamer Nenner ebenso viele Glieder hat, als es verschiedene Anordnungen von n verschiedenen Dingen gibt. Jedes Glied setzt sich aus den Buchstaben

$$Z,\ Y,\ X,\ V,\ \ldots$$

zusammen. Sie werden immer in derselben Reihenfolge geschrieben. Man erteilt ihnen aber als Exponenten die n ersten Ziffern in allen möglichen Reihenfolgen. So hat, wenn drei Unbekannte da sind, der Nenner

$$1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Glieder; sie sind zusammengesetzt aus den drei Buchstaben Z, Y, X, die der Reihe nach die Exponenten

$$123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321$$

erhalten. Man gibt diesen Gliedern die Zeichen $+$ oder $-$ nach folgender Regel. Wenn auf einen Exponenten in demselben Gliede mittelbar oder unmittelbar ein kleinerer Exponent folgt, so will ich dies ein Derangement nennen. Man zähle nun bei jedem Gliede die Derangements. Ist ihre Anzahl gerade oder Null, so erhält das Glied das Zeichen $+$, ist sie ungerade, so erhält das Glied das Zeichen $-$. Z. B. gibt es in dem Gliede

$$Z^1 Y^2 X^3$$

kein Derangement. Dieses Glied erhält also das Zeichen $+$. Das Glied

$$Z^3 Y^1 X^2$$

hat auch das Zeichen $+$, weil es zwei Derangements aufweist, 3 vor 1 und 3 vor 2. Dagegen erhält das Glied

$$Z^3 Y^2 X^1,$$

das drei Derangements aufweist, 3 vor 2, 3 vor 1 und 2 vor 1, das Zeichen $-$.

Nachdem so der gemeinsame Nenner gebildet ist, erhält man den Wert von z, indem man diesem Nenner einen Zähler gibt, den man dadurch bildet, daß man in allen Gliedern Z in A verwandelt. Der Wert von y ist ein Bruch, der denselben Nenner hat und als Zähler eine Größe, die sich ergibt, wenn man in allen Gliedern des Nenners Y in A verwandelt. In ähnlicher Weise findet man den Wert der übrigen Unbekannten.

Allgemein zu reden ist das Problem bestimmt. Aber es kann besondere Fälle geben, wo es unbestimmt bleibt, und andere, wo es unmöglich wird.

Das geschieht, wenn man den gemeinsamen Nenner gleich Null findet; d. h. bei nur zwei Gleichungen, wenn

$$Z^1 Y^2 - Z^2 Y^1 = 0,$$

bei drei Gleichungen, wenn

$$Z^1 Y^2 X^3 - Z^1 Y^3 X^2 - Z^2 Y^1 X^3 + Z^2 Y^3 X^1 + Z^3 Y^1 X^2 - Z^3 Y^2 X^1 = 0$$

ist usw. Sind alsdann die Größen $A^1, A^2, A^3, \ldots$ so beschaffen, daß auch die Zähler gleich Null sind, so ist das Problem unbestimmt, denn die Brüche $\frac{0}{0}$, die die Werte der Unbekannten geben müßten, sind unbestimmt. Wenn dagegen die Größen $A^1, A^2, A^3, \ldots$ so beschaffen sind, daß, während der gemeinsame Nenner gleich Null ist, die Zähler oder einige von ihnen nicht Null sind, so ist das Problem unmöglich oder es sind wenigstens die unbekannten Größen, die es lösen können, alle oder zum Teil unendlich. Hat man z. B. die beiden folgenden Gleichungen:

$$2 = 3z - 2y,$$
$$5 = 6z - 4y,$$

so findet man

$$z = \tfrac{2}{0}, \quad y = \tfrac{3}{0}.$$

z und y sind also unendliche Größen, die sich zueinander verhalten wie 2 zu 3. Rechnete man die Unbekannten nach den gewöhnlichen Methoden aus, so käme man auf die sinnlose Gleichung

$$\tfrac{2}{3} = \tfrac{5}{6}.$$

Denn die erste Gleichung gibt

$$z = \tfrac{2}{3} y + \tfrac{2}{3}$$

und die zweite

$$z = \tfrac{4}{6} y + \tfrac{5}{6}.$$

Also hat man

$$\tfrac{2}{3} y + \tfrac{2}{3} = \tfrac{4}{6} y + \tfrac{5}{6} \quad \text{oder} \quad \tfrac{2}{3} = \tfrac{5}{6},$$

was ein Unsinn ist, wenn z und y endliche Größen sind. Wenn sie aber unendlich sind, so kann man ohne Sinnlosigkeit sagen, daß

$$z = \tfrac{2}{3} y + \tfrac{2}{3}$$

und gleichzeitig

$$z = \tfrac{2}{3} y + \tfrac{5}{6}$$

ist. Denn die endlichen Größen $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{6}$ sind im Vergleich zu den unendlichen Größen z und $\frac{2}{3} y$ nichts. Die beiden Gleichungen

$$z = \tfrac{2}{3} y + \tfrac{2}{3} \quad \text{und} \quad z = \tfrac{2}{3} y + \tfrac{5}{6}$$

reduzieren sich also auf

$$z = \tfrac{2}{3} y,$$

eine Gleichung, die nichts Widersprechendes hat.“

Zweites Kapitel.

Definition der n-reihigen Determinante.

§ 3. Paarungen zwischen zwei Systemen von n Dingen.

Wir betrachten zwei Systeme von n Dingen. Der Leser stelle sich, um ein anschauliches Beispiel zu haben, n Herren und n Damen vor, die auf einem Balle sind.

Wenn jedes Ding des einen Systems mit einem Ding des anderen Systems verbunden wird, also in unserem Beispiel jeder Herr eine Dame wählt, so wollen wir das eine Paarung zwischen den beiden Systemen nennen.

Eine solche Paarung kann man in folgender Weise bewirken. Man läßt die Herren in einer bestimmten Reihenfolge wählen. Der erste Herr hat dann die Auswahl unter n Damen, der zweite unter $n - 1$ und so fort. Der letzte Herr muß die zuletzt übriggebliebene Dame nehmen. Man sieht hieraus, daß es

$$n! = 1 \cdot 2 \ldots n$$

Paarungen zwischen den beiden Systemen gibt.

§ 4. Umpaarungen und Inversionen.

Den Übergang von einer Paarung zu einer neuen wollen wir als eine Umpaarung bezeichnen.

Die einfachsten Umpaarungen sind solche, wo nur zwei Paare abgeändert werden, also nichts weiter geschieht, als daß zwei Herren ihre Damen austauschen. Umpaarungen dieser Art nennen wir Transpositionen.

Jede Umpaarung läßt sich durch eine Reihe von Transpositionen herbeiführen.

Will man von der Paarung $\mathfrak{P}$ zu der Paarung $\overline{\mathfrak{P}}$ gelangen, so fasse man einen Herrn und eine Dame ins Auge, die bei $\overline{\mathfrak{P}}$, aber nicht bei $\mathfrak{P}$ ein Paar bilden. Sie befinden sich also bei $\mathfrak{P}$ in verschiedenen Paaren. Ändert man nur diese beiden Paare ab, so ist wenigstens schon eins von den neuen Paaren gewonnen. Sind noch nicht alle neuen Paare da, so setzt man das Verfahren fort. Nach höchstens $n - 1$ Schritten hat man die Paarung $\overline{\mathfrak{P}}$ erreicht.

Wir wollen nun die Damen mit Rangnummern $1, 2, \ldots, n$ versehen und zwei bestimmte Herren betrachten. Diese seien bei $\mathfrak{P}$ mit den Damen

r und s, bei $\overline{\mathfrak{P}}$ mit den Damen $\bar{r}$ bzw. $\bar{s}$ gepaart. Wenn die Differenzen

$$r - s \quad \text{und} \quad \bar{r} - \bar{s}$$

entgegengesetzte Zeichen haben, so wollen wir sagen, daß die betrachtete Herrenambe beim Übergange von $\mathfrak{P}$ zu $\overline{\mathfrak{P}}$ eine Inversion erfährt. Um zu wissen, wie viele Inversionen bei einer Umpaarung stattfinden, muß man jede der $\frac{1}{2}n(n-1)$ Herrenamben darauf untersuchen, ob sie eine Inversion erleidet oder nicht.

$\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ seien drei beliebige Paarungen. Bei der Umpaarung $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, d. h. beim Übergange von $\mathfrak{P}_1$ zu $\mathfrak{P}_2$ gebe es α, bei der Umpaarung $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ gebe es β Inversionen. Wie viele Inversionen gibt es dann bei der Umpaarung $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_3$? δ sei die Anzahl der Herrenamben, die sowohl bei $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ als auch bei $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ eine Inversion erfahren. Offenbar treten dann bei der Umpaarung $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_3$

$$(\alpha - \delta) + (\beta - \delta) = \alpha + \beta - 2\delta$$

Inversionen ein.

Dieses Resultat läßt sich leicht verallgemeinern.

$$\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{m+1}$$

seien $m + 1$ beliebige Paarungen. Bei der Umpaarung

$$\mathfrak{P}_\mu, \mathfrak{P}_{\mu+1} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

gebe es α_μ Inversionen und bei der Umpaarung

$$\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_{m+1}$$

α Inversionen. Dann ist

$$\alpha \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m \pmod{2}.$$

Man liest diese Formel: „α kongruent $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$ modulo 2". Sie bedeutet, daß α und $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$ sich um ein Vielfaches von 2 unterscheiden.

Jetzt wollen wir annehmen, daß die m Umpaarungen $\mathfrak{P}_\mu$, $\mathfrak{P}_{\mu+1}$ Transpositionen sind. Dann sind alle α_μ ungerade. Es gilt nämlich folgender Satz:

Bei einer Transposition findet immer eine ungerade Anzahl von Inversionen statt.

Besteht die Transposition in der Austauschung der Damen r und s $(r < s)$, so erleiden folgende Herrenamben Inversionen:

1. Die Herren der Damen r und s,

2. die Herren der Damen k und r, sowie die Herren der Damen k und s, wenn $r < k < s$ ist.

Außerdem finden keine Inversionen statt. Die Gesamtzahl der Inversionen ist somit

$$1 + 2(s - r - 1).$$

Wenn wir also annehmen, daß die m Umpaarungen $\mathfrak{P}_\mu$, $\mathfrak{P}_{\mu+1}$ Transpositionen sind, so haben wir:

$$\alpha_\mu \equiv 1 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

mithin

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m \equiv m \pmod{2}$$

und auch

$$\alpha \equiv m \pmod{2}.$$

α und m sind demnach entweder beide gerade oder beide ungerade. Damit haben wir folgenden Satz gewonnen:

Wenn eine Umpaarung sich durch m Transpositionen bewirken läßt, so ist m gerade oder ungerade, je nachdem die Umpaarung eine gerade oder ungerade Anzahl von Inversionen hervorbringt.

Wir haben, um die Inversionen zu zählen, die Damen mit Nummern versehen und auf die Herrenamben geachtet. Ebensogut hätten wir natürlich die Herren numerieren und auf die Damenamben achten können. Es ist auch ganz gleichgültig, wie wir die Damen bzw. die Herren numerieren. Unser obiger Satz zeigt, daß die Inversionenzahl, durch 2 dividiert, immer denselben Rest (0 oder 1) gibt.

Wenn eine Umpaarung eine gerade (ungerade) Anzahl von Inversionen mit sich bringt, wollen wir sie gerade (ungerade) nennen. Dann können wir unser Resultat so aussprechen:

Eine gerade Umpaarung läßt sich nur durch eine gerade, eine ungerade Umpaarung nur durch eine ungerade Anzahl von Transpositionen bewirken.

§ 5. Einteilung der Paarungen in zwei Klassen.

Wir können jetzt die $n!$ Paarungen zwischen zwei Systemen von n Dingen in zwei Klassen einteilen.

Wir rechnen $\mathfrak{P}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$ in dieselbe oder in verschiedene Klassen, je nachdem man von $\mathfrak{P}$ zu $\overline{\mathfrak{P}}$ durch eine gerade oder ungerade Anzahl Transpositionen gelangt*), je nachdem also die Umpaarung $\mathfrak{P}$, $\overline{\mathfrak{P}}$ gerade oder ungerade ist.

In jeder Klasse gibt es $\frac{1}{2}n!$ Paarungen. Vertauschen wir nämlich in jeder der $n!$ Paarungen zwei bestimmte Damen, so geht jede Paarung in eine Paarung anderer Klasse über.

Zeichnet man eine Paarung aus und nennt sie die Hauptpaarung, so pflegt man alle Paarungen, die nicht in dieselbe Klasse gehören (also durch eine ungerade Anzahl Transpositionen aus ihr entstehen), als ungerade Paarungen zu bezeichnen, die anderen als gerade.

*) Führt man diese Transpositionen in umgekehrter Reihenfolge aus, so gelangt man von $\overline{\mathfrak{P}}$ zu $\mathfrak{P}$.

§ 6. Symbolische Darstellung der Paarungen.

Um ein Symbol für eine Paarung zwischen zwei Systemen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ von n Dingen zu gewinnen, kann man so verfahren. Man belegt die n Dinge jedes Systems mit Namen, schreibt die Namen der Dinge $\mathfrak{S}_1$ in irgendeiner Reihenfolge in eine Zeile und darunter in eine zweite Zeile die Namen der Dinge $\mathfrak{S}_2$, aber so, daß immer die Namen gepaarter Dinge untereinanderstehen.

Man kann z. B. zur Benennung der Dinge jedes Systems die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ benutzen. Dann läßt sich eine Paarung durch das Symbol

$$\begin{pmatrix} r_1 \, r_2 \ldots r_n \\ s_1 \, s_2 \ldots s_n \end{pmatrix}$$

darstellen, wo $r_1, r_2, \ldots, r_n$ und $s_1, s_2, \ldots, s_n$ Permutationen von $1, 2, \ldots, n$ sind. Die Bedeutung dieses Symbols ist, wenn wir wieder das Beispiel der n Herren und n Damen benutzen, folgende:

Herr r_1 führt Dame s_1, Herr r_2 führt Dame s_2 usw. Für $r_1, r_2, \ldots, r_n$ (oder $s_1, s_2, \ldots, s_n$) darf man eine beliebige Permutation von $1, 2, \ldots, n$ setzen. $s_1, s_2, \ldots, s_n$ (bzw. $r_1, r_2, \ldots, r_n$) ist dann aber durch die Paarung völlig bestimmt. So stellen z. B. im Falle $n = 3$ die Symbole

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

dieselbe Paarung dar. Jedesmal steht nämlich unter 1 die 3, unter 2 die 1 und unter 3 die 2. Herr 1 führt also Dame 3, Herr 2 Dame 1, Herr 3 Dame 2.

Schreibt man das Symbol einer Paarung in der Form

$$\begin{pmatrix} 1 \; 2 \ldots n \\ r_1 \, r_2 \ldots r_n \end{pmatrix},$$

so kann man auf Grund von § 4 leicht angeben, ob sie mit der Paarung

$$\begin{pmatrix} 1 \; 2 \ldots n \\ 1 \; 2 \ldots n \end{pmatrix},$$

bei der je zwei gleichbenannte Dinge gepaart sind, in dieselbe Klasse oder in verschiedene Klassen gehört.

Es kommt darauf an, ob beim Übergange von

$$\begin{pmatrix} 1 \; 2 \ldots n \\ 1 \; 2 \ldots n \end{pmatrix} \text{ zu } \begin{pmatrix} 1 \; 2 \ldots n \\ r_1 \, r_2 \ldots r_n \end{pmatrix}$$

eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Inversionen eintritt. Die Herren μ und ν $(\mu < \nu)$ haben aber bei der ersten Paarung die Damen μ bzw. ν, bei der zweiten Paarung dagegen die Damen r_μ bzw. r_ν. Eine Inversion findet also dann und nur dann statt, wenn die Differenzen

$$\mu - \nu \quad \text{und} \quad r_\mu - r_\nu$$

entgegengesetzte Zeichen haben, wenn also $r_\mu > r_\nu$ ist.

Man hat also nachzuzählen, wie oft in der Permutation

$$r_1, r_2, \ldots, r_n$$

eine kleinere Zahl auf eine größere mittelbar oder unmittelbar folgt oder wie viele Derangements im Sinne CRAMERS (vgl. § 2, S. 4) vorhanden sind.

Man pflegt eine Permutation **gerade** oder **ungerade** zu nennen, je nachdem sie eine gerade oder ungerade Anzahl von Derangements aufweist.

Die Paarung

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_n \end{pmatrix}$$

ist also, **wenn man**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$$

als Hauptpaarung zugrunde legt, gerade oder ungerade, je nachdem

$$r_1, r_2, \ldots, r_n$$

eine gerade oder ungerade Permutation ist.

Dasselbe gilt von der Paarung

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \ldots & r_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Denn es ist gleichgültig, ob wir auf die Inversionen der Herrenamben oder der Damenamben achten.

In $r_1, r_2, \ldots, r_n$ gebe es ϱ und in $s_1, s_2, \ldots, s_n$ gebe es σ Derangements. Dann finden beim Übergange von

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} \quad \text{zu} \quad \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \ldots & r_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$$

ϱ Inversionen (von Damenamben) statt, beim Übergange von

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \ldots & r_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} \quad \text{zu} \quad \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \ldots & r_n \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \end{pmatrix}$$

dagegen σ Inversionen (von Herrenamben).

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \ldots & r_n \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \end{pmatrix}$$

ist also **gerade oder ungerade, je nachdem** $\varrho + \sigma$ **gerade oder ungerade ist.**

§ 7. Andere Auffassung des Symbols $\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{pmatrix}$.

Wir wollen jetzt eine andere Auffassung des Symbols

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{pmatrix}$$

auseinandersetzen, von der wir allerdings erst an einer späteren Stelle Gebrauch machen werden.

Der Leser denke sich n Dinge mit den Nummern $1, 2, \dots, n$ versehen. Den Übergang von einer solchen Numerierung zu einer neuen nennen wir eine Umnumerierung. Eine Umnumerierung ist im Grunde nichts anderes als eine Umpaarung. Denn eine Numerierung ist eine Paarung der n Dinge mit den Zahlen $1, 2, \dots, n$, eine Umnumerierung also in der Tat eine Umpaarung.

Um eine Umnumerierung zu beschreiben, muß man sagen, durch welche neue Nummer jede alte ersetzt wird. Setzen wir unter jede Nummer die neue Nummer, die an ihre Stelle tritt, so erhalten wir das Symbol

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{pmatrix}.$$

Dieses stellt also jetzt eine Umnumerierung oder Umpaarung dar, während es früher der Ausdruck für eine Paarung war.

Da eine Umnumerierung darin besteht, daß für jede alte Nummer eine neue substituiert wird, so pflegt man diese Operation eine Substitution in $1, 2, \dots, n$ zu nennen. In dem Symbol einer Substitution (Umnumerierung, Umpaarung) darf man die Spalten

$$\begin{matrix} r_1, & r_2, & \dots, & r_n \\ s_1 & s_2 & & s_n \end{matrix}$$

beliebig vertauschen. Denn es kommt nur darauf an, daß unter jeder Zahl der oberen Zeile (des Zählers der Substitution) in der unteren Zeile (dem Nenner der Substitution) die richtige Zahl steht. Man kann daher eine Substitution so schreiben, daß ihr Zähler oder ihr Nenner eine vorgeschriebene Permutation von $1, 2, \dots, n$ ist.

Man bezeichnet Substitutionen durch einzelne Buchstaben, wie S, T u. dgl.

Nimmt man zuerst die Substitution*)

$$S = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

vor, darauf die Substitution

$$T = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix},$$

*) Unter A, B, C sind Permutationen von $1, 2, \dots, n$ zu verstehen.

so ist das Resultat dasselbe, wie bei der Substitution

$$\binom{A}{C}.$$

Diese Substitution nennt man das Produkt von S und T (in dieser Reihenfolge) und bezeichnet sie mit ST.

Es ist nicht immer

$$ST = TS,$$

d. h. S und T sind nicht immer vertauschbar. Dies zeigt das Beispiel

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dagegen gilt für drei Substitutionen S, T, U die Formel

$$(ST)\,U = S\,(TU).$$

Um dies zu erkennen, schreibe man

$$S = \binom{A}{B}, \qquad T = \binom{B}{C}, \qquad U = \binom{C}{D}.$$

Dann ist

$$(ST)\,U = \binom{A}{C} \cdot \binom{C}{D} = \binom{A}{D}$$

und

$$S\,(TU) = \binom{A}{B} \cdot \binom{B}{D} = \binom{A}{D}.$$

Es gibt eine und nur eine Substitution E, für die

$$SE = S \quad \text{und} \quad ES = S$$

ist, wie man auch die Substitution S wählen mag. Es ist dies die Substitution

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

die darin besteht, daß jede der n Zahlen durch sich selbst ersetzt wird. Man nennt sie die Identität. Wo sie als Faktor auftritt, kann man sie streichen. Man benutzt deshalb für sie das Symbol 1.

Zu jeder Substitution S gibt es eine Substitution $\bar{S}$, so daß

$$S\bar{S} = 1$$

ist. Schreibt man

$$S = \binom{A}{B} \quad \text{und} \quad \bar{S} = \binom{B}{C},$$

so soll

$$\binom{A}{C} = 1$$

sein. Daraus ergibt sich

$$\bar{S} = \binom{B}{A}.$$

Offenbar ist auch

$$\bar{S} S = 1 .$$

Man nennt S und $\bar{S}$ zueinander inverse Substitutionen.

Die zu S inverse Substitution pflegt man mit S^{-1} zu bezeichnen. Man bemerke, daß

$$(S T)^{-1} = T^{-1} S^{-1}$$

ist, weil

$$S T T^{-1} S^{-1} = S S^{-1} = 1 .$$

Diese Bemerkung dehnt sich ohne weiteres auf Produkte von mehr als zwei Substitutionen aus.

Wir sagen, daß die Substitution S den Zyklus

$$(r_1 \, r_2 \ldots r_p)$$

enthält, wenn sie

$$\begin{array}{ll} r_1 & \text{durch } r_2, \\ r_2 & \text{durch } r_3, \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ r_{p-1} & \text{durch } r_p, \\ r_p & \text{durch } r_1 \end{array}$$

ersetzt oder, wie man auch sagt, $r_1, r_2, \ldots, r_p$ zyklisch vertauscht. $r_1, r_2, \ldots, r_p$ heißen die Elemente des Zyklus. Man denke sich die Zeile $r_1, r_2, \ldots, r_p$ so gebogen, daß ein Kreis entsteht (Abb. 1 zeigt dies für

$$\begin{array}{ccc} & r_3 & \\ r_2 & & r_4 \\ r_1 & & r_5 \\ & r_6 & \end{array}$$

Abb. 1.

den Fall $p = 6$). Durchlaufen wir den Kreis in geeignetem Sinne, so folgt auf jede Zahl gerade die, welche bei S an ihre Stelle tritt. So erklärt sich der Name Zyklus.

Es ist klar, daß die Zyklen

$$(r_1 \, r_2 \ldots r_{p-1} \, r_p), \quad (r_2 \, r_3 \ldots r_p \, r_1), \quad \ldots, \quad (r_p \, r_1 \ldots r_{p-2} \, r_{p-1})$$

identisch sind.

Wird bei S die Zahl r durch r ersetzt, so sagen wir, daß S den eingliedrigen Zyklus (r) enthält.

Wenn S den Zyklus $(r_1 \, r_2 \ldots r_p)$ enthält, so enthält S^{-1} den Zyklus $(r_p \, r_{p-1} \ldots r_1)$.

Es ist leicht, alle Zyklen zu finden, die in einer gegebenen Substitution stecken. Wir zeigen dies an dem Beispiel

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 7 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Hier wird 1 durch 1 ersetzt. S enthält also den eingliedrigen Zyklus (1). Ferner wird bei S

$$2 \text{ durch } 4, \quad 4 \text{ durch } 3, \quad 3 \text{ durch } 2$$

ersetzt. S enthält also den dreigliedrigen Zyklus (2 4 3).

Endlich wird bei S

$$5 \text{ durch } 7, \quad 7 \text{ durch } 8, \quad 8 \text{ durch } 6, \quad 6 \text{ durch } 5$$

ersetzt. S enthält also auch den viergliedrigen Zyklus (5 7 8 6).

Wir können den Zyklus $(r_1 r_2 \ldots r_p)$ als eine Substitution in $1, 2, \ldots, n$ betrachten, die darin besteht, daß $r_1, r_2, \ldots, r_p$ zyklisch vertauscht und die übrigen Zahlen durch sich selbst ersetzt werden. Ein eingliedriger Zyklus (r) bedeutet dann nichts anderes als die Identität.

Bei dieser Auffassung gilt folgender Satz: **Jede Substitution ist das Produkt ihrer Zyklen.**

So ist z. B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 7 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

das Produkt von

$$(1), \quad (2\ 4\ 3), \quad (5\ 7\ 8\ 6),$$

und die zu ihr inverse Substitution

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 6 & 8 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

das Produkt von

$$(1), \quad (3\ 4\ 2), \quad (6\ 8\ 7\ 5).$$

Man darf die Zyklen, da ihre Elemente durchweg verschieden sind, in beliebiger Reihenfolge nehmen. Sonst aber ist diese Zerlegung einer Substitution in Zyklen eindeutig.

Einen zweigliedrigen Zyklus wie (r, s) nennt man eine **Transposition**. Bei ihr werden die beiden Zahlen r und s vertauscht und alle übrigen Zahlen durch sich selbst ersetzt.

Der Zyklus $(r_1 r_2 \ldots r_p)$ ist im Falle $p > 1$ das Produkt der $p - 1$ Transpositionen

$$(r_1 r_2), \ (r_1 r_3), \ \ldots, \ (r_1 r_p)$$

in dieser Reihenfolge. In der Tat wird r_1 bei $(r_1 r_2)$ durch r_2 ersetzt und die folgenden Transpositionen lassen r_2 unberührt. r_2 wird bei $(r_1 r_2)$ durch r_1 ersetzt und r_1 bei $(r_1 r_3)$ durch r_3. Bei den folgenden Transpositionen bleibt r_3 unberührt. An die Stelle von r_2 tritt also r_3 usw.

Sind $C_1, C_2, \ldots C_r$ die Zyklen der Substitution S und besteht C_ϱ aus n_ϱ Elementen, so läßt sich S als Produkt von

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \ldots + (n_r - 1)$$

Transpositionen darstellen.

In § 4 sahen wir, daß eine Umpaarung sich durch eine Reihe von Transpositionen bewirken läßt und daß die Anzahl dieser Transpositionen entweder immer gerade oder immer ungerade ist. Die Umpaarungen zerfielen dementsprechend in zwei Klassen, gerade und ungerade. Das gilt nun auch von den Substitutionen, und wir sehen aus dem Obigen, daß die vorhin betrachtete Substitution S gerade oder ungerade ist, je nachdem die Summe $\sum (n_\varrho - 1)$ gerade oder ungerade ist. $\sum (n_\varrho - 1)$ ist gleich $N - r$, wobei N die Gesamtzahl der Elemente ist, die in den r Zyklen von S vorkommen. Es ist gleichgültig, ob man die eingliedrigen Zyklen mitberücksichtigt oder nicht.

Daß die Anzahl der Transpositionen, in die sich eine Substitution S zerlegen läßt, entweder immer gerade oder immer ungerade ist, läßt sich auch ohne Bezugnahme auf die früheren Paragraphen in folgender Weise zeigen.

Man bemerke, daß

$$(r_1 r_2 \ldots r_p)(s_1 s_2 \ldots s_q)(r_1 s_1) = (r_1 \ldots r_p\, s_1 \ldots s_q)$$

und

$$(r_1 \ldots r_p\, s_1 \ldots s_q)(r_1 s_1) = (r_1 r_2 \ldots r_p)(s_1 s_2 \ldots s_q)\,.$$

Hieraus folgt, daß ST, wenn S irgendeine Substitution und T eine Transposition ist, einen Zyklus mehr oder einen Zyklus weniger besitzt als S. Dabei muß man aber auch alle eingliedrigen Zyklen mitrechnen.

Nun sei

$$S = T_1 T_2 \ldots T_p$$

und $T_1, T_2, \ldots, T_p$ seien Transpositionen. Da jede Transposition zu sich selbst invers ist, so hat man

$$S^{-1} = T_p\, T_{p-1} \ldots T_1\,,$$

also

$$S T_p\, T_{p-1} \ldots T_1 = 1\,.$$

S habe k Zyklen. Dann hat $S T_p T_{p-1} \ldots T_1$

$$k + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_p$$

Zyklen, wobei

$$\varepsilon_1 \equiv 1,\ \varepsilon_2 \equiv 1, \ldots, \varepsilon_p \equiv 1 \pmod{2}$$

ist, weil jedes ε gleich $+1$ oder -1. Es wird daher

$$k + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_p \equiv k + p\,.$$

Da $ST_p\,T_{p-1}\ldots T_1$ die Identität ist, also n eingliedrige Zyklen hat, so ist

$$k+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_p=n\,,$$

mithin

$$n\equiv k+p \quad \text{oder} \quad p\equiv n-k\,.$$

Hieraus sieht man, daß p entweder immer gerade oder immer ungerade ist, wie man auch S in Transpositionen auflösen mag.

§ 8. Die n-reihige Determinante.

Wir betrachten n^2 Zahlen, die in quadratischer Anordnung vorliegen. Bezeichnen wir mit a_{rs} die Zahl, die in der r^{ten} Zeile und in der s^{ten} Spalte steht, so haben wir folgendes Schema:

$$\begin{matrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}\,. \end{matrix}$$

Man nennt ein solches Schema eine quadratische Matrix. Matrix bedeutet soviel wie Verzeichnis. Man denke an Matrikel und Immatrikulieren. Die a_{rs} heißen die Elemente der Matrix.

Wir wollen jetzt eine Paarung $\mathfrak{P}$ zwischen den Zeilen und Spalten der Matrix vornehmen. Jedes Paar von $\mathfrak{P}$ bestimmt ein Element der Matrix, nämlich das Element, das in der Zeile und in der Spalte des Paares steht. Ist z. B. die r^{te} Zeile mit der s^{ten} Spalte gepaart, so bestimmen beide das Element a_{rs}.

Mit $p(\mathfrak{P})$ werde das Produkt der n Elemente bezeichnet, die durch die n Paare von $\mathfrak{P}$ bestimmt werden.

Da es $n!$ Paarungen zwischen den Zeilen und Spalten unserer Matrix gibt, so sind $n!$ Produkte $p(\mathfrak{P})$ vorhanden.

Unter dem Symbol

$$\operatorname{sgn}\mathfrak{P},$$

welches man

„signum $\mathfrak{P}$“

lesen möge, soll $+1$ verstanden werden, wenn $\mathfrak{P}$ eine gerade, und -1, wenn $\mathfrak{P}$ eine ungerade Paarung ist. Als Hauptpaarung legen wir dabei

$$\begin{pmatrix}1 & 2 \ldots n\\ 1 & 2 \ldots n\end{pmatrix}$$

zugrunde, d. h. die Paarung, bei welcher jede Zeile mit der gleichnamigen Spalte gepaart ist.

Wir versehen jetzt jedes $p(\mathfrak{P})$ mit dem Faktor $\operatorname{sgn}\mathfrak{P}$ und nennen die Summe aller Produkte

$$\operatorname{sgn}\mathfrak{P}\cdot p(\mathfrak{P})$$

die **Determinante** unserer Matrix. n heißt die **Ordnung** der Determinante.

Für diese Determinante benutzt man nach Cayley die Bezeichnung

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Es ist also

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \operatorname{sgn} \mathfrak{P} \cdot p(\mathfrak{P}),$$

wobei sich die Summation über alle $n!$ Paarungen zwischen den Zeilen und Spalten der Matrix erstreckt.

Die einzelnen Produkte $\operatorname{sgn} \mathfrak{P} \cdot p(\mathfrak{P})$ heißen die **Glieder** der Determinante. Ausführlich geschrieben lautet ein solches Glied

$$\operatorname{sgn} \begin{pmatrix} r_1 r_2 \ldots r_n \\ s_1 s_2 \ldots s_n \end{pmatrix} \cdot a_{r_1 s_1} a_{r_2 s_2} \ldots a_{r_n s_n}.$$

Die Paarung, zu der es gehört, ist

$$\begin{pmatrix} r_1 r_2 \ldots r_n \\ s_1 s_2 \ldots s_n \end{pmatrix}.$$

Die r_1^{te} Zeile ist mit der s_1^{ten} Spalte, die r_2^{te} Zeile mit der s_2^{ten} Spalte gepaart usw. Das zu der Hauptpaarung

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots n \\ 1 & 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

gehörige Glied, welches

$$a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$$

lautet, nennt man das **Hauptglied** der Determinante und $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ die **Hauptelemente**.

Cauchy benutzt für die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

das Symbol

$$\sum \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}.$$

Wenn in jeder Zeile und in jeder Spalte nur ein Element von Null verschieden ist, so reduziert sich die Determinante auf ein einziges Glied, nämlich das Produkt jener Elemente mit dem zugehörigen Vorzeichen. Z. B. ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

§ 8 Andere Fassungen der Definition.

Man kann die Glieder der n-reihigen Determinante in der Form

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix} \cdot a_{1r_1} a_{2r_2} \dots a_{nr_n}$$

schreiben.

Nun wissen wir aus § 6, daß

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix}$$

gleich $+1$ oder -1 ist, je nachdem die Permutation

$$r_1, r_2, \dots, r_n$$

gerade oder ungerade ist.

Man kann daher die n-reihige Determinante auch definieren als die über alle Permutationen von $1, 2, \dots, n$ erstreckte Summe

$$\sum \operatorname{sgn}(r_1, r_2, \dots, r_n) \cdot a_{1r_1} a_{2r_2} \dots a_{nr_n}.$$

Dabei soll

$$\operatorname{sgn}(r_1, r_2, \dots, r_n)$$

gleich $+1$ oder -1 sein, je nachdem $r_1, r_2, \dots, r_n$ eine gerade oder ungerade Permutation ist.

$r_1, r_2, \dots, r_n$ ist eine gerade oder ungerade Permutation, je nachdem sie eine gerade oder ungerade Anzahl von Derangements aufweist.

Diese Definition der Determinante ist genau die von Leibniz (vgl. § 1). Nur benutzt er eine andere Regel zur Bestimmung von $\operatorname{sgn}(r_1, r_2, \dots, r_n)$. Vertauscht man in $r_1, r_2, \dots, r_n$ zwei Glieder, so wechselt die Paarung

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix}$$

ihre Klasse. $\operatorname{sgn}(r_1, r_2, \dots, r_n)$ geht also über in

$$-\operatorname{sgn}(r_1, r_2, \dots, r_n).$$

Hieraus entspringt die Leibnizsche Regel, daß zwei Produkte

$$a_{1r_1} a_{2r_2} \dots a_{nr_n} \quad \text{und} \quad a_{1s_1} a_{2s_2} \dots a_{ns_n},$$

die $n-2$ gemeinsame Faktoren haben, in der Determinante mit verschiedenen Zeichen auftreten.

Man kann die Glieder der n-reihigen Determinante auch in folgender Form schreiben

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} r_1\, r_2 \ldots r_n \\ 1\;\; 2 \ldots n \end{pmatrix} \cdot a_{r_1 1}\, a_{r_2 2} \ldots a_{r_n n}\,.$$

Die Paarung

$$\begin{pmatrix} r_1\, r_2 \ldots r_n \\ 1\;\; 2 \ldots n \end{pmatrix}$$

ist gerade oder ungerade, je nachdem

$$r_1,\; r_2,\; \ldots,\; r_n$$

eine gerade oder ungerade Permutation ist (vgl. § 6).

Die n-reihige Determinante läßt sich also definieren als die über alle Permutationen von 1, 2, ..., n erstreckte Summe

$$\sum \operatorname{sgn}(r_1,\; r_2,\; \ldots,\; r_n) \cdot a_{r_1 1}\, a_{r_2 2} \ldots a_{r_n n}\,.$$

Das ist die Definition von Cramer (vgl. § 2).

§ 10. Zweireihige und dreireihige Determinanten.

Im Falle $n = 2$ gibt es zwischen den Zeilen und Spalten nur die beiden Paarungen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die erste ist gerade, die zweite ungerade.

Zu der ersten gehört das Glied

$$a_{11}\, a_{22}\,,$$

zu der zweiten das Glied

$$-\, a_{12}\, a_{21}$$

in der Determinante.

Man hat also

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}\,.$$

Die Regel zur Berechnung einer zweireihigen Determinante können wir durch nebenstehende Figur veranschaulichen.

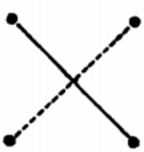

Abb. 2.

Die starklinig verbundenen Glieder geben ein Produkt, vor welches das Zeichen $+$, die punktiert verbundenen Glieder ein Produkt, vor welches das Zeichen $-$ zu setzen ist.

Im Falle $n = 3$ gibt es sechs Paarungen zwischen den Zeilen und Spalten, nämlich folgende:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir haben sie so aufgeschrieben, daß zwei benachbarte durch eine Transposition auseinander hervorgehen, mithin verschiedenen Klassen angehören.

Für die dreireihige Determinante gilt also folgende Formel:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{cases} \quad a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} \\ \\ -\,a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31}\,. \end{cases}$$

Die Regel zur Berechnung einer dreireihigen Determinante läßt sich auch durch eine Figur veranschaulichen (Abb. 3). Wieder sind die Glieder

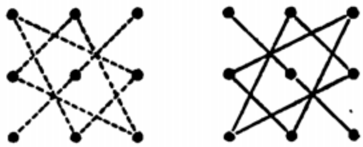

Abb. 3.

stark verbunden, deren Produkt das Zeichen + erhält, und die Glieder punktiert verbunden, deren Produkt das Zeichen — erhält.

§ 11. Beispiele.

Der Leser zeige durch Ausrechnen, daß

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^2$$

und

$$\begin{vmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2$$

ist.

Er verifiziere ferner, daß

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 \\ 0 & -1 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \text{dividiert durch} \quad \begin{vmatrix} a_2 & 1 \\ -1 & a_3 \end{vmatrix},$$

gleich

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}$$

ist.

Endlich beweise er die Formeln

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a_2 \\ a_2 & a_2 + a_3 \end{vmatrix} = a_1\,a_2\,a_3\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right),$$

und

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a_2 & 0 \\ a_2 & a_2 + a_3 & a_3 \\ 0 & a_3 & a_3 + a_4 \end{vmatrix} = a_1\,a_2\,a_3\,a_4\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4}\right).$$

Drittes Kapitel.

Einfachste Eigenschaften der Determinanten.

§ 12. Vertauschung der Zeilen mit den Spalten.

Die beiden Matrizen

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}$$

und

$$\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{matrix}$$

mögen in solcher Beziehung zueinander stehen, daß immer

$$b_{rs} = a_{sr}$$

ist.

Die k^{te} Zeile der einen Matrix ist also identisch mit der k^{ten} Spalte der andern. Um die eine Matrix aus der andern zu erhalten, muß man deren Zeilen als Spalten aufschreiben.

Die Umwandlung der Zeilen in Spalten und der Spalten in Zeilen läßt sich dadurch bewirken, daß man die Matrix um die Hauptdiagonale (d. h. die von links oben nach rechts unten laufende Diagonale) herumklappt.

Da die Zeilen und Spalten der ersten Matrix die Spalten bzw. Zeilen der zweiten Matrix sind, so ist jede Paarung $\mathfrak{P}$ zwischen Zeilen und Spalten der ersten zugleich eine Paarung zwischen Zeilen und Spalten der zweiten, und sgn $\mathfrak{P}$ hat in beiden Fällen denselben Wert; denn die Hauptpaarung der ersten Matrix, die darin besteht, daß jede Zeile mit der gleichnamigen Spalte gepaart wird, ist auch die Hauptpaarung der zweiten.

Jedes Glied der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ist also ein Glied der Determinante

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

d. h. beide Determinanten sind gleich.

Satz 1. Wenn die Zeilen und Spalten einer Determinante mit den Spalten bzw. Zeilen einer andern der Reihe nach identisch sind, so haben beide Determinanten denselben Wert.

Anders ausgedrückt:

Die Determinante bleibt ungeändert, wenn man die Matrix um die Hauptdiagonale herumklappt.

Der obige Satz ermöglicht es uns, jedes Theorem, das wir über die Zeilen einer Determinante beweisen, sofort auf die Spalten zu übertragen und umgekehrt.

§ 13. Vertauschung der Zeilen.

Wir betrachten wieder zwei Matrizen,

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}$$

und

$$\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{matrix}$$

Die zweite gehe aus der ersten durch Vertauschung zweier Zeilen hervor, etwa der r^{ten} und der s^{ten}

Jede Paarung $\mathfrak{P}$ zwischen Zeilen und Spalten der ersten Matrix ist zugleich eine Paarung zwischen Zeilen und Spalten der zweiten Matrix. Aber $\operatorname{sgn} \mathfrak{P}$ ist in dem einen Falle $+1$, im andern -1. Denn die Hauptpaarung der ersten Matrix ist nicht die Hauptpaarung der zweiten. Um sie in die Hauptpaarung der zweiten Matrix überzuführen, muß man die r^{te} und die s^{te} Zeile vertauschen, d. h. eine Transposition vornehmen. Die beiden Hauptpaarungen gehören also verschiedenen Klassen an, und aus diesem Grunde ist $\operatorname{sgn} \mathfrak{P}$ das eine Mal $+1$, das andere Mal -1.

Wir sehen, daß jedes Glied der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

wenn man es mit dem Faktor -1 versieht, ein Glied der Determinante

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

wird. Beide Determinanten sind also entgegengesetzt gleich.

Satz 2. Die Determinante multipliziert sich mit dem Faktor -1, wenn man in der Matrix zwei Zeilen vertauscht.

Nimmt man in der Matrix eine beliebige Vertauschung der Zeilen vor, so multipliziert sich die Determinante mit dem Faktor $+1$ oder -1, je nachdem die Vertauschung eine gerade oder ungerade ist, d. h. je nachdem sie sich durch eine gerade oder ungerade Anzahl sukzessiver Vertauschungen von nur zwei Zeilen bewirken läßt*).

Auf Grund von § 12 gilt dasselbe für die Spalten.

Satz 3. Wenn in der Matrix zwei Zeilen übereinstimmen, so ist die Determinante gleich Null.

Ist die Determinante gleich D, so erhalten wir durch Vertauschung der beiden übereinstimmenden Zeilen $-D$. Andererseits aber wird durch die Vertauschung dieser beiden Zeilen nichts an der Determinante geändert. Es ist also

$$D = -D,$$

d. h.

$$D = 0.$$

§ 14. Die Determinante als Funktion der Elemente einer Zeile.

Nach der Definition ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

gleich

$$\sum \operatorname{sgn}(r_1, r_2, \dots, r_n)\, a_{1r_1} a_{2r_2} \dots a_{nr_n},$$

wobei sich die Summation über alle Permutationen $r_1, r_2, \dots, r_n$ der Zahlen $1, 2, \dots, n$ erstreckt.

Man sieht, daß jedes Glied der Determinante ein und nur ein Element aus der k^{ten} Zeile als Faktor enthält. In dem Produkt

$$a_{1r_1} a_{2r_2} \dots a_{nr_n}$$

ist nämlich nur der Faktor a_{kr_k} der k^{ten} Zeile entnommen.

Wir wollen nun die Elemente der k^{ten} Zeile als Veränderliche betrachten und sie der Reihe nach mit

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

bezeichnen. Die übrigen Elemente sollen Konstanten sein. Fassen wir alle Glieder, die mit demselben x multipliziert sind, zusammen, so läßt sich die Determinante so schreiben:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n.$$

Die c sind dabei Konstanten.

*) Eine Vertauschung und eine Substitution (vgl. § 7) ist dasselbe.

Man nennt einen solchen Ausdruck in $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine lineare homogene Funktion von $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Es gilt also folgender Satz:

Satz 4. Die Determinante ist eine lineare homogene Funktion der Elemente jeder Zeile.

Hieraus lassen sich verschiedene Folgerungen ziehen.

Wenn man $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bezüglich durch $\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n$ ersetzt, wobei λ eine beliebige Zahl ist, so verwandelt sich

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

in

$$\lambda (c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n).$$

Darin liegt folgender Satz:

Satz 5. Multipliziert man alle Elemente einer Zeile mit dem Faktor λ, so multipliziert sich auch die Determinante mit dem Faktor λ.

Setzt man $\lambda = 0$, so ergibt sich, daß eine Determinante, bei der eine Zeile aus lauter Nullen besteht, selbst gleich Null ist.

Wenn

$$x_1 = y_1 + z_1,\ x_2 = y_2 + z_2,\ \ldots,\ x_n = y_n + z_n$$

ist, so wird

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

gleich der Summe von

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$$

und

$$c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots + c_n z_n.$$

Satz 6. Wenn alle Glieder der k^{ten} Zeile Binome sind, so läßt sich die Determinante als Summe zweier Determinanten schreiben. Man erhält den einen Summanden durch Streichung der ersten, den andern Summanden durch Streichung der zweiten Bestandteile jener Binome.

Ein ähnlicher Satz gilt, wenn die Glieder der k^{ten} Zeile oder die der k^{ten} Spalte (vgl. § 12) Summen von p Zahlen sind.

Beispiel. Die Determinante

$$\begin{vmatrix} aa' + bb', & ac' + bd' \\ ca' + db', & cc' + dd' \end{vmatrix}$$

ist nach Satz 6 gleich

$$\begin{vmatrix} aa' & ac' \\ ca' + db' & cc' + dd' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bb' & bd' \\ ca' + db' & cc' + dd' \end{vmatrix}.$$

Jede dieser beiden Determinanten läßt sich aber wieder nach Satz 6 zerlegen. Man findet also für die ursprüngliche Determinante

$$\begin{vmatrix} aa' & ac' \\ ca' & cc' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} aa' & ac' \\ db' & dd' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bb' & bd' \\ ca' & cc' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bb' & bd' \\ db' & dd' \end{vmatrix}.$$

Unter Benutzung von Satz 5 läßt sich diese Summe so schreiben:

$$ac\begin{vmatrix} a' c' \\ a' c' \end{vmatrix} + ad\begin{vmatrix} a' c' \\ b' d' \end{vmatrix} + bc\begin{vmatrix} b' d' \\ a' c' \end{vmatrix} + bd\begin{vmatrix} b' d' \\ b' d' \end{vmatrix}.$$

Nach Satz 3 hat man aber

$$\begin{vmatrix} a' c' \\ a' c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b' d' \\ b' d' \end{vmatrix} = 0.$$

Da ferner nach Satz 1 und 2

$$\begin{vmatrix} a' b' \\ c' d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' c' \\ b' d' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b' d' \\ a' c' \end{vmatrix}$$

ist, so ergibt sich schließlich

$$\begin{vmatrix} aa' + bb', & ac' + bd' \\ ca' + db', & cc' + dd' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a b \\ c d \end{vmatrix}\ \begin{vmatrix} a' b' \\ c' d' \end{vmatrix}.$$

Wir wollen mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (wie bisher) die Elemente der k^{ten} Zeile, mit

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

dagegen die Elemente einer andern Zeile bezeichnen. Ersetzen wir in der Determinante, die, wie wir wissen, gleich $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$ ist, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bezüglich durch

$$x_1 + \lambda y_1,\ x_2 + \lambda y_2,\ \ldots,\ x_n + \lambda y_n,$$

so verwandelt sie sich in

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + \lambda(c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n).$$

$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$ entsteht aber aus $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$, indem man die Elemente der k^{ten} Zeile durch die entsprechenden Elemente einer andern Zeile ersetzt. Tut man dies, so erhält man eine Determinante mit zwei übereinstimmenden Zeilen, die nach Satz 3 gleich Null ist.

Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

Satz 7. Addiert man zu den Elementen einer Zeile die mit λ multiplizierten entsprechenden Elemente einer andern Zeile, so bleibt die Determinante ungeändert.

Derselbe Satz gilt nach § 12 für die Spalten.

Addiert man zu den Elementen einer Zeile die mit λ multiplizierten Elemente einer zweiten, die mit μ multiplizierten Elemente einer dritten Zeile usw., so bleibt die Determinante ungeändert. Der Beweis ergibt sich durch mehrmalige Anwendung des Satzes 7.

§ 15. Stetigkeit der Determinante.

Aus der Definition der Determinante sehen wir, daß sich

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

aus den Elementen a_{sr} durch Multiplikation, Addition und Subtraktion zusammensetzt. Daraus ergibt sich folgender Satz:

Satz 8. Aus

$$\lim a_{rs} = \bar{a}_{rs} \quad (r, s = 1, 2, \dots, n)$$

folgt immer

$$\lim \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \dots & \bar{a}_{1n} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \dots & \bar{a}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{a}_{n1} & \bar{a}_{n2} & \dots & \bar{a}_{nn} \end{vmatrix}.$$

Um diesen Satz zu beweisen, braucht man sich nur an die Bedeutung des Limes zu erinnern.

$$\lim x_n = x$$

will sagen, daß fast alle x_n von x um weniger als ε differieren, wie auch das positive ε gewählt sein mag. „Fast alle" bedeutet „alle mit einer endlichen Anzahl von Ausnahmen".

Wenn

$$\lim x_n = x \quad \text{und} \quad \lim y_n = y$$

ist, so wird

$$\lim (x_n + y_n) = x + y$$

und

$$\lim (x_n y_n) = xy.$$

Ähnliches gilt für eine beliebige endliche Anzahl von Summanden und Faktoren. Dies genügt aber zum Beweise des Satzes 8.

Von Wichtigkeit ist für uns folgende Eigenschaft:

Satz 9. Eine verschwindende Determinante läßt sich als Grenzwert einer Folge von Null verschiedener Determinanten darstellen.

Wir wollen die Determinante

$$D(x) = \begin{vmatrix} a_{11} + x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + x & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} + x \end{vmatrix}$$

betrachten, die aus D dadurch entsteht, daß zu den Hauptelementen x addiert wird.

Von den $n!$ Gliedern der Determinante $D(x)$ enthält nur das Hauptglied

$$(a_{11} + x)(a_{22} + x) \ldots (a_{nn} + x)$$

in jedem Faktor ein x. Daraus geht hervor, daß $D(x)$, wenn man alle Klammern beseitigt, folgende Gestalt annimmt:

$$D(x) = x^n + h_1 x^{n-1} + \ldots + h_n .$$

$h_1, h_2, \ldots, h_n$ setzen sich aus den Elementen a_{rs} durch die Operationen der Addition, Subtraktion und Multiplikation zusammen.

In der Algebra wird bewiesen, daß $D(x)$ höchstens für n Werte von x gleich Null ist. Nimmt man also eine nach Null konvergierende Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ mit lauter verschiedenen Gliedern, so gibt es in der zugehörigen Folge

$$D(x_1),\ D(x_2),\ D(x_3),\ \ldots$$

höchstens n verschwindende Glieder. Nach Satz 8 ist nun

$$\lim D(x_p) = D .$$

Streicht man diejenigen $D(x_p)$, die gleich Null sind, so entsteht eine Folge nichtverschwindender Determinanten mit dem Grenzwert D.

Es genügt z. B. $x_p = 1/p$ zu setzen und in der Folge

$$1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \ldots$$

die k ersten Glieder zu streichen, wobei nur k genügend groß zu wählen ist.

§ 16. Kennzeichnende Eigenschaften der Determinante.

Die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

hat, wie wir wissen, folgende vier Eigenschaften:

1. Sie setzt sich aus den Elementen durch die Operationen der Addition, Subtraktion und Multiplikation zusammen.

2. Sie ist eine lineare homogene Funktion der Elemente jeder Zeile.

3. Sie multipliziert sich mit dem Faktor -1, wenn man zwei Zeilen miteinander vertauscht.

4. Sie reduziert sich auf 1, wenn die Hauptelemente gleich 1 und alle andern Elemente gleich 0 sind.

Diese vier Eigenschaften sind, wie wir jetzt zeigen wollen, für die Determinante **kennzeichnend**.

Auf Grund der Eigenschaften 1 und 2 hat man

$$D = \sum c_{r_1 r_2 \ldots r_n} a_{1 r_1} a_{2 r_2} \ldots a_{n r_n} ,$$