Elementare Berechnung der Logarithmen

eine Ergänzung der Arithmetik-Bücher

Von

Dr. Hermann Schubert
Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg

Leipzig
G. J. Göschensche Verlagshandlung
1903

Alle Rechte von der Verlagshandlung vorbehalten.

Spamersche Buchdruckerei, Leipzig.

Vorwort.

Dem Schüler werden die Logarithmentafeln in die Hand gegeben, ohne daß ihm dabei gesagt werden kann, wie es möglich ist, fünf oder gar noch mehr Dezimalstellen des Logarithmus einer vorliegenden Zahl aufzufinden. Zwar wird er aus der Definition des Logarithmus verstehen, daß log 3 deshalb gleich 0,47712 gesetzt werden muß, weil die hunderttausendste Potenz der Zahl Drei zwischen der 47 tausend 712-ten Potenz und der 47 tausend 713-ten Potenz der Zahl Zehn liegt. Doch wird kein Schüler glauben, daß jemals jemand die hunderttausendste Potenz von Drei durch aufeinanderfolgendes Multiplizieren mit Drei ausgerechnet hat. Dem Schüler muß daher eine Logarithmentafel zeitlebens wie ein **Wunderwerk** erscheinen, wenn ihm nicht, wenigstens in Prima, eine Methode gezeigt wird, durch die man, ohne zu große Mühen, Logarithmen berechnen kann. Zwar liefern die logarithmischen Reihen eine solche Methode. Doch sind die unendlichen Potenzreihen — mit Ausnahme der unendlichen geometrischen Reihe — aus dem Pensenplan der meisten Gymnasien verbannt. Es entsteht also die Frage, wie man ohne logarithmische Reihen Logarithmen berechnen kann, wenn man beim Lernenden keine weiteren mathematischen Kenntnisse als die eines Gymnasial-Primaners voraussetzen darf. Zu diesen Kenntnissen aber gehört außer der Arithmetik

der sieben Operationen*) Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzierung, Radizierung und Logarithmierung auch die Kenntnis des binomischen Lehrsatzes für positiv-ganzzahlige Exponenten.**) Dieser aber liefert uns das Mittel, um auf elementarem Wege — ohne logarithmische Reihen — eine Methode abzuleiten, durch die man die Logarithmen aller Zahlen genau berechnen kann, wo unter „genau" zu verstehen ist, daß man erstens einen Dezimalbruch berechnen kann, der sicher kleiner ist als der gesuchte Logarithmus, zweitens aber auch einen Dezimalbruch, der sicher größer ist als der gewünschte Logarithmus (hier § 6 und § 7), und zwar so, daß der Unterschied kleiner als ein Milliontel oder wenigstens kleiner als ein Hunderttausendtel wird.

Wenn hiernach die Kenntnis einer elementaren Methode, um Logarithmen zu berechnen, für einen Gymnasiasten, der logarithmische Reihen und natürliche Logarithmen nicht kennen lernt, geradezu notwendig erscheint, so dürfte eine solche Kenntnis auch für Schüler eines Realgymnasiums oder einer Oberrealschule didaktisch von Nutzen sein, zumal eine solche Methode auch Gelegenheit dazu bietet, sich im Rechnen mit Ungleichungen und im Einschließen irrationaler Zahlen

---

*) Ein systematischer Aufbau der Begriffe und Gesetze dieser sieben Operationen findet sich unter andern auch in des Verfassers Lehrbüchern:

1) „Sammlung von arithmetischen und algebraischen Fragen und Aufgaben, verbunden mit einem systematischen Aufbau der Begriffe und Gesetze der elementaren Arithmetik", Potsdam bei Aug. Stein 1883, vier Auflagen.

2) „Elementare Arithmetik" in der „Sammlung Göschen", 2. Aufl., Leipzig 1903.

3) „Elementare Arithmetik" in der „Sammlung Schubert", Leipzig 1899.

**) Vergl. des Verfassers „Niedere Analysis, Teil I" in der „Sammlung Schubert", Leipzig 1902.

in rationale Grenzen zu üben. Ich lege deshalb meine „Elementare Berechnung der Logarithmen“ nicht allein meinen Kollegen an Gymnasien, sondern den Mathematiklehrern an allen höheren Schulen vor, mit der Bitte, den Inhalt dieses kleinen Buches bei ihrem Unterricht verwerten zu wollen. Wie weit aber diese Verwertung geht, muß ich der Neigung des Unterrichtenden überlassen. Man braucht hier nur so weit zu gehen, daß man, ganz ohne Grenzberechnung, nachweist, daß die in § 5 mit D und E bezeichneten Gleichungen nahezu richtig sein müssen, und vielleicht auch, daß man die Methode der Binomialkoeffizienten nur ahnen läßt, indem man $\log 2$ und $\log 3$ je in zwei Grenzen einschließt, wie es in § 13 geschehen ist. Man kann aber auch, wenn man Zeit und Lust dazu hat, den Inhalt des Buches so weit verwerten, daß man den Schüler dahin bringt, daß er selbständig eine obere und eine untere Grenze für den Logarithmus einer aufgegebenen Zahl berechnet, sei es nach § 6 bis § 8, sei es nach § 13.

Oberhof i. Th., am 29. Juli 1903.

Hermann Schubert.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

I. Abschnitt. **Einleitendes.**

§ 1. Der binomische Lehrsatz 9
§ 2. Logarithmen und Logarithmentafeln 12
§ 3. Vorbereitende Untersuchungen 17

II. Abschnitt. **Das Tripelverfahren.**

§ 4. Ableitung der beiden Hauptformeln 27
§ 5. Vorläufige Berechnung von log 2 und log 3 . 31
§ 6. Berechnung von Grenzen für log 2 und log 3 . 38
§ 7. Berechnung von Grenzen für log 7, log 11, log 13, log 17, log 19 44
§ 8. Grenzunterschiede der Logarithmen der übrigen zweiziffrigen Zahlen 50
§ 9. Logarithmen von Zahlen mit mehr als zwei Ziffern 54
§ 10. Das Interpolationsverfahren 57
§ 11. Die Elimination der Konstanten d 60

III. Abschnitt. **Die Methode der Binomialkoeffizienten.**

§ 12. Ein Satz über die mit Binomialkoeffizienten multiplizierten Logarithmen aufeinanderfolgender Zahlen 67
§ 13. Die Auffindung zweier Grenzen für einen gesuchten Logarithmus bei Anwendung der Sieglitz-Methode 74
§ 14. Auffindung von Grenzen für die Logarithmen aller Primzahlen bei planmäßigem Vorgehen 78
§ 15. Ein Zusatz zur Sieglitzformel 84

I. Abschnitt.

Einleitendes.

§ 1. Der binomische Lehrsatz.

Von der Theorie der binomischen Entwickelung und der Binomialkoeffizienten sei hier nur einiges zusammengestellt, was im folgenden Anwendung findet. Schon in der elementarsten Arithmetik wird die Verwandelung von $(a+b)^2$ bezw. $(a+b)^3$ in eine Summe gelehrt. Es ist nämlich:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

und

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

oder, wenn $a=1$, $b=x$ gesetzt wird,

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$$

und

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3.$$

Es ist nun klar, daß, wenn man $(1+x)^3$ wieder mit $1+x$ multipliziert, links $(1+x)^4$ herauskommt und rechts eine Summe von fünf Summanden, deren erster 1 und deren fünfter x^4 heißt, während der zweite ein Vielfaches von x, der dritte ein Vielfaches von x^2, der vierte ein Vielfaches von x^3 wird. So weitergehend, erkennt man, daß

$(1+x)^n$ gleich $1 + n_1 x + n_2 x^2 + n_3 x^3 + \ldots n_{n-1} x^{n-1} + x^n$

gesetzt werden kann, wo die Zahlen n_1, n_2, n_3, $\ldots n_{n-1}$ noch in ihrer Abhängigkeit von n zu bestimmen sind. Man nennt diese Zahlen „Binomialkoeffizienten“, und zwar bezeichnet man n_i als den i-ten Binomialkoeffizienten der