Geometrische Aufgaben

nach

der Methode der Griechen

bearbeitet

von

Dr. W. A. Diesterweg

ord. Professor der Mathematik auf der königl. preuss.
Rheinuniversität.

Mit XIV. Kupfertafeln.

B e r l i n
b e y G e o r g R e i m e r
1 8 2 5.

Den Herren Professoren

M. BLAND

i n C a m b r i d g e ,

IO. WILH. CAMERER

i n S t u t t g a r t ,

KARL FR. HAUBER

i n M a u l b r o n n ,

IOHN LESLIE

i n E d i n b u r g ,

den gründlichen Kennern

der Geometrie der Griechen,

mit ausgezeichneter Hochachtung

g e w i d m e t

von dem Verfasser.

Vorrede.

Da die geometrische Analysis nichts anderes zum Gegenstande hat, als die Zurückführung der Auflösung einer Aufgabe, oder des Beweises eines Lehrsatzes auf die näheren, oder entfernteren Bedingungen, von welchen die Auflösung, oder der Beweis abhängt, so leuchtet die Wichtigkeit des Studiums derselben für den jungen Mathematiker von selbst in die Augen. Eine vieljährige Erfahrung hat auch den Unterzeichneten gelehrt, daß gerade diejenigen unter den Studierenden, welche das grössere Talent für das mathematische Studium besitzen, das grössere Interesse für das Studium der geome-

trischen Analysis zeigen. Die Vorlesungen über diese Disciplin der Mathematik gehören deshalb zu den angenehmsten, welche der Unterzeichnete zu halten hat. Er hatte darin Veranlassung, eine große Anzahl alter und neuer Aufgaben nach der Methode der Griechen zu bearbeiten. Eine Auswahl aus denselben ist die vorliegende Sammlung, welche zunächst für seine Vorlesungen bestimmt ist, um in denselben auf sie zurück zu kommen, und seinen Zuhörern Gelegenheit zu eigener selbstständiger Bearbeitung darzubieten. Möge sie zugleich als ein Beitrag zur Belebung des geometrischen Studiums angesehen werden, und auch in größerem Kreise, besonders unter den Schulmännern, Berücksichtigung und Theilnahme finden! Einer Belebung scheint das geometrische Studium überhaupt, das der Schriften der Griechen insbesondere zu bedürfen, in einer Zeit, in welcher der Calcul über die Gebühr erhoben, und seine Anwendung auf geometrische Lehren vorzugsweise empfohlen wird. Der Verfasser hegt die lebendige Ueberzeugung, laß dieses Verfahren, wenn es den rein-geometrischen Weg ausschließet, der Wis-

senschaft zum Schaden gereichen werde, da ihm die Geometrie mehr Mathematik zu enthalten scheint, als der Calcul. — Möge die Herausgabe dieser Sammlung zugleich als eine Erfüllung des in der Vorrede zur Bearbeitung der Bücher des Apollonius von Perga *de sectione determinata* unbestimmt gegebenen Versprechens angesehen werden!

Mehrere der nachfolgenden Aufgaben, namentlich Aufg. 54. dritte Analysis, Aufg. 56. zweite Analysis, Aufg. 86. 89. 95. 100. zweite Aufl., Aufg. 102. 111. 119. 120. 125. 126. 127., verdanken die Leser der gefälligen Mittheilung des Herrn *Th. Eschweiler*, Lehrers der Mathematik und Physik an dem Carmeliter-Collegium zu Köln am Rhein, eines jungen Mannes, welcher seltene Eigenschaften in sich vereiniget, und mit gleicher Leichtigkeit in dem Felde der Geometrie und dem des Calculs arbeitet, dessen Lehrgeschicklichkeit auch schon vielfältige Anerkennung gefunden hat und je länger, je mehr fin-

VIII*Vorrede.*

den wird. Aufgabe 94. rührt von einem hoffnungsvollen Studierenden der hiesigen Universität, Herrn *Fr. Ley*, her.

**Bonn im Februar
1825.**

Diestérweg.

S a m m l u n g

Geometrischer Aufgaben.

Aufgabe 1. (Fig. 1.)

Ein Dreieck zu beschreiben, in welchem die Grundlinie der gegebenen geraden Linie g , der Winkel der Spitze dem gegebenen Winkel α , und die Schenkelsumme der gegebenen geraden Linie S gleich sey.

Analysis.

Es sey $\triangle ABC$ das verlangte, so liegt, wegen der gegebenen Grundlinie BC und des gegebenen Winkels BAC , der Punkt A auf dem Umfange eines der Größe und, wenn BC als der Lage nach gegeben angesehen wird, der Lage nach gegebenen Kreisabschnittes (s. des Apollonius von Perga ebene Oerter, wiederhergestellt von Rob. Simson, übersetzt von Camerer, Leipz. 1796. pag. 33.). Macht man $EA=AC$ und zieht die gerade Linie EC , so ist $\angle BEC = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \alpha$, also liegt gleichfalls der Punkt E auf dem Umfange eines der Lage und Größe nach gegebenen Kreisabschnittes (s. Apollonius l. c.). Da überdieß $BE = \left\{ \begin{array}{l} BA + AE \\ AC \end{array} \right\} S$

so liegt der Punkt E auch auf dem Umfange eines anderen, der Größe und Lage nach gegebenen Kreises (Apollonius ebene Oerter pag. 33.), folglich ist der Punkt E , mithin die Lage der geraden Linie BE (Eu-

klids Data, verb. von R. Simson, übers. von Schwab, Stuttgart 1780. Satz 29.), somit der Punkt A (Dat. 28.) und das ganze Dreieck ABC (Dat. 29.) gegeben.

Construction.

Man beschreibe über $BC=g$ einen des Winkels α fähigen Kreisabschnitt BOC, mache $BD=DC$, $BDO=R$, ziehe die gerade Linie BO, und beschreibe aus O als Mittelpunkt mit einem Radius $=BO$ einen Kreis. Auch werde aus B als Mittelpunkt mit einem Radius $=S$ ein Kreis beschrieben, welcher den zuletzt beschriebenen in E erreiche. Zieht man die den zuerst beschriebenen Kreis in A schneidende gerade Linie BE, und verbindet die Punkte B, C mit A durch die geraden Linien BA, AC, so ist $\triangle BAC$ das verlangte.

Determination.

Vermöge El. I. 20. muß $S > g$ seyn.

Damit der dritte Kreis den zweiten Kreis erreiche, muß seyn $S \overset{<}{=} BR$ (Euklids Elemente III. 15.), wenn BR ein Durchmesser des zweiten Kreises ist.

Nun ist $\left. \begin{array}{l} CB \\ g \end{array} \right\} : BR = \sin. \frac{1}{2} \alpha : 1$ (Diesterwegs Lehrbuch der Trigonometrie. Bonn 1824. Lehrsatz 11.)

also muß seyn $g : S \overset{>}{=} \sin. \frac{1}{2} \alpha : 1$ (El. V. 8.)

Beweis.

$$\text{Es ist } g : S \overset{>}{=} \left. \begin{array}{l} \sin. \frac{1}{2} \alpha : 1 \\ CB : BR \end{array} \right\}$$

also $S \overset{<}{=} BR$ (El. V. 10.).

Da auch $S > BC$ seyn muß, so berührt (Fig. 1. a.), oder schneidet (Fig. 1. b.) der dritte Kreis den Bogen

Aufgabe 2.

9

BEC in einem Punkte E. Auch ist, wenn die gerade Linie EC gezogen wird, $BAC = \frac{1}{2}BAC + ACE$ (El. III. 20.)

$$\text{also } \frac{1}{2}BAC = ACE$$

$$\text{folglich } EA = AC$$

$$\text{mithin } BA + AC = \begin{cases} BA + AE \\ BE \\ S \end{cases}$$

Da auch $BAC = \alpha$ (Constr.), so ist $\triangle ABC$ das verlangte.

Zusatz 1.

Der Punkt A (Fig. 1. a.) bestimmt eine gröfsere Schenkelsumme, als jeder andere Punkt des Bogens BAC, und jeder demselben näher liegende eine gröfsere, als der entferntere.

Zusatz 2.

Im Fall des Schneidens giebt es zwey Dreiecke mit der gegebenen Eigenschaft, wie von selbst erhellet.

Anmerkung.

In ganz ähnlicher Art löst sich die Aufgabe aufzulösen, wenn statt der Schenkelsumme die Schenkeldifferenz gegeben ist.

Aufgabe 2.

Ein Dreieck zu beschreiben, in welchem die Grundlinie und Höhe gegebenen geraden Linien, der Winkel der Spitze einem gegebenen Winkel gleich seyn.

Analysis.

Wenn die Grundlinie als der Lage nach gegeben angenommen wird, so liegt wegen der der Gröfse nach

gegebenen Grundlinie und des gegebenen Winkels der Spitze die Spitze auf einem der Größe und Lage nach gegebenen Kreisumfang (Apollonius ebene Oerter p. 33.). Wegen der gegebenen Höhe liegt dieselbe auf einer der Lage nach gegebenen geraden Linie (Apollonius ebene Oerter p. 35.). Sie ist also gegeben (Dat. 28.), somit das ganze Dreieck gegeben.

Constr. Det. Bew.

ergeben sich aus dem Gesagten von selbst.

Anmerkung.

Ist statt der Höhe die Größe der von der Spitze zu dem Halbierungspunkte der Grundlinie gezogenen geraden Linie gegeben, so wird die Aufgabe eben so leicht aufgelöst, als die vorhergehende.

Aufgabe 3. (Fig. 2.)

Ein Dreieck zu beschreiben, in welchem die Grundlinie der gegebenen geraden Linie g , der Winkel der Spitze dem gegebenen Winkel α , das Rechteck der Schenkel dem Quadrate der gegebenen geraden Linie β gleich sey.

Analysis.

Es sey $\triangle ACB$ das verlangte, so liegt, wenn AB als der Lage nach gegeben angenommen wird, der Punkt C wegen der der Größe nach gegebenen Grundlinie AB und des gegebenen Winkels ACB , auf einem der Größe und Lage nach gegebenen Kreisumfang (Apollonius ebene Oerter pag. 33.). Wenn O der Mittelpunkt und CR der Diameter dieses Kreises ist, auch die gerade Linie BR gezogen wird, so ist, wenn $CKA=R$,

$$\triangle ACK \sim \triangle BCR \text{ (El. VI. 4.)}$$

$$\text{also } AC : CK = RC : CB$$

$$\text{folglich } RC \cdot CK = AC \cdot CB \text{ (El. VI. 16.)}$$

$$\qquad \qquad \qquad \beta^2 \text{ (p. hyp.)}$$

$$\text{mithin } RC : \beta = \beta : CK \text{ (El. VI. 17.)}$$

demnach ist CK (Dat. 2.) der Größe nach gegeben, also liegt C auf einer der Lage nach gegebenen geraden Linie (Apoll. ebene Oerter p. 35.), folglich ist (Dat. 28.) der Punkt C, somit $\triangle ABC$ gegeben.

Construction.

Man beschreibe über der geraden Linie AB, welche =g gemacht wird, einen des Winkels α fähigen Kreisabschnitt, verbinde den Punkt A mit dem Mittelpunkte O durch die gerade Linie AO, mache $BAG = BAE = R$, $EA = AO$, $DA = \frac{1}{2}\beta$, $FA = \beta$, $AFG = AED$, $GC \parallel AB$, und verbinde den Durchschnitt dieser Linie und des Kreises mit den Punkten A, B durch die geraden Linien AC, CB, so ist $\triangle ABC$ das verlangte.

Determination.

Damit GC den Kreis erreiche, muß $AG \perp LH$ seyn, wenn $AL = LB$, $ALH = R$, und H der Durchschnitt der Linie LH mit dem Umfange des Kreises ist.

$$\text{Es ist } \left. \begin{array}{l} LA : AO \\ \frac{1}{2}g \\ g : 2AO \end{array} \right\} = \sin. \alpha : 1 \text{ (El. III. 20.)}$$

$$\text{Ferner ist } \left. \begin{array}{l} EA : AD \\ \frac{1}{2}\beta \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} FA : AG \\ \beta \end{array} \right\} \text{ (El. VI. 4.)}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2EA : \beta \\ 2AO \end{array} \right\}$$

$$\text{also ist } g : \beta = \beta : \sin. \alpha : AG$$

Endlich ist $AL : LH = 1 : \cot. \frac{1}{2}\alpha$ (Diesterwegs Trigon. Lehre. 11 Zus. 2.)
 $\frac{1}{2}g$

folglich $LH = \frac{1}{2}g \cdot \cot. \frac{1}{2}\alpha$

mithin muß seyn

$$g : \beta > \left\{ \begin{array}{l} \beta \sin. \alpha \\ 2\beta \sin. \frac{1}{2}\alpha \cdot \cos. \frac{1}{2}\alpha \\ 4\beta \overline{\sin. \frac{1}{2}\alpha}^2 \end{array} \right\} : \frac{1}{2}g \cdot \cot. \frac{1}{2}\alpha$$

(Diesterwegs Trigon. nom. pag. 13.)

$$: g$$

somit $g^2 > 4\beta^2 \overline{\sin. \frac{1}{2}\alpha}^2$ (Propositionum de rationibus inter se diversis demonstrationes ed. Hauber, Tub. 1793. §. 53.)

also $g > 2\beta \sin. \frac{1}{2}\alpha$.

Beweis.

Es ist $g > 2\beta \sin. \frac{1}{2}\alpha$ (Det.)

also $g^2 > 4\beta^2 \overline{\sin. \frac{1}{2}\alpha}^2$

folglich $g : \beta > \left\{ \begin{array}{l} 4\beta \overline{\sin. \frac{1}{2}\alpha}^2 : g \text{ (Hauber §. 53.)} \\ \beta \sin. \alpha : \frac{1}{2}g \cdot \cot. \frac{1}{2}\alpha \\ LH, \text{ wie aus der Det. erhellet,} \end{array} \right.$

mithin ist $AG < LH$ (El. V. 10.)

dennach berührt (Fig. 2. a.), oder schneidet (Fig. 2. b.) die Linie GC den Kreis. Auch ist

$$\begin{aligned} AC \cdot CB &= 2AO \cdot CK, \text{ wenn } CKA = R \text{ (El. VI. 4. 14.)} \\ &= 2EA \cdot AG \\ &= 2DA \cdot AF \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} AC \cdot CB \\ &= 2EA \cdot AG \\ &= 2DA \cdot AF \end{aligned}} \right\} \text{(Constr.)}$$

$$\beta^2 \text{ (El. VI. 17.).}$$

Da auch $ACB = \alpha$, $AB = g$, so ist $\triangle ABC$ das verlangte.

Aufgabe 4.

9

Zusatz 1.

Es erhellet von selbst, daß es im Fall eines Durchschnittes (Fig. 2. b.) zwey Dreiecke mit der gegebenen Eigenschaft giebt.

Zusatz 2.

Da $g > 2\beta \sin. \frac{1}{2}\alpha$ seyn muß (Det.)

also $\beta : g < 1 : 2 \sin. \frac{1}{2}\alpha$ (Hauber §. 52.)

folglich $\beta : \frac{1}{2}g < 1 : \sin. \frac{1}{2}\alpha$
} HA : AL

so muß $\beta < AH$ seyn.

Zusatz 3.

Da (Fig. 2. b.) $AH \cdot HB = \begin{cases} 2OA \cdot AL, & \text{wenn die gerade} \\ & \text{Linie HB gezo-} \\ & \text{gen wird (El. VI.} \\ & \text{4. 14.)} \\ 2OA \cdot AQ, & \text{wenn } HQ \parallel AG, \end{cases}$

so ist $AH \cdot HB > \begin{cases} 2OA \cdot AG \\ AC \cdot CB \end{cases}$

also bestimmt der Punkt H ein größeres Reckteck, als jeder andere Punkt des Bogens AHB, und jeder demselben näher liegende ein größeres, als der entferntere.

Zusatz 4.

Wenn auch $g > 2\beta \cos. \frac{1}{2}\alpha$

also $\beta : g < 1 : 2 \cos. \frac{1}{2}\alpha$ (Hauber §. 52.)

Aufgabe 4.

folglich $\beta : \frac{1}{2}g = 1 : \left\{ \begin{array}{l} \cos. \frac{1}{2}\alpha \\ \sin. AH^1L, \text{ wenn (Fig. 2. b.) HL} \\ \text{bis zu d. Durchschnitte} \\ \text{H}^1 \text{ mit dem Kreise ver-} \\ \text{längert wird.} \\ H^1A : AL, \text{ wenn die gerade Linie} \\ \text{AH}^1 \text{ gezogen wird.} \end{array} \right.$

mithin $\beta = H^1A$ (El. V. 10.)

somit $\beta^2 = H^1A^2$
 $2OA \cdot AG \left\{ \begin{array}{l} AH^1 \cdot H^1B, \text{ wenn man die gerade Li-} \\ \text{nie H}^1B \text{ zieht (El. 1. 4.),} \\ 2AO \cdot H^1L, \text{ wenn G}^1A = AG \text{ ge-} \\ \text{macht wird,} \end{array} \right.$

demnach $AG^1 = LH^1$

also berührt, oder schneidet auch die gerade Linie G^1C , welche $\perp AB$ gezogen wird, den Kreisumfang, und bestimmt ein Dreieck AH^1B , oder zwey Dreiecke AC^1B auf der gegebenen Grundlinie mit einem Winkel an der Spitze, welcher den Winkel α zu $2R$ ergänzt, und einem Rechtecke der Schenkel AC , CB , welches $= 2AO \cdot CK$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 2OA \cdot AG^1 \\ \beta^2. \end{array} \right.$$

Aufgabe 4.

Ein Dreieck zu beschreiben, in welchem die Grundlinie der gegebenen geraden Linie g , der Winkel der Spitze dem gegebenen Winkel α und das Schenkelverhältniß dem Verhältnisse der gegebenen geraden Linien $p : q$ gleich sey.

Analysis.

Es sey $\triangle BAC$ das verlangte, so ist dasselbe wegen des gegebenen Winkels der Spitze und des gegebenen Verhältnisses der Seiten der Art nach (Dat. 44.), wegen der gegebenen Grundlinie auch der Größe nach (Dat. 56.), mithin sind die Seiten desselben (Dat. 60.), somit ist das Dreieck gegeben.

Construction.

Man beschreibe über der geraden Linie $BC=g$ einen des gegebenen Winkels α fähigen Kreisabschnitt BAC , mache $BCD=\alpha$, $CP=p$, $CQ=q$, $BD \parallel PQ$, und ziehe den Durchschnitt A der Linie BD mit dem Kreisbogen durch die gerade Linie AC mit dem Punkte C zusammen, so ist $\triangle ABC$ das verlangte.

Beweis.

Es ist $\triangle BAC \sim \triangle BCD$ (El. VI. 4.)

$$\begin{aligned} \text{also } \underline{BA:AC=BC:CD} \\ = PC:CQ \\ = p:q \end{aligned}$$

Da auch $BC=g$, $BAC=\alpha$, so hat $\triangle BAC$ die gegebenen Eigenschaften.

Aufgabe 5. (Fig. 4.)

Ein Dreieck zu beschreiben, in welchem die Grundlinie der gegebenen geraden Linie g , der Winkel der Spitze dem gegebenen spitzen Winkel α , und die Summe der Quadrate der Schenkel dem Doppelten des Quadrates der gegebenen geraden Linie β gleich sey.

Analysis. (Fig. 4. b.)

Ea sey $\triangle ABC$ das verlangte, so ist, wenn $AEB=R$,

$$BA^2=AE^2+EB, AC^2=AE^2+EC^2 \text{ (El. I. 47.)}$$

$$\text{also } \frac{BA^2+AC^2}{2\beta^2} = \frac{2AE^2 + \{BE^2+EC^2\}}{\{2BD^2+2DE^2\}} \text{ (El. II. 9.)}$$

$$= \frac{2BD^2+2DA^2}{2BD^2+2DE^2}$$

$$\text{folglich } \beta^2 = \frac{BD^2 + DA^2}{\frac{1}{4}g^2}$$

$$\text{mithin } \beta^2 - \frac{1}{4}g^2 = DA^2$$

demnach ist DA^2 , somit auch DA gegeben; also liegt der Punkt A auf dem Umfange eines der Gröfse, und wenn BC auch als der Lage nach gegeben angesehen wird, auch der Lage nach gegebenen Kreises (Dat. 30.). Da er auch wegen des gegebenen Winkels BAC und der der Gröfse nach gegebenen Linie BC auf dem Umfange eines der Gröfse, und in so fern BC auch der Lage nach gegeben ist, auch der Lage nach gegebenen Kreisabschnittes liegt (Apollonius ebene Oerter p. 33.), so ist derselbe, und mit ihm das Dreieck gegeben.

Construction.

Man mache $BC=g$, $BD=DC$, $BDO=R$, beschreibe aus B als Mittelpunkt mit einem Radius $=\beta$ einen Kreis, welcher der Linie DO in O begegne, beschreibe aus D als Mittelpunkt mit einem Radius $=DO$ einen Kreis, welcher den Kreisbogen BAC in A erreiche, und ziehe die geraden Linien BA , AC , so ist $\triangle ABC$ das verlangte.

Determination.

Da vermöge El. II. 13. die Summe der Quadrate der Schenkel, welche einen spitzen Winkel einschließen,

> als das Quadrat der gegenüber liegenden Seite, so muß seyn, $2\beta^2 > g^2$. Damit der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius = BO beschriebene Kreis den über BC liegenden Kreisbogen erreiche, muß seyn

$$\overline{OD} < \overline{DM}$$

$$\text{also } \overline{OD}^2 < \overline{DM}^2$$

$$\beta^2 - \frac{1}{4}g^2 < \left\{ \frac{1}{4}g^2 \cot^2 \frac{1}{2}\alpha^2, \text{ weil } \overline{BD} : \overline{DM} = 1 : \cot \frac{1}{2}\alpha \right.$$

$$\left. \frac{1}{2}g \right\}$$

$$\text{also } \overline{DM} = \frac{1}{2}g \cot \frac{1}{2}\alpha$$

$$\text{folglich } \beta^2 < \frac{1}{4}g^2 \operatorname{cosec} \frac{1}{2}\alpha^2$$

$$\text{mithin } \beta < \frac{1}{2}g \operatorname{cosec} \frac{1}{2}\alpha.$$

Beweis.

Es ist $2\beta^2 > g^2$ (Det.)

$$\text{also } \beta^2 > \frac{1}{2}g^2$$

$$\text{folglich } \beta^2 > \left\{ \frac{1}{4}g^2 \right\}$$

$$\left\{ \overline{BD}^2 \right\}$$

mithin $\beta > \overline{BD}$

demnach schneidet der aus B als Mittelpunkt mit einem Radius = β beschriebene Kreis die Linie DO.

$$\text{Ferner ist } \beta^2 - \frac{1}{4}g^2 > \left\{ \frac{1}{4}g^2 \right\}$$

$$\left\{ \overline{OD}^2 \right\} > \left\{ \overline{DC}^2 \right\}$$

also $\overline{OD} > \overline{DC}$

$$\text{Auch ist } \beta < \frac{1}{2}g \operatorname{cosec} \frac{1}{2}\alpha$$

$$\text{also } \beta^2 < \frac{1}{4}g^2 \operatorname{cosec} \frac{1}{2}\alpha^2$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} \beta^2 - \frac{1}{4}g^2 \\ OD^2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}g^2 \cdot \overline{\cot. \frac{1}{2}\alpha^2} \\ DM^2 \end{array} \right.$$

$$\text{mithin } OD \stackrel{<}{=} DM$$

demnach berührt (Fig. 4. a), oder schneidet (Fig. 4. b.) der aus D als Mittelpunkt mit einem Radius = DO beschriebene Kreis den Kreisbogen BAC.

$$\text{Ueberdies ist } BA^2 + AC^2 = \left\{ \begin{array}{l} BE^2 + EC^2 \\ 2BD^2 + 2DE^2 \\ 2BD^2 + 2DA^2 \\ 2DO^2 \\ 2BC^2 \\ 2\beta^2 \end{array} \right\} + 2EA^2$$

Da auch $BAC = \alpha$, $BC = g$, so ist $\triangle ABC$ das verlangte.

Zusatz 1.

Es erhellet von selbst, das es im Fall eines Durchschnit-tes zwey Dreiecke mit der gegebenen Eigenschaft giebt.

Zusatz 2.

$$\text{Da (Fig. 4. b.) } \begin{array}{l} BM^2 + MC^2 = 2BD^2 + 2DM^2 \\ BA^2 + AC^2 = 2BD^2 + \left\{ \begin{array}{l} 2DA^2 \\ 2DO \end{array} \right. \end{array}$$

$$\text{und } DM > DO$$

$$\text{also } 2BD^2 + 2DM^2 > 2BD^2 + 2DO^2$$

$$\text{so ist auch } BM^2 + MC^2 > BA^2 + AC^2$$

folglich bestimmt der Punkt M eine grössere Summe der Quadrate der Schenkel, als jeder andere Punkt des Bogens BAC. Auch bestimmt jeder demselben näher liegende eine grössere Summe der Quadrate, als der entferntere.

Anmerkung.

Wenn der Winkel α nicht $< R$, so wird die Aufgabe in ganz ähnlicher Weise behandelt.

Aufgabe 6. (Fig. 5.)

Ein Dreieck zu beschreiben, in welchem die Grundlinie der gegebenen geraden Linie g , der Winkel der Spitze dem gegebenen Winkel α , und der Unterschied der Quadrate der Schenkel dem Quadrate der gegebenen geraden Linie β gleich sey.

Analysis.

Es sey ACB das verlangte Dreieck, so ist, wenn $ADC=R$,

$$\begin{aligned} CA^2 - AD^2 &= DC^2 \\ &= CB^2 - BD^2 \end{aligned}$$

$$\text{also } AC^2 - CB^2 \left. \vphantom{AC^2 - CB^2} \right\} = \left. \vphantom{AC^2 - CB^2} \right\} \begin{aligned} &AD^2 - DB^2 \\ &= (AD+DB)(AD-DB) \end{aligned}$$

folglich $AD+DB : \beta = \beta : AD-DB$ (El. VI. 17.)

Da $AD+DB=g$, oder $AD-DB=g$, je nachdem $g > \beta$, so ist $g : \beta = \beta : AD \pm DB$, mithin ist AD der Größe (Dat. 2.), und wenn AB als der Lage nach gegeben angenommen wird, auch der Lage nach, somit der Punkt D , demnach die gerade Linie DC der Lage nach (Dat. 32.) gegeben. Da auch der Punkt C wegen der der Lage und Größe nach gegebenen AB und des gegebenen Winkels α auf dem Umfange eines der Größe und Lage nach gegebenen Kreisabschnittes liegt (Apollonius ebene Oerter pag. 33.), so ist der Punkt C (Dat. 28.), somit das Dreieck ABC gegeben.

Constr. Det. Bew.

ergeben sich aus dem Gesagten von selbst.

Aufgabe 7. (Fig. 6.)

Ein Dreieck zu beschreiben, in welchem die Grundlinie der gegebenen geraden Linie g , der Winkel der Spitze dem gegebenen Winkel α , und die Summe der Schenkelsumme und der Höhe der gegebenen geraden Linie S gleich sey/

Analysis.

Es sey $\triangle QMB$ das verlangte, so ist wegen des gegebenen Winkels BQM das Verhältniß

$$(BQ+QM)^2 - BM^2 : \triangle BQM \quad (\text{Dat. 76.}) \text{ gegeben,}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{das ist } x^2 - g^2 : g \frac{S-x}{2} \\ \text{wenn } BQ+QM \text{ mit } x \text{ bezeichnet wird.} \end{array} \right\}$$

$$\text{also ist } x^2 - g^2 : \left. \begin{array}{l} g(S-x) \\ g \cdot Ax \end{array} \right\} \text{ gegeben,}$$

$$\left. \begin{array}{l} (x+g)(x-g) \\ Bx \cdot xC \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} g(S-x) \\ g \cdot Ax \end{array} \right\} \text{ wenn } BM=MC \text{ ge-} \\ \text{macht und } MA=S, \\ Mx=x \text{ gesetzt wird,}$$

folglich ist, vermöge Apollonius von Perga de sect. determinata, frey bearbeitet von Diesterweg, Bonn 1822. Buch I. Aufgabe 3. Fall 1., der Punkt x , mithin die Linie Mx gegeben, demnach die Aufgabe auf Aufg. 1. reducirt.

Construction.

Man nehme $BM=MC=KB=g$, $MA=S$, $MBR=\alpha$, $TBM=\frac{1}{2}MBR$, BL nach Belieben, $LG \parallel TB$, $LBG=R=LBH$, $HB=2BL$, $HE \parallel KG$, durch C und den Durchschnitt E der Linien HE , AC auf verschiedenen Seiten von AE , $ACF=R=AED$, $DE=EB$, $FC=CA$, beschreibe über der geraden Linie DF als Durchmesser

einen Kreis, welcher die Linie CA in x schneide, beschreibe über BM einen Kreisabschnitt, welcher des Winkels α fähig ist, mache auf der Seite von AM, auf welcher dieser Abschnitt liegt, $BAP=R$, $PA=Ax$, $PQ \parallel AB$, und ziehe von B, M gerade Linien zu dem Punkte Q, in welchem PQ mit dem Kreisbogen über BM zusammentrifft, so ist $\triangle BMQ$ das verlangte.

Determination.

Damit PQ dem Umfange des auf BM beschriebenen Abschnittes begegne, muß, wenn $BU=UM$, $BUW=R$, und W auf dem Umfange des Abschnittes liegt, seyn

$$\left. \begin{array}{l} PA \\ Ax \end{array} \right\} = UW$$

$$\text{Es ist } \left. \begin{array}{l} KB \\ g \end{array} \right\} : BE = GB : \left. \begin{array}{l} BH \\ 2BL \end{array} \right\} \\ = \tan. \frac{1}{2}\alpha : 2$$

$$\text{also } BE = \frac{2g}{\tan. \frac{1}{2}\alpha}$$

$$\text{somit } MV = \frac{g}{\tan. \frac{1}{2}\alpha}, \text{ wenn } CV = VE;$$

$$\text{und } ME = \frac{2g}{\tan. \frac{1}{2}\alpha} - g \\ = \frac{2g - g \tan. \frac{1}{2}\alpha}{2}$$

$$\text{folglich } EV = \frac{2g - g \tan. \frac{1}{2}\alpha - g}{\tan. \frac{1}{2}\alpha} \\ = \frac{g(1 - \tan. \frac{1}{2}\alpha)}{\tan. \frac{1}{2}\alpha}$$

$$\text{mithin } EV^2 = \frac{g^2(1 - \tan. \frac{1}{2}\alpha)^2}{\tan. \frac{1}{2}\alpha^2}$$

$$\text{demnach } \left. \begin{array}{l} \text{DE. FC} \\ \text{AC. BE} \\ \text{(S+g)2g} \\ \text{tan. } \frac{1}{2}\alpha \end{array} \right\} = \text{XV}^2 \frac{g^2(1 - \tan. \frac{1}{2}\alpha)^2}{\tan. \frac{1}{2}\alpha^2}$$

also

$$\left. \begin{array}{l} 2gS \tan. \frac{1}{2}\alpha + 2g^2 \tan. \frac{1}{2}\alpha + g^2 - 2g^2 \tan. \frac{1}{2}\alpha + g^2 \overline{\tan. \frac{1}{2}\alpha^2} \\ \text{tan. } \frac{1}{2}\alpha^2 \\ g^2 \overline{\sec. \frac{1}{2}\alpha^2} + 2gS \tan. \frac{1}{2}\alpha \\ \text{tan. } \frac{1}{2}\alpha^2 \end{array} \right\} = \text{XV}^2$$

$$\text{folglich } \sqrt{\frac{g^2 \overline{\sec. \frac{1}{2}\alpha^2} + 2gS \tan. \frac{1}{2}\alpha}{\tan. \frac{1}{2}\alpha}} = \text{XV}$$

$$\text{mithin } \text{MX} = \sqrt{\frac{g^2 \overline{\sec. \frac{1}{2}\alpha^2} + 2gS \tan. \frac{1}{2}\alpha - g}{\tan. \frac{1}{2}\alpha}}$$

$$\text{demnach } \text{AX} = \frac{S \tan. \frac{1}{2}\alpha + g - \sqrt{\frac{g^2 \overline{\sec. \frac{1}{2}\alpha^2} + 2gS \tan. \frac{1}{2}\alpha}{\tan. \frac{1}{2}\alpha}}}{\tan. \frac{1}{2}\alpha}$$

$$\text{Ferner ist } \left. \begin{array}{l} \text{BU} \\ \frac{1}{2}g \end{array} \right\} : \text{UW} = 1 : \cot. \frac{1}{2}\alpha.$$

$$\text{also } \text{UW} = \frac{1}{2}g \cdot \cot. \frac{1}{2}\alpha$$

folglich muſs seyn

$$\frac{S \tan. \frac{1}{2}\alpha + g - \sqrt{\frac{g^2 \overline{\sec. \frac{1}{2}\alpha^2} + 2gS \tan. \frac{1}{2}\alpha}{\tan. \frac{1}{2}\alpha}}}{\tan. \frac{1}{2}\alpha} < \frac{1}{2}g \cot. \frac{1}{2}\alpha$$

$$\text{mithin } S \tan. \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}g < \sqrt{\frac{g^2 \overline{\sec. \frac{1}{2}\alpha^2} + 2gS \tan. \frac{1}{2}\alpha}{\tan. \frac{1}{2}\alpha}}$$

$$\text{somit } S^2 \overline{\tan. \frac{1}{2}\alpha^2} + gS \tan. \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}g^2 < g^2 \overline{\sec. \frac{1}{2}\alpha^2} + 2gS \tan. \frac{1}{2}\alpha$$

$$\text{demnach } S^2 \overline{\tan. \frac{1}{2}\alpha^2} - gS \tan. \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}g^2 < g^2 \overline{\sec. \frac{1}{2}\alpha^2}$$

somit $S \tan \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}g \overline{<} g \sec \frac{1}{2}\alpha$

also $S \sin \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}g \cos \frac{1}{2}\alpha \overline{<} g$

folglich $S \overline{<} \left\{ \begin{array}{l} \frac{g(1 + \frac{1}{2}\cos \frac{1}{2}\alpha)}{\sin \frac{1}{2}\alpha} \\ g \left(\frac{1}{\sin \frac{1}{2}\alpha} + \frac{\cos \frac{1}{2}\alpha}{2\sin \frac{1}{2}\alpha} \right) \\ g(\operatorname{cosec} \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\cot \frac{1}{2}\alpha) \\ g(\operatorname{cosec} \frac{1}{2}\alpha + \cot \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\cot \frac{1}{2}\alpha) \\ g(\cot \frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{2}\cot \frac{1}{2}\alpha) \end{array} \right.$ (Diesterwegs trigonometrische Formeln. Bonn 1822. §. 5.)

Beweis.

Es ist $S \overline{<} g(\cot \frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{2}\cot \frac{1}{2}\alpha)$ (Det.)

also $PA \overline{<} UW$, wie aus der Determ. erhellet, folglich berührt, oder schneidet die Linie PQ den Kreis.

Verm. Apoll. de Sect. det. Buch I. Aufg. 3. Fall 1.

Bew. ist $g \cdot Ax : \left\{ \begin{array}{l} Bx \cdot xC \\ xM^2 - MB^2 \end{array} \right\} = GB : \left\{ \begin{array}{l} BH \\ 2BL \end{array} \right\}$
 $= QN : 2NO$, wenn $OQ = QM$,
 $BNQ = R$;

folglich
 $xM^2 - MB^2 : \left\{ \begin{array}{l} g \cdot Ax \\ g \cdot AP \end{array} \right\} = 2NO : QN$
 $= (MQ + QB)^2 - MB^2 : \left\{ \begin{array}{l} \Delta MQB \\ (Dat. 76.) \\ MB \cdot QZ \end{array} \right\}$
 wenn $QZB = R$;

mithin $xM^2 - MB^2 = (MQ + QB)^2 - MB^2$

somit $xM^2 = (MQ + QB)^2$

demnach $xM = MQ + QB$

$$\text{also } Mx + xA \left. \vphantom{Mx + xA} \right\} = MQ + QB + QZ \\ \quad \quad \quad S$$

Da auch $BM = g$, $BQM = \alpha$, so ist $\triangle BQM$ das verlangte.

Zusatz 1.

Es erhellet von selbst, daß es im Fall eines Durchschnit-tes zwey Dreiecke mit der gegebenen Eigenschaft giebt.

Zusatz 2.

$$\text{Da } MW + WB > MQ + QB, \text{ und } WU > QZ$$

$$\text{so ist } MW + WB + WU > MQ + QB + QZ$$

also bestimmt der Punkt W eine größere Summe der Schenkelsumme und der Höhe, als jeder andere Punkt des Bogens MWB . Auch bestimmt der näher liegende eine größere Summe, als der entferntere.

Anmerkung.

Robert Simson macht zu dieser Aufgabe (s. Roberti Simson opera quaedam reliqua, Glasguae 1776. Append. probl. 3.) folgende

Analysis. (Fig. 7.)

Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Macht man $BE = S$, $FA = AC$, so ist $EF =$ der Höhe AD . Da (verm. Dat. 76.)

$$(BA + AC)^2 - BC^2 : \triangle ABC \text{ gegeben ist,}$$

$$BF^2 \left. \vphantom{BF^2} \right\}$$

$$HF \cdot FG \left. \vphantom{HF \cdot FG} \right\}$$

$$\text{wenn } GB = BC = BH,$$

$$\text{so ist } HF \cdot FG : \left\{ \begin{array}{l} 2\triangle ABC \\ HB \cdot FE \end{array} \right\} \text{ gegeben.}$$

Bestimmt man BK so,

$$\text{daß } HF \cdot FG : HB \cdot FE = 2KB : BC$$

$$= 2KB \cdot FL : \left\{ \begin{array}{l} BC \cdot FE \\ HB \cdot FE \end{array} \right.$$

so ist $HF \cdot FG = 2KB \cdot FE$

$$\text{also } \frac{HF \cdot FG + BG^2}{BF^2} = \frac{2KB \cdot FE + BG^2}{BF^2}$$

$$\text{folglich } \frac{BF^2 + 2BE \cdot EF}{BE^2 + EF^2} = \frac{2KB \cdot FE + BG^2 + 2BE \cdot EF}{BG^2 + 2KE \cdot EF}$$

$$\text{mithin } \frac{BE^2}{S^2} = \frac{BG^2}{g^2} + \frac{(2KE - EF)EF}{LF \cdot FE}$$

somit $S^2 - g^2 = LF \cdot FE$

demnach ist $LF \cdot FE$ gegeben. Da auch $LF + FE = 2EK = EB + BK = S + BK$, und BK gegeben ist (Dat. 2.), so ist F , also sowohl FE , als BF gegeben, mithin die Aufgabe auf Aufg. 1. reducirt.

Aufgabe 8. (Fig. 8.)

Ein Dreieck zu beschreiben, in welchem die Grundlinie der gegebenen geraden Linie g , der Winkel der Spitze dem gegebenen Winkel α , und die Summe der Schenkeldifferenz und der Höhe der gegebenen geraden Linie S gleich sey.

Analysis. (Fig. 8. a.)

Bezeichnet man die Schenkeldifferenz mit x , also die Höhe mit $S - x$, so ist, vermöge Dat. 76. Zus., das Verhältnifs $g^2 - x^2 : \frac{1}{2}g(S - x)$ gegeben

$$\text{also auch } \frac{g^2 - x^2 : g(S - x)}{\text{das ist } Ax \cdot xB : g \cdot Cx} \text{ gegeben,}$$

wenn $AD = DB = g$,
 $DC = S$, $Dx = x$ gesetzt wird,

folglich läßt sich nach Apoll. de sect. det. Buch I. Aufgabe 3. Fall 3. der Punkt x , somit die Linie Cx und das Dreieck finden.