Handbuch

der

Kugelfunctionen,

Theorie und Anwendungen,

von

Dr. E. Heine,
ordentlichem Professor der Mathematik an der vereinigten
Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg.

Zweiter Band.

Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage.

Berlin.
Druck und Verlag von G. Reimer.
1881.

Anwendungen

der

Kugelfunctionen

und

der verwandten Functionen,

von

E. Heine.

Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage.

Berlin.
Druck und Verlag von G. Reimer.
1881.

Inhalt.

I. Theil.
Mechanische Quadratur.

Seite

§ 1. Historisches. Man soll $\int_{-1}^{1} \psi(x)dx$ durch Annäherung berechnen . . 1

§ 2. Die gegebene Function $\psi(x)$ wird vermittelst der Ordinaten, die für willkürliche Abscissen α gegeben sind, angenähert durch eine ganze Function $\varphi(x)$, ferner $\int_{-1}^{1} \varphi(x)dx$ genau durch die Summe (4), also $\int_{-1}^{1} \psi(x)dx$ angenähert durch die Summe (4) dargestellt 3

§ 3. Beziehungen zwischen den in (4) vorkommenden Hülfsgrössen A . . 5

§ 4. Cotes wählt solche Abscissen α, die in einer arithmetischen Reihe wachsen. Tafel für die numerischen Werthe der A nach Cotes 6

§ 5. Berechnung des Fehlers $D\psi(x)$, den man, bei der angenäherten Berechnung von $\int_{-1}^{1} \psi(x)dx$ durch (4), begeht 6

§ 6. Berechnung einer Correction für die Cotesische Methode 7

§ 7. Gauss wählt die n Abscissen α so, dass der Fehler Null wird, wenn $\psi(x)$ eine ganze Function $2n-1^{\text{ten}}$ Grades ist 9

§ 8. Er nimmt dazu für die α die n Wurzeln der Gleichung $P^{(n)}(x) = 0$. Correction bei dieser Methode 10

§ 9. Kurze Ableitung der hauptsächlichen im § 8 gewonnenen Resultate . 13

§ 10. Tafeln von Gauss zur Berechnung der Integrale durch Annäherung 14

§ 11. Die Function $\psi(x)$ lässt sich mit beliebiger Näherung zwischen $x = -1$ und $x = 1$ durch die Interpolationsformel darstellen, wenn $\psi(x)$ sich in eine Potenzreihe nach x entwickeln lässt, welche für $x = 1$ convergirt. Beweis 16

§ 12. Uebertragung der Methode von Gauss auf die Berechnung durch Annäherung der Integrale $\int_{g}^{h} \psi(x)f(x)dx$ für beliebige Functionen ψ, wenn f eine vorgegebene Function bezeichnet 19

Seite

§ 13. Beispiel für den Fall, dass $f(x)$ von der Form $x^a(1-x)^b$ ist. Der Fall $a=b=-\frac{1}{2}$ 22

§ 14. Ein anderer specieller Fall. Wie wählt man für eine Quadratur aus $m+n$ Abscissen möglichst vortheilhaft n Abscissen, wenn m Abscissen vorgeschrieben sind? 25

§ 15. Die ganze Function $\varphi(x)$ des § 2 wird in eine merkwürdige Form gebracht 27

§ 16. Diejenige ganze Function n^{ten} Grades y, welche $\int_g^h [y-\psi(x)]^2 f(x)\,dx$ zu einem Minimum macht, ist die Summe der ersten Glieder, vom 0^{ten} bis zum n^{ten}, in der Entwickelung von $\psi(x)$ nach den Näherungsnennern des Kettenbruchs für $\sigma = \int_g^h f(z)\frac{dz}{x-z}$. Specieller Fall $f(z)=1$ 29

II. Theil.

Das Potential.

Erstes Kapitel.

Allgemeines über das Potential. Die Kugel.

§ 17. Ueber die Grundsätze der mathematischen Physik. Fassung des Newton'schen Gesetzes. Bedeutung der Ausdrücke Kraft, Masse. Zerlegung eines Körpers in Kugeln, mit beliebiger Annäherung. Potential V und Anziehungscomponenten Ξ, H, Z eines Aggregates von homogenen kleinen Kugeln; eines zusammenhängenden Körpers in einem Punkte des leeren Raumes. Die Summen verwandeln sich in dreifache Integrale. Potential und Anziehung eines Körpers in einem solchen Punkte μ des Raumes, welcher mit Masse erfüllt ist. Differentiation unter dem Integrale. Die Componenten Ξ_μ, etc. sind Differentialquotienten von V_μ. Eigenschaften, welche das Potential V eines Körpers besitzt 31

§ 18. Potential und Anziehung einer Kugel. Bezeichnung. Potential einer Kugel und einer durch zwei concentrische Kugelflächen begrenzten Schale in Punkten O_a, O_i und O_μ. Ist die Dichtigkeit k eine ganze Function der rechtwinkligen Coordinaten, so ist auch V_i eine ganze Function von x, y, z, und V_a eine solche dividirt durch eine ganze Potenz von r 43

§ 19. Specielle Fälle. Die Dichtigkeit k jedes Punktes ist 1, oder eine Function seiner Entfernung vom Mittelpunkte, oder eine ganze Function der rechtwinkligen Coordinaten. Eine Kugel, deren Dichtigkeit in jedem Punkte proportional seiner positiven oder negativen Entfernung von einem festen grössten Kreise ist, wirkt wie ein Magnet auf einen entfernten Pol 47

§ 20. Allgemeines über das Potential von Schalen, die durch zwei willkürlich gegebene Flächen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}$ begrenzt werden. Specielles wenn die Dichtigkeit constant ist. Man findet: Eine durch zwei beliebig gelegene Kugelflächen begrenzte homogene Schale übt auf alle im hohlen Raume befindlichen Punkte eine constante Kraft aus. Das-

Seite

selbe gilt für eine Schale, welche durch zwei nicht concentrische ähnliche Ellipsoide mit parallelen Axen gebildet wird 51

§ 21. Ausdruck von V für die Schalen des § 18 in allen Punkten des leeren Raumes, wenn der Werth dieses Potentials in den begrenzenden Kugelflächen gegeben ist. Summation der Reihen 55

§ 22. Aus der Elektrostatik. Einführung des Flächenpotentials v. Es wird für die Kugelfläche gefunden, wenn x, die Dichtigkeit der Belegung, gegeben ist. Angenähert lässt sich v_i in O als ganze Function der rechtwinkligen Coordinaten von O, und v_a als eine solche, dividirt durch eine Potenz der Entfernung des Punktes O vom Mittelpunkt der Kugel darstellen. — Eigenschaften des Flächenpotentials. Bestimmende Eigenschaften a—c. Statt x, der Dichtigkeit der Belegung, kann der Werth von v auf der Fläche gegeben sein. Ob für jede Fläche ein Potential v existirt, welches sich auf der Fläche in eine willkürlich gegebene continuirliche Function des Ortes verwandelt? Die Aufgabe von Gauss, die Wirkung einer Masse in den leeren Raum durch Belegung der Grenzflächen zu ersetzen. Zerlegung in drei Aufgaben 1, 2 oder 2′ und 3 60

§ 23. Erste Methode zur Lösung der Aufgabe 2′ für eine Kugelfläche oder für zwei concentrische Kugelflächen. Der Werth von x 70

§ 24. Wenn die Dichtigkeit der Masse k im Innern der Kugelschale gegeben ist, wird die Dichtigkeit x für die ideale Belegung der Grenzflächen gefunden 73

§ 25. Anwendungen auf die Theorie des Erdmagnetismus. Ideale Vertheilung der magnetischen Massen auf der Erdoberfläche. Wo ist der Sitz der Kraft? Enthält die Erde positiven und negativen Magnetismus in gleicher Menge? 75

§ 26. Zweite Methode zur Lösung der Aufgabe 2′ für eine Kugel: Integration einer partiellen Differentialgleichung 80

§ 27. Der Ausdruck für das Flächenpotential wird verificirt 83

§ 28. Die Reihe für die Dichtigkeit x kann divergiren, während x endlich bleibt und bestimmt ist. Ausdruck von x durch ein Integral 85

§ 29. Die Lösung der Aufgabe 2′ wird auf das Aufsuchen der Green'schen Function zurückgeführt. Eine ähnliche Function für elektrodynamische Probleme. Die Green'sche Function als Potential einer Flächenbelegung mit der Dichtigkeit x_0. Wie man x_0 aus der allgemeinen Lösung von 2′ finden kann 88

§ 30. Die Green'sche Function für die Kugel 94

§ 31. Bestimmung der Massenvertheilung auf einer Fläche, welche von einer Kugel wenig abweicht, wenn das Potential der Masse auf der Fläche bekannt ist 96

Zweites Kapitel.

Das Rotationsellipsoid. Der Kreis.

§ 32. Entwickelung von T, der reciproken Entfernung zweier Punkte, nach Kugelfunctionen. Erste Methode. Man findet Gleich. (7) 98

§ 33. Zweite Methode 102

Seite

§ 34. Bestimmung der Potentiale V und v wenn die Dichtigkeit der Masse, k oder $\varkappa$, bekannt ist 106

§ 35. Specielle Fälle. Wenn die Dichtigkeit k in jedem Punkte der Schale eine ganze Function von $\cos\eta$, $\sin\eta\cos\omega$, $\sin\eta\sin\omega$ ist, so wird V_i in O eine ganze Function der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z von O, und V_a eine ganze Function von $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\psi$, $\sin\theta\sin\psi$; in Bezug auf r ist V_a von der Form $A+B[\log(r+1)-\log(r-1)]$, wo A und B rationale Functionen von r und $\sqrt{r^2-1}$ bezeichnen. Weitere Vereinfachungen, wenn k im Punkte $[a, b, c]$ eine ganze Function der rechtwinkligen Coordinaten a, b, c ist . 110

§ 36. Bestimmung des Potentials V im leeren Raume, wenn es auf begrenzenden Ellipsoiden gegeben ist. War V_i auf der Oberfläche eine ganze Function der rechtwinkligen Coordinaten, so bleibt V_i eine solche im ganzen Innern 113

§ 37. Lösung der Aufgabe 2' im § 22 für das Rotationsellipsoid. Ideale Vertheilung von Masse auf der Oberfläche, welche die wirkliche Vertheilung ersetzt 115

§ 38. Zweite Methode zur Lösung von 2'. Convergenz der Reihe für v 117

§ 39. Dieselbe Methode verschafft die Reihe für T, welche in § 32 und 33 vorkommt 124

§ 40. Die Green'sche Function G und die entsprechende Belegung mit Masse 125

§ 41. Das Potential eines mit Masse belegten Kreises wird im ganzen Raume gefunden, wenn es auf der Kreisfläche willkürlich gegeben ist 127

§ 42. Besonderer Fall. Schlussbemerkungen 132

Drittes Kapitel.

Das dreiaxige Ellipsoid.

§ 43. Entwickelung von T nach Kugelfunctionen $\mathfrak{T}^{(n)}$. Erste Methode 136

§ 44. Das schliessliche Resultat. $\mathfrak{T}^{(n)}$ ist eine Kugelfunction n^{ten} Grades in Bezug auf θ, ψ; ebenso in Bezug auf η und ω; ferner eine ganze Function der Coordinaten a, b, c, und enthält in Bezug auf ρ keine höhere Transcendente als ein elliptisches Integral erster und zweiter Gattung 141

§ 45. Das Potential V, wenn die Dichtigkeit k, und v, wenn $\varkappa$ gegeben ist 148

§ 46. Beispiel: Das Potential eines homogenen Ellipsoides wird aus den allgemeinen Formeln berechnet. Ein Verfahren zur Berechnung der Anziehung eines homogenen Ellipsoides, nach einem Vortrage von Gauss im Sommersemester 1840 mitgetheilt 152

§ 47. Bestimmung des Potentials im leeren Raume, wenn es auf der Begrenzung bekannt ist, nach der ersten Methode, aus der Reihe für T. Man erhält das fertige Potential nach Auflösung eines Systems linearer Gleichungen 162

§ 48. Nach der zweiten Methode, durch Integration einer Differentialgleichung. Das Potential wird durch die vorige Form und durch eine zweite, mit Hülfe der Lamé'schen Functionen, ausgedrückt 164

§ 49. Vergleichung der Formen, in welchen das Potential der Kugel, des Rotationsellipsoides und des dreiaxigen Ellipsoides auftritt. Entwickelung von T nach Lamé'schen Functionen 169

Viertes Kapitel.
Der Cylinder.

Seite

§ 50. Entwickelung von T in Reihen. Man findet zwei verschiedene Reihen 173

§ 51. Das Potential V eines Cylinders mit kreisförmiger Directrix wird gefunden, wenn die Masse gegeben ist und innerhalb des Cylinders liegt . . . 175

§ 52. Besonderer Fall: Die Dichtigkeit ist constant. Ursprung des logarithmischen Potentials. Der Cylinder von endlicher Höhe. Grenzfall: Das Potential des Kreises. Erster Ausdruck desselben. Zweiter Ausdruck. Anziehung des Kreises für ein von dem Newton'schen verschiedenes Anziehungsgesetz. Ueber das Potential der Ellipse 178

§ 53. Das Potential V, wenn die Masse ausserhalb des Cylinders liegt (cf. § 51) 184

§ 54. Das Potential v eines Cylinders zu finden, wenn es auf der Begrenzung gegeben ist. Die Axe des Cylinders geht von $-\infty$ zu ∞. Specieller Fall, wenn das Potential unabhängig von der x-Coordinate wird 185

§ 55. Fortsetzung: Dieselbe Aufgabe für einen Cylinder von endlicher Höhe, zunächst für den Grenzfall, dass v auf einer oder auf zwei parallelen unendlichen Ebenen gegeben ist 189

§ 56. Fortsetzung: Das Potential einer Kreisfläche, welches sich auf derselben in 1 verwandelt. Der Cylinder von endlichen Dimensionen wird nach zwei verschiedenen Methoden behandelt 191

§ 57. Schluss: Die Axe des Cylinders erstreckt sich von 0 bis ∞. Specielle Fälle 195

§ 58. Das Potential des Cylinders, dessen Basis eine Ellipse ist 202

§ 59. Ueber schwingende kreisförmige oder elliptische Membranen. Wie man die Kreise und Geraden findet, welche Knotenlinien der kreisförmigen, wie die confocalen Ellipsen und Hyperbeln, welche Knotenlinien der elliptischen Membranen sind 208

Zusatz. Ueber Entwickelungen nach Cylinderfunctionen . . 210

Einleitung. Zunächst handelt es sich um die Cylinderfunctionen zweiter Ordnung. Der Ausdruck von $J_\nu(r)$ durch J_0, J_1 und ganze Functionen von r S. 210. — Der Werth eines Integrals wird bestimmt. Die Gleichung $J_\nu(\lambda \mathfrak{r}) = 0$ und eine zweite besitzen nur reelle Wurzeln S. 211. — Die Entwickelung von $f(r)$ nach Functionen $J_\nu(\lambda r)$ wird aufgefunden, ihre Möglichkeit vorausgesetzt. Allgemeiner Fall in dem sie möglich ist S. 212. — Das Entsprechende für Entwickelungen nach Cylinderfunctionen $\psi_\nu(\lambda r)$ der dritten Ordnung S. 213, — und nach Functionen $\sin \lambda r$ und $\cos \lambda r$ S. 215. — Allgemeines über derartige Entwickelungen S. 215. —

Fünftes Kapitel.
Der Kegel.

§ 60. Die Entwickelung von T mit Hülfe des Fourier'schen Doppelintegrales führt auf die Kegelfunction $\mathfrak{k}^{\mu}(x)$. Ausdruck dieser Function, die

Seite

für jedes reelle x reell bleibt, als arithmetisches Mittel von $\mathfrak{K}^\mu(x \pm 0.i)$; durch verschiedene Integrale. $\mathfrak{k}^\mu$ für ein unendliches μ 217

§ 61. Das Additionstheorem der Kegelfunctionen wird ausgesprochen. Vorbereitung zum Beweise. Die Kegelfunction ist im wesentlichen eine Kugelfunction mit imaginärem Index, nämlich $\mathfrak{k}^\mu(x) = P^{-\frac{1}{2}+\mu i}$ und $\pi\mathfrak{k}^\mu(-x) = \cos\mu\pi i[Q^{-\frac{1}{2}+\mu i}(x) + Q^{-\frac{1}{2}-\mu i}(x)]$ 224

§ 62. Die Differentialgleichung für $\mathfrak{T}$; daraus die der Kugelfunctionen $\mathfrak{k}^\mu$. Sie ist dieselbe, welcher P^n und Q^n für $n = -\frac{1}{2} + \mu i$ genügen. Gleichungen aus § 61 werden bewiesen 226

§ 63. Das Additionstheorem des § 61 wird bewiesen 230

§ 64. Ausdruck der Kegelfunctionen erster und zweiter Art durch dieselbe hypergeometrische Reihe. Zweite Form des Additionstheorems. Anwendung: Entwickelung von $\mathfrak{k}^\mu(\cos\varphi)$ nach Cosinus der Vielfachen von φ 237

§ 65. Darstellung von T durch Kegelfunctionen. Lösung von Aufgaben über das Potential des Kegels. Green'sche Function. Dichtigkeit der Masse auf dem Kegelmantel; im Scheitel 242

Zusatz. Ueber die Differentiation trigonometrischer Reihen 250

Sechstes Kapitel.

Die Methode der reciproken Radii vectores. Zwei Kugeln. Rotirendes Kreissegment.

§ 66. Prinzip der Abbildung vom Punkte y aus. Bezeichnung. Beziehung zwischen Gegenstand und Bild; zwischen dem Potential des Gegenstandes und des Bildes; zwischen der Dichtigkeit der Belegung auf der gegebenen und der abbildenden Fläche 251

§ 67. Allgemeines über den Gegenstand dieses und des folgenden Kapitels. Das Bild einer Kugel ist eine Kugel. Analytische Formeln zur Bestimmung des Bildes. Anwendung: Die Green'sche Function wird für eine Kugel gefunden 255

§ 68. Das Problem der zwei Kugeln, die sich weder berühren noch schneiden, wird formulirt. Man bildet vom Punkte y eines Punktenpaares α, γ ab, welches zu zwei gegebenen Punktenpaaren b_0, d_0 und b_1, d_1 harmonisch ist. Analytische Ausdrücke für die gesuchten Stücke aus den gegebenen. Zusammenstellung der Formeln 261

§ 69. Lösung des Problems der zwei Kugeln, die sich weder berühren noch schneiden. Ideale Vertheilung der Masse auf den Kugelflächen 267

§ 70. Die Green'sche Function 270

§ 71. Die Kugeln berühren sich. Das Potential v; die Dichtigkeit x der idealen Belegung. Die Green'sche Function. Dichtigkeit der Elektricität, welche ein elektrischer Punkt auf einer Kugel und einer unendlichen Platte hervorruft, wenn die Kugel die unendliche Platte berührt 271

§ 72. Durch Drehung eines Kreissegments um seine Sehne entsteht eine Fläche. Das Potential v ihrer Belegung, die Green'sche Function G und die Dichtigkeit der idealen Belegung werden aus den entsprechenden Stücken beim Kegel gefunden 280

Siebentes Kapitel.

Der Ring. Kugelkalotte.

Seite

§ 73. Einführung der Thomson'schen Coordinaten 283

§ 74. Entwickelung von T nach Cosinus der Vielfachen von $(\vartheta - \eta)$, und zugleich nach Kugelfunctionen mit einem oberen Index, der eine halbe ungerade Zahl ist. Das Potential des Ringes wird gefunden, ferner die Green'sche Function und die zu ihr gehörende Dichtigkeit 285

§ 75. Die Kugelkalotte; allgemeiner linsenförmiger Körper. Darstellung von T durch ein Integral. Die Green'sche Function und die zu ihr gehörende Dichtigkeit, als einfaches Integral, in besonderen Fällen als endliche Reihe. Das Potential der Linse. Darstellung einer Function auf einer Kalotte durch ein dreifaches Integral 291

§ 76. Rückblick auf die Lösung der Potentialaufgaben für Rotationskörper. Ueber den Rotationskörper, dessen Meridian eine Lemniscate ist 300

III. Theil.

Analytische Theorie der Wärme.

Erstes Kapitel.

Allgemeines.

§ 77. Annahmen. Gleichgewicht der Wärme. Fall, dass die Temperatur eine lineare Function der Coordinaten ist 302

§ 78. Veränderlicher Wärmezustand. Der Wärmefluss. Partielle Differentialgleichung für die Temperatur u im Innern. Nebenbedingungen. Temperatur an der Oberfläche 304

§ 79. Die aufgestellten Bedingungen bestimmen die Temperatur u völlig. Der Beweis hierfür wird modificirt, wenn man dem Körper unendliche Dimensionen giebt 307

§ 80. Zerlegung der allgemeinen Aufgabe in einfachere 311

Zweites Kapitel.

Der Cylinder.

§ 81. Die Temperatur u wird gefunden, wenn die Oberfläche des Cylinders in einer gegebenen Temperatur erhalten wird 314

§ 82. Ferner, wenn die Oberfläche mit einem Gas von gegebener Temperatur in Berührung ist. Von den beiden Temperaturen v und w, aus denen sich die gesuchte zusammensetzt, wird die erste gefunden, welche von der Zeit unabhängig ist 317

§ 83. Darauf die zweite 319

Drittes Kapitel.

Die Kugel.

Seite

§ 84. Aufstellung der Gleichungen, welche die Temperatur u der Kugel bestimmen; diese wird in v und w zerlegt. Man findet v 321

§ 85. Ferner w 322

§ 86. Der Ausdruck der Temperatur in jedem Punkte als Function der rechtwinkligen Coordinaten des Punktes 325

Viertes Kapitel.

Ueber das Rotationsellipsoid.

§ 87. Aufstellung der Gleichungen, welche die Wärmebewegung in einem Rotationsellipsoide bestimmen, dessen Oberfläche in einer gegebenen Temperatur erhalten wird; v ist bereits bekannt, und w wird durch Cylinderfunctionen dritter Ordnung gefunden. Die Differentialgleichung dieser Functionen wird transformirt 328

IV. Theil.

Zur Hydrodynamik.

§ 88. Es handelt sich um den Widerstand den ein Körper, welcher in einer unendlichen Flüssigkeit fortbewegt wird, von dieser erleidet 332

§ 89. Analytischer Ausdruck der Bedingungen 332

§ 90. Lösung der Aufgabe, unter vereinfachenden Annahmen, für eine Kugel 333

§ 91. Für ein Ellipsoid 337

§ 92. Man findet die Seitengeschwindigkeiten u, v, w und den Druck p . 341

Zusätze zum ersten Bande . . . . . . 342—377

Zu S. 1—2 und S. 188. — Zu S. 37 und 38. — Zu S. 40. — Zu S. 50. — Zu S. 57—64. — Zur 2. Anmerkung auf S. 67. — Zu S. 85. — Zu S. 97—125. — Zu S. 155 und 201. — Zu S. 183. — Zu S. 221. — Zu S. 248. — Zu S. 258—259. — Zum 4. Kapitel des I. Theiles. — Zu S. 311—313, § 73. — Zu S. 381, § 99. — Zu S. 437. — Zu S. 463, § 129. —

Druckfehler im zweiten Bande.

S. 32 Zeile 10 v. o. statt über l. m. unter. — S. 185 Gleichung (22) statt $\mathfrak{f}_\iota$ l. m. $\mathfrak{f}_\nu$. — S. 219 Zeile 5 v. o. statt $\mathfrak{K}^\mu(0)$ l. m. $\mathfrak{K}^\mu(1)$. — S. 224 Formel (25) in der Summe nach ν füge man den Faktor $\cos\nu\pi$ hinzu, streiche ihn auf Seite 241 Formel (29), und auf S. 244 in den Ausdrücken für G_ι und G_α. — S. 240 Z. 7 v. u. statt wenn man setzt l. m. wenn man $(1-x)^{\frac{1}{2}}$, wegen S. 224, das Zeichen von x gieiebt und setzt. — S. 251 am Schluss der letzten Gleichung im Zusatze statt $\cos nx$ l. m. $\sin nx$. — S. 336 in dem Ausdruck für h auf Zeile 13 v. o. statt $3xc^3$ l. m. $3c^3$. —

I. Theil.

Mechanische Quadratur.

§ 1. Unter den verschiedenen Methoden zur genäherten Bestimmung der Integrale, oder wie es in der Sprache der älteren Analysten hiess, zur genäherten Quadratur krummliniger Figuren*) nennt Gauss die Newton-Cotesische, welche sich auf die Interpolationsmethode gründet, eine der brauchbarsten.**)

Um das Integral einer continuirlichen Function $\psi(x)$ zwischen gegebenen Grenzen g und h angenähert zu berechnen, wenn der Werth von $\psi(x)$ für Abscissen $x = \alpha_1, \alpha_2$, etc., α_n, die in dem Intervalle von g bis h liegen, bekannt ist, sucht Newton eine ganze Function $n-1^{\text{ten}}$ Grades $\varphi(x)$ auf, welche für die betreffenden Abscissen mit $\psi(x)$ übereinstimmt.***) Das leicht auszuführende genaue Integral von $\varphi(x)$, zwischen denselben Grenzen g und h, vertritt dann näherungsweise die Stelle der Quadratur der

---

*) Newton, Methodus differentialis, in der Ausgabe von Horsley, London 1779, T. I. auf S. 521—528, prop. VI: Figuram quamcunque curvilineam quadrare quamproxime, cujus Ordinatae aliquot inveniri possunt. Jacobi giebt im 1. Bde. v. Crelle's Journ. S. 302 an, dass dieser Methodus etc. zuerst in der Amsterdamer Ausgabe der Principia phil. nat. erschienen sei, welche auf Kosten von Bentley veranstaltet wurde.

**) Göttingische gelehrte Anzeigen. 1814 September 26, Werke III, S. 202 bis 206, auf S. 202. Ich habe mir erlaubt, an einigen Stellen die Wortfassung von Gauss beizubehalten, z. B. an der, welche Cotes betrifft, dessen Verdienste Gauss scharf zeichnet.

***) Prop. IV. Si recta aliqua in partes quotcunque inaequales ... dividatur, et ad puncta divisionum erigantur parallelae ..., invenire Curvam Geometricam generis Parabolici, quae per omnium erectarum terminos transibit.

vorgegebenen Function, und zwar bis zu jedem beliebigen Grade von Genauigkeit, wenn man eine hinreichend grosse Zahl n der Ordinaten $\psi(x)$ in Anwendung bringt.

Newton empfiehlt (Scholium) die Construction von Tafeln, wobei man die α in arithmetischer Reihe auf einander folgen lassen solle, und giebt selbst das Resultat der Rechnung für $n=4$ an: Wenn A die Summe aus der ersten und letzten Ordinate (für $\alpha_1=g$ und $\alpha_4=h$), B aus der zweiten und dritten bezeichnet, so sei angenähert das Integral, der gesuchte Flächeninhalt, gleich

$$\frac{g-h}{8}(A+3B).$$

Cotes, welcher für sich, und ehe noch Newton's Schrift Methodus differentialis erschienen war, schon im Jahre 1707, ähnliche Untersuchungen angestellt hatte, wurde durch die zierliche Form, in welcher Newton das Endresultat in obigem Beispiele dargestellt hatte (pulcherrima et utilissima regula nennt es Cotes) bewogen, diese Vorschriften weiter und bis auf den Fall von 11 Ordinaten auszudehnen. Das Resultat, mit Einschluss der von Newton gewünschten Tafeln, giebt er bis $n=11$ (S. u. § 4) am Schluss der Abhandlung de methodo differentiali, welche einen Theil der Harmonia mensurarum ausmacht, ohne sich über das Verfahren, wodurch er sie berechnet hat, weiter zu erklären.

Das Folgende enthält zunächst eine Darstellung der Newton-Cotesischen Methode in der Sprache der heutigen Analysis. Hierauf wird gezeigt, wie Gauss*) eine grössere Annäherung erreicht, indem er die n Abscissen α in $\varphi(x)$ nicht mehr in einer arithmetischen Reihe auf einander folgen lässt, sondern für sie die Wurzeln einer gewissen Gleichung n^{ten} Grades setzt. Einen Platz in diesem Handbuche erhält die Darstellung der Näherungsmethode von Gauss, weil jene Gleichung zur Bestimmung der α in $P^n(x)=0$ übergeht sobald $g=-1$, $h=1$ gesetzt wird. Dies soll bei den folgenden Untersuchungen immer geschehen; der allgemeinere Fall lässt sich auf diesen specielleren durch die Substitution

$$x=\frac{h+g}{2}+u\frac{h-g}{2}$$

*) Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi. Comment. soc. reg. scient. Gottingensis rec. Vol. III, 1816 (Soc. reg. scient. exhibita 1814 Sept. 16. Werke III, S. 163—196.

zurückführen, indem man offenbar hat

$$\int_g^h \psi(x)dx = \frac{h-g}{2}\int_{-1}^1 \psi\left[\frac{h+g}{2} + u\frac{h-g}{2}\right]du.$$

Z. B. besteht zwischen einem Integrale in den Grenzen 0 und 1, und einem solchen in den Grenzen -1 und 1 die Beziehung

$$\int_0^1 \psi(x)dx = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^1 \psi\left(\frac{1+x}{2}\right)dx.$$

Bleibt $\psi(x)$ unverändert, wenn man x in $-x$ verwandelt, so hat man

$$\int_{-1}^1 \psi(x)dx = \int_{-1}^1 \psi\left(\frac{1+x}{2}\right)dx.$$

§ 2. Von den verschiedenen Functionen der Veränderlichen x, welche für n gegebene Werthe von x, die durch α_1, α_2, etc., α_n bezeichnet werden, willkürlich gegebene Werthe c_1, c_2, etc., c_n annehmen, ist eine ganz und vom Grade $n-1$; man kann hinzufügen, dass es auch nur eine solche giebt. Setzt man

$$(1) \ldots \quad N(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$$

so ist diese Function

$$N(x)\left[\frac{c_1}{(x-\alpha_1)N'(\alpha_1)} + \frac{c_2}{(x-\alpha_2)N'(\alpha_2)} + \text{etc.} + \frac{c_n}{(x-\alpha_n)N'(\alpha_n)}\right].$$

Da nämlich $N(\alpha_\nu)$ Null, also $N(x)$ gleich $N(x)-N(\alpha_\nu)$ wird und daher durch $x-\alpha_\nu$ getheilt werden kann, so hat der Factor von c_ν in dem vorstehenden Aggregat den Grad $n-1$. Für $x=\alpha_\nu$ verwandelt er sich in 1, während zugleich die Factoren der übrigen Constanten c verschwinden. Gäbe es ferner noch eine zweite Function mit denselben Eigenschaften, so wäre die Differenz dieser und der ersten eine ganze Function, höchstens vom Grade $n-1$, die für $x=\alpha_1$, α_2, etc., α_n verschwindet, also durch die Function $N(x)$ von höherem, dem n^{ten} Grade theilbar sein müsste.

Setzt man statt c_1, c_2, etc. die Werthe, welche $\psi(x)$ für n verschiedene Abscissen $x=\alpha_1$, α_2, etc. annimmt, die in dem Intervalle von -1 bis 1 oder auch zum Theil auf den Grenzen liegen mögen, so ist

$$(2) \ldots \quad \varphi(x) = N(x)\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\psi(\alpha_\nu)}{(x-\alpha_\nu)N'(\alpha_\nu)}$$

die ganze Function, höchstens vom Grade $n-1$, welche für jene

1*

n Abscissen mit $\psi(x)$ übereinstimmt, und auch im ganzen Verlaufe, von $x=-1$ bis $x=1$, der Function ψ beliebig nahe bleibt, wenn man n gross genug nimmt, und die Abscissen nach einem solchen Gesetze wählt, dass die Differenz zwischen je zwei auf einander folgenden $\alpha_\nu-\alpha_{\nu+1}$, entweder $\frac{1}{n}$ ist, wie bei der unten folgenden Methode von Cotesius, oder doch, mit n multiplicirt, für $n=\infty$ gleich 1 wird.

Das Integral der ganzen Function $\varphi(x)$ lässt sich ausführen, und stellt einen angenäherten Werth des gesuchten Integrales von $\psi(x)$ vor. Bildet man also aus den n Abscissen α_1, α_2, etc. α_n, die zwischen -1 und $+1$, oder zum Theil auf ± 1 liegen, nach (1), die ganze Function

$$N(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$$

und setzt

$$(3)\;\dots\quad \frac{1}{N'(\alpha_\nu)}\int_{-1}^{1}\frac{N(x)dx}{x-\alpha_\nu}=A_\nu,$$

so wird ein Näherungswerth von $\int_{-1}^{1}\psi(x)dx$ gleich

$$(4)\;\dots\quad \int_{-1}^{1}\varphi(x)dx=A_1\psi(\alpha_1)+A_2\psi(\alpha_2)+\dots+A_n\psi(\alpha_n).$$

Setzt man $\psi(x)=1$, so wird $\varphi(x)=1$, woraus sich ergiebt, dass die Summe der n Zahlen A gleich 2 ist.

Ein Beweis dafür, dass φ ein Näherungswerth von ψ sei, ist mir nicht bekannt, weshalb ich unten (§ 11) einen solchen hinzufügen werde. Man scheint es in der That bisher für selbstverständlich gehalten zu haben, dass eine ganze Function $n-1^{\text{ten}}$ Grades φ, welche n Punkte mit einer vorliegenden continuirlichen ψ gemein hat, ihr im ganzen Verlaufe, auch in den Punkten, welche zwischen den n Punkten liegen, sehr nahe bleibt, wenn n sehr gross ist. Setzt man die Summe der ersten n Glieder aus der Reihe für $\psi(x)$ gleich $f(x)$, so ist diese Function $n-1^{\text{ten}}$ Grades in der That als Näherungswerth von $\psi(x)$ zu bezeichnen, da sie sich mit wachsendem n dem ψ beliebig nähert. Daher ist der Ausdruck

$$(a)\;\dots\quad N(x)\sum_{\nu=1}^{n}\frac{f(\alpha_\nu)}{(x-\alpha_\nu)N'(\alpha_\nu)},$$

welcher genau $f(x)$ wird, ein Näherungswerth von $\psi(x)$. Ersetzt man in (a) die $f(\alpha_\nu)$ durch $\psi(\alpha_\nu)$, so dass aus (a) die rechte Seite von (2) entsteht, so hat man den Zähler jedes ν^{ten} Gliedes zwar nur um die kleine Grösse $\psi(\alpha_\nu)-f(\alpha_\nu)$ verändert; nichts desto weniger könnte aber der so entstehende Ausdruck, das $\varphi(x)$ in (2), für grosse Werthe von n eine erhebliche Aenderung gegen den früheren Werth $f(x)$ aufweisen, und sich daher weit von der Summe der ersten n Glieder in der Reihe für ψ entfernen.

Für die numerische Rechnung freilich lässt sich das Bedenken, ob wirklich die rechte Seite von (4) als Näherungswerth des Integrals von ψ anzusehen sei, leicht beseitigen. Aus den unten folgenden Tafeln ersieht man nämlich, dass die A, deren algebraische Summe für jedes n genau 2 ist, Zahlwerthe besitzen, deren Summe, wenigstens für alle Werthe von n die man factisch bei der Interpolation benutzt (bei der Methode von Cotes nimmt man $n \leqq 11$, bei der von Gauss $n \leqq 7$), entweder genau 2 ist oder, wo sie grösser wird, doch noch nicht 10 erreicht. Unterscheidet sich ψ von $f(x)$, jener Summe der ersten n Glieder der Reihe für $\psi(x)$, höchstens um eine kleine Grösse ε, so wird daher die rechte Seite von (4) sich von

$$(b) \ldots \quad A_1 f(\alpha_1) + A_2 f(\alpha_2) + \cdots + A_n f(\alpha_n)$$

um weniger als 10ε unterscheiden, und ist andrerseits genau gleich dem Integral von $f(x)$ zwischen den Grenzen ± 1. Dieses unterscheidet sich von dem gesuchten Integrale der Function ψ höchstens um 2ε, so dass die rechte Seite von (4), wenn die Reihe für ψ schnell convergirt, in der That als Näherungswerth des Integrals von ψ angesehen werden darf.

Der Ausdruck (b) ist ebenso gut ein Näherungswerth unseres Integrals; man darf aber nicht übersehen, dass ψ, und nicht f, als gegeben angenommen wird. Liegt eine solche Reihe für ψ vollständig vor, so wird es sich oft empfehlen, dieselbe Glied für Glied zu integriren, und so das Integral von ψ durch Annäherung zu ermitteln.

§ 3. Wir fassen die Vereinfachungen in's Auge die entstehen, sobald man die α so wählt, dass neben jedem positiven α_ν, ein gleiches aber mit dem negativen Zeichen versehenes vorkommt, dass man also hat $\alpha_{n+1-\nu} = -\alpha_\nu$, wenn man die α der Grösse nach ordnet, was so geschehen soll, dass $\alpha_1 > \alpha_2 >$ etc. $> \alpha_n$. Diese Vereinfachungen treten bei der Anwendung der beiden Methoden ein, die wir hier behandeln, sowohl der Newton-Cotesischen als auch der von Gauss, und sind bei den numerischen Rechnungen besonders zu berücksichtigen. Zunächst ist klar, dass für ein ungerades n in diesem Falle auch die Abscisse $\alpha = 0$ vorkommt. Ferner reicht es hin, die A_ν für alle Indices zu berechnen, welche $\frac{1}{2}n$ nicht übersteigen, indem diejenigen A einander gleich sind, welche zu gleichen aber entgegengesetzten α gehören. Da nämlich $N(x)$ eine gerade oder eine ungerade Function ist, so hat man

$$N(-x) = (-1)^n N(x), \quad N'(x) = (-1)^{n-1} N'(x),$$

und hieraus

$$A_{n+1-\nu} = \frac{(-1)^{n-1}}{N'(\alpha_\nu)} \int_{-1}^{1} \frac{N(x)}{x+\alpha_\nu}\, dx.$$

Führt man unter dem Integrale $-x$ als Veränderliche statt x ein, so geht die rechte Seite in den Ausdruck für A_ν über, und man hat in der That $A_{n+1-\nu} = A_\nu$.

§ 4. Cotes lässt die Abscissen α in arithmetischer Reihe auf einander folgen; man setzt dazu

$$\alpha_1 = \frac{n-1}{n-1}, \quad \alpha_2 = \frac{n-3}{n-1}, \quad \alpha_3 = \frac{n-5}{n-1}, \quad \text{etc.}$$

und findet die Werthe der A, nach der Rechnung von Cotes, aus der folgenden Tafel:

Für $n = 2$, $[\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -1]$

$A_1 = 1 = A_2$.

Für $n = 3$, $[\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = -1]$

$A_1 = \frac{1}{3} = A_3$, $A_2 = \frac{4}{3}$.

Für $n = 4$, $[\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = \frac{1}{3},\ \alpha_3 = -\frac{1}{3},\ \alpha_4 = -1]$

$A_1 = \frac{1}{4} = A_4$, $A_2 = \frac{3}{4} = A_3$.

Für $n = 5$,

$A_1 = \frac{7}{45}$, $A_2 = \frac{32}{45}$, $A_3 = \frac{4}{15}$.

Für $n = 6$,

$A_1 = \frac{19}{144}$, $A_2 = \frac{25}{48}$, $A_3 = \frac{25}{72}$.

Für $n = 7$,

$A_1 = \frac{41}{420}$, $A_2 = \frac{18}{35}$, $A_3 = \frac{9}{140}$, $A_4 = \frac{68}{105}$.

Für $n = 8$,

$A_1 = \frac{751}{8640}$, $A_2 = \frac{3577}{8640}$, $A_3 = \frac{49}{320}$, $A_4 = \frac{2989}{8640}$.

Für $n = 9$,

$A_1 = \frac{989}{14175}$, $A_2 = \frac{5888}{14175}$, $A_3 = -\frac{928}{14175}$, $A_4 = \frac{10496}{14175}$,
$A_5 = -\frac{908}{2835}$.

Für $n = 10$,

$A_1 = \frac{2857}{44800}$, $A_2 = \frac{15741}{44800}$, $A_3 = \frac{27}{1120}$, $A_4 = \frac{1209}{2800}$,
$A_5 = \frac{2889}{22400}$.

Für $n = 11$,

$A_1 = \frac{16067}{299376}$, $A_2 = \frac{26575}{149688}$, $A_3 = -\frac{16175}{99792}$, $A_4 = \frac{5675}{6237}$,
$A_5 = -\frac{4825}{5544}$, $A_6 = \frac{17807}{24948}$.

§ 5. Der Ausdruck (4) giebt einen genauen Werth für das Integral von ψ, wenn ψ nur auf den $n-1^{\text{ten}}$ Grad steigt. Wir werden nun den Fehler aufsuchen, welchen die zunächst folgenden Glieder der Reihe

$$(5) \ldots \quad \psi(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots$$

verursachen. Zur Abkürzung wollen wir den Fehler, den man dadurch begeht, dass man die rechte Seite von (4) statt des Integrales von ψ setzt, mit $D\psi(x)$ bezeichnen, wobei man n und die einmal gewählten α festhält, sie mögen, wie im § 4, in einer arithmetischen Reihe oder in anderer Art auf einander folgen. Man hat also

$$(6) \ldots \quad D\psi(x) = \int_{-1}^{1} \psi(x)dx - \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \psi(\alpha_\nu).$$

Ueber diesen Fehler also wird hier gehandelt.

Stellt man hinter den Buchstaben D eine andere Function, z. B. $\psi_1 + \psi_2$, so ist dies so zu verstehen, dass auch hier noch das früher gewählte n und die einmal gewählten n Abscissen α_1, α_2, etc. festgehalten werden. Man hat also die Gleichungen

$$D[\psi_1(x) + \psi_2(x)] = D\psi_1(x) + D\psi_2(x); \quad D[c\psi(x)] = cD\psi(x),$$

wenn c eine Constante vorstellt.

Setzt man statt $\psi(x)$ eine ganze Function, deren Grad $n-1$ nicht übersteigt, so wird $\varphi(x)$, aus (2) gebildet, genau gleich $\psi(x)$ während $\varphi(x)$ nicht $\psi(x)$ selbst, sondern nur den bei der Division von $\psi(x)$ durch $N(x)$ entstehenden Rest darstellt, sobald ψ von höherem Grade ist. Im ersten Falle ist daher $D\psi(x) = 0$. Hieraus folgt die Gleichung $Dx^\nu = 0$ so lange $\nu < n$, wenn man durch ν eine nicht negative ganze Zahl bezeichnet.

Zertheilt man $\psi(x)$ in die Summe einer ganzen Function $n-1^{\text{ten}}$ Grades und von

$$\lambda_n x^n + \lambda_{n+1} x^{n+1} + \cdots + \lambda_p x^p$$

so wird daher

$$(7) \ldots \quad D\psi(x) = \lambda_n Dx^n + \lambda_{n+1} Dx^{n+1} + \cdots + \lambda_p Dx^p,$$

also unabhängig von λ_0, λ_1, etc., λ_{n-1}.

Der Fehler, den man bei der angenäherten Berechnung des Integrals von x^ν begeht, ist nach (6)

$$(8) \ldots \quad Dx^\nu = \int_{-1}^{1} x^\nu dx - A_1 \alpha_1^\nu - A_2 \alpha_2^\nu - \cdots - A_n \alpha_n^\nu.$$

Da dieser Ausdruck für die n Werthe $\nu = 0, 1, 2$, etc., $n-1$ Null ist, so liefert er zunächst n lineare Gleichungen, die zur Bestimmung der A dienen können. Diese sind übrigens schon aus (3) bekannt; die directe Auflösung der vorstehenden Gleichungen giebt keine neue Form für die A sondern nur die bekannte (3).

Sind die Coefficienten λ_n, λ_{n+1}, etc. bekannt, so lässt sich bei der Interpolation aus n Werthen von $\psi(x)$ eine grössere Annäherung dadurch erreichen, dass man die Fehler Dx^ν für die entsprechenden Werthe $\nu = n$, $n+1$, etc. aus (8) berechnet, und hierauf die Correction (7)

$$\lambda_n Dx^n + \lambda_{n+1} Dx^{n+1} + \cdots$$

zu dem angenäherten Werthe

$$A_1\psi(\alpha_1) + A_2\psi(\alpha_2) + \cdots + A_\nu\psi(\alpha_\nu)$$

hinzufügt.

§ 6. Für die weitere Ausführung betrachten wir den Fall dass, wie bei der Newton-Cotesischen Methode, neben jedem positiven α eine gleiche und entgegengesetzte Abscisse $-\alpha$ zur Interpolation verwandt wird (S. 5). Dann sind sämmtliche Fehler Dx^ν, es möge n ungerade oder gerade sein, Null, sobald ν ungerade ist. Für ein gerades ν und für $\nu = 0$ hat man ferner, nach (8),

$$Dx^\nu = \frac{2}{\nu+1} - A_1\alpha_1^\nu - A_2\alpha_2^\nu - \cdots - A_n\alpha_n^\nu = 0$$

so lange $\nu < n$, im ganzen $n-1$ oder $n-2$ Gleichungen je nachdem n ungerade oder gerade ist. Da im ersten Falle noch Dx^n, im zweiten Dx^{n-1} verschwindet, so hat man statt (7) die einfacheren Ausdrücke der Correction, für ein ungerades n

$$(7, a) \ldots \quad D\psi(x) = \lambda_{n+1} Dx^{n+1} + \lambda_{n+3} Dx^{n+3} + \cdots$$

und für ein gerades n

$$(7, b) \ldots \quad D\psi(x) = \lambda_n Dx^n + \lambda_{n+2} Dx^{n+2} + \cdots.$$

Man erkennt hieraus, dass es vortheilhaft ist, bei der Berechnung des Integrales bis zu einem ungeraden n vorzugehen.

Bei der Berechnung der Correctur wird sich die vorstehende Formel für Dx^ν zu

$$(8, a) \ldots \quad \tfrac{1}{2}Dx^{2\nu} = \frac{1}{2\nu+1} - A_1\alpha_1^{2\nu} - A_2\alpha_2^{2\nu} - \cdots - A_\mu\alpha_\mu^{2\nu}$$

abkürzen, wo μ für ein ungerades n die Zahl $\frac{1}{2}(n-1)$, für ein gerades n aber $\frac{1}{2}n$ vorstellt; man wendet sie an für Werthe von ν die $\geqq \frac{1}{2}n$ sind.

Bei der Berechnung, in dem Falle von Cotes, wenn man also setzt

$$\alpha_1 = \frac{n-1}{n-1}, \quad \alpha_2 = \frac{n-3}{n-1}, \quad \alpha_3 = \frac{n-5}{n-1}, \quad \text{etc.},$$

ergeben sich, in Folge der Rechnung von Gauss, folgende Werthe welche, in die Ausdrücke (7, a—b) eingesetzt, die ersten Glieder der Correction verschaffen:

Für $n = 2$ ist $Dx^2 = -\frac{4}{3}$, $Dx^4 = -\frac{8}{5}$, $Dx^6 = -\frac{12}{7}$.
Für $n = 3$ ist $Dx^4 = -\frac{4}{15}$, $Dx^6 = -\frac{8}{21}$.
Für $n = 4$ ist $Dx^4 = -\frac{16}{135}$.
Für $n = 5$ ist $Dx^6 = -\frac{1}{21}$.
Für $n = 6$ ist $Dx^6 = -\frac{352}{13125}$.
Für $n = 7$ ist $Dx^8 = -\frac{16}{1215}$.
Für $n = 8$ ist $Dx^8 = -\frac{42752}{5294205}$.
Für $n = 9$ ist $Dx^{10} = -\frac{37}{8448}$.
Für $n = 10$ ist $Dx^{10} = -\frac{442880}{157837977}$.
Für $n = 11$ ist $Dx^{12} = -\frac{861664}{533203125}$.

Anmerkung. Die von Gauss gegebene Tafel für die Correction bezieht sich zunächst auf den Fall von Integralen zwischen den Grenzen 0 und 1, nicht wie bei uns zwischen -1 und $+1$. Man erreicht aber durch die obige, der hier vorliegenden Form der Aufgabe angepasste Tafel dieselbe Näherung wie durch die Tafel von Gauss, in welcher für jeden Werth von n eine grössere Anzahl von Constanten, die k genannt werden, aufgeführt ist, welche bei Berechnung der Correction in Betracht kommen. Die Beziehung zwischen den k von Gauss und unseren Constanten wird durch die Gleichung gegeben

$$k^{(\nu)} = \frac{1}{2^{\nu+1}}\left[Dx^\nu + \frac{\nu}{1} Dx^{\nu+1} + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2} Dx^{\nu+2} + \text{etc.}\right];$$

man beachte, dass die Glieder auf der rechten Seite theilweise 0 sind, indem $Dx^\nu = 0$, wenn ν ungerade ist. Daher wird für ein gerades n

$$2^{n+1}k^{(n)} = Dx^n,\ k^{(n+1)} = 0,\ 2^{n+3}k^{(n+2)} = Dx^{n+2} + \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)Dx^n,$$

und für ein ungerades n

$$k^{(n)} = 0,\ 2^{n+2}k^{(n+1)} = Dx^{n+1},\ 2^{n+3}k^{(n+2)} = (n+2)Dx^{n+1}.$$

Im III. Bde von Gauss Werken, Göttingen 1866, sind in den Zeilen, die sich dort auf $n = 5$ und $n = 8$ beziehen, die Nenner von $k^{(6)}$ und $k^{(10)}$ resp. in 52500 und 17301504 zu verbessern.

§ 7. Der Grad der Annäherung, welchen man erreicht, wird durch die Wahl von n, d. i. durch die Anzahl der Werthe, aus denen man interpolirt, bedingt, ferner durch die Beschaffenheit von

$\psi(x)$, und endlich durch die Auswahl der Abscissen α. Je nachdem die Curve $n-1^{ten}$ Grades $\varphi(x)$ durch diese oder jene Punkte von $\psi(x)$ gelegt wird, kann der Fehler ein verschiedener sein. Zwar hängt die zweckmässigste Wahl der Abscissen von der Beschaffenheit der Function ψ ab; will man aber Tafeln für die A berechnen, wie sie Newton im Auge hatte, die für jedes gegebene continuirliche ψ brauchbar sein sollen, so ist festzuhalten, dass nur solche α zu Grunde gelegt werden dürfen, welche unabhängig von der Art von ψ, also von den Coefficienten λ in (7) sind. Gauss zeigt, dass bei geeigneter Wahl der n Abscissen α der Fehler Dx^ν nicht nur dann (wie bei Anwendung der Methode von Cotesius) Null ist, wenn $\nu < n$, sondern sogar immer wenn $\nu < 2n$. Der Fehler bei dieser Art der Interpolation aus n Werthen wird also unabhängig von den ersten $2n$ Coefficienten λ, und ist Null, wenn $\psi(x)$ nur auf den Grad $2n-1$ steigt. Da man auch bei dieser Auswahl der Abscissen hat $\alpha_\nu = -\alpha_{n+1-\nu}$, so findet man, nach § 3 S. 5, aus (7, a—b) für den Fehler folgenden Ausdruck, der als Correction benutzt werden kann, wenn man die Constanten λ_{2n}, λ_{2n+2}, etc. kennt:

$$(7,\ c)\ \ldots\quad D\psi(x) = \lambda_{2n} Dx^{2n} + \lambda_{2n+2} Dx^{2n+2} + \lambda_{2n+4} Dx^{2n+4} + \text{etc.},$$

der, wie es nothwendig sein muss, Null ist, wenn ψ nicht auf den Grad $2n$ steigt.

In der Sprache der Geometrie lässt sich dies Resultat folgendermassen ausdrücken: Bestimmt man auf geeignete Weise n Abscissen zwischen -1 und 1, und wählt auf den zu ihnen gehörenden Ordinaten n beliebige Punkte, so bleibt für alle verschiedenen Curven $\psi(x)$ von einem Grade, der $2n-1$ nicht übersteigt, welche durch diese n Punkte gelegt werden, der Flächenraum unverändert, der durch die jedesmalige Curve, das Stück der Abscissenaxe von -1 bis 1, und die beiden Ordinaten in den Punkten ± 1 begrenzt wird.

§ 8. Um solche α aufzufinden, welche auch den Gleichungen genügen

$$Dx^n = Dx^{n+1} = Dx^{n+2} = \text{etc.} = Dx^{2n-1} = 0,$$

bilden wir*) eine erzeugende Function der Fehler Dx^ν, indem wir

*) M. vergl. hierüber auch Scheibner, Berichte der Kön. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, math. phys. Classe, Sitzung vom 31. Mai 1856, S. 65–76. Zu den $2n$ Gleichungen $Dx^\nu = 0$ für $\nu = 0$ bis $\nu = 2n-1$ gelangt Herr Schellbach,

nämlich (8) mit $z^{-\nu-1}$ multipliciren, wenn z eine hinlänglich grosse, sonst willkürliche Zahl bezeichnet, und die so entstehende Gleichung über alle ν, von 0 bis ∞, summiren. Da, wie oben bemerkt wurde, neben α auch jedesmal $-\alpha$ zur Abscisse genommen wird, woraus $Dx^\nu = 0$ für jeden ungeraden Exponenten ν folgt, so erhält man als erzeugende Function der Fehler

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{D(x^\nu)}{z^{\nu+1}} = \log \frac{z+1}{z-1} - z \sum_{m=1}^{n} \frac{A_m}{z^2 - \alpha_m^2},$$

einen Ausdruck, der sich noch weiter umformen lässt. Setzt man

$$\int_{-1}^{1} \frac{N(x) - N(z)}{x - z}\, dx = \eta(z),$$

so ist offenbar $\eta(z)$ eine ganze Function $n-1^{\text{ten}}$ Grades von z, die sich, nach (3), in $A_m . N'(\alpha_m)$ verwandelt sobald man für z einen Werth α_m setzt, welcher $N(z)$ zu Null macht. Setzt man noch

$$\frac{2z}{z^2 - \alpha^2} = \frac{1}{z-\alpha} + \frac{1}{z+\alpha},$$

so wird daher die erzeugende Function der Fehler gleich

$$\log \frac{z+1}{z-1} - \tfrac{1}{2} \sum_{m=1}^{n} \frac{\eta(\alpha_m)}{N'(\alpha_m)(z-\alpha_m)} - \tfrac{1}{2} \sum_{m=1}^{n} \frac{\eta(\alpha_m)}{N'(\alpha_m)(z+\alpha_m)}.$$

Da $\eta(\alpha)$ und $N'(\alpha)$ durch Vertauschung von α mit $-\alpha$ entweder unverändert bleiben oder gleichzeitig ihr Zeichen, nicht aber den Zahlwerth ändern, so sind die beiden vorstehenden Summen Σ einander gleich; ihre Summe ist, nach der bekannten Interpolationsformel (2), gleich

$$\frac{\eta(z)}{N(z)} = \frac{1}{N(z)} \int_{-1}^{1} \frac{N(x) - N(z)}{x - z}\, dx,$$

---

in der Abhandlung über mechanische Quadratur im Programm des Friedrich-Wilhelms Gymn. zu Berlin, (1877. Progr. No. 46) ohne direkte Anwendung der Lagrange'schen Interpolationsformel, indem er annimmt, man könne $\int_{-1}^{1} f(xz)\,dx$, für alle z, angenähert gleich

$$A_1 f(\alpha_1 z) + A_2 f(\alpha_2 z) + \cdots + A_n f(\alpha_n z)$$

setzen, wo A und α von z unabhängige Constante vorstellen. Entwickelt man $f(xz)$ im Integrale, und in dem Näherungswerthe $f(\alpha z)$ nach dem MacLaurin'schen Satze, so ist in der Differenz zwischen dem Integrale und dem Näherungswerthe mit $\frac{z^\nu}{\Pi \nu}$ genau der Ausdruck Dx^ν aus (8) multiplicirt. Will man, dass z^ν aus der Reihe verschwinde, so hat man also die Constanten A und α so zu wählen, dass Dx^ν gleich Null wird.

und dies, offenbar, gleich

$$\frac{1}{N(x)}\int_{-1}^{1}\frac{N(x)dz}{x-z}+\log\frac{z+1}{z-1}.$$

Wählt man die n Abscissen α so, dass $\alpha_\nu = -\alpha_{n+1-\nu}$, im übrigen beliebig, und setzt

$$N(z)=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n),$$

so ist also eine erzeugende Function der Fehler Dx^ν

$$(9)\ \ldots\ \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{Dx^\nu}{z^{\nu+1}}=\frac{1}{N(z)}\int_{-1}^{1}\frac{N(x)dx}{z-x}.$$

Es kommt darauf an, N so zu bestimmen, dass die ganze rechte Seite von (9), oder, was auf dasselbe hinaus kommt, das Integral auf derselben, nach absteigenden Potenzen von z entwickelt, mit einer möglichst hohen Potenz von z^{-1} beginnt. Die Entwickelung des Integrals giebt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{z^{\nu+1}}\int_{-1}^{1}x^\nu N(x)dx.$$

Man weiss aus S. 276—278 des I. Bandes dieses Handbuchs*), dass die ersten Glieder dieser Summe, von $\nu=0$ bis $\nu=n-1$, verschwinden, wenn man $N(x)=P^n(x)$ macht, so dass dann die Entwickelung der erzeugenden Function der Fehler mit der $-2n^{\text{ten}}$ Potenz von z beginnt, und alle Fehler Dx^ν von $\nu=0$ bis $\nu=2n-1$, diese Grenzen eingeschlossen, verschwinden. Wählt man also die Wurzeln der Gleichung $P^n(x)=0$, die sämmtlich verschieden, reell und <1, ferner paarweise, eventuell mit Ausschluss der Wurzel 0, gleich und entgegengesetzt sind (I. 48 u. 21), zu Abscissen α, so wird in der That (7, c) auf S. 10 den Ausdruck des Fehlers geben, so dass die Methode von Gauss bei einer Interpolation aus n Abscissen dieselbe Näherung verschafft, wie eine Interpolation aus $2n$ Abscissen bei Cotes: beide geben das Integral von $\psi(x)$ genau, wenn $\psi(x)$ eine Function des Grades $2n-1$ von x ist.

Wie früher so kann man auch hier die ersten Glieder des Ausdrucks für den Rest als Correction benutzen. Um die Fehler

*) In der Folge werde ich in der Regel auf Seiten des I. Bandes verweisen, indem ich die Zahl welche die Seite trägt, unmittelbar dem I. folgen lasse; z. B. werde ich das obige Citat zu I. 276—278 kürzen, während I, (21) oder I, (21, a) auf die Formel (21) oder (21, a) des I. Bandes hinweist.

Dx^ν, wenn $\nu > 2n-1$, zu diesem Zwecke leicht zu berechnen, bedient man sich der Gleichung (11) auf I. 78 oder der Gleichung (21) auf I. 141. Nach denselben ist

$$\int_{-1}^{1} \frac{P^n(x)dx}{z-x} = 2Q^n(z),$$

und man findet schliesslich die erzeugende Function der Fehler für die Methode von Gauss in der Form

$$\Sigma \frac{1}{z^{\nu+1}} Dx^\nu = 2\frac{Q^n(z)}{P^n(z)}.$$

Setzt man für P und Q die hypergeometrischen Reihen, die ihnen nach I. 79 gleich sind, so wird die rechte Seite

$$\frac{2}{2n+1}\cdot\left[\frac{1.2.3...n}{1.3.5...(2n-1)}\right]^2\cdot\frac{z^{-2n-1}F\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}n,\ 1+\tfrac{1}{2}n,\ \tfrac{3}{2}+n,\ \frac{1}{zz}\right)}{F\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}n,\ -\tfrac{1}{2}n,\ \tfrac{1}{2}-n,\ \frac{1}{zz}\right)},$$

woraus man zunächst wieder erkennt, dass $Dx^\nu = 0$ sobald $\nu < 2n$ und immer wenn ν ungerade ist. Da der Quotient der beiden hypergeometrischen Reihen, bei der Entwickelung in eine Reihe, mit 1 beginnt, so werden die ersten Glieder des Fehlers

$$\frac{2}{2n+1}\left[\frac{1.2.3...n}{1.3.5...(2n-1)}\right]^2\cdot\left[\lambda_{2n}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2n+3}+\frac{n(n-1)}{2n-1}\right)\lambda_{2n+2}\right].$$

Benutzt man diese zur Correction, so tritt also kein früherer Coefficient λ als λ_{2n+4} im Fehler auf.

§ 9. Die hauptsächlichen Resultate, welche im § 8 erhalten wurden, gewinnt man sehr leicht durch ein Verfahren, welches Jacobi im I. Bde*) des Crelle'schen Journals anwandte, um die Näherungsmethode von Gauss darzustellen.

Vorausgesetzt wird, es sei gestattet $\psi(x)$ als eine ganze Function vom Grade $2n-1$ zu betrachten. Behält man die frühere Bezeichnung bei, so verschwindet $\psi(x)-\varphi(x)$, wie man auch die Abscissen α wählt, für $x=\alpha_1, \alpha_2$, etc., α_n, ist also durch $N(x)$ theilbar. Man hat demnach

$$\psi(x) = \varphi(x) + N(x)(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}),$$

wenn die a Constante bezeichnen welche, ausser von den α, auch

---

*) Ueber Gauss neue Methode, die Werthe der Integrale näherungsweise zu finden: S. 301—308.

noch von der Beschaffenheit von $\psi(x)$ abhängen. Soll nun das Integral von $\psi(x)dx$ zwischen den Grenzen -1 und 1 mit dem von $\varphi(x)dx$, d. i. mit der rechten Seite von (4), und zwar für alle ψ, vertauscht werden können, soll also

$$D\psi(x) = \int_{-1}^{1} N(x)(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}) dx$$

für beliebige a Null werden, so muss N so beschaffen sein, dass man von $\nu = 0$ bis $\nu = n-1$ hat

$$\int_{-1}^{1} x^\nu N(x) dx = 0.$$

Das die Function $N(x) = P^n(x)$ diese Eigenschaft besitzt, zeigte sich schon I. 76, die Function N wurde I. 276—278 aus dieser Eigenschaft aufgefunden. Zugleich zeigte sich dort, dass $P^n(x)$, abgesehen von constanten Factoren, die einzige Function sei, welche jenen n Gleichungen genügt. Man hat also, um $D\psi(x)$ zu Null zu machen, zu Abscissen α die n Wurzeln von $P^n(x) = 0$ zu nehmen.

§ 10. Gauss hat eine Tafel berechnet, welche für die Werthe $n = 1$ bis $n = 7$ die n Abscissen α giebt, aus deren Ordinaten $\psi(\alpha)$ das Integral von $\psi(x)$ zwischen den Grenzen -1 und 1 am vortheilhaftesten berechnet wird; ferner fügt er die A und die Correction hinzu. Es mag daran erinnert werden (I. 278 u. I. 142, (21, a)), dass $N(x) = P^n(x)$ in Bezug auf den Kettenbruch für

$$\log \frac{x+1}{x-1}$$

der n^{te} Näherungsnenner ist, und A_ν aus dem n^{ten} Näherungszähler $2Z_n(x)$ für $x = \alpha_\nu$ entsteht. In der That stimmt der Ausdruck von $\eta(z)$ auf S. 11 mit dem von $2Z_n$ überein, während A_ν nach § 8 aus der Division von η durch N' erhalten wird. Man hat also

$$A_\nu = \frac{2Z_n(\alpha_\nu)}{N'(\alpha_\nu)}, \quad N(x) = P^n(x).$$

Den Zähler Z kann man entweder direkt aus dem Kettenbruch für die logarithmische Reihe berechnen, oder sich der Formel I, (20, b) bedienen

$$Z_n(x) = \frac{2n-1}{1.n} P^{n-1}(x) + \frac{2n-3}{3.(n-1)} P^{n-3}(x) + \cdots.$$

Nach der Rechnung von Gauss gebe ich folgende Zusammenstellung:

I. Formeln.

Angenäherter Werth von $\int_{-1}^{1}\psi(x)dx$ bei der Berechnung aus n Ordinaten:

$$A_1\psi(\alpha_1)+A_2\psi(\alpha_2)+\cdots+A_n\psi(\alpha_n).$$

Setzt man $\psi(x)=\lambda_0+\lambda_1 x+\lambda_2 x^2+$ etc., so ist der Fehler

$$D\psi(x)=\lambda_{2n}Dx^{2n}+\lambda_{2n+2}Dx^{2n+2}+\cdots,$$

$$Dx^{2n}=\frac{2}{2n+1}\left[\frac{1.2.3\ldots n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\right]^2.$$

II. Numerische Werthe.

n = 1.

$\alpha_1=0,\quad \tfrac{1}{2}A_1=1,\quad Dx^2=\tfrac{2}{3}.$

n = 2.

$\alpha_1=-\alpha_2=0{,}5773502691\ 896258,$

$\tfrac{1}{2}A_1=\tfrac{1}{2}A_2=\tfrac{1}{2},\quad Dx^4=\tfrac{8}{45}.$

n = 3.

$\alpha_1=-\alpha_3=0{,}7745966692\ 414834,$

$\alpha_2=0,$

$\tfrac{1}{2}A_1=\tfrac{1}{2}A_3=\tfrac{5}{18},$

$\tfrac{1}{2}A_2=\tfrac{4}{9},$

$Dx^6=\tfrac{8}{175}.$

n = 4.

$\alpha_1=-\alpha_4=0{,}8611363115\ 940492,$

$\alpha_2=-\alpha_3=0{,}3399810435\ 848646,$

$\tfrac{1}{2}A_1=\tfrac{1}{2}A_4=0{,}1739274225\ 687284\quad \log=9{,}2403680612,$

$\tfrac{1}{2}A_2=\tfrac{1}{2}A_3=0{,}3260725774\ 312716\quad\quad 9{,}5133142764,$

$Dx^8=\tfrac{128}{11025}.$

n = 5.

$\alpha_1=-\alpha_5=0{,}9061798459\ 386640,$

$\alpha_2=-\alpha_4=0{,}5384693101\ 056830,$

$\alpha_3=0,$

$\tfrac{1}{2}A_1=\tfrac{1}{2}A_5=0{,}1184634425\ 280945\quad \log=9{,}0735843490,$

$\tfrac{1}{2}A_2=\tfrac{1}{2}A_4=0{,}2393143352\ 496832\quad\quad 9{,}3789687142,$

$\tfrac{1}{2}A_3=\tfrac{64}{225}=0{,}2844444444\ 444444\quad\quad 9{,}4539974559,$

$Dx^{10}=\tfrac{128}{43659}.$

n = 6.

$$\alpha_1 = \alpha_6 = 0{,}9324695142\ 031520,$$
$$\alpha_2 = \alpha_5 = 0{,}6612093864\ 662644,$$
$$\alpha_3 = \alpha_4 = 0{,}2386191860\ 831970,$$
$$\tfrac{1}{2}A_1 = \tfrac{1}{2}A_6 = 0{,}0856622461\ 895852 \quad \log = 8{,}9327894580,$$
$$\tfrac{1}{2}A_2 = \tfrac{1}{2}A_5 = 0{,}1803807865\ 240693 \quad 9{,}2561902763,$$
$$\tfrac{1}{2}A_3 = \tfrac{1}{2}A_4 = 0{,}2339569672\ 863455 \quad 9{,}3691359831,$$
$$Dx^{12} = \tfrac{512}{693693}.$$

n = 7.

$$\alpha_1 = \alpha_7 = 0{,}9491079123\ 427596,$$
$$\alpha_2 = \alpha_6 = 0{,}7415311855\ 993944,$$
$$\alpha_3 = \alpha_5 = 0{,}4058451513\ 773970,$$
$$\alpha_4 = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}A_1 = \tfrac{1}{2}A_7 = 0{,}0647424830\ 844348 \quad \log = 8{,}8111893529,$$
$$\tfrac{1}{2}A_2 = \tfrac{1}{2}A_6 = 0{,}1398526957\ 446384 \quad 9{,}1456708421,$$
$$\tfrac{1}{2}A_3 = \tfrac{1}{2}A_5 = 0{,}1909150252\ 525595 \quad 9{,}2808401093,$$
$$\tfrac{1}{2}A_4 = \tfrac{256}{1225} = 0{,}2089795918\ 367347 \quad 9{,}3201038766,$$
$$Dx^{14} = \tfrac{512}{2760615}.$$

§ 11. Es folgt nun der Beweis des Satzes, welcher im § 2 aufgestellt wurde, dass eine Function $\psi(x)$ sich in irgend welchen Grenzen g und h von x durch die Interpolationsformel, d. i. durch die rechte Seite von (2), mit beliebiger Näherung darstellen lässt, wenn man n hinreichend gross nimmt (und die α über das Integrations-Intervall gehörig vertheilt). Statt der Grenzen g und h nehme ich, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, -1 und $+1$, um die früheren Bezeichnungen beibehalten zu können.

Wir haben zu zeigen, dass

$$\psi(x) - N(x)\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\psi(\alpha_\nu)}{(x-\alpha_\nu)N'(\alpha_\nu)}$$

mit wachsendem n der Grenze 0 zustrebt. Dazu transformiren wir diesen Ausdruck, mit Hülfe eines fruchtbaren Satzes von Cauchy, in

$$(a) \ldots \quad \frac{N(x)}{2\pi i}\int \frac{\psi(z)\,dz}{(z-x)N(z)},$$

wenn dies Integral sich über alle Punkte z erstreckt, welche sich auf der Peripherie eines Kreises mit dem Radius r befinden, der so gross genommen wird, dass er die Punkte α_1, α_2, etc., α_n und x umschliesst. Hierin liegt also die Annahme, $\psi(x)$ sei so beschaffen, dass diese Function in eine Potenzreihe entwickelt werden kann, die, wenn auch noch so wenig, über $x = 1$ hinaus convergirt. Es ist dies nicht etwa eine neue Forderung, welche ich hier für die Möglichkeit der näherungsweisen Berechnung stelle, sondern eine solche welche bei Gauss im § 2 seiner mehrfach erwähnten Abhandlung Methodus nova vorkommt: Quodsi igitur y, in seriem secundum potestates ipsius t progredientem evoluta, ante terminum qui implicat t^{n+1} omnino abrumpitur, cum Y identica erit; si vero tam cito convergit ut terminos sequentes spernere liceat, functio Y inter limites $t = 0$, $t = 1$, ... ipsius y vice fungi poterit.

Der Ausdruck (a) wird für $n = \infty$ die Grenze 0 haben, sobald der Quotient

$$\frac{N(x)}{\mathcal{M} N(z)}$$

für $n = \infty$ Null zur Grenze hat. Ich zeige, dass dies der Fall sei zunächst wenn die Abscissen α so wie bei der Newton-Cotesischen Methode aufeinander folgen. Des bequemeren Ausdrucks halber scheide ich die Fälle eines geraden Stellenzeigers n und den eines ungeraden, behandele aber nur einen von ihnen — ich wähle den letzten — und vertausche deshalb das frühere n mit $2n+1$.

1) Den grössten Werth den der Zähler $N(x)$, also

$$\left(x - \frac{n}{n}\right)\left(x - \frac{n-1}{n}\right)\left(x - \frac{n-2}{n}\right)\cdots\left(x + \frac{n-1}{n}\right)\left(x + \frac{n}{n}\right),$$

von $x = -1$ bis $x = 1$ für ein festgehaltenes n annimmt, möge diese Function für $x = c + \frac{\mu}{n}$ erreichen, wenn die ganze Zahl μ von $-n$ incl. bis an n, und $c < \frac{1}{n}$ und positiv genommen wird. Offenbar kann man jede Zahl x von -1 bis 1 so darstellen. Dann ist der Zahlwerth von $N(x)$ gleich

$$c\left(c + \frac{1}{n}\right)\left(c + \frac{2}{n}\right)\cdots\left(c + \frac{n+\mu}{n}\right)\cdot\left(\frac{1}{n} - c\right)\left(\frac{2}{n} - c\right)\cdots\left(\frac{n-\mu}{n} - c\right),$$

und wenn man $nc = \gamma$ setzt wo $\gamma < 1$, gleich

$$(b) \ldots \quad n^{-2n-1}.\gamma(\gamma+1)(\gamma+n+\mu).(1-\gamma)(2-\gamma)\ldots(n-\mu-\gamma).$$

Bei festgehaltenem γ erreicht (b) seinen grössten Werth für $\mu = -n$, oder für $\mu = n-1$. Im ersten Fall, $\mu = -n$, giebt (b) nämlich

$$n^{-2n-1}.\gamma(1-\gamma)(2-\gamma)\dots(2n-\gamma),$$

während (b) für die folgenden Werthe $\mu = 1-n,\ 2-n$, etc. aus dem Vorhergehenden durch Multiplication mit

$$\frac{(\gamma+1)}{(2n-\gamma)},\quad \frac{(\gamma+1)(\gamma+2)}{(2n+\gamma)(2n-1-\gamma)},\quad \text{etc.}$$

entsteht. Diese Glieder nehmen bis $\mu = 0$, je nach der Grösse von γ exclus. oder incl., ab, dann wieder zu, bis (b) für $\mu = n-1$ schliesslich gleich wird

$$n^{-2n-1}.(1-\gamma)\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+2n-1).$$

Jedenfalls ist also, wenn x zwischen -1 und 1 bleibt, $N(x)$ kleiner als

$$n^{-2n-1}\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+2n),$$

und da dieser Ausdruck für keinen Werth, den γ annehmen darf, grösser ist als für $\gamma = 1$, so ist sicher

$$N(x) < n^{-2n-1}.1.2.3\dots(2n+1).$$

2) Andrerseits suchen wir den kleinsten Werth für den Modulus des Nenners $N(z)$ auf. Dazu bringen wir die complexen Zahlen z, die auf der Peripherie des Kreises liegen, in die Form $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ und haben dann

$$\mathcal{M}N(z) = n^{-2n-1}\prod_{\nu=-n}^{n}\sqrt{r^2n^2 - 2rn\nu\cos\varphi + \nu^2}.$$

Dies Produkt verwandelt sich, wenn man je zwei Glieder zusammenfasst, in

$$rn^{-2n}\prod_{\nu=1}^{n}\sqrt{(r^2n^2+\nu^2)^2 - 4r^2n^2\nu^2\cos^2\varphi},$$

ist also am kleinsten für den Fall $\varphi = 0$, folglich nicht kleiner als

$$rn^{-2n}\prod_{\nu=1}^{n}(r^2n^2 - \nu^2).$$

3) Stellt man dies mit dem für $N(x)$ gewonnenen Resultate zusammen, so erhält man

$$\mathcal{M}\frac{N(x)}{N(z)} < \frac{1.2.3\dots(2n+1)}{(rn-n)(rn-n+1)\dots(rn+n)}.$$

Die rechte Seite wird in der That für $n = \infty$ gleich Null, sobald r die Einheit überschreitet. Setzt man nämlich $rn = n+\eta$, so wird

η, wie wenig auch r über 1 genommen ist, von einer gewissen Grösse von n an grösser als 1. Es nimmt aber die rechte Seite,

$$\frac{1.2.3\ldots(2n+1)}{\eta(\eta+1)(\eta+2)\ldots(\eta+2n)},$$

sobald $\eta > 1$, mit wachsendem n nicht nur fortwährend, sondern auch bekanntlich*) zu Null ab.

Hierdurch ist bewiesen, dass der Ausdruck $\varphi(x)$ in (2) sich mit wachsendem n, von $x = -1$ bis $x = 1$, der Function $\psi(x)$ beliebig nähert, sobald dieselbe sich in eine Potenzreihe

$$\psi(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots$$

entwickeln lässt, welche für einen Werth von x, der beliebig, wenig über 1 liegt convergirt.

Man erhält durch geringe selbstverständliche Modificationen dieses Beweises dasselbe Resultat, wenn man solche Abscissen α wählt, für die $n(\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1})$ zwar nicht, wie oben, für jedes ν constant bleibt, aber doch so beschaffen ist, dass dieser Ausdruck sich mit wachsendem n einer Constanten nähert, also z. B. die Summe einer Constanten und eines Gliedes ist, welches sich der 0 zur Ordnung 1 nähert, das heisst, zu derselben Ordnung wie $\frac{1}{n}$. Diese Eigenschaft besitzen aber (Hdb. I, Gl. 28, c) für wachsende n die α, welche $P^n(\alpha)$ zu Null machen, die man bei der Methode von Gauss (§ 8) anwendet. Somit ist der obige Satz auch bei der Wahl dieser Abscissen bewiesen.

§ 12. Aus dem I. Bd. I. Theil, 5. Kap. S. 271—273 kennt man die Beziehungen zwischen gewissen linearen Gleichungen und den Näherungsnennern des Kettenbruchs für die logarithmische Reihe, aus I. 276 die Beziehungen, welche zwischen den ersteren und Gleichungen

$$\int_{-1}^{1} x^\nu N(x)\,dx = 0$$

bestehen. S. 273—274, 275—276, 279—280 wird gezeigt, wie diese Untersuchungen sich auf die hypergeometrische Reihe $F(\alpha, 1, \gamma, x)$ und die durch ein Element q verallgemeinerte φ übertragen lassen. Der 2. Zusatz zum 5. Kapitel, S. 286—297 liefert Resultate für noch

*) Man vergl. I. 108 unter 2).

allgemeinere Functionen. Die Gleichartigkeit der in diesem Zusatze gewonnenen Formeln mit denen, welche sich auf die logarithmische Reihe bezogen, gestattet, wie bereits I. 297 in Aussicht gestellt wurde, eine Anwendung auch der allgemeineren Resultate auf die Quadratur.

Wir handeln über die näherungsweise Berechnung des Integrals

$$(10) \dots \int_g^h \psi(x) f(x) dx,$$

wenn durch g und h gegebene Constante bezeichnet werden, $\psi(x)$ eine continuirliche Function vorstellt, die noch für einen hinlänglich grossen Werth von x in eine Reihe $\sum \lambda_n x^n$ entwickelt werden kann, und $f(x)$ eine andere gegebene Function, die auch innerhalb der Grenzen g und h unendlich werden darf, wenn nur ihr Integral und das obige (10) endlich bleiben. Setzt man, nach Analogie des Verfahrens im § 2

$$N(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n),$$

und vertheilen sich α_1, α_2, etc. über die Axe der X von g bis h, so wird

$$N(x) \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\psi(\alpha_\nu)}{(x-\alpha_\nu) N'(\alpha_\nu)}$$

ein Näherungswerth der Function $\psi(x)$, und wenn man setzt

$$(11) \dots \quad A_\nu = \frac{1}{N'(\alpha_\nu)} \int_g^h \frac{N(x) f(x) dx}{x-\alpha_\nu},$$

so ist daher

$$(12) \dots \quad A_1 \psi(\alpha_1) + A_2 \psi(\alpha_2) + \dots + A_n \psi(\alpha_n)$$

ein Näherungswerth des vorliegenden Integrales (10). Zur praktischen Anwendung wird diese Methode sich in der Regel nur dann eignen, wenn die A sich leicht berechnen lassen. Macht man, wie im § 8, die ganze Function von z vom Grade $n-1$

$$\int_g^h \frac{N(x)-N(z)}{x-z} f(x) dx = \eta(z),$$

so ist $A_m N'(\alpha_m)$ gleich $\eta(\alpha_m)$.

Wir versuchen den Fehler bei der Berechnung des Integrals (10),

$$\int_g^h \psi(x) f(x) dx - \sum_{m=1}^{n} A_m \psi(\alpha_m) = D\psi(x),$$

möglichst klein zu machen, in demselben Sinne wie früher. Es wird in der That wiederum gelingen, die α so zu wählen, dass bei der Interpolation aus n Abscissen der Fehler Null ist, wenn $\psi(x)$ nur auf den Grad $2n-1$ steigt.

Man hat nämlich als erzeugende Function der Fehler Dx^ν den Ausdruck

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{Dx^\nu}{z^{\nu+1}} = \int_g^h \frac{f(x)dx}{z-x} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\eta(\alpha_m)}{N'(\alpha_m)(z-\alpha_m)}.$$

Da das abzuziehende Glied auf der Rechten sich in den Quotienten

$$\frac{\eta(z)}{N(z)} = \int_g^h \frac{N(x)-N(z)}{(x-z)N(z)} f(x)dx$$

verwandeln lässt, so wird diese erzeugende Function der Fehler schliesslich

$$= \frac{1}{N(z)} \int_g^h \frac{N(x)f(x)dx}{z-x}.$$

Kann man nun die ganze Function n^{ten} Grades N so bestimmen, dass für alle ganzen ν von 0 bis $n-1$ das Integral

$$\int_g^h x^\nu N(x)f(x)dx$$

verschwindet, so würde die nach absteigenden Potenzen von z geordnete Reihe, in welche man den obigen Ausdruck für die erzeugende Function der Fehler entwickeln kann, erst mit der $-2n^{\text{ten}}$ beginnen. Daher verschwindet dann der Fehler $D\psi(x)$ so lange $\psi(x)$ nur auf den Grad $2n-1$ steigt.

Eine solche Function N findet man, wie aus dem erwähnten 2. Zusatz zum 5. Kapitel hervorgeht, aus dem Kettenbruche für

$$(13) \ldots \quad \sigma = \int_g^h \frac{f(z)dz}{x-z},$$

dessen Partialnenner sämmtlich vom ersten Grade sind (S. 291). Sein Näherungsnenner vom n^{ten} Grade ist die gesuchte Function $N(x)$. Die Werthe α, für die sie verschwindet und welche als Abscissen dienen, sind sämmtlich ungleich und reell, und liegen zwischen g und h. Aus S. 288 geht hervor, dass $\eta(z)$, welches zur Berechnung der A dient, der entsprechende (n^{te}) Näherungszähler $Z(z)$ ist, während die erzeugende Function der Fehler sich aus dem Reste $R(x)$, welcher nach S. 288 durch die Gleichung

$$\sigma N(x) - Z(x) = R(x) = \int_g^h \frac{N(z) f(z) dz}{x - z}$$

gefunden wird, durch Division mit $N(x)$ ergiebt. Der angenäherte Werth des Integrals (10) ist demnach

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{Z(\alpha_\nu)}{N'(\alpha_\nu)} \psi(\alpha_\nu),$$

wenn $Z(x)$ und $N(x)$ den n^{ten} Näherungszähler und Nenner des Kettenbruchs für σ bezeichnen, und α_1, α_2, etc. die Wurzeln von $N(x) = 0$ sind.

Durch Entwickelung von

$$\frac{R(z)}{N(z)}$$

nach absteigenden Potenzen von z erhält man eine Reihe von der Form

$$\frac{Dx^{2n}}{z^{2n+1}} + \frac{Dx^{2n+1}}{z^{2n+2}} + \cdots$$

Die ersten Glieder kann man auch hier, ähnlich wie am Schluss des § 8, durch Einsetzen in den Ausdruck des Fehlers

$$\lambda_{2n} Dx^{2n} + \lambda_{2n+1} Dx^{2n+1} + \cdots$$

zur Correction verwenden.

§ 13. Als Beispiel für das Vorhergehende behandeln wir die näherungsweise Berechnung des Integrals

$$(14) \ldots \int_0^1 \psi(x) x^{\beta-1} (1-x)^{\gamma-\beta-1} dx,$$

wenn β und $\gamma - \beta$ positiv sind. Man hat dann die Functionen N, Z und R zu betrachten, welche sich auf den Kettenbruch für

$$\sigma = \int_0^1 \frac{z^{\beta-1}(1-z)^{\gamma-\beta-1} dz}{x - z}$$

beziehen, d. h. auf

$$\sigma = \frac{1}{x} \cdot \frac{\Gamma\beta \Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma\gamma} \cdot F\left(1, \beta, \gamma, \frac{1}{x}\right),$$

dessen Nenner, Zähler und Rest man der Zusammenstellung auf S. 280 d. I. Bd. entnehmen kann. Die Abscissen α, welche man zur Interpolation verwendet, sind dann die Wurzeln der Gleichung

$$N(x) = x^n F\left(-n, -\beta - n + 1, -\gamma - 2n + 2, \frac{1}{x}\right).$$

Den Zähler, welchen man zur Berechnung des Näherungswerthes benutzt, entnimmt man entweder dem an der citirten Stelle angegebenen Kettenbruche, oder bedient sich der Formel

$$Z(x) = \int_0^1 y^{\beta-1}(1-y)^{\gamma-\beta-1}\,\frac{N(x)-N(y)}{x-y}\,dy.$$

Man findet ferner

$$R(x) = \frac{\Gamma(\beta+n)\Gamma(\gamma+n-\beta)\Gamma(\gamma+n-1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(\gamma+2n)\Gamma(\gamma+2n-1)}$$
$$\cdot\frac{1}{x^{n+1}}\,F\left(n+1,\ \beta+n,\ \gamma+2n,\ \frac{1}{x}\right).$$

Die multiplicirende Constante in dieser Function ist daher genau das zur Correctur zu verwendende Dx^{2n}.

Herr Mehler, welcher die Formeln dieses Paragraphen, im wesentlichen, gegeben hat*) bestimmt die geeignete Function N mit Hülfe der Gleich. (24) in I. 158. Da nämlich die erzeugende Function der Fehler wesentlich von dem Integrale

$$\int_0^1 y^{\beta-1}(1-y)^{\gamma-\beta-1}\,\frac{N(y)dy}{x-y}$$

abhängt, dessen Entwickelung in eine nach Potenzen von x absteigende Reihe mit einer möglichst hohen Potenz von x^{-1} anfangen soll, so wird dies erreicht, wenn man für N die oben angegebene hypergeometrische Reihe einführt, weil man dann nach I, (24) erhält

$$ky^{\beta-1}(1-y)^{\gamma-\beta-1}N(y) = \frac{d^n}{dy^n}\left[y^{n+\beta-1}(1-y)^{n+\gamma-\beta-1}\right],$$

wenn k eine gewisse Constante bezeichnet.

Der praktischen Anwendbarkeit dieser Formeln würde hier im allgemeinen der Mangel an Tafeln nach dem Muster derer von Gauss, die für verschiedene β und γ berechnet sein müssten, entgegenstehen. In einem einfachen Falle, den Herr Mehler erwähnt, für $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$ lässt aber die Methode eine Anwendung zu. Setzt man noch

$$x = \sin^2\tfrac{1}{2}\theta \quad \text{wenn} \quad x < 1,$$
$$x = \sin^2\tfrac{1}{2}(\pi + ui) \quad \text{wenn} \quad x > 1,$$

und nimmt im letzten Falle u positiv, so wird

*) Borchardt, Journal f. M. Bd. 63, S. 152—157: Bemerkungen zur Theorie der mechanischen Quadraturen.

$$N_n x = (-1)^n \frac{\cos n\theta}{2^{2n-1}} \quad \text{event.} \quad N(x) = \frac{\cos nui}{2^{2n-1}},$$

$$Z(x) = \frac{(-1)^{n-1}\pi}{2^{2n-2}} \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} \quad \text{event.} \quad Z(x) = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \frac{\sin nui}{\sin ui},$$

$$R(x) = \frac{\pi}{2^{2n-2}} \frac{ie^{-nu}}{\sin ui} = \frac{2\pi}{4^{2n}} \cdot \frac{1}{x^{n+1}} + \text{etc.} \quad \text{wenn} \quad x > 1.$$

Die Abscissen α entstehen daher aus den Wurzeln der Gleichung $\cos n\theta = 0$ und sind

$$\alpha_\nu = \sin^2 \frac{(2\nu-1)\pi}{4n}$$

während $Z(x):N'(x)$ von x unabhängig, gleich $\frac{\pi}{n}$ wird. Man hat daher mit Annäherung

$$\int_0^1 \frac{\psi(x)dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \psi\left(\sin^2 \frac{(2\nu-1)\pi}{4n}\right).$$

Die erzeugende Function der Fehler ist

$$\frac{R(x)}{N(x)} = \frac{2\pi i . e^{-nu}}{\sin ui . \cos nui} = \frac{2\pi}{4^{2n}} x^{-2n-1} + \text{etc.}$$

Setzt man $\psi(x) = \chi(1-2x)$, so nehmen diese Resultate eine etwas einfachere Form an und man findet, dass mit Annäherung sei

$$\int_{-1}^{1} \chi(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \chi\left(\cos \frac{(2\nu-1)\pi}{2n}\right).$$

Indem man unter dem Integrale die Substitution $x = \cos\varphi$ macht und $\chi(\cos\varphi)$ als Function von φ betrachtet, erhält man das einfache Resultat, welches in I. 331 durch elementare Hülfsmittel abgeleitet wurde, dass mit Annäherung sei

$$\int_0^{\pi} f(\varphi)d\varphi = \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f \frac{(2\nu-1)\pi}{2n}$$

und zwar wird der Fehler, welcher als Correction auf der rechten Seite hinzuzufügen wäre, bei dieser Interpolation aus n Werthen gleich

$$\pi(a_{2n} - a_{4n} + a_{6n} - \cdots),$$

wenn $f(\varphi)$ in die Cosinusreihe

$$f(\varphi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cos\nu\varphi$$

entwickelt ist, so dass auch in diesem Falle die ersten $2n$ Glieder der Reihe nicht in den Fehler eingehen.

§ 14. Noch für einen anderen speciellen Fall, für die Quadratur der Integrale

$$\int_0^a \frac{\psi(x)dx}{\sqrt{x(x-\alpha)(x-\beta)}},$$

habe ich I. 294 die Functionen N betrachtet, deren Coefficienten dann ganze Functionen von dem Quotienten aus einem ganzen elliptischen Integrale erster und einem zweiter Gattung werden; die N genügen dann auch einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Ich schliesse die Anwendungen der Methode des § 12 mit der Ableitung der hauptsächlichen Resultate ab, welche Herr Christoffel im 55. Bde von Borchardt's Journal mitgetheilt hat. *) Er stellt die Aufgabe, wenn zur näherungsweisen Berechnung des Integrals $\int_g^h \varphi(x)dx$ für einige gegebene Abscissen a_1, a_2, etc., a_m die Ordinaten bekannt sind, noch n andere Abscissen α_1, α_2, etc., α_n aufzusuchen, aus deren Ordinaten, verbunden mit den m anderen, sich das Integral möglichst vortheilhaft bestimmen lässt. Es zeigt sich, dass man eine Näherung erreichen kann, bei welcher man erst dann einen Fehler begeht, wenn ψ über den Grad $m+2n-1$ steigt.

Man setze, um die Aufgabe zu lösen, wie früher,

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n) = N(x),$$

mache ferner

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m) = f(x).$$

Die erzeugende Function der Fehler Dx^ν, wenn man aus den Ordinaten in den $m+n$ Punkten α und a interpolirt, ist dann nach (9) im § 8 gleich

$$\frac{1}{N(z)f(z)}\int_g^h \frac{N(x)f(x)dx}{z-x}.$$

Es kommt also darauf an, $N(x)$ als Function n^{ten} Grades so zu bestimmen, dass das Integral, welches das $R(z)$ des § 12 ist, bei der Entwickelung nach aufsteigenden Potenzen von z^{-1} mit einer möglichst hohen, der $n+1^{\text{ten}}$ Potenz beginnt. Dann ist $Dx^\nu = 0$ so lange $\nu < m+2n$ bleibt. Wie N zu wählen sei, weiss man aus § 12;

*) S. 61—82: Ueber die Gaussische Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben.

man hat N gleich dem n^{ten} Näherungsnenner des Kettenbruchs für

$$\sigma = \int_g^h \frac{f(x)\,dx}{z - x}$$

zu setzen und damit habe ich die Lösung der Aufgabe gegeben.

Man erhält dann, ähnlich wie in (4), mit Annäherung

$$\int_g^h \psi(x)\,dx = A_1\psi(\beta_1) + A_2\psi(\beta_2) + \cdots + A_{m+n}\psi(\beta_{m+n}),$$

wenn die $m+n$ Grössen β den Complex der m Grössen a und der n Grössen α bedeuten. Macht man $N(x)f(x) = M(x)$, so sind die A nach der Art von Gleich. (3) zu bilden, indem man setzt

$$A_\nu = \frac{1}{M'(\beta_\nu)} \int_g^h \frac{M(x)\,dx}{x - \beta_\nu}.$$

Man hätte auch, nach dem Verfahren von Jacobi, über welches im § 9 gehandelt wurde, die Aufgabe dieses Paragraphen lösen können, indem man eine Function n^{ten} Grades N aufsucht, welche so beschaffen ist, dass

$$(a) \ldots \int_g^h N(x) f(x) x^\nu\,dx$$

für alle ganzen ν, die unter n liegen, Null ist. Man findet dann, wie bereits I. 291 bemerkt wurde,

$$N(x)f(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left[(x-g)^n (x-h)^n L(x)\right],$$

wo die ganze Function m^{ten} Grades L so zu bestimmen ist, dass die rechte Seite für $x = a_1$, a_2, etc., a_m verschwindet. Dadurch ist L und dann auch N bestimmt.

Herr Christoffel wendet zur Bestimmung verschiedene Methoden an. Ich hebe hervor, dass er, S. 77, indem er $g = -1$, $h = 1$ setzt, $N.f$ in eine Reihe von Kugelfunctionen entwickelt, in welchen aber, wegen des Verschwindens von (a), kein oberer Index unter n vorkommen kann. Setzt man

$$N(x)f(x) = c_0 P^n(x) + c_1 P^{n+1}(x) + \cdots + c_m P^{n+m}(x),$$

so sind die Verhältnisse der Constanten c zu einander dadurch bestimmt, dass die rechte Seite für $x = a_1$, a_2, etc., a_m verschwinden muss. Die Determinante, welche man hierdurch für $N.f$ erhält, nämlich

$$\Sigma \pm P^{n+m}(x) P^{n+m-1}(a_1) P^{n+m-2}(a_2) \ldots P^n(a_m) = N(x)f(x),$$

dividirt Herr Christoffel, vermittelst eines eigenthümlichen Verfahrens, durch $f(x)$ und erhält schliesslich

$$N(x) = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(2n+1)(2n+3)\ldots(2n+2m-1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)} \times$$
$$\sum_{\nu=0}^{n} (2\nu+1) P^{\nu}(x) \Sigma \pm P^{n+m-1}(a_1) \ldots P^{n+1}(a_{m-1}) P^{\nu}(a_m).$$

§. 15. Der ganzen Function $\varphi(x)$, die im §. 2 auftrat, hat Herr Tchebychef*) eine merkwürdige Form gegeben. Ich leite sie auf folgende Art ab:

Der Kettenbruch

$$\sigma = \cfrac{1}{\lambda_1 - \cfrac{1}{\lambda_2 - \text{etc.}}}$$

sei so beschaffen, dass seine sämmtlichen Partialnenner Functionen ersten Grades nach x sind. Es ist dies (I. 291) ein häufig vorkommender Fall. Man hat dann

$$\lambda_1 = a_1 x + b_1, \quad \lambda_2 = a_2 x + b_2, \quad \text{etc.}$$

Die Näherungs-Zähler und Nenner werden durch $Z_1(x)$ und $N_1(x)$, etc. bezeichnet. Bedeutet α einen besonderen Werth von x, so geben die bekannten Recursionsformeln (I. 261, (c)) zunächst

$$\frac{N_n(x)N_{n-1}(\alpha) - N_n(\alpha)N_{n-1}(x)}{x-\alpha}$$
$$= a_n N_{n-1}(x)N_{n-1}(\alpha) + \frac{N_{n-1}(x)N_{n-2}(\alpha) - N_{n-1}(\alpha)N_{n-2}(x)}{x-\alpha},$$

und durch wiederholte Anwendung, ähnlich wie I. 197—198, schliesslich

$$\frac{N_n(x)N_{n-1}(\alpha) - N_n(\alpha)N_{n-1}(x)}{x-\alpha}$$
$$= a_1 + a_2 N_1(x)N_1(\alpha) + \cdots + a_n N_{n-1}(x)N_{n-1}(\alpha).$$

Es sei nunmehr α ein Werth der $N_n(x)$ zu Null macht; da für jeden Index n und jedes x die Gleichung

$$Z_n N_{n-1} - N_n Z_{n-1} = 1$$

*) Borchardt, J. f. M. Bd. 53, S. 286: Sur une formule d'Analyse (Lu à l'académie de St. Petersbourg le $\frac{\text{20 octobre}}{\text{1 novembre}}$ 1854). Der Beweis der Formel folgte erst in einer grösseren Arbeit, welche Herr Tchebychef am 12. Januar 1855 der Petersburger Akademie überreichte. Diese ist in der französischen Uebersetzung des Herrn Bienaymé im Liouville'schen Journal erschienen II. Série, T. III, 1858, S. 289 bis 323: Sur les fractions continues.

besteht, so wird für $x = \alpha$ zunächst

$$Z_n(\alpha) N_{n-1}(\alpha) = 1$$

erhalten, und daraus

$$\frac{N_n(x)}{(x-\alpha) Z_n(\alpha)} = a_1 + a_2 N_1(x) N_1(\alpha) + \cdots + a_n N_{n-1}(x) N_{n-1}(\alpha).$$

Ferner sei $N(x)$ eine ganze Function n^{ten} Grades, die für n Werthe von x, die α_1, α_2, etc., α_n sein mögen, verschwindet. Entwickelt man

$$\sigma = \frac{N'(x)}{N(x)} = \frac{1}{x-\alpha_1} + \cdots + \frac{1}{x-\alpha_n}$$

in einen Kettenbruch von der vorgeschriebenen Form (m. vergl. I. 261)

$$\sigma = \left| \begin{matrix} & -1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & a_1 x + b_1 & a_2 x + b_2 & a_3 x + b_3 & \ldots & a_n x + b_n \end{matrix} \right|,$$

so unterscheidet sich N nur durch einen constanten Factor von dem n^{ten} Näherungsnenner dieses Bruches, d. i. von N_n, und den obenstehenden Ausdruck $Z_n(x) : N_n(x)$ kann man genau mit $N'(x) : N(x)$ vertauschen. Daher wird auch

$$\frac{N(x)}{(x-\alpha) N'(\alpha_\nu)} = a_1 + a_2 N_1(x) N_1(\alpha_\nu) + \cdots + a_n N_{n-1}(x) N_{n-1}(\alpha_\nu).$$

Substituirt man diese Gleichung in (2), so erhält man den Satz:

Sind α_1, α_2, etc., α_n beliebige ungleiche Constante, ist ferner σ der Kettenbruch für

$$\frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{x-\alpha_n}$$

in der vorgeschriebenen Form, und N_ν sein ν^{ter} Näherungsnenner, so wird

$$\varphi(x) = a_1 \sum_{\nu=1}^{n} \psi(\alpha_\nu) + a_2 N_1(x) \sum_{\nu=1}^{n} N_1(\alpha_\nu) \psi(\alpha_\nu) + \cdots$$
$$+ a_n N_{n-1}(x) \sum_{\nu=1}^{n} N_{n-1}(\alpha_\nu) \psi(\alpha_\nu)$$

die ganze Function $n-1^{\text{ten}}$ Grades, welche sich für $x = \alpha_\nu$ in $\psi(\alpha_\nu)$ verwandelt. Dies ist die Formel des Herrn Tchebychef.

Es liegt hier die Voraussetzung zu Grunde, dass wirklich sämmtliche Partialnenner λ vom ersten Grade sind, oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass der Nenner N_ν, für jedes ν von 1 bis n, vom ν^{ten} Grade ist. Um die Berechtigung derselben nachzuweisen,