Lehrbuch

der

Darstellenden Geometrie

für

den Gebrauch an technischen Hochschulen, mittleren gewerblichen und technischen Lehranstalten, Kunstgewerbeschulen, Fortbildungsschulen usw. und für das Selbststudium

bearbeitet von

Prof. Erich Geyger,
Oberlehrer an der Kgl. Baugewerkschule in Kassel

I. Teil

Affinität und Perspektivität ebener Figuren. Perspektive, involutorische und harmonische Grundgebilde. Kegelschnitte als Kreisprojektionen. Die orthogonale axonometrische und schiefe Projektion. Zylinder, Kegel, Kugel; ebene und Raumkurven. Schnitte und Abwickelungen. Durchdringungen.

Mit zahlreichen angewandten Beispielen und 290 Figuren

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1906

Spamersche Buchdruckerei in Leipzig-R.

Vorwort.

Die Herausgabe des vorliegenden Buches wurde durch den an mich ergangenen, ehrenden Auftrag der Verlagsfirma veranlaßt, das gleichfalls von ihr verlegte Werk einer darstellenden Geometrie des Herrn Dr. Schroeder in Hamburg (von welchem nur der erste Band erscheinen konnte) fortzusetzen. In unserem technisch induktiven Zeitalter braucht kaum noch darauf hingewiesen zu werden, daß für alle Zweige der Technik und des Handwerks die Notwendigkeit vorliegt, in ausgedehntester Weise die Zeichenkunst zu verwerten, wenn Erdachtes festgehalten und ein Ideenaustausch vermittelt werden soll. Soll das Zeichnen ein Entwerfen sein, so ist das nur auf Grund einer geübten Raumanschauung möglich. Ein erfolgreiches Eindringen in die Gebiete der Naturwissenschaften und der technischen Fächer geht Hand in Hand mit der Ausbildung des Raumanschauungsvermögens, das vielen, namentlich denen, die sich zum Studium der naturwissenschaftlich-mathematischen Disziplinen hingezogen fühlen, von Natur aus eigen ist, bei anderen aber erst gehörig entwickelt und geschärft werden muß. Das einzige Mittel hierzu aber ist die Wiedergabe von Körpern auf Grund geometrischer Gesetze, d. h. „die darstellende Geometrie“. Jeder, der die Ideen des Entwerfenden richtig erfassen, das nach geometrischen Grundsätzen richtig Entworfene auch richtig verstehen will, muß Beherrscher dieser Wissenschaft sein.

Die Erkenntnis, daß auch für das Handwerk die Kunst des Zeichnens nicht nur nutzbringend und förderlich, sondern für die meisten Zweige desselben unbedingt notwendig sei, erklärt die in den letzten Jahren vollzogenen zahlreichen Gründungen von gewerblichen Fortbildungs- und Handwerkerschulen aller Art. An letzteren Anstalten und den technischen Mittelschulen bilden die zeichnerischen Fächer die größere Zahl von

Lehrgegenständen; an diesen Schulen tritt die formale bzw. allgemeine Bildung fast gänzlich zurück, die direkte Vorbereitung für das praktische Leben, für den zu ergreifenden oder schon ergriffenen Beruf bildet hier die Unterrichtsmaxime. Daher kann und darf an diesen Anstalten die darstellende Geometrie, ohne die kein richtiges Zeichnen denkbar ist, niemals Nebenfach, sondern nur Hauptlehrgegenstand sein, denn diese ist das vermittelnde Element, die verbindende Brücke zwischen Theorie und Praxis. Die darstellende Geometrie darf daher niemals rein theoretisch, sie muß praktisch anschaulich vorgetragen werden. Das soll aber nicht heißen ohne jede Theorie; diese kann im gründlichen Unterrichte nicht entbehrt werden, ihr Wert und ihre Bedeutung sind den Schülern sofort durch Anwendung derselben auf praktische Beispiele zweckmäßig vor Augen zu führen. Die Hauptaufgabe der darstellenden Geometrie ist hiernach, die Gesetze für das Abbilden solcher Gebilde zu lehren, denen wir später als Formenelemente bei den praktisch vorkommenden Gegenständen begegnen. Da das Schülermaterial hierzu mathematisch nicht vorgebildet ist, sind bei der Durcharbeitung von Aufgaben die analytischen Lösungen möglichst auszuschließen und, wo es nur angeht, die graphischen in den Vordergrund zu stellen. Es empfiehlt sich dies auch schon aus dem Grunde, weil größere algebraische Operationen keineswegs die Vorstellungskraft beanspruchen, deren Verständnis vielmehr ein größeres mathematisches Wissen und eine Gewandtheit im Rechnen voraussetzt, die für das Studium der darstellenden Geometrie entbehrlich ist. Die Kenntnis der grundlegenden Lehrsätze der Planimetrie und Stereometrie, einschließlich des Begriffes der trigonometrischen Funktionen, der variablen und konstanten Größen wie des Verfahrens der Festlegung eines Punktes durch seine Koordinaten genügt, um die Darlegungen dieses Buches zu verstehen. Um aber dem Leser die Eigenschaften der Figuren, die durch das Projizieren von ebenen Figuren und Raumgebilden erhalten werden, beweisen zu können, war es erforderlich, auf die fundamentalen Sätze und Begriffe der Geometrie der Lage einzugehen.

Mit der schon erwähnten Schaffung von gewerblichen Fortbildungsschulen, Handwerkerschulen und technischen Mittelschulen ist allerdings ein bedeutender Schritt getan, doch das zu erstrebende Ziel ist noch nicht erreicht. Die Erfolge blieben weit hinter den gehegten Erwartungen zurück; es fehlten offenbar geeignete Lehrkräfte. Das beweisen die lebhaften Debatten und Erörterungen auf den in den letzten Jahrzehnten abgehaltenen Versammlungen der berufenen Vertreter dieser Anstalten über den Zeichenunterricht und die Beschaffung von Lehrkräften.

Die Lösung der gekennzeichneten Aufgabe bietet eben dem Lehrenden, der kein volles mathematisches bzw. Fachstudium aufzuweisen vermag, doch mehr Schwierigkeiten, als man gemeiniglich annimmt. Erfahrungsgemäß hat dies seinen Grund darin, daß hier das durch die verschiedenen Lehrbücher Gebotene zum größten Teile versagt, obgleich die Zahl der dieses Gebiet behandelnden Lehr- und Lernbücher nicht gering ist. Der erfahrene Lehrer wird unter der großen Menge selten eins finden, das ihn vollauf befriedigt. Das eine behandelt den Stoff völlig abstrakt, es bringt die Grundkörper, sonst nichts, gibt einige Konstruktionen, umgeht aber deren Beweis; ein anderes sucht fast ausschließlich an angewandten Beispielen die Konstruktionsverfahren klarzulegen, eine Erklärung des Ergebnisses der Konstruktion aber fehlt. Kreisprojektionen finden sich in jedem Lehrbuch über darstellende Geometrie, aber auf die projektiven Eigenschaften der Kegelschnitte wird in der Regel nicht eingegangen. Durchdringungen von Zylinder- und Kegelflächen werden auch stets vorgetragen, das Ergebnis der Konstruktion wird aber nicht erklärt. Kann ein solches Buch den strebenden Lehrer zufrieden stellen, wenn es ihm nicht beweist, daß das Ergebnis nur eine Raumkurve, in diesem besonderen Falle aber eine ebene Kurve sein kann? Will aber der Leser auf solche und ähnliche Fragen Antwort haben, so heißt es für ihn, sich durcharbeiten durch umfangreiche Bände, die diese Gebiete behandeln. Dem Lehrenden und Lernenden hier zu Hilfe zu kommen, war bei der Abfassung dieses Buches mein Bestreben.

Das Gebotene umfaßt im Verein mit dem Dr. Schroederschen Bande sowohl den Lehrstoff aller technischen Mittelschulen wie den für die Studierenden an technischen Hochschulen in den ersten Semestern ihres Studiums. Bei Durcharbeitung desselben war entsprechend den vorausgeschickten Erwägungen allein der Gesichtspunkt maßgebend, ihn unter Wahrung seines wissenschaftlichen Charakters möglichst für den Unterricht verwertbar zu gestalten und jedem, auch dem, der der höheren Mathematik nicht kundig ist, verständlich zu werden. Von der Aufnahme der Schattenkonstruktionen, Beleuchtungslehre und der Zentralperspektive ist im vorliegenden Buche abgesehen, für die Behandlung dieser Kapitel der darstellenden Geometrie vielmehr ein zweiter

Band vorgesehen worden, damit das Buch nicht zu unhandlich werde.

Beabsichtigt wird, in einem dritten Bande die zyklischen Linien, Schraubenlinien und Schraubenflächen, die Flächen zweiten Grades, Regelflächen usw. zu behandeln.

Es drängt mich, an dieser Stelle meinem hochgeschätzten Kollegen, Herrn Architekt und Königl. Oberlehrer Baumann in Kattowitz, der mir mit seinen reichen Erfahrungen bei der Auswahl und Lösung der behandelten Aufgaben stets hilfsbereit zur Seite stand, hiermit meinen herzlichsten Dank auszusprechen, und mit diesem Danke verbinde ich zugleich die dringende Bitte an die Herren Fachkollegen, mir etwaige Wünsche auf Änderungen ohne Rückhalt anzuzeigen, damit dieselben bei einer späteren Auflage berücksichtigt werden können. Möge das Buch an seinem Teile dem gewerblichen Schulwesen wie der gewerblichen Praxis zugute kommen.

Kassel, im Juli 1906.

Der Verfasser.

Inhalts-Verzeichnis.

I. Kapitel.

Kongruenz, Ähnlichkeit, Affinität und Perspektivität ebener Figuren.

Affinität ebener Figuren.

Affine und affin gelegene Figuren einer Ebene; die Ellipse.

Affine Figuren einer Ebene, die sich nicht in affiner Lage befinden.

Ellipsenkonstruktionen. Metrische Beziehungen zwischen den Achsen und den konjugierten Durchmessern einer Ellipse.

Perspektivität ebener Figuren.

II. Kapitel.

Perspektive, involutorische und harmonische Grundgebilde.

III. Kapitel.

Die Kegelschnitte als Kreisprojektionen.

Die Potenz eines Punktes in bezug auf einen Kreis; Potenzlinie zweier Kreise.

Entstehung der Kegelschnitte aus der Zentralprojektion des Kreises.

Erzeugung der Kegelschnitte durch projektivisch verwandte Punktreihen und Strahlbüschel.

Kegelschnittbüschel und Kegelschnittschar.

Brennpunkte und Leitlinien der Kegelschnitte. Krümmungshalbmesser der Kegelschnitte. Konstruktion von Kegelschnitten, ihren Tangenten und Normalen.

IV. Kapitel.

Die orthogonale axonometrische und schiefe Projektion.

Die schiefe Projektion.

V. Kapitel.

Orthogonale Projektionen von Ebenen und Körpern. Zylinder, Kegel, Kugel. Ebene- und Raumkurven. Durchdringungen von Kugel-, Zylinder- und Kegelflächen.

Durchdringungen von Zylinder-, Kugel- und Kegelflächen.

I. Kapitel.

Kongruenz, Ähnlichkeit, Affinität und Perspektivität ebener Figuren.

1. Außerhalb der Ebene $\mathfrak{E}$ einer im Raume willkürlich gelegenen Figur sei ein Punkt O festgelegt und dieser mit allen Punkten ihres Umrisses durch gerade Linien verbunden; wird dieses Bündel von Linien, die wir uns unendlich lang denken, durch eine zweite Ebene $\mathfrak{P}$, die sich nicht mit $\mathfrak{E}$ decken, sonst aber beliebig im Raume festgelegt sein mag, geschnitten, so wird hieraus auf der Ebene $\mathfrak{P}$ eine neue Figur resultieren, deren Punkte, Gerade und Winkel denen der gegebenen eindeutig entsprechen. Die Figur in $\mathfrak{P}$ bezeichnen wir als *zentrale Projektion* der Figur in $\mathfrak{E}$, den Punkt O als *Projektionszentrum*, die Schnittgerade $\mathfrak{S}$ der beiden Ebenen, der *Originalebene* $\mathfrak{E}$ und der *Projektionsebene* $\mathfrak{P}$, als *Projektionsachse* und die durch das Zentrum gehenden Strahlen als *projizierende Strahlen*. Die Figur in $\mathfrak{P}$ ist aus der in $\mathfrak{E}$ abgeleitet worden oder, wie wir auch sagen können, die Originalfigur in $\mathfrak{E}$ ist abgebildet worden; das hierbei zur Anwendung gelangte Verfahren heißt *Zentralprojektion*; Originalfigur (vgl. Fig. 1) ABC und Abbildung $A'B'C'$ sind *projektive Figuren in perspektiver Lage* oder *perspektive Figuren*. Beide Figuren entsprechen sich in der Weise, daß jedem Eckpunkt ein Eckpunkt, jeder Seite eine Seite und

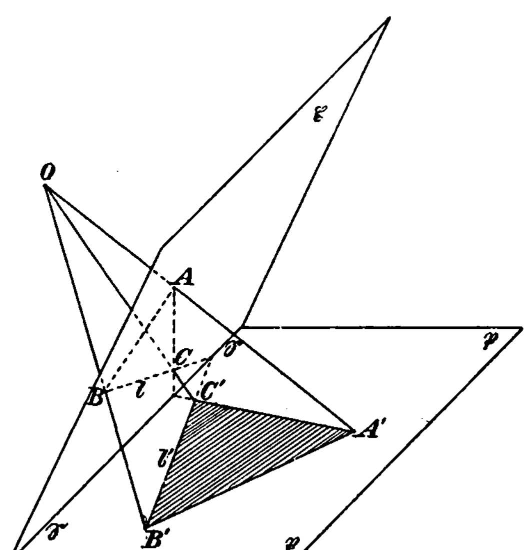

Fig. 1.

jedem Winkel der Originalfigur ein Winkel entspricht, doch sind im allgemeinen die Längen und Winkel in der Projektionsebene von den bezüglichen Längen und Winkeln der Originalebene verschieden. Was von den Punkten und Geraden der Figur gesagt worden ist, gilt zugleich auch von den übrigen Punkten und Geraden der Ebenen. Auch die Ebenen entsprechen sich, d. h. jedem Punkte P der Originalebene entspricht ein Punkt P' der Projektions- oder Bildebene, jeder Geraden l eine Gerade l' und umgekehrt. Nur die Projektionsachse entspricht sich selbst und ebenso jeder Punkt derselben, auch müssen sich zwei entsprechende Gerade auf der Achse schneiden. Einer Parallelen zur Achse entspricht in der Bildebene wieder eine Parallele, der Schnittpunkt mit der Achse liegt in diesem Falle im Unendlichen. Daß das Entsprechen der Ebenen ebenfalls ein eindeutiges ist, wird später bewiesen werden.

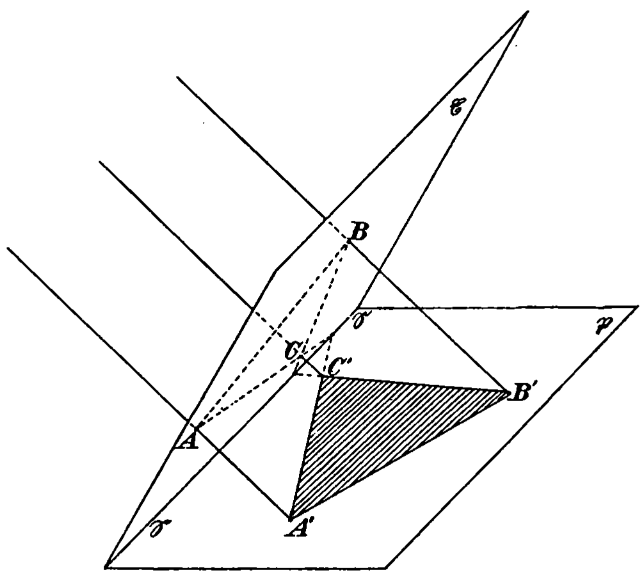

Fig. 2.

2. Es drängt sich uns die Frage auf: Ist nicht zu einer gegebenen Figur der Originalebene 𝔈 für eine gewisse Lage des Projektionszentrums und der Bildebene 𝔓 das Bild derselben konstruierbar? Ehe wir zur Beantwortung dieser Frage schreiten, seien einige andere einfachere Aufgaben behandelt, durch deren Erledigung das Verständnis für jene bedeutend gefördert werden wird.

Die Beziehungen zwischen den beiden Ebenen hören auch dann nicht auf zu bestehen, wenn wir die Lage der Bildebene oder die des Projektionszentrums zur Originalebene ändern. Möglich sind folgende Lagen:

a) Behalten die Ebenen 𝔈 und 𝔓 ihre Lagen bei, ändert sich aber die des Projektionszentrums, indem letzteres sich immer mehr und mehr von der Originalebene entfernt, so werden die projizierenden Strahlen in ihrer Richtung immer weniger voneinander abweichen; ist schließlich das Zentrum ins Unendliche gerückt, dann sind die projizierenden Strahlen parallel, aus der Zentralprojektion ist eine Parallelprojektion geworden. Dieses Abbildungsverfahren ist dasjenige, welches allgemein in fast allen Zweigen der Technik bei der Darstellung von Körpern angewandt wird. Wir erkennen, daß von dem ursprünglichen Gebilde in $\mathfrak{E}$ und dem abgeleiteten in $\mathfrak{P}$ (Fig. 2) das gleiche gilt, was unter 1. von den Figuren ABC und $A'B'C'$ gesagt wurde: „Die eine Figur ist der anderen eindeutig zugeordnet." Dieses Abbildungsverfahren wird als schiefe Parallelprojektion bezeichnet, wenn die projizierenden Strahlen die Projektionsebene unter einem spitzen Winkel schneiden, als orthogonale oder rechtwinklige Parallelprojektion oder Projektion, wenn der Neigewinkel der projizierenden Strahlen gegen die Projektionsebene $= 90^0$ ist. Die geometrische Abhängigkeit der Figuren heißt Affinität bei affiner Lage (perspektive Affinität), die Schnittgerade $\mathfrak{S}$ der Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{P}$ heißt Affinitätsachse.

b) Wir kehren wieder zu Figur 1 zurück und machen folgende Annahmen: Belassen wir das Zentrum an seiner Stelle, ändern aber jetzt die Neigung der beiden Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{P}$, so wird unter den unendlich vielen möglichen Lagen der Ebenen sich eine besonders auszeichnen, nämlich die, bei der die Schnittgerade beider im Unendlichen liegt; die Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{P}$ sind in diesem Falle parallel (Fig. 3). Auch in dieser Lage der Ebenen und des Zentrums entsprechen sich die Ebenen bzw. zugeordnete Figuren eindeutig. Die Abhängigkeit, die zwischen zwei sich entsprechenden Figuren obwaltet, heißt Ähnlichkeit bei ähnlicher Lage (perspektive Ähnlichkeit).

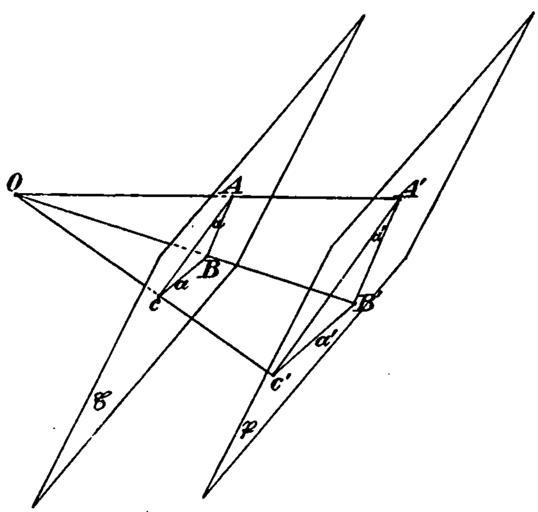

Fig. 3.

c) Schließlich ist noch eine Lage denkbar, bei der das Projektionszentrum und die Schnittgerade der beiden Ebenen zugleich im Unendlichen liegen; auch in diesem Falle entsprechen sich die Figuren, die in Figur 4 dargestellt sind, eindeutig. Wie auch die projizierenden Strahlen, die parallel laufen, zur Ebene $\mathfrak{P}$ gerichtet sein mögen, immer ist die abgeleitete Figur der ursprünglichen kongruent. Auch bei dem unter a) geschilderten Abbildungsverfahren ist für eine bestimmte Richtung der projizierenden Strahlen die abgeleitete Figur der abzubildenden kongruent. Dies trifft zu bei der Annahme, daß die projizierenden Strahlen senkrecht zu einer der Ebenen stehen, die den Winkel der Ebene $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{P}$ und dessen Nebenwinkel halbieren. Ähnliche Figuren, wie auch kongruente Figuren können daher ebenso wie affine und perspektive Figuren als projektiv bezeichnet werden und ihre gegenseitige Lage als perspektiv, wenn sie nach den unter b) und a) erläuterten Annahmen ähnlich oder affin ist.

3. Kongruenz ebener Figuren. Bei Betrachtung der Figur 4, die das Abbildungsverfahren veranschaulicht, bei welchem das Bild in $\mathfrak{P}$ der ursprünglichen Figur in $\mathfrak{E}$ stets kongruent sein muß, lassen sich ohne weiteres die Eigenschaften von zwei einander entsprechenden Figuren angeben:

1. Entsprechende Gerade sind parallel und gleich.
2. Parallelen Geraden a und b entsprechen wieder parallele Gerade a' und b', mithin auch:

2a. Einem Winkel α entspricht stets ein ihm gleicher Winkel α'.

3. Das Verhältnis irgend zweier entsprechender Strecken ist konstant, ebenso das zweier entsprechender Flächen, nämlich gleich 1.

Besitzen zwei Figuren die beiden letzten Eigenschaften, so sind sie als kongruent zu bezeichnen, ist aber auch die erste Eigenschaft erfüllt, so befinden sie sich zugleich in kongruenter oder perspektiver Lage. Kongruente Figuren haben hiernach gleiche Gestalt und gleichen Flächeninhalt, man kann sie stets so aufeinanderlegen, daß die eine die andere vollständig bedeckt, beide also gänzlich in eine zusammenfallen. Die Ecken, Winkel und Seiten, die bei einer solchen Lage sich decken bzw. zusammenfallen, nennt man homolog. Das Zeichen der Kongruenz ist $\cong$ [kongruent = gleich $(=)$ und ähnlich $(\sim)$].

Wird die Ebene $\mathfrak{E}$ parallel zu sich selbst verschoben in der Weise, daß bei der Bewegung, der die Ebene unterworfen werden muß, um sie aus einer Lage in eine parallele überzuführen, irgend ein Punkt von $\mathfrak{P}$ eine Gerade oder eine ebene oder räumliche Kurve beschreibt, und jeder andere Punkt der Ebene $\mathfrak{P}$ einen parallelen, gleich langen Weg zurücklegt, so wird die perspektive Lage zweier entsprechender Figuren nicht aufgehoben, auch nicht für den Fall, daß die Ebenen auf die soeben beschriebene Art zur Deckung gebracht werden. Das geschilderte Verfahren der Überführung einer Ebene in eine parallele Lage soll in Zukunft mit „Parallelverschiebung" bezeichnet werden. Bei der Vereinigung beider Ebenen fallen auch die projizierenden Strahlen in $\mathfrak{E}$ hinein und die Strahlen, die je zwei entsprechende Punkte verbinden, sind sämtlich parallel und gleich lang. Es ist einleuchtend, daß zu jedem Punkt x der Ebene der entsprechende x' in gleicher Ebene ermittelt werden kann, wenn man ein Paar entsprechender

Punkte, z. B. a und a', kennt; man hat nur nötig, durch den Punkt x die Parallele zu $a\,a'$ zu ziehen und diese gleich $a\,a'$ zu machen, dann ist der Endpunkt x' der gesuchte Punkt (Fig. 4a). Die perspektive Lage der Figuren wird jedoch aufgehoben, wenn die Ebene $\mathfrak{P}$ nicht nur einer Parallelverschiebung, sondern auch einer drehenden Bewegung um eine zur Ebene senkrechte Gerade als

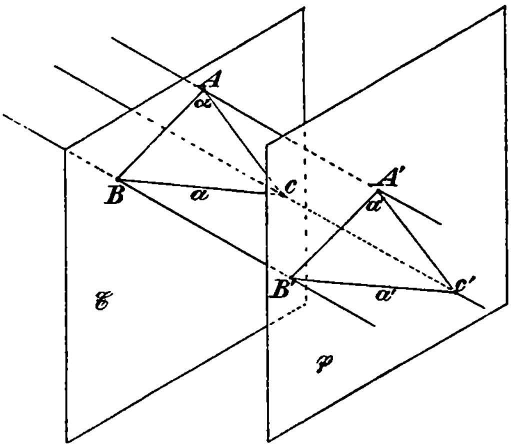

Fig. 4.

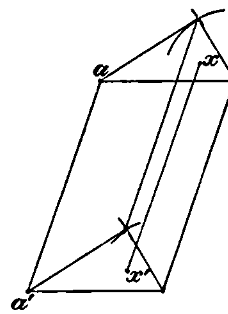

Fig. 4a.

Rotationsachse unterworfen wird. Zwei in einer Ebene befindliche Dreiecke sind kongruent, wenn sie

a) in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel,
b) in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln,
c) in den drei Seiten,
d) in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren unter ihnen

übereinstimmen.

4. Ähnlichkeit ebener Figuren. Sind die Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{P}$ parallele Ebenen, liegt aber das Zentrum nicht im Unendlichen, so heißt die zwischen Bild und Originalfigur bestehende Abhängigkeit Ähnlichkeit bei ähnlicher Lage (vgl. Abschnitt 2). Zwei so einander entsprechende und gelegene Figuren besitzen folgende Eigenschaften (vgl. Fig. 3):

1. Entsprechende Gerade sind parallel, aber ungleich lang; parallelen Geraden l und l_1 der Originalebene entsprechen wieder parallele Gerade l' und l'_1, mithin:
2. Einem Winkel α entspricht stets ein gleicher Winkel α'.
3. Das Verhältnis je zweier entsprechender Längen $l : l'$ oder $l_1 : l'_1$ ist konstant, nämlich immer gleich dem Verhältnis von $e : e_1$, wenn e die Entfernung des Projektionszentrums von der Ebene $\mathfrak{E}$, e_1 die von der Ebene $\mathfrak{P}$ bedeutet.

Zwei Figuren sind ähnlich, wenn die beiden letzten Eigenschaften erfüllt sind, wenn also alle Winkel der einen der Reihe nach den Winkeln der andern gleich, alle sich entsprechenden bzw. **homologen**, d. h. zu den gleichen Winkeln gleichliegenden Seiten proportional sind. Das Zeichen für diese Abhängigkeit, also das Zeichen der Ähnlichkeit ist $\sim$. Ist nun aber für zwei ähnliche Figuren auch noch die erste Eigenschaft erfüllt, so befinden sie sich zugleich in ähnlicher Lage.

Aus der Originalfigur und dem Bild findet man das Zentrum, das Ähnlichkeitszentrum, indem man die sich entsprechenden Punkte der Figuren miteinander verbindet und bis zum Schnitt in O verlängert; zur Bestimmung des Zentrums sind offenbar nicht alle projizierenden Strahlen erforderlich, es brauchen nur zwei einander entsprechende Gerade AB und $A'B'$ gegeben zu sein, um es zu finden ($O = AA' \times BB'$). Wird das Projektionszentrum verlegt,

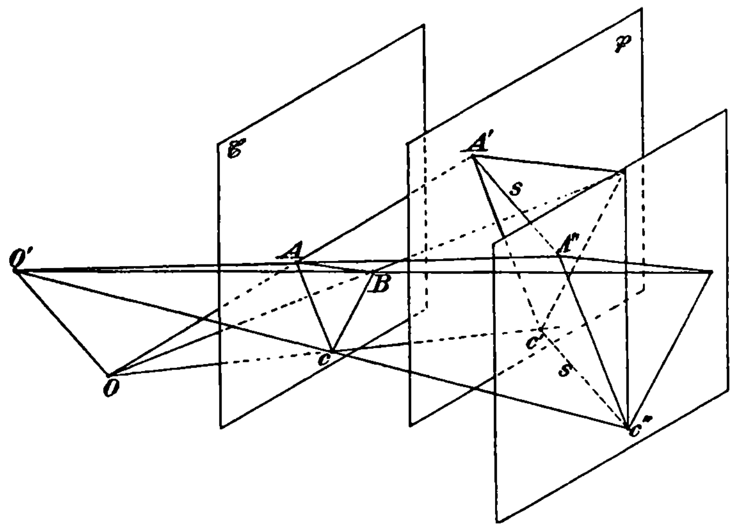

Fig. 5.

so entsteht zu der Originalfigur ein neues Bild; wird die Bildebene $\mathfrak{P}$ parallel verschoben, so ist damit die Ähnlichkeit wie auch die ähnliche Lage nicht aufgehoben worden, nur ist das Zentrum O für diese neue Lage nicht mehr das Ähnlichkeitszentrum; es ist ein anderes Zentrum O' an seine Stelle getreten, das erhalten wird durch den Schnitt von solchen Strahlen, die zugleich die Verbindungslinie zweier sich entsprechender Punkte bilden. Wenn bei einer solchen Parallelverschiebung irgend ein Bildpunkt C' nach C'' gelangt (Fig. 5) und s die Länge des von C' zurückgelegten Weges, der geradlinig angenommen sei, bedeutet, so ist auch die Strecke OO' der Strecke s parallel und ihre Länge bestimmt sich aus der Formel

$$OO' = \frac{s \cdot e}{e_1 - e},$$

denn die Dreiecke OCO' und $C'CC''$ sind ähnlich, mithin

$$OO' : C'C''(s) = OC : CC',$$

es ist aber $OC : CC' = e : e_1 - e$, folglich

$$OO' : s = e : e_1 - e,$$

oder

$$OO' = \frac{s \cdot e}{e_1 - e}.$$

Die Beziehungen zwischen zwei ähnlich und ähnlich gelegenen Figuren bleiben aber auch dann erhalten, wenn wir die Ebene $\mathfrak{P}$ durch eine Parallelverschiebung mit $\mathfrak{E}$ vereinigen (Fig. 6); dann

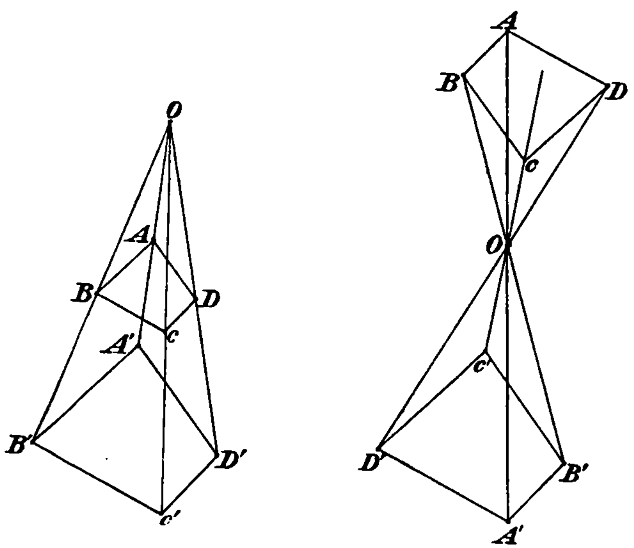

Fig. 6.

fallen die projizierenden Strahlen und das Ähnlichkeitszentrum ebenfalls in die Ebene $\mathfrak{E}$. Zwei ähnliche und ähnlich gelegene Figuren in einer Ebene können daher ebenfalls als perspektive Gebilde angesehen werden, die eine entspricht der andern eindeutig und aus der einen kann die andere abgeleitet werden auf Grund der obengenannten drei Eigenschaften, die unverändert auch für solche Figuren bestehen. Die Aufgabe, zu einem Punkt x den entsprechenden x' zu ermitteln, ist lösbar, wenn man zwei sich entsprechende Punkte und das Zentrum, oder zwei sich entsprechende Strecken kennt.

Wird die Ebene $\mathfrak{P}$ so gewählt, daß das Projektionszentrum zwischen ihr und der Originalebene liegt, dann befindet sich auch das Projektionszentrum nach der Vereinigung der beiden Ebenen zwischen den beiden Figuren. Je nachdem nun das Ähnlichkeitszentrum außerhalb oder innerhalb eines jeden Paares der parallelen Polygonseiten liegt, heißt es ein äußeres oder ein inneres.

Denken wir uns an Stelle einer polygonalen Figur einen Kreis (Fig. 7), so ist die ähnliche Figur stets wieder ein Kreis. Zu zwei Kreisen k und k' in der Ebene lassen sich zugleich zwei Ähnlichkeitszentren bestimmen, es sind dies die beiden Punkte der Zentrale, in denen sich die Verbindungslinien der Endpunkte aller parallelen Radienpaare schneiden. Die Mittelpunkte der Kreise M und M' entsprechen einander. Zieht man von den Mittelpunkten aus parallele Radien nach derselben Richtung, so schneiden sich die Verbindungslinien ihrer Endpunkte in dem äußeren Ähnlichkeitspunkt O, in dem sich auch die äußeren Tangenten schneiden. Die projizierenden Strahlen, die die Endpunkte der von den Mittelpunkten aus nach entgegengesetzten Richtungen gezogenen parallelen Radien verbinden, schneiden sich in O', dem inneren Ähnlichkeitspunkt, durch den auch die inneren Tangenten der

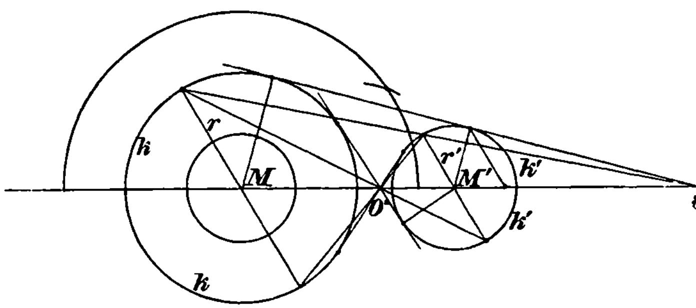

Fig. 7.

Kreise gehen; jeder der beiden Punkte kann als Ähnlichkeitszentrum gewählt werden, jeder teilt nämlich die Strecke MM' nach dem Verhältnis $r:r'$. Zwei Kreise in einer Ebene sind hiernach stets zwei ähnliche Figuren, auch befinden sie sich stets in ähnlicher (perspektiver) Lage und zwar, wie eben erörtert wurde, in doppelter Art.

Von den äußeren Ähnlichkeitspunkten dreier Kreise gilt folgender Satz:

„Die drei äußeren Ähnlichkeitspunkte, welche drei Kreise paarweise bestimmen, liegen auf einer geraden Linie." (Satz des Monge.) (Fig. 8.)

Es ist nämlich (vgl. Fig. 7)

$$M_1 O_3 : M_2 O_3 = r_1 : r_2$$
$$M_2 O_1 : M_3 O_1 = r_2 : r_3$$
$$M_3 O_2 : M_1 O_2 = r_3 : r_1$$
$$\overline{}$$
$$M_1 O_3 \cdot M_2 O_1 \cdot M_3 O_2 = M_1 O_2 \cdot M_3 O_1 \cdot M_2 O_3 \,.$$

Die Punkte O_1, O_2, O_3 liegen zugleich auf den Verlängerungen der Seiten des Dreiecks M_1, M_2, M_3; da sie, wie eben bewiesen, auf diesen solche Abschnitte bestimmen, daß die Produkte aus je drei nicht anstoßenden gleich sind, so liegen die drei Punkte in einer Geraden. Denn, schneidet eine Transversale die Seiten eines Dreiecks oder ihre Verlängerungen, so sind die Produkte aus je drei nicht anstoßenden Abschnitten der Seiten einander gleich (Satz des Menelaos). Umgekehrt, bestimmen drei Punkte auf den Verlängerungen der Seiten eines Dreiecks solche Abschnitte, daß die

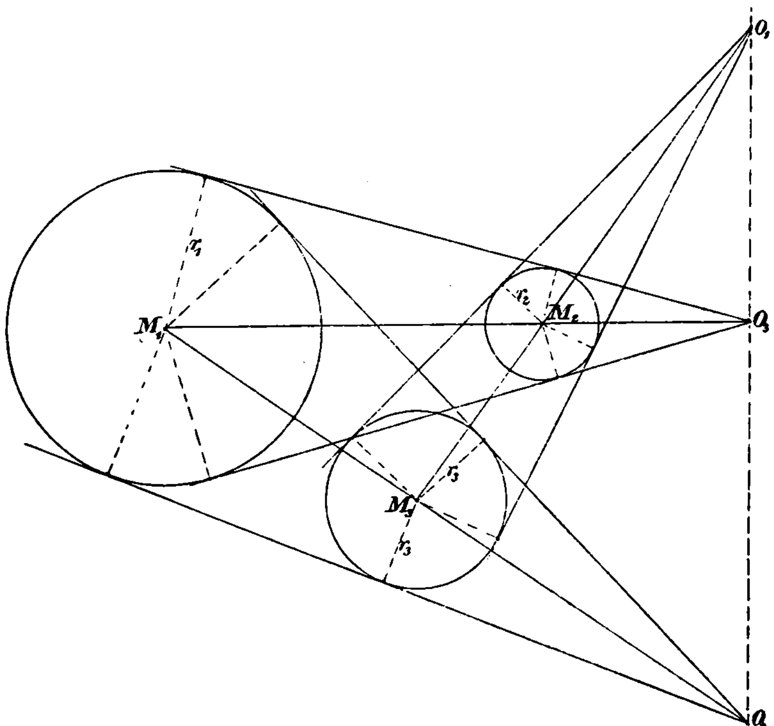

Fig. 8.

Produkte aus je drei nicht anstoßenden Abschnitten gleich sind, so liegen die Punkte auf einer Geraden. Der Satz des Monge könnte auch wie folgt ausgesprochen werden: Konstruiert man zu einem Kreise M_3 mittels eines Zentrums O_1 den Kreis M_2, ferner zu M_3 mittels des Zentrums O_2 den Kreis M_1, dann sind auch die Kreise M_2 und M_1 ähnlich und ähnlich gelegen, und das zugehörige äußere Ähnlichkeitszentrum liegt mit den beiden ersten in gerader Linie. Da aber die Ähnlichkeit in der Ebene immer als ein spezieller Fall der Ähnlichkeit im Raume anzusehen ist, der eben ausgesprochene Satz sich nicht nur für Kreise, sondern auch für andere ebene Figuren beweisen läßt, so wird sich auch für die Ähnlichkeit im Raume ein ganz ähnlicher Satz angeben lassen, dieser lautet:

„Sind im Raume zwei Figuren F_1 und F_2 zu einer dritten Figur ähnlich und ähnlich gelegen, so sind sie es auch zueinander; und das zugehörige Ähnlichkeitszentrum liegt mit den beiden andern in gerader Linie."

Beweis: Es sei (Fig. 9) die Figur F mit F_1 und außerdem F mit F_2 im Raume ähnlich und ähnlich gelegen; die zugehörigen

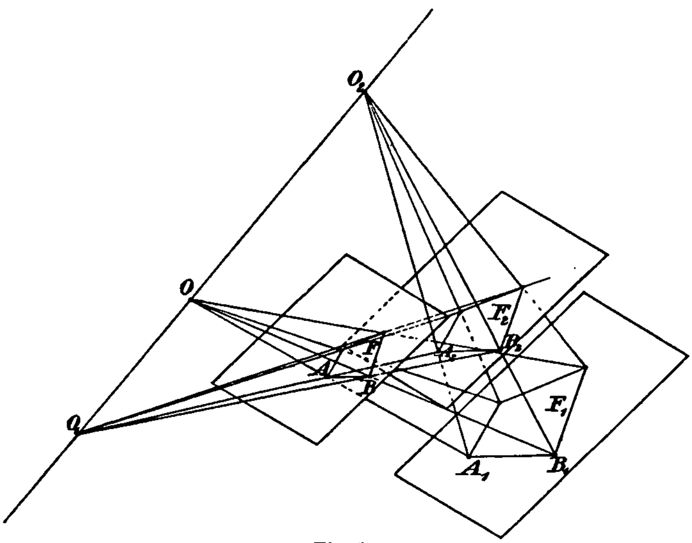

Fig. 9.

Zentren seien bzw. O und O_1. Durch zwei entsprechende Seiten von F_1 und F_2, z. B. A_1B_1 und A_2B_2, läßt sich eine Ebene legen, da diese Seiten parallel sind; nun liegt aber der projizierende Strahl A_1A_2 nicht bloß in dieser Ebene, sondern zugleich auch in der Ebene des Dreiecks AOO_1, in der auch die Verbindungslinie der Zentren O und O_1 liegt, mithin muß auch A_1A_2 und ebenso B_1B_2 usw. die Gerade OO_1 schneiden, also liegt O_2 mit O und O_1 in gerader Linie.

Affinität ebener Figuren.

5. Affine und affin gelegene Figuren im Raume. Sind Bild- oder Projektionsebene $\mathfrak{P}$ und Originalebene $\mathfrak{E}$ nicht parallel, und denken wir durch alle Punkte und Gerade einer in der Originalebene $\mathfrak{E}$ gelegenen Figur $A, B, C, \ldots$ parallel zu einer fest angenommenen Richtung projizierende Strahlen bzw. Ebenen gelegt und letztere von der Ebene $\mathfrak{P}$ geschnitten, so entsteht in $\mathfrak{P}$ eine zweite Figur $A', B', C', \ldots$, die der Figur in $\mathfrak{E}$ eindeutig zugeordnet ist. Die letztere ist aus der ersteren abgeleitet worden oder

die Figur in 𝔈 ist auf die Ebene 𝔓 projiziert worden mittels eines im Unendlichen befindlichen Zentrums; wir bezeichnen dieses Abbildungsverfahren als Parallelprojektion (vgl. Abschnitt 2), es heißt allgemein schiefe Parallelprojektion, doch für den besonderen Fall, daß die projizierenden Strahlen zur Projektionsebene senkrecht stehen, rechtwinklige oder orthogonale Parallelprojektion. Für eine bestimmte Projektionsrichtung und eine bestimmte Lage der Ebenen 𝔈 und 𝔓 gibt es zu einer Figur in 𝔈 nur eine Figur in 𝔓, die in allen Stücken der in 𝔈 zugeordnet ist. Die geometrische Abhängigkeit so entsprechender Figuren heißt Affinität bei affiner Lage, die Figuren selbst affine Figuren in affiner Lage, die projizierenden Strahlen Affinitätsstrahlen, und die Schnittgerade der Ebenen 𝔈 und 𝔓 Affinitätsachse.

Affine und affin gelegene Figuren entsprechen sich folgendermaßen:

1a. Einer Geraden entspricht stets wieder nur eine Gerade oder drei Punkten in gerader Linie entsprechen wieder drei Punkte in gerader Linie.

1b. Beide, die gegebene Gerade und ihr Bild, schneiden sich in einem Punkte der Affinitätsachse, also entspricht jeder Punkt der Achse sich selbst.

1c. Einer Parallelen zur Achse in 𝔈 entspricht wieder eine Parallele in 𝔓.

2. Das Verhältnis je zweier Strecken einer Geraden in 𝔈 ist dem ihrer Bilder gleich.

Zwei sich entsprechende Gerade schneiden sich stets in einem Punkte der Achse; daher liegen beide in einer Ebene, die der Projektionsrichtung parallel sein muß. Solche Gerade können daher immer als die Schenkel eines ebenen Winkels angesehen werden. Werden auf dem einen Schenkel (Fig. 10) zwei beliebige Strecken a und b gewählt und, wie es bei dieser Projektionsmethode der Fall ist, durch die Endpunkte Parallele gezogen, die in der projizierenden Ebene der Geraden liegen, so schneiden diese Parallelen vom zweiten Schenkel, d. i. dem Bild des ersten Schenkels Strecken heraus, die den ersteren proportional sind. Parallelen Geraden können immer nur parallele Gerade entsprechen, und es ist auch das Verhältnis je zweier paralleler Strecken dem ihrer Bilder gleich. Um das zu beweisen, wollen wir die Strecke AB in 𝔈 (Fig. 11) um $BE = CD$ verlängern, dann ist $BEDC$ ein Parallelogramm, dem in 𝔓 wieder ein Parallelogramm entspricht, mithin ist auch $C'D' \parallel$ und $= B'C'$, also ist auch $AB:CD = A'B':C'D'$.

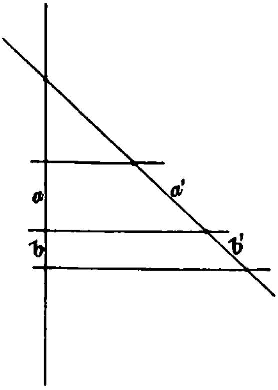

Fig. 10.

3. Einem Winkel α entspricht im allgemeinen ein ungleicher Winkel α'; doch gibt es, wenn der Winkel α um den Scheitel in seiner Ebene gedreht wird, immer eine Lage, in der dem Winkel α ein gleicher Winkel α' entspricht. Dieses trifft auch dann zu, wenn $\sphericalangle \alpha = 90^0$ ist.

a) Der Winkel α ist $< 90^0$. Es sei auch die Ebene 𝔈′ konstruiert, die den Winkel der Ebenen 𝔈 und 𝔓 halbiert, dann läßt sich zum Punkt S', dem Bilde des Scheitels S, der zu 𝔈′ symmetrisch gelegene Punkt S'', der auch in der Ebene 𝔈 liegen muß, angeben. Angenommen, es seien auch die Punkte U und V gegeben, in welchen die Schenkel des $\sphericalangle \alpha$ die Achse schneiden für den Fall, daß der Winkel

$$USV = US'V = US''V$$

ist, dann liegen S und S'' auf einem Kreise der UV als Sehne und dessen Zentriwinkel über $UV = 2\alpha$ ist; dieser Kreis ist zu konstruieren. Die Konstruktion dieses Kreises für den Fall, daß es sich um affine Figuren einer Ebene handelt, ist im Abschnitt 6 gegeben S. 15 unter a).

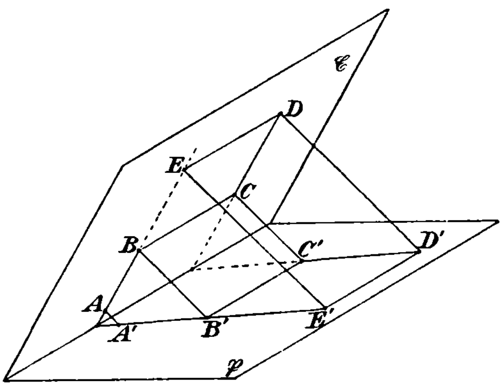

Fig. 11.

b) Der Winkel ist $= 90^0$. Um zu erkennen, daß es auch in diesem Falle die beschriebenen Lagen gibt, denke man sich zur Verbindungslinie SS' im Halbierungspunkte die senkrechte Ebene 𝔈′ errichtet und um den Schnittpunkt derselben mit der Affinitätsachse eine Kugelfläche konstruiert, die beide Punkte S und S' enthält. Diese Kugel wird die Affinitätsachse in zwei Punkten U und V schneiden, deren Verbindungslinien mit S wie mit S' rechte Winkel einschließen. Es ist also $USV = US'V = 90^0$, denn diese Winkel sind Peripheriewinkel in größten Kugelkreisen über Kugeldurchmessern.

Figuren, die die genannten Eigenschaften besitzen, sind affin und affin gelegen; sind aber bei zwei Figuren alle Eigenschaften erfüllt bis auf 1b und 1c, so sind sie wohl als affin zu bezeichnen, doch befinden sie sich nicht in affiner Lage.

Analog dem am Schlusse des Absatzes 4 angeführten Satze läßt sich auch für affine Figuren folgender Satz beweisen:

„Sind zwei Figuren zu einer dritten Figur in bezug auf eine und dieselbe Achse affin und affin gelegen, so sind sie es auch zueinander.“

Es seien (Fig. 12) $A'B'$ und $A''B''$ aus AB hervorgegangen. Nun ist $AA' \parallel BB'$, $AA'' \parallel BB''$, folglich sind die Dreiecke $AA'A''$

und $BB'B''$ ähnlich und ähnlich gelegen, das Ähnlichkeitszentrum ist Punkt U der Affinitätsachse, in dem sich die drei Geraden AB, $A'B'$, $A''B''$ schneiden. Daher ist auch $A'A'' \parallel B'B''$ usw.

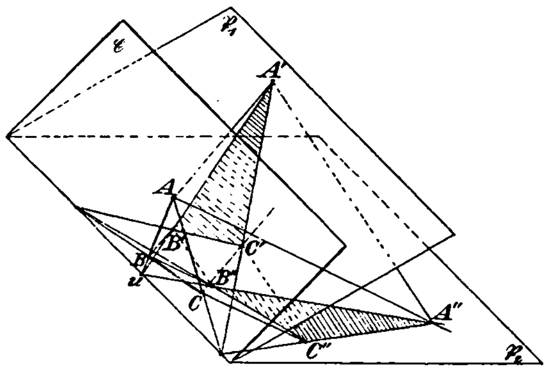

Fig. 12.

Dieser Satz, für den Raum bewiesen, gilt aber auch für affine und affin gelegene Figuren einer Ebene, zu welchen wir gelangen, wenn wir die Ebenen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ durch Drehung um die Affinitätsachse mit der Ebene $\mathfrak{E}$ vereinigen. Es müßte jedoch bewiesen werden, daß den Figuren ihre projektivische Verwandtschaft nicht verloren geht, wenn die Vereinigung der drei Ebenen zu einer Ebene nach dem eben angedeuteten Verfahren stattfindet. Wir beweisen diese Behauptung dadurch, daß wir einer der Ebenen $\mathfrak{P}$ durch Drehung um die Affinitätsachse nur eine andere Lage geben, sie also nicht sofort mit $\mathfrak{E}$ vereinigen und nachweisen, daß die in $\mathfrak{P}$ gelegene Figur auch in dieser neuen Lage noch als affine und affin gelegene Figur zu der in $\mathfrak{E}$ angesehen werden darf. Wir nehmen, um das zu erkennen, für einen Augenblick die Affinitätsachse senkrecht zu unserer Zeichenebene an (Fig. 13), so daß sie als Punkt O erscheint; dann erscheinen sämtliche Ebenen als gerade Linien, die sich im Punkte O schneiden. Wird jetzt eine der Ebenen, z. B. $\mathfrak{P}$, um den Winkel α gedreht, so daß sie durch die Linie $\mathfrak{P}^0$ gegeben ist, so hat bei dieser Drehung jeder Punkt einer in $\mathfrak{P}$ gelegenen Figur einen Kreisbogen beschrieben, und die Sehnen aller Kreisbögen sind parallel; daher ist die Figur in $\mathfrak{P}$ zu der in $\mathfrak{P}^0$ affin und affin gelegen. $\mathfrak{P}$ lag aber zu der Figur in $\mathfrak{E}$ affin, also ist auch nach vorigem Satz die Figur in $\mathfrak{P}^0$ zu der in $\mathfrak{E}$ affin und affin gelegen. Hieraus folgt ohne weiteres:

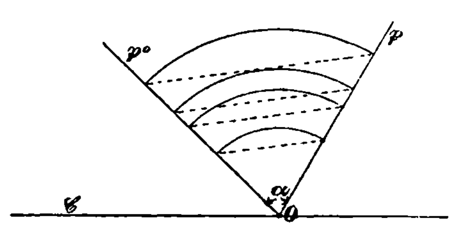

Fig. 13.

„Affine und affin gelegene Figuren in affiner Lage bleiben in affiner Lage, wenn eine derselben um die Affinitätsachse beliebig gedreht wird, — also auch dann, wenn die Ebenen zu einer vereinigt werden."

Bei dieser Vereinigung der Ebenen mit $\mathfrak{E}$ fallen selbstverständlich die projizierenden Strahlen ebenfalls in die Ebene $\mathfrak{E}$ und bilden in derselben, wie vorher im Raume, Büschel paralleler Geraden.

Affine und affin gelegene Figuren einer Ebene; die Ellipse.

6. Jede Ebene wird durch die Affinitätsachse in zwei Teile geteilt. Die Vereinigung einer Ebene $\mathfrak{P}$ mit der Originalebene $\mathfrak{E}$ kann nun erstens in der Weise geschehen, daß der Teil von $\mathfrak{P}$, in dem sich das Bild der Figur in $\mathfrak{E}$ befindet, sich auf den die Originalfigur enthaltenden Teil von $\mathfrak{E}$ legt, oder aber zweitens, daß wir Ebene $\mathfrak{P}$ in entgegengesetzter Richtung drehen, dann befinden sich nach der Vereinigung die entsprechenden Figuren auf verschiedenen Seiten der Affinitätsachse (Fig. 13).

Affine und affin gelegene Figuren einer Ebene besitzen nun, wie die räumlichen Figuren, alle im Abschnitte 5 unter 1—3 aufgezählten Eigenschaften. Insbesondere besitzen sie folgende:

1. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte sind parallel.
2. Entsprechende Gerade schneiden sich in einem Punkte der Achse, der sich selbst entspricht.
3. Das Verhältnis zweier Strecken einer Geraden ist gleich dem der affinen Strecken.
4. Parallelen Geraden in $\mathfrak{E}$ entsprechen wieder parallele Gerade in $\mathfrak{P}$.

Auf Grund dieser Beziehungen kann in einer Ebene zu einer gezeichneten Figur die affine und affin gelegene Figur ermittelt werden, wenn man zwei entsprechende Punkte und die Affinitätsachse kennt.

Wird umgekehrt durch Drehung einer Ebene um die Affinitätsachse wieder die räumliche Lage hergestellt, so befinden sich die Figuren ebenfalls in affiner Lage, d. h. die eine kann immer angesehen werden als die Parallelprojektion der andern.

Fundamentalkonstruktion. Zu der Figur $ABCDEFGH$ finde ich in der Ebene der Figur eine affine und affin gelegene, d. h. eine schiefe Parallelprojektion, wenn ich weiter wähle eine Affinitätsachse $\mathfrak{A}$ und für einen Punkt der Figur, z. B. A, einen entsprechenden Punkt A'. Nun ist jeder andere Punkt der Projektion konstruierbar (vgl. die Fig. 14a und b); ich finde B', indem ich AB bis zum Schnitt mit der Achse in M verlängere, MA' ziehe und mit der durch B zu AA' gezogenen Parallelen zum Schnitt bringe; der Schnittpunkt B' ist dann der gesuchte Punkt u. s. f.

Aus diesen Konstruktionen folgt, daß das Bild einer Geraden g die Verbindungslinie des Achsenschnittpunktes dieser Geraden mit dem Bilde irgend eines Punktes von g ist. Im Abschnitt 5 war bemerkt worden, daß einem Winkel α im allgemeinen ein ungleicher Winkel α' entspreche, doch kommt der Winkel α, wenn wir ihn

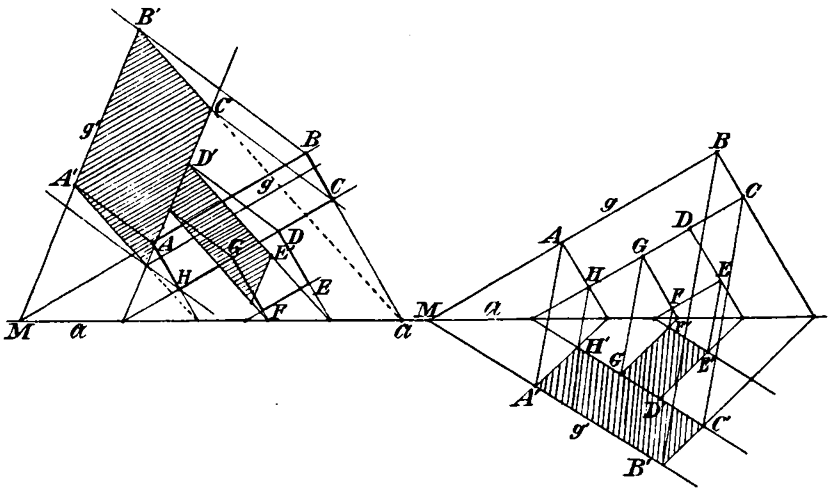

Fig. 14a und b.

um seinen Scheitel drehen, stets in eine Lage, in der sein entsprechender Winkel ihm gleich ist. Die Lage soll ermittelt werden

a) für einen spitzen Winkel,

b) für einen rechten Winkel.

a) Sind S und S' die sich entsprechenden Scheitel und $\mathfrak{A}$ die Affinitätsachse (Fig. 15), so konstruiere man das Spiegelbild von S' in bezug auf $\mathfrak{A} = S''$, ziehe SS'' und errichte im Halbierungspunkte H dieser Geraden die Senkrechte, welche $\mathfrak{A}$ in I schneiden möge. Sind ferner U und V die Schnittpunkte der Schenkel des Winkels α mit der Achse in der Lage des Winkels, in der der entsprechende $\sphericalangle\, \alpha' = \alpha$ ist, dann ist auch $USV = US''V$ und die Punkte U, V, S, S'' müssen auf einem Kreise liegen, in dem $UMV = 2\alpha$ und Linie UM den Winkel $R - \alpha$ mit der Achse einschließt. Für den Mittelpunkt M dieses Kreises haben wir zunächst nur einen geometrischen Ort, nämlich die Gerade HI; ein

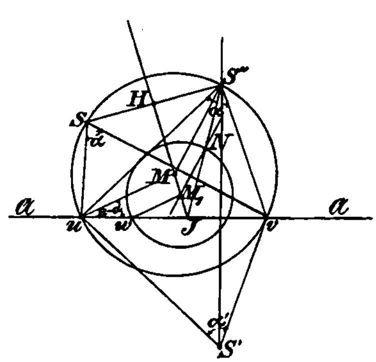

Fig. 15.

zweiter geometrischer Ort muß noch bestimmt werden. Zu dem Zwecke ziehe ich an beliebiger Stelle eine Gerade, die die Achse $\mathfrak{A}$ in W und unter dem Winkel $R - \alpha$, die Linie HI im Punkte M' schneiden möge; wird jetzt um M' ein Kreis mit $M'W$ als Radius beschrieben, so ist dieser dem gesuchten Kreise ähnlich und ähnlich gelegen, das Ähnlichkeitszentrum ist I. Schneidet Gerade IS'' den konstruierten Kreis in N, dann ist $M'N \parallel MS''$, daher die Parallele zu $M'N$ durch S'' der zweite geometrische Ort für M. Wesentlich einfacher ist die Konstruktion für die Bestimmung der Lage eines rechten Winkels, in der sich derselbe in $\mathfrak{P}$ in wahrer Größe abbildet.

b) $\sphericalangle \alpha = 90^0$ (Fig. 16). Im Halbierungspunkte der Verbindungslinie der sich entsprechenden Scheitel errichte man die Senkrechte

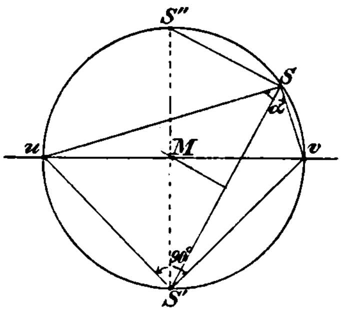

Fig. 16.

und beschreibe um den Schnittpunkt mit der Affinitätsachse den Kreis, der durch S und S' geht, dann sind die Schnittpunkte dieses Kreises mit der Achse U und V die gesuchten Punkte; es ist $USV = US'V = 90^0$ als Peripheriewinkel im Halbkreis. — Wird zu S' in bezug auf die Affinitätsachse der symmetrische Punkt S'' ermittelt und mit S verbunden, so erkennt man leicht, da Bogen $S'U = S''U$ ist, daß SU den Winkel $S'SS''$, SV den Nebenwinkel halbiert. Diese Halbierungslinien könnte man zur Bestimmung von U und V benutzen, wenn Punkt M unzugänglich ist.

Die schiefe Parallelprojektion eines Kreises. Kennt man von dem Mittelpunkt eines in $\mathfrak{E}$ befindlichen Kreises den affinen

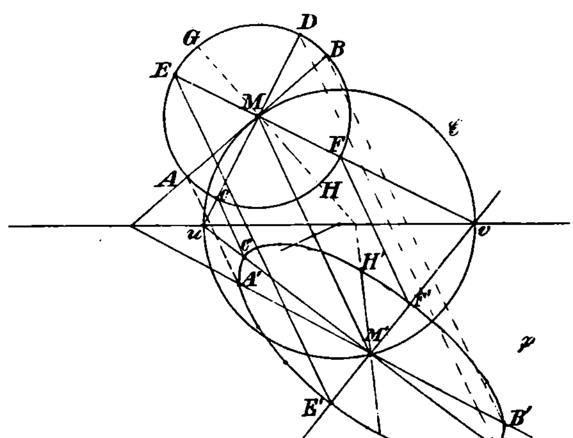

Fig. 17.

Punkt in $\mathfrak{P} = M'$ (Fig. 17), so ist nach den gegebenen Definitionen auch zu jedem Punkt der Peripherie das Bild konstruierbar. Man zieht am besten durch M Durchmesser, dann sind die Bilder dieser Durchmesser Linien, die durch M' gehen und ebenso wie die