

Lehrbuch

der

Darstellenden Geometrie

für

den Gebrauch an technischen Hochschulen, mittleren gewerblichen und technischen Lehranstalten, Kunstgewerbeschulen, Fortbildungsschulen usw. und für das Selbststudium

bearbeitet von

Prof. Erich Geyger,

Oberlehrer an der Kgl. Baugewerkschule in Kassel

I. Teil

Affinität und Perspektivität ebener Figuren. Perspektive, involutorische und harmonische Grundgebilde. Kegelschnitte als Kreisprojektionen. Die orthogonale axonometrische und schiefe Projektion. Zylinder, Kegel, Kugel; ebene und Raumkurven. Schnitte und Abwickelungen. Durchdringungen.

Mit zahlreichen angewandten Beispielen und 290 Figuren

Leipzig

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung

1906

**Alle Rechte
von der Verlagshandlung vorbehalten.**

Vorwort.

Die Herausgabe des vorliegenden Buches wurde durch den an mich ergangenen, ehrenden Auftrag der Verlagsfirma veranlaßt, das gleichfalls von ihr verlegte Werk einer darstellenden Geometrie des Herrn Dr. Schroeder in Hamburg (von welchem nur der erste Band erscheinen konnte) fortzusetzen. In unserem technisch induktiven Zeitalter braucht kaum noch darauf hingewiesen zu werden, daß für alle Zweige der Technik und des Handwerks die Notwendigkeit vorliegt, in ausgedehntester Weise die Zeichenkunst zu verwerten, wenn Erdachtes festgehalten und ein Ideenaustausch vermittelt werden soll. Soll das Zeichnen ein Entwerfen sein, so ist das nur auf Grund einer geübten Raumanschauung möglich. Ein erfolgreiches Eindringen in die Gebiete der Naturwissenschaften und der technischen Fächer geht Hand in Hand mit der Ausbildung des Raumanschauungsvermögens, das vielen, namentlich denen, die sich zum Studium der naturwissenschaftlich-mathematischen Disziplinen hingezogen fühlen, von Natur aus eigen ist, bei anderen aber erst gehörig entwickelt und geschärft werden muß. Das einzige Mittel hierzu aber ist die Wiedergabe von Körpern auf Grund geometrischer Gesetze, d. h. „die darstellende Geometrie“. Jeder, der die Ideen des Entwerfenden richtig erfassen, das nach geometrischen Grundsätzen richtig Entworfenene auch richtig verstehen will, muß Beherrscher dieser Wissenschaft sein.

Die Erkenntnis, daß auch für das Handwerk die Kunst des Zeichnens nicht nur nutzbringend und förderlich, sondern für die meisten Zweige desselben unbedingt notwendig sei, erklärt die in den letzten Jahren vollzogenen zahlreichen Gründungen von gewerblichen Fortbildungs- und Handwerkerschulen aller Art. An letzteren Anstalten und den technischen Mittelschulen bilden die zeichnerischen Fächer die größere Zahl von

Lehrgegenständen; an diesen Schulen tritt die formale bzw. allgemeine Bildung fast gänzlich zurück, die direkte Vorbereitung für das praktische Leben, für den zu ergreifenden oder schon ergriffenen Beruf bildet hier die Unterrichtsmaxime. Daher kann und darf an diesen Anstalten die darstellende Geometrie, ohne die kein richtiges Zeichnen denkbar ist, niemals Nebenfach, sondern nur Hauptlehrgegenstand sein, denn diese ist das vermittelnde Element, die verbindende Brücke zwischen Theorie und Praxis. Die darstellende Geometrie darf daher niemals rein theoretisch, sie muß praktisch anschaulich vorgetragen werden. Das soll aber nicht heißen ohne jede Theorie; diese kann im gründlichen Unterrichte nicht entbehrt werden, ihr Wert und ihre Bedeutung sind den Schülern sofort durch Anwendung derselben auf praktische Beispiele zweckmäßig vor Augen zu führen. Die Hauptaufgabe der darstellenden Geometrie ist hiernach, die Gesetze für das Abbilden solcher Gebilde zu lehren, denen wir später als Formenelemente bei den praktisch vorkommenden Gegenständen begegnen. Da das Schülermaterial hierzu mathematisch nicht vorgebildet ist, sind bei der Durcharbeitung von Aufgaben die analytischen Lösungen möglichst auszuschließen und, wo es nur angeht, die graphischen in den Vordergrund zu stellen. Es empfiehlt sich dies auch schon aus dem Grunde, weil größere algebraische Operationen keineswegs die Vorstellungskraft beanspruchen, deren Verständnis vielmehr ein größeres mathematisches Wissen und eine Gewandtheit im Rechnen voraussetzt, die für das Studium der darstellenden Geometrie entbehrlich ist. Die Kenntnis der grundlegenden Lehrsätze der Planimetrie und Stereometrie, einschließlich des Begriffes der trigonometrischen Funktionen, der variablen und konstanten Größen wie des Verfahrens der Festlegung eines Punktes durch seine Koordinaten genügt, um die Darlegungen dieses Buches zu verstehen. Um aber dem Leser die Eigenschaften der Figuren, die durch das Projizieren von ebenen Figuren und Raumgebilden erhalten werden, beweisen zu können, war es erforderlich, auf die fundamentalen Sätze und Begriffe der Geometrie der Lage einzugehen.

Mit der schon erwähnten Schaffung von gewerblichen Fortbildungsschulen, Handwerkerschulen und technischen Mittelschulen ist allerdings ein bedeutender Schritt getan, doch das zu erstrebende Ziel ist noch nicht erreicht. Die Erfolge blieben weit hinter den gehegten Erwartungen zurück; es fehlten offenbar geeignete Lehrkräfte. Das beweisen die lebhaften Debatten und Erörterungen

auf den in den letzten Jahrzehnten abgehaltenen Versammlungen der berufenen Vertreter dieser Anstalten über den Zeichenunterricht und die Beschaffung von Lehrkräften.

Die Lösung der gekennzeichneten Aufgabe bietet eben dem Lehrenden, der kein volles mathematisches bzw. Fachstudium aufzuweisen vermag, doch mehr Schwierigkeiten, als man gemeiniglich annimmt. Erfahrungsgemäß hat dies seinen Grund darin, daß hier das durch die verschiedenen Lehrbücher Gebotene zum größten Teile versagt, obgleich die Zahl der dieses Gebiet behandelnden Lehr- und Lernbücher nicht gering ist. Der erfahrene Lehrer wird unter der großen Menge selten eins finden, das ihn vollauf befriedigt. Das eine behandelt den Stoff völlig abstrakt, es bringt die Grundkörper, sonst nichts, gibt einige Konstruktionen, umgeht aber deren Beweis; ein anderes sucht fast ausschließlich an angewandten Beispielen die Konstruktionsverfahren klarzulegen, eine Erklärung des Ergebnisses der Konstruktion aber fehlt. Kreisprojektionen finden sich in jedem Lehrbuch über darstellende Geometrie, aber auf die projektiven Eigenschaften der Kegelschnitte wird in der Regel nicht eingegangen. Durchdringungen von Zylinder- und Kegelflächen werden auch stets vorgetragen, das Ergebnis der Konstruktion wird aber nicht erklärt. Kann ein solches Buch den strebenden Lehrer zufrieden stellen, wenn es ihm nicht beweist, daß das Ergebnis nur eine Raumkurve, in diesem besonderen Falle aber eine ebene Kurve sein kann? Will aber der Leser auf solche und ähnliche Fragen Antwort haben, so heißt es für ihn, sich durcharbeiten durch umfangreiche Bände, die diese Gebiete behandeln. Dem Lehrenden und Lernenden hier zu Hilfe zu kommen, war bei der Abfassung dieses Buches mein Bestreben.

Das Gebotene umfaßt im Verein mit dem Dr. Schroederschen Bande sowohl den Lehrstoff aller technischen Mittelschulen wie den für die Studierenden an technischen Hochschulen in den ersten Semestern ihres Studiums. Bei Durcharbeitung desselben war entsprechend den vorausgeschickten Erwägungen allein der Gesichtspunkt maßgebend, ihn unter Wahrung seines wissenschaftlichen Charakters möglichst für den Unterricht verwertbar zu gestalten und jedem, auch dem, der der höheren Mathematik nicht kundig ist, verständlich zu werden. Von der Aufnahme der Schattenkonstruktionen, Beleuchtungslehre und der Zentralperspektive ist im vorliegenden Buche abgesehen, für die Behandlung dieser Kapitel der darstellenden Geometrie vielmehr ein zweiter

Band vorgesehen worden, damit das Buch nicht zu unhandlich werde.

Beabsichtigt wird, in einem dritten Bande die zyklischen Linien, Schraubenlinien und Schraubenflächen, die Flächen zweiten Grades, Regelflächen usw. zu behandeln.

Es drängt mich, an dieser Stelle meinem hochgeschätzten Kollegen, Herrn Architekt und Königl. Oberlehrer Baumann in Kattowitz, der mir mit seinen reichen Erfahrungen bei der Auswahl und Lösung der behandelten Aufgaben stets hilfsbereit zur Seite stand, hiermit meinen herzlichsten Dank auszusprechen, und mit diesem Danke verbinde ich zugleich die dringende Bitte an die Herren Fachkollegen, mir etwaige Wünsche auf Änderungen ohne Rückhalt anzuzeigen, damit dieselben bei einer späteren Auflage berücksichtigt werden können. Möge das Buch an seinem Teile dem gewerblichen Schulwesen wie der gewerblichen Praxis zugute kommen.

Kassel, im Juli 1906.

Der Verfasser.

Inhalts-Verzeichnis.

I. Kapitel.

Kongruenz, Ähnlichkeit, Affinität und Perspektivität ebener Figuren.

	Seite
1. Zentralprojektion einer Ebene auf eine zweite Ebene	1
2. Das Projektionszentrum ändert seine Lage. Die schiefe und die orthogonale Parallelprojektion, die Affinität bei affiner Lage	2
Die Bildebene ändert ihre Lage; Ähnlichkeit bei ähnlicher Lage	3
Projektionszentrum und Achse liegen im Unendlichen; kongruente Figuren	3
3. Kongruenz der Figuren; homologe Stücke kongruenter Figuren. Kongruente Figuren in perspektiver Lage	4
Kongruente Figuren in einer Ebene. Kongruente Dreiecke	5
4. Ähnlichkeit ebener Figuren, Ähnliche Figuren in ähnlicher Lage. Bestimmung des Ähnlichkeitszentrums nach einer Parallelverschiebung der Bildebene	5 7
Vereinigung von Bild- und Originalebene. Ähnlichkeitszentra zweier bzw. dreier Kreise. Satz des Monge	7 -9
Drei paarweise ähnlich liegende Figuren im Raume	10

Affinität ebener Figuren.

5. Schiefe und orthogonale Parallelprojektion. Affinität bei affiner Lage. Affine und affin gelegene Figuren im Raume	10- 11
Das Verhältnis je zweier Strecken einer Geraden, bzw. je zweier paralleler Strecken ist dem ihrer Bilder gleich	11
Affin gelegene gleiche Winkel; drei paarweise affin liegende Figuren. Drehung der Bildebene um die Affinitätsachse	12-14

Affine und affin gelegene Figuren einer Ebene; die Ellipse.

6. Eigenschaften der affinen und affin gelegenen Figuren einer Ebene. Konstruktion einer affinen und affin gelegenen Figur zu einer gegebenen Figur. Affin gelegene gleiche Winkel. Die affine Figur eines Kreises: Die Ellipse. Die Achsen, die Scheitel und die konjugierten Durchmesser einer Ellipse	14 -17
Die entsprechenden Geraden der Kreistangenten sind Ellipsentangenten. Die Konjugierten-Parallelogramme	17
Die Hauptellipse eines Parallelogramms	18

**Affine Figuren einer Ebene, die sich nicht in
affiner Lage befinden.**

	Seite
7. Die allgemeinen Gesetze der Affinität	18
Die Affinität ist durch drei Paare entsprechender Punkte bestimmt	
Darstellung affiner Parallelsysteme	19—21
Ermittlung des sich selbst entsprechenden Punktes	21
Herstellung der affinen Lage zweier affiner Figuren	22
Das Verhältnis der Flächen irgend zweier affiner Figuren ist konstant	23—24

**Ellipsenkonstruktionen. Metrische Beziehungen
zwischen den Achsen und den konjugierten Durch-
messern einer Ellipse.**

8. Kreis und Ellipse einer Ebene können immer als affine Figuren angesehen werden	24
a) Vier Konstruktionen der Ellipse aus den Achsen	24—25
b) Konstruktion der Tangente einer Ellipse:	
1. Aus einem Punkte der Achse	26
2. Aus einem beliebigen Punkte der Ellipseebene	26
3. Konstruktion der Tangente und Normalen eines Ellipsen- punktes	26
Inhalt einer Ellipse	26
c) Konstruktion der Ellipse aus konjugierten Durchmessern	27
Tangente und Normale in einem Ellipsenpunkte	28
Ellipsentangente aus einem beliebigen Punkte der Ellipsen- ebene. Ermittlung der Achsen der Ellipse	28
d) Metrische Beziehungen zwischen konjugierten Durchmessern und den Achsen einer Ellipse	29
Konjugierte Durchmesser, die den kleinsten Winkel ein- schließen; komplementäre Sehnen	30—31
Das Produkt der Abschnitte einer Ellipsentangente ist gleich dem Quadrate des parallelen Halbmessers	31
Konstruktion der Achsen einer Ellipse aus zwei konjugierten Durchmessern	32
e) Zwei weitere Konstruktionen der Ellipse aus konjugierten Durchmessern	32—34

Perspektivität ebener Figuren.

9. Zentralprojektion einer ebenen Figur	34
Der unendlich ferne Punkt einer Geraden und eines Parallelen- systems; Fluchtpunkt und Fluchtlinie	35
Die unendlich ferne Gerade einer Ebene	36
Verschwindungspunkt und Verschwindungslinie	36
Bestimmung der Perspektivität zweier Ebenen	36
Drehung einer von zwei perspektiven Figuren um die Projektions- achse; drei paarweise perspektive Figuren	37
Vereinigung der Original- und Bildebene	38
10. Die Zentralprojektion oder Zentralkollineation in der Ebene	39
Eigenschaften perspektiver Figuren; Bestimmungsstücke der Zentral- kollineation in der Ebene	39—40
Fundamentalkonstruktionen	41—42

II. Kapitel.

Perspektive, involutorische und harmonische Grundgebilde.

	Seite
11. Die einförmigen Grundgebilde. Die perspektive Lage zweier Grundgebilde; projektive Gebilde	43—44
Das Doppelverhältnis oder das anharmonische Verhältnis von vier Punkten bzw. vier Strahlen	45
12. Der Wert eines anharmonischen Verhältnisses; Vertauschbarkeit der Punkte in einem Doppelverhältnis ohne Änderung seines Wertes	46—47
13. Die verschiedenen Werte eines Doppelverhältnisses bei Änderung der Lage eines Elementes; harmonische Punkte	47—49
14. Die projektive Beziehung zweier Grundgebilde ist durch drei Paare entsprechender Elemente bestimmt	49—50
Herstellung der perspektiven Lage zweier projektiven Gebilde . . .	51
15. Perspektive Punktreihen; die Gegenpunkte	52
Projektive Punktreihen. Die perspektive Beziehung zweier Punktreihen ist bestimmt, wenn man drei Paare von Elementen willkürlich als entsprechend annimmt	52—53
Projektive Punktreihen können in die perspektive Lage gebracht werden; die perspektive Lage zweier Punktreihen wird nicht aufgehoben, wenn man die eine um den gemeinsamen Punkt dreht	53—54
Die Potenz der projektiven Beziehung; die Potenzpunkte	54—56
Gleiche Strecken in perspektiven Punktreihen	56—58
16. Perspektive Strahlbüschel. Perspektivitätsachse	58
Projektive Strahlbüschel. Zwei Strahlbüschel, bestehend aus drei willkürlich gewählten Strahlen, können in eine solche Lage gebracht werden, daß die Schnittpunkte entsprechender Strahlen auf einer Geraden liegen bzw. drei Paare entsprechender Strahlen bestimmen die Perspektivität der Büschel	59
Kongruente Strahlbüschel. Die Rechtwinkelpaare projektiver Strahlbüschel; die Potenz der projektiven Beziehung	60—61
Potenzstrahlen	62
Systeme entsprechender gleicher Winkel	63
17. Die Doppелеlemente der aufeinander liegenden projektiven Gebilde	
Gleichlaufende und ungleichlaufende Punktreihen	63—67
Konstruktion der Doppelpunkte	66—68
Aufeinander liegende ungleichlaufende und gleichlaufende Strahlbüschel	69
18. Involutorische Punktreihen; gleichlaufende und ungleichlaufende	
Involution	69—71
Die Potenz und Potenzpunkte der gleichlaufenden oder elliptischen Involution	71—72
Die Doppelpunkte der ungleichlaufenden oder hyperbolischen Involution	72
Konjugierte Punkte einer hyperbolischen Involution werden durch die Doppelpunkte harmonisch getrennt	72
Die parabolische Involution	73
19. Involutorische Strahlbüschel; Potenzstrahlen; Doppelstrahlen	73—75

	Seite
20. Harmonische Punkte und harmonische Strahlen; Vertauschbarkeit der Punkte der harmonischen Reihe	75—76
Lehrsätze	76
Harmonische Punkte und Strahlen bei Dreiecken und Vierecken	76—80

III. Kapitel.

Die Kegelschnitte als Kreisprojektionen.

Die Potenz eines Punktes in bezug auf einen Kreis; Potenzlinie zweier Kreise.

21. Die Potenz eines Punktes in bezug auf einen Kreis	81
Die Potenzlinie oder Chordale zweier Kreise; die Chordale sich schneidender, sich berührender und konzentrischer Kreise . .	82—83
Der Chordalpunkt dreier Kreise	83
Der Potenz- oder Orthogonalkreis dreier Kreise	84
Der eine von zwei Kreisen einer Ebene kann immer als Zentralprojektion des andern angesehen werden; Perspektivitätsachse ist die Chordale, Projektionszentrum der Ähnlichkeitspunkt .	84—86
22. Projektion eines Kreises in sich selbst. Polare eines Punktes und Pol einer Geraden in bezug auf einen Kreis. Ein gegebener Kreis wird durch eine involutorische Zentralprojektion, der Zentrum O und deren Achse als Pol und Polare des Kreises entsprechen in sich selbst übergeführt	86—88
Folgerung; Kreisbüschel	88—89
23. Eine Involution ist durch zwei Paare konjugierter Punkte bestimmt. Ermittlung des Mittelpunktes und der Doppelpunkte einer ungleichlaufenden Involution, desgleichen neuer Punktepaare. Ermittlung des Mittelpunktes und weiterer Punktepaare einer gleichlaufenden Involution. Involution rechter Winkel .	90—91
24. Harmonische Pole und Polaren eines Kreises	91
Polare eines Punktes und Pol einer Geraden in bezug auf einen Kreis	91—94
25. Polardreiecke eines Kreises. Satz vom Tangentenvierecke . . .	94—95
Lehrsatz des Pascal	96—97
Satz von Sehnenfünfeck und Dreieck. Kongruente Strahlbüschel und Punktreihen am Kreise	98—100
Satz des Brianchon	100
Satz von den Ekstransversalen nach den Berührungspunkten des eingeschriebenen Kreises eines Dreiecks	101

Entstehung der Kegelschnitte aus der Zentralprojektion des Kreises.

26. Wiederholung. Die Kegelschnitte sind Zentralprojektionen des Kreises. Ellipse, Parabel, Hyperbel; jeder Kegelschnitt ist eine geschlossene Kurve	102—104
27. Eigenschaften des Kreises sind auch Eigenschaften der Kegelschnitte. Pole und Polaren der Kegelschnitte	105
Konjugierte Pole und Polaren der Kegelschnitte	106—107

28. Jede Gerade der Ebene eines Kegelschnittes ist Träger einer Involution harmonischer Pole, jeder Punkt Scheitel einer Involution harmonischer Polaren 107—108
 Konstruktion harmonischer Pole 109—110
 Hyperbolische, parabolische und elliptische Involution 110
 Durchmesser und Mittelpunkt des Kegelschnittes 110—112
 Konjugierte Durchmesser eines Kegelschnittes 112
 Die Paare konjugierter Durchmesser bilden am Mittelpunkt des Kegelschnittes zwei involutorische Strahlbüschel; die Durchmesser der Parabel 112
 Die ∞ ferne Gerade einer Ebene kann keine Gerade von bestimmter Richtung sein 112
 Vom ein- und umgeschriebenen Parallelogramm eines Kegelschnittes
 Die Tangenten von den Punkten einer Geraden an einen Kegelschnitt schneiden eine beliebige Kegelschnitttangente in Punkten einer Involution 113
 Die Achsen eines Kegelschnittes sind die Rechtwinkelstrahlen der Involution, die zwei Paare konjugierter Durchmesser bestimmen; die Asymptoten sind Doppelstrahlen dieser Involution 114

Erzeugung der Kegelschnitte durch projektivisch verwandte Punktreihen und Strahlbüschel.

29. Entstehung einer ebenen Kurve. Punktkurve von beliebiger Ordnung, Punkt- oder Ordnungskurve. Strahlbüschel von beliebiger Klasse, Strahlen- oder Klassenkurve 114—118
 30. Die entsprechenden Strahlen zweier projektiver Strahlbüschel erzeugen durch ihren Schnitt eine Punktreihe zweiter Ordnung 118—119
 Zwei Konstruktionen dieser Punktreihe. Eine Punktkurve zweiter Ordnung ist durch fünf Punkte vollständig bestimmt. Die Punktreihen zweiter Ordnung müssen Kegelschnitte sein. Erzeugung einer Ellipse und eines Kreises. Erzeugung einer Parabel und Hyperbel, Erzeugung einer gleichseitigen Hyperbel. Hauptachse und Nebenachse der Hyperbel 119—127
 31. Konstruktion der Doppel- und Rechtwinkelstrahlen zweier aufeinanderliegender, projektiver Strahlbüschel 127—129
 32. Das Erzeugnis zweier projektiver Punktreihen -- eine Kurve zweiter Klasse 129—132
 Eine Tangentenkurve ist durch fünf Gerade vollständig bestimmt
 Kurven zweiter Klasse müssen Kegelschnitte sein 132
 Erzeugung einer Ellipse und eines Kreises durch projektive Punktreihen 133
 Erzeugung von Parabeln 134
 Erzeugung von Hyperbeln 134—135
 Eigenschaften der Hyperbel 135—138
 33. Konstruktion der Doppelpunkte und Gegenpunkte zweier aufeinanderliegender projektiver Punktreihen 138—139
 34. Aufgaben:
 a) Ein Kegelschnitt sei durch fünf Punkte A, B, C, D, E gegeben, es sollen seine Schnittpunkte mit einer Geraden g ermittelt werden, ohne daß der durch die fünf Punkte definierte Kegelschnitt selbst gezeichnet wird 139

	Seite
b) Ein Kegelschnitt sei durch fünf Tangenten a, b, c, d, e gegeben; es sollen von einem Punkte S zwei Tangenten an denselben gelegt werden, ohne daß er selbst gezeichnet wird	139—140
Lehrsatz. Sind zwei Punktreihen auf einem Kegelschnitt projektiv bzw. involutorisch, so sind es auch die Tangentenbüschel, deren Berührungspunkte sie bilden; Umkehrung	140—141
Aufgaben :	
1. Auf einer Geraden ist eine Involution von Punkten sich doppelt entsprechender Punkte A und A_1 , B und B_1 gegeben; es sind weitere Punktepaare, die Doppelpunkte und der Mittelpunkt der Involution zu bestimmen	142
2. Der Punkt O ist Träger einer Strahleninvolution, die durch zwei Paare sich doppelt entsprechender Strahlen a und a_1 , b und b_1 bestimmt ist; es sind weitere Paare konjugierter Strahlen, die Doppelstrahlen und die Rechtwinkelpaare der Involution zu konstruieren	142
3. Noch einmal Aufgabe a) dieses Abschnittes	143
Zweite Lösung	143
4. Noch einmal Aufgabe b) dieses Abschnittes	144
Zweite Lösung	144—145
5. Ein Kegelschnitt liegt a) gezeichnet vor, b) ist durch fünf Punkte, c) durch fünf Tangenten gegeben — zu konstruieren die Achsen des Kegelschnitts	145—146
35. Die Sätze von Pascal und Brianchon	146
Die Umkehrungen dieser Sätze	148
Anwendungen dieser Sätze	148—150
36. Ein- und umgeschriebene Polygone der Kegelschnitte	150
Vom eingeschriebenen Fünfeck	151
Vom umgeschriebenen Fünfeck	151
Von den ein- und umgeschriebenen Vierecken und Dreiecken	151—153
Kegelschnittbüschel und Kegelschnittschar.	
37. Entstehung eines Kegelschnittbüschels; zwei Entstehungsarten	153
Gemeinsam eingeschriebenes Viereck, gemeinsames Polardreieck	154
Die Tangenten der Kegelschnitte des Büschels in irgend zweien der vier Grundpunkte bilden projektive, perspektiv liegende Strahlbüschel	155
38. Entstehung einer Kegelschnittschar	155
Sämtliche Kegelschnitte einer Schar von vier gemeinsamen Tangenten	156
Die Berührungspunkte der Kegelschnitte der Schar auf irgend zweien der vier Grundstrahlen bilden projektive, perspektiv liegende Punktreihen	158
Das allen Kegelschnitten der Schar umgeschriebene Vierseit, gemeinsames Polardreieck	158
39. Sämtliche Kegelschnitte der Kegelschnittbüschel, die durch Annahme von vier festen Punkten erzeugt werden	158—163
40. Lehrsätze :	
1. Jede Gerade in der Ebene eines Kegelschnittbüschels, die durch keinen Grundpunkt geht, wird von den Kegelschnitten desselben in Punktepaaren einer Involution geschnitten	163

	Seite
2. Die von einem Punkte P der Ebene einer Kegelschnittschar, der auf keinem Grundstrahle liegt, an die Kegelschnitte gelegten Tangentenpaare bilden eine Involution	164
3. Die Gegenseitenpaare eines vollständigen Vierecks werden von jeder Geraden, die durch keine Ecke geht, in Punktepaaren einer Involution geschnitten	165
4. Die Gegeneckenpaare eines vollständigen Vierseits werden mit jedem Punkte der Ebene, der auf keiner Seite liegt, durch Strahlenpaare einer Involution verbunden	165
Aufgabe: Einen Kegelschnitt zu konstruieren, der durch vier gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt .	166
5. Die Polaren eines Punktes P in bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels mit vier festen Grundpunkten gehen durch einen festen Punkt Q und umgekehrt liegt P auf allen Polaren von Q , so daß P und Q in bezug auf die Kegelschnitte des Büschels konjugiert sind	166
6. Die Pole einer Geraden in bezug auf die Kegelschnitte einer Schar liegen auf einer Geraden b ; und umgekehrt liegen die Pole der Geraden b auf a oder a geht durch alle Pole von b . Die Geraden a und b heißen konjugiert in bezug auf die Kegelschnittschar	168
7. Zwei konjugierte Punkte eines Büschels liegen zu den Schnittpunkten der sie verbindenden Geraden und jedem Kegelschnitt des Büschels harmonisch	168
8. Zwei in Bezug auf eine Kegelschnittschar konjugierte Geraden liegen harmonisch zu den Tangenten aus ihrem Schnittpunkt an jeden einzelnen Kegelschnitt	168

**Brennpunkte und Leitlinien der Kegelschnitte.
Krümmungshalbmesser der Kegelschnitte. Konstruktion von Kegelschnitten, ihren Tangenten und Normalen.**

41. Satz. Durch jeden gegebenen Kegelschnitt lassen sich unendlich viele Rotationskegel legen	169
Der Schnitt eines Kreiskegels ist eine Ellipse bzw. Hyperbel bzw. Parabel	170
Brennpunkte und Brennstrahlen	171
Definitionen der Kegelschnitte, Umkehrungen	171—173
Leitlinie der Parabel	173
42. Die Brennpunkte sind Träger orthogonaler Involutionen	173—176
Die Achsen eines Kegelschnittes sind Träger von Involutionen, der sogenannten Fokal- oder Brennpunktinvolutionen	176
Die Exzentrizität des Kegelschnittes	176
43. Beziehungen zwischen den Halbachsen und der Exzentrizität des Kegelschnittes	176—177
Die Hauptachse der Ellipse und der Hyperbel	177
Konstruktion der Brennpunkte	178
Leitlinien der Ellipse und Hyperbel	178
Die Tangenten von den Punkten der Leitlinie einer Parabel stehen aufeinander senkrecht	179
Brennpunkte und Leitlinien des Kreises	179

	Seite
44. Lehrsätze :	
1. Die Tangente (und Normale) in einem Punkte eines Kegelschnittes bildet gleiche Winkel mit den Brennstrahlen . . .	179
2. Tangentenstrecken, die aus einem Brennpunkte unter einem rechten Winkel erscheinen	179
3. Das Verhältnis der Entfernungen eines Kegelschnittpunktes von einem Brennpunkte und der Leitlinie ist konstant; die numerische Exzentrizität	180
4. Der Ort der Punkte, deren Abstände von einem festen Punkte und einer Geraden in einem gegebenen Verhältnis stehen, ist ein Kegelschnitt	181
5. Die Tangenten von einem Punkte O und seine Verbindungsgeraden mit den Brennpunkten des Kegelschnitts bilden Winkel, deren Halbierungslinien zusammenfallen	181
6. Ein Kegelschnitt ist durch seine beiden Brennpunkte und eine Tangente vollständig bestimmt	181
7. Ort der Fußpunkte der aus den Brennpunkten auf die Tangenten gefällten Lote	182
Bewegt sich ein rechter Winkel mit seinem Scheitel auf der Peripherie eines Kreises derart, daß der eine Schenkel durch einen festen Punkt geht, so umhüllt der andere Schenkel einen Kegelschnitt	182
8. Tangentenstrecken, die unter gleichem Winkel erscheinen	182
9. Tangentenstrecken, die aus einem Brennpunkte unter konstantem Winkel erscheinen	183
45. Konfokale Kegelschnitte	183
46. Krümmungskreise der Kegelschnitte	184
Krümmungsmittelpunkt und Krümmungskreis	184
Die Evolute einer Kurve	184
Krümmung oder Krümmungsmaß	185
Schneidet die Normale eines Ellipsenpunktes A die Achsen in den Punkten E und F , so ist $\frac{AE}{AF} = \text{konst.} = \frac{b^2}{a^2}$	185
Die Normalen in zwei Ellipsenpunkten, die zugehörige Sehne und die Achsen der Ellipse umhüllen eine Parabel	186
Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes für einen Ellipsenpunkt	186
Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes für einen Hyperbelpunkt	187
Die Normalen in zwei Parabelpunkten, die zugehörige Parabelsehne und die Achse der Parabel umhüllen eine neue Parabel	188
Die Subnormale der Parabel ist gleich dem Parameter	188
Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes für einen Parabelpunkt	189
Weitere Konstruktionen von Krümmungsmittelpunkten für Ellipsenpunkte unter der Annahme, daß der Krümmungskreis aus dem Kegelschnitt durch Zentralprojektion entstanden sei	190—192
47. Konstruktion der Parabel; Gleichung der Parabel	193
Die Abszissen der Parabelpunkte verhalten sich wie die Quadrate ihrer Ordinaten. Parabelkonstruktion	194
Gleichung der Tangente, Subtangente und Subnormale	194—195
Gleichung der Parabel, wenn man zu Achsen des Koordinatensystems eine Tangente und den durch den Berührungspunkt gehenden Parabeldurchmesser wählt	195—196

	Seite
Die Strecke zwischen dem Halbierungspunkt einer Sehne und ihrem Pol wird durch den Parabelpunkt halbiert	195
Gewisse Strecken zweier Parabeltangente werden von einer dritten Tangente nach demselben Verhältnis geteilt	196
Satz von den Koordinaten der Parabelpunkte, wenn Tangente und zugehörige Achse die Koordinatenachsen bilden	196
Quadratur der Parabel	196—197
48. Ellipsenkonstruktionen :	
1. aus den Brennpunkten und der Achse a	197
2. Fadenkonstruktion. Tangente und Normale in einem Ellipsenpunkt	198
Mittelpunktsgleichung der Ellipse	199
Die Ordinate im Brennpunkt ist gleich dem Krümmungsradius der auf der Hauptachse gelegenen Scheitelpunkte	201
Krümmungsmittelpunkt des Scheitelpunktes der kleinen Achse	201
Gleichung der Tangente, Berechnung der Abszisse ihres Schnittpunktes mit der Abszissenachse	201—202
Gleichung der Normalen und Bestimmung der Abszisse ihres Schnittpunktes mit der Abszissenachse	202
Noch zwei Konstruktionen des Krümmungsmittelpunktes für einen beliebigen Ellipsenpunkt	202—203
Die Projektionen der normalen Strecke vom Kurvenpunkt bis zum Schnittpunkt mit der Abszissenachse auf die zugehörigen Brennstrahlen sind gleich $\frac{b^2}{a} = p$	203
Gleichung der Ellipse bezogen auf zwei konjugierte Durchmesser	204
49. Zwei Konstruktionen der Hyperbel	205
Konstruktion der Asymptoten; die gleichseitige Hyperbel	206
Eine dritte Hyperbelkonstruktion	206
Tangente und Normale eines Hyperbelpunktes	207
Die von einem Punkte an die Hyperbel gelegten Tangenten	207
Mittelpunktsgleichung der Hyperbel	208
Gleichung der Asymptoten und der gleichseitigen Hyperbel	208
Konstruktion der Hyperbel aus den Asymptoten und einem Kurvenpunkt	208
Konjugierte Durchmesser der Hyperbel	209
Relationen zwischen den Achsen und konjugierten Durchmessern der Hyperbel	209
Die Konjugierten-Parallelogramme haben sämtlich denselben Inhalt	
Gleichung der Hyperbel bezogen auf die Asymptoten	210
Gleichung der Hyperbel bezogen auf zwei konjugierte Durchmesser	210—212
50. Die Scheitelgleichungen der Kegelschnitte	212—214

IV. Kapitel.

Die orthogonale axonometrische und schiefe Projektion.

51. Einleitung. Bestimmung der Lage eines Punktes mittels des räumlichen Koordinatensystems	215
Begriff der Axonometrie	217
52. Pohlkes Fundamentalsatz	217
Zwei Aufgaben :	
1. Darstellung der Projektionen eines Würfels aus der Kantenlänge und den Richtungen der ersten Kantenprojektionen	217

	Seite
2. Ermittlung des Würfels aus den Längen und Richtungen der ersten Kantenprojektionen	219
53. Das Entwerfen von rechtwinkligen, axonometrischen Projektionen	
Zwei Verfahren	221
Die Verkürzungs- oder Achsenmaßstäbe	223
Die trimetrische, isometrische und dimetrische Projektion	226
Die hypothetische Vergrößerung	227
Darstellung einer Treppe	228
Die schiefe Projektion.	
54. Die XZ-Ebene oder eine Parallelebene als Bildebene	230
Sehstrahlen; das Verkürzungsverhältnis	231
Das Projektionsdreieck; die schiefe Projektion ist bestimmt durch Angabe der α -Achse und eines beliebigen Projektionsdreiecks	232
Wahl der Verkürzungsverhältnisse; die Kavalierverspektive	232
55. Darstellung von Punkten	232
56. Darstellung von Geraden	233
Ermittlung der wahren Größe einer durch ihre Projektionen gegebenen Geraden	235
Mehrere Lösungen	235—236
57. Darstellung einer Ebene	236
Ermittlung der Spurgeraden einer Ebene	237
Ermittlung der wahren Größe einer Ebene	238
Zwei Lösungen	238—240
58. Lot aus einem gegebenen Punkt auf eine Ebene gefällt bzw. Senkrechte in einem Punkte einer Ebene	240
Bestimmung der wahren Länge des Lotes	241
59. Darstellung von Körpern	242
Darstellung eines prismatischen Körpers und eines geraden Kreiskegels in schräger Lage zur Grundriß- und Bildebene	244
Darstellung eines sechsseitigen Prismas	244
Darstellung eines geraden Kreiskegels	244
Darstellung einer fünfseitigen Pyramide	245
Darstellung eines Ikosaeders	246
60. Darstellung eines scheinrechten Bogens	247
61. Darstellung eines Haussockels mit Kellerfenster	250
62. Projektion eines schiefen kreiszylindrischen Bogens in einer freistehenden, geradflüchtigen Mauer	251
63. Projektion einer Kugelnische in einer geradflüchtigen Mauer	255
64. Projektion eines kugelförmigen Hängkuppelgewölbes von quadratischer Grundform	257
65. Projektion des Portals einer Unterführung mit schrägen, lotrechten Böschungsfügeln	261

V. Kapitel.

Orthogonale Projektionen von Ebenen und Körpern. Zylinder, Kegel, Kugel. Ebene- und Raumkurven. Durchdringungen von Kugel-, Zylinder- und Kegelflächen.

66. Darstellung einer Ebene. Darstellung von in der Ebene gelegenen Punkten, Falllinien und Hauptlinien	263
Die wahre Größe einer gegebenen Ebene	264

	Seite
Die Projektionen von Geraden, die senkrecht auf einer gegebenen Ebene stehen	265
67. Darstellung eines Körpers; der wahre und der scheinbare Umriss eines Körpers	265
Der wahre Umriss ist der Ort derjenigen Punkte, deren Tangential-ebenen der Projektionsrichtung parallel sind	266
Die Generatrix oder Erzeugende und die Leitlinie	266
68. Der gerade Kreiszyylinder, ebener Schnitt desselben	266
Abwicklung des Zylinders; Rektifikation einer Kurve, insbesondere des Kreises	268
Abwicklung der Schnittkurve; Eigenschaften derselben	269
69. Entstehung einer ebenen Kurve	269
Benachbarte oder konsekutive Punkte: Kurvenelement	270
Stetige und unstetige Kurven	270
Benachbarte oder konsekutive Tangenten; Kontingenzwinkel	271
Gewöhnlicher Kurvenpunkt; Wendepunkt	272
Rückkehrpunkt, Schnabelspitze, Doppelpunkt	272
70. Krümmung einer Kurve in einem Punkte	272
Die mittlere Krümmung eines Kurvenbogens	273
Berührung zweiter Ordnung	274
Evolute und Evolvente	275
Verhalten der Krümmung im Wendepunkt, Rückkehrpunkt und der Schnabelspitze	276
71. Entstehung einer Raumkurve	277
Tangente und Normalebene	277
Maß der ersten Krümmung, Biegung oder Flexion der Kurve	278
Radius der ersten Krümmung	278
Die Schmiegungebene	278
Hauptnormale und Binormale	278
Die zweite Krümmung oder die Torsion der Kurve	279
Torsionsradius	279
72. Die Enveloppe; abwickelbare Flächen	280
Die Charakteristik einer Fläche	280
Die Enveloppe — der Ort aller Charakteristiken	280
Die Rückkehrkante der Enveloppe	280
Die abwickelbare Fläche	281
Die Erzeugenden der abwickelbaren Fläche	281
Größen, die bei der Abwicklung erhalten bleiben	282
Satz vom Krümmungsradius einer abgewickelten Kurve	283
73. Die geodätischen Linien einer abwickelbaren Fläche	283
74. Fortsetzung des Abschnitts 68	284
Eigenschaften der abgewickelten Schnittkurve	284
Ermittlung von Krümmungsradien derselben	284
Konstruktion der Tangenten dieser Kurve	284
75. Projektionen, Schnitte und Abwicklung eines schiefen Kreis- zylinders	284
Ermittlung der Schnittkurve	285
Die wahre Größe des Schnittes	286
Der Mantel des Zylinders	287
Übertragung der Schnittfigur in den Mantel	288
Inhalt der Mantelfläche	289
76. Projektion, ebener Schnitt und Abwicklung des geraden Kreis- kegels	289

	Seite
Ermittlung der Schnittkurve	289
Die wahre Größe der Schnittfläche	291
Der Mantel des Kegels	292
Übertragung der Schnittkurve in den abgewickelten Mantel; Eigenschaften derselben	292
Die geodätische Linie auf der Kegelfläche	293
77. Projektion, Schnitt und Abwicklung eines schiefen Kreiskegels	293
Wahre Größe des Schnittes	294
Die Mantelfläche des schiefen Kegels	294
Übertragung der Schnittkurve in den Mantel	295
Eigenschaften der abgewickelten Ellipse	295
78. Die Achsen und Wechselschnitte eines schiefen Kreiskegels	295
Darstellung eines Wechselschnittes mittels einer Kugel	297
Lehrsatz	299
79. Ebener Schnitt einer Kugel	299

Durchdringungen von Zylinder-, Kugel- und Kegelflächen.

80. Allgemeines über Durchdringungen	300
81. Durchdringung zweier schiefen Kreiszyylinder, deren Grundkreise in der Grundrißebene liegen	300
82. Durchdringung eines schiefen Kreiskegels mit einem schiefen Kreiszyylinder	303
83. Durchdringung zweier Kegelflächen	304
Lehrsatz: Haben zwei Kegelflächen einen Kegelschnitt gemein, so schneiden sie sich noch in einem weiteren Kegelschnitt	306
Durchdringung eines schiefen Kreiskegels mit einem aufrechten Kreiszyylinder von gleicher Grundfläche	307
84. Ein schiefer Kreiskegel durchdringt eine Kugel	308
85. Durchdringung eines schräg stehenden geraden Kreiszyinders mit einer Kugel	309
86. Projektion eines Tonnengewölbes mit einer zylindrischen Stichkappe	
87. Projektion einer Kreuzkappe über einer Veranda	312
88. Projektion eines Oberlichtes in einem $\frac{1}{2}$ Stein starken Tonnengewölbe	316
89. Projektionen von Kernbögen	316

I. Kapitel.

Kongruenz, Ähnlichkeit, Affinität und Perspektivität ebener Figuren.

1. Außerhalb der Ebene \mathcal{E} einer im Raume willkürlich gelegenen Figur sei ein Punkt O festgelegt und dieser mit allen Punkten ihres Umrisses durch gerade Linien verbunden; wird dieses Bündel von Linien, die wir uns unendlich lang denken, durch eine zweite Ebene \mathcal{P} , die sich nicht mit \mathcal{E} decken, sonst aber beliebig im Raume festgelegt sein mag, geschnitten, so wird hieraus auf der Ebene \mathcal{P} eine neue Figur resultieren, deren Punkte, Gerade und Winkel denen der gegebenen eindeutig entsprechen. Die Figur in \mathcal{P} bezeichnen wir als zentrale Projektion der Figur in \mathcal{E} , den Punkt O als Projektionszentrum, die Schnittgerade \mathcal{S} der beiden Ebenen, der Originalebene \mathcal{E} und der Projektionsebene \mathcal{P} , als Projektionsachse und die durch das Zentrum gehenden Strahlen als projizierende Strahlen. Die Figur in \mathcal{P} ist aus der in \mathcal{E} abgeleitet worden oder, wie wir

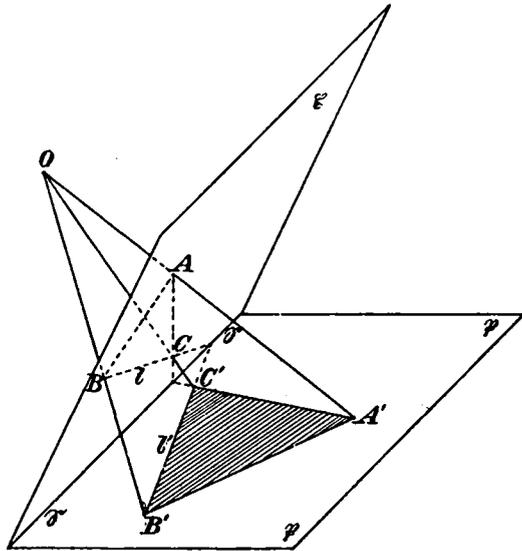


Fig. 1.

auch sagen können, die Originalfigur in \mathcal{E} ist abgebildet worden; das hierbei zur Anwendung gelangte Verfahren heißt Zentralprojektion; Originalfigur (vgl. Fig. 1) ABC und Abbildung $A'B'C'$ sind projektive Figuren in perspektiver Lage oder perspektive Figuren. Beide Figuren entsprechen sich in der Weise, daß jedem Eckpunkt ein Eckpunkt, jeder Seite eine Seite und

jedem Winkel der Originalfigur ein Winkel entspricht, doch sind im allgemeinen die Längen und Winkel in der Projektionsebene von den bezüglichen Längen und Winkeln der Originalebene verschieden. Was von den Punkten und Geraden der Figur gesagt worden ist, gilt zugleich auch von den übrigen Punkten und Geraden der Ebenen. Auch die Ebenen entsprechen sich, d. h. jedem Punkte P der Originalebene entspricht ein Punkt P' der Projektions- oder Bildebene, jeder Geraden l eine Gerade l' und umgekehrt. Nur die Projektionsachse entspricht sich selbst und ebenso jeder Punkt derselben, auch müssen sich zwei entsprechende Gerade auf der Achse schneiden. Einer Parallelen zur Achse entspricht in der Bildebene wieder eine Parallele, der Schnittpunkt mit der Achse liegt in diesem Falle im Unendlichen. Daß das Entsprechen der Ebenen ebenfalls ein eindeutiges ist, wird später bewiesen werden.

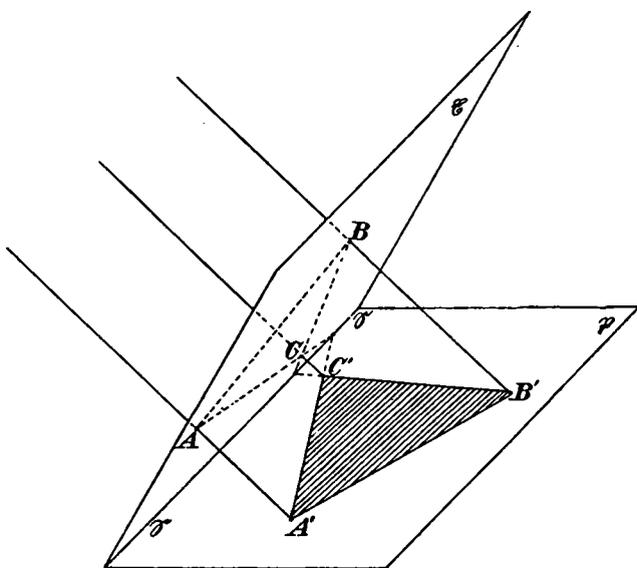


Fig. 2.

2. Es drängt sich uns die Frage auf: Ist nicht zu einer gegebenen Figur der Originalebene \mathcal{G} für eine gewisse Lage des Projektionszentrums und der Bildebene \mathcal{B} das Bild derselben konstruierbar? Ehe wir zur Beantwortung dieser Frage schreiten, seien einige andere einfachere Aufgaben behandelt, durch deren Erledigung das Verständnis für jene bedeutend gefördert werden wird.

Die Beziehungen zwischen den beiden Ebenen hören auch dann nicht auf zu bestehen, wenn wir die Lage der Bildebene oder die des Projektionszentrums zur Originalebene ändern. Möglich sind folgende Lagen:

a) Behalten die Ebenen \mathcal{G} und \mathcal{B} ihre Lagen bei, ändert sich aber die des Projektionszentrums, indem letzteres sich immer

mehr und mehr von der Originalebene entfernt, so werden die projizierenden Strahlen in ihrer Richtung immer weniger voneinander abweichen; ist schließlich das Zentrum ins Unendliche gerückt, dann sind die projizierenden Strahlen parallel, aus der Zentralprojektion ist eine Parallelprojektion geworden. Dieses Abbildungsverfahren ist dasjenige, welches allgemein in fast allen Zweigen der Technik bei der Darstellung von Körpern angewandt wird. Wir erkennen, daß von dem ursprünglichen Gebilde in \mathcal{E} und dem abgeleiteten in \mathfrak{P} (Fig. 2) das gleiche gilt, was unter 1. von den Figuren ABC und $A'B'C'$ gesagt wurde: „Die eine Figur ist der anderen eindeutig zugeordnet.“ Dieses Abbildungsverfahren wird als schiefe Parallelprojektion bezeichnet, wenn die projizierenden Strahlen die Projektionsebene unter einem spitzen Winkel schneiden, als orthogonale oder rechtwinklige Parallelprojektion oder Projektion, wenn der Neigungswinkel der projizierenden Strahlen gegen die Projektionsebene $= 90^\circ$ ist. Die geometrische Abhängigkeit der Figuren heißt Affinität bei affiner Lage (perspektive Affinität), die Schnittgerade \mathcal{S} der Ebenen \mathcal{E} und \mathfrak{P} heißt Affinitätsachse.

b) Wir kehren wieder zu Figur 1 zurück und machen folgende Annahmen: Belassen wir das Zentrum an seiner Stelle, ändern aber jetzt die

Neigung der beiden Ebenen \mathcal{E} und \mathfrak{P} , so wird unter den unendlich vielen möglichen Lagen der Ebenen sich eine besonders auszeichnen, nämlich die, bei der die Schnittgerade beider im Unendlichen liegt; die Ebenen \mathcal{E} und \mathfrak{P} sind in diesem Falle parallel (Fig. 3). Auch in dieser Lage der Ebenen und des Zentrums entsprechen sich die Ebenen bzw. zugeordnete Figuren eindeutig. Die

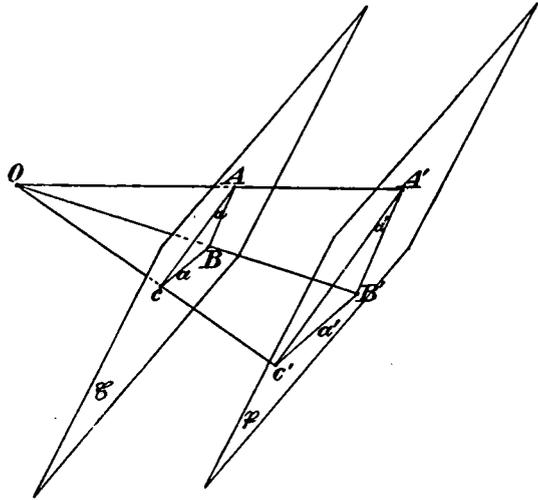


Fig. 3.

Abhängigkeit, die zwischen zwei sich entsprechenden Figuren obwaltet, heißt Ähnlichkeit bei ähnlicher Lage (perspektive Ähnlichkeit).

c) Schließlich ist noch eine Lage denkbar, bei der das Projektionszentrum und die Schnittgerade der beiden Ebenen zugleich im Unendlichen liegen; auch in diesem Falle entsprechen sich die Figuren, die in Figur 4 dargestellt sind, eindeutig. Wie auch die projizierenden Strahlen, die parallel laufen, zur Ebene \mathfrak{P} gerichtet

sein mögen, immer ist die abgeleitete Figur der ursprünglichen kongruent. Auch bei dem unter a) geschilderten Abbildungsverfahren ist für eine bestimmte Richtung der projizierenden Strahlen die abgeleitete Figur der abzubildenden kongruent. Dies trifft zu bei der Annahme, daß die projizierenden Strahlen senkrecht zu einer der Ebenen stehen, die den Winkel der Ebene \mathcal{E} und \mathfrak{P} und dessen Nebenwinkel halbieren. Ähnliche Figuren, wie auch kongruente Figuren können daher ebenso wie affine und perspektive Figuren als projektiv bezeichnet werden und ihre gegenseitige Lage als perspektiv, wenn sie nach den unter b) und a) erläuterten Annahmen ähnlich oder affin ist.

3. Kongruenz ebener Figuren. Bei Betrachtung der Figur 4, die das Abbildungsverfahren veranschaulicht, bei welchem das Bild in \mathfrak{P} der ursprünglichen Figur in \mathcal{E} stets kongruent sein muß, lassen sich ohne weiteres die Eigenschaften von zwei einander entsprechenden Figuren angeben:

1. Entsprechende Gerade sind parallel und gleich.
2. Parallelen Geraden a und b entsprechen wieder parallele Gerade a' und b' , mithin auch:
 - 2a. Einem Winkel α entspricht stets ein ihm gleicher Winkel α' .
3. Das Verhältnis irgend zweier entsprechender Strecken ist konstant, ebenso das zweier entsprechender Flächen, nämlich gleich 1.

Besitzen zwei Figuren die beiden letzten Eigenschaften, so sind sie als kongruent zu bezeichnen, ist aber auch die erste Eigenschaft erfüllt, so befinden sie sich zugleich in kongruenter oder perspektiver Lage. Kongruente Figuren haben hiernach gleiche Gestalt und gleichen Flächeninhalt, man kann sie stets so aufeinanderlegen, daß die eine die andere vollständig bedeckt, beide also gänzlich in eine zusammenfallen. Die Ecken, Winkel und Seiten, die bei einer solchen Lage sich decken bzw. zusammenfallen, nennt man homolog. Das Zeichen der Kongruenz ist \cong [kongruent = gleich (=) und ähnlich (\sim)].

Wird die Ebene \mathcal{E} parallel zu sich selbst verschoben in der Weise, daß bei der Bewegung, der die Ebene unterworfen werden muß, um sie aus einer Lage in eine parallele überzuführen, irgend ein Punkt von \mathfrak{P} eine Gerade oder eine ebene oder räumliche Kurve beschreibt, und jeder andere Punkt der Ebene \mathfrak{P} einen parallelen, gleich langen Weg zurücklegt, so wird die perspektive Lage zweier entsprechender Figuren nicht aufgehoben, auch nicht für den Fall, daß die Ebenen auf die soeben beschriebene Art zur Deckung gebracht werden. Das geschilderte Verfahren der Überführung einer Ebene in eine parallele Lage soll in Zukunft mit „Parallelverschiebung“ bezeichnet werden. Bei der Vereinigung beider Ebenen fallen auch die projizierenden Strahlen in \mathcal{E} hinein und die Strahlen, die je zwei entsprechende Punkte verbinden, sind sämtlich parallel und gleich lang. Es ist einleuchtend, daß zu jedem Punkt x der Ebene der entsprechende x' in gleicher Ebene ermittelt werden kann, wenn man ein Paar entsprechender

Punkte, z. B. a und a' , kennt; man hat nur nötig, durch den Punkt x die Parallele zu aa' zu ziehen und diese gleich aa' zu machen, dann ist der Endpunkt x' der gesuchte Punkt (Fig. 4a). Die perspektive Lage der Figuren wird jedoch aufgehoben, wenn die Ebene \mathfrak{B} nicht nur einer Parallelverschiebung, sondern auch einer drehenden Bewegung um eine zur Ebene senkrechte Gerade als

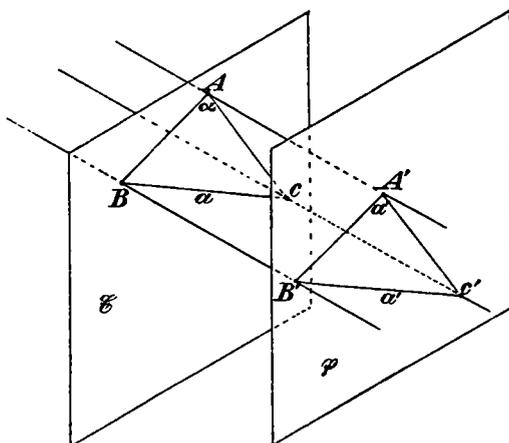


Fig. 4.

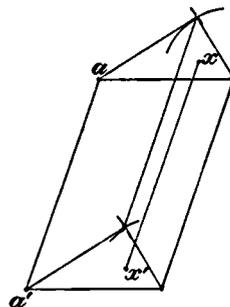


Fig. 4a.

Rotationsachse unterworfen wird. Zwei in einer Ebene befindliche Dreiecke sind kongruent, wenn sie

- a) in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel,
- b) in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln,
- c) in den drei Seiten,
- d) in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren unter ihnen

übereinstimmen.

4. Ähnlichkeit ebener Figuren. Sind die Ebenen \mathfrak{E} und \mathfrak{B} parallele Ebenen, liegt aber das Zentrum nicht im Unendlichen, so heißt die zwischen Bild und Originalfigur bestehende Abhängigkeit Ähnlichkeit bei ähnlicher Lage (vgl. Abschnitt 2). Zwei so einander entsprechende und gelegene Figuren besitzen folgende Eigenschaften (vgl. Fig. 3):

1. Entsprechende Gerade sind parallel, aber ungleich lang; parallelen Geraden l und l_1 der Originalenebene entsprechen wieder parallele Gerade l' und l'_1 , mithin:
2. Einem Winkel α entspricht stets ein gleicher Winkel α' .
3. Das Verhältnis je zweier entsprechender Längen $l:l'$ oder $l_1:l'_1$ ist konstant, nämlich immer gleich dem Verhältnis von $e:e_1$, wenn e die Entfernung des Projektionszentrums von der Ebene \mathfrak{E} , e_1 die von der Ebene \mathfrak{B} bedeutet.

Zwei Figuren sind ähnlich, wenn die beiden letzten Eigenschaften erfüllt sind, wenn also alle Winkel der einen der Reihe

nach den Winkeln der andern gleich, alle sich entsprechenden bzw. homologen, d. h. zu den gleichen Winkeln gleichliegenden Seiten proportional sind. Das Zeichen für diese Abhängigkeit, also das Zeichen der Ähnlichkeit ist \sim . Ist nun aber für zwei ähnliche Figuren auch noch die erste Eigenschaft erfüllt, so befinden sie sich zugleich in ähnlicher Lage.

Aus der Originalfigur und dem Bild findet man das Zentrum, das Ähnlichkeitszentrum, indem man die sich entsprechenden Punkte der Figuren miteinander verbindet und bis zum Schnitt in O verlängert; zur Bestimmung des Zentrums sind offenbar nicht alle projizierenden Strahlen erforderlich, es brauchen nur zwei einander entsprechende Gerade AB und $A'B'$ gegeben zu sein, um es zu finden ($O = AA' \times BB'$). Wird das Projektionszentrum verlegt,

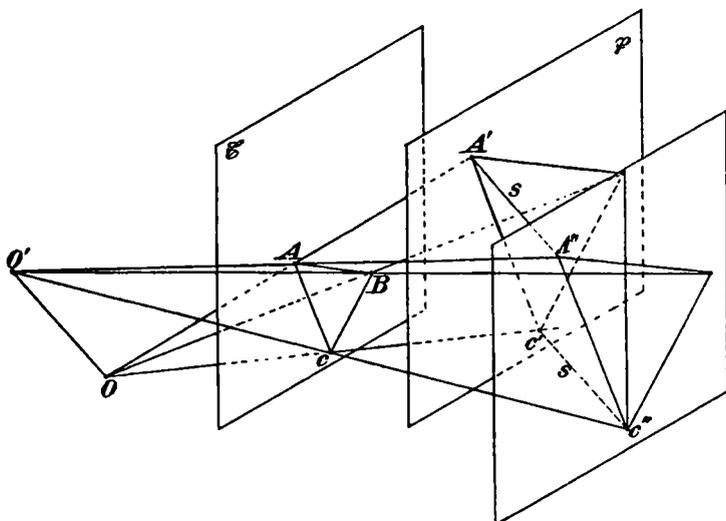


Fig. 5.

so entsteht zu der Originalfigur ein neues Bild; wird die Bildebene \mathfrak{P} parallel verschoben, so ist damit die Ähnlichkeit wie auch die ähnliche Lage nicht aufgehoben worden, nur ist das Zentrum O für diese neue Lage nicht mehr das Ähnlichkeitszentrum; es ist ein anderes Zentrum O' an seine Stelle getreten, das erhalten wird durch den Schnitt von solchen Strahlen, die zugleich die Verbindungslinie zweier sich entsprechender Punkte bilden. Wenn bei einer solchen Parallelverschiebung irgend ein Bildpunkt C' nach C'' gelangt (Fig. 5) und s die Länge des von C' zurückgelegten Weges, der geradlinig angenommen sei, bedeutet, so ist auch die Strecke OO' der Strecke s parallel und ihre Länge bestimmt sich aus der Formel

$$OO' = \frac{s \cdot e}{e_1 - e},$$

denn die Dreiecke OCO' und $C'CC''$ sind ähnlich, mithin

$$OO' : C'C''(s) = OC : CC',$$

es ist aber $OC : CC' = e : e_1 - e$, folglich

$$OO' : s = e : e_1 - e,$$

oder

$$OO' = \frac{s \cdot e}{e_1 - e}.$$

Die Beziehungen zwischen zwei ähnlich und ähnlich gelegenen Figuren bleiben aber auch dann erhalten, wenn wir die Ebene \mathfrak{P} durch eine Parallelverschiebung mit \mathfrak{E} vereinigen (Fig. 6); dann

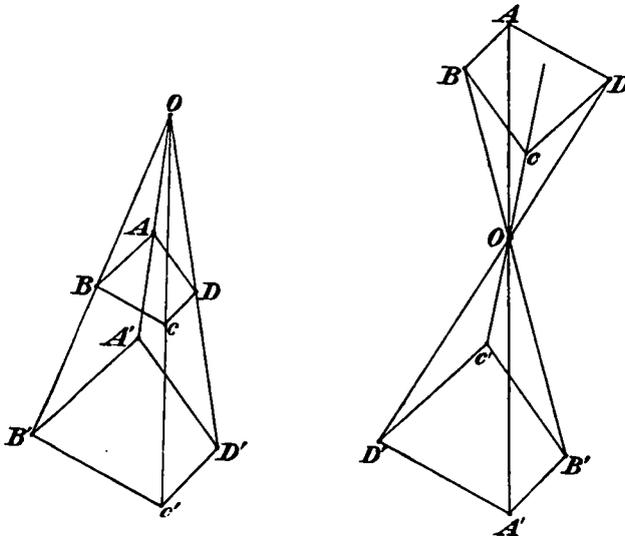


Fig. 6.

fallen die projizierenden Strahlen und das Ähnlichkeitszentrum ebenfalls in die Ebene \mathfrak{E} . Zwei ähnliche und ähnlich gelegene Figuren in einer Ebene können daher ebenfalls als perspektive Gebilde angesehen werden, die eine entspricht der andern eindeutig und aus der einen kann die andere abgeleitet werden auf Grund der obengenannten drei Eigenschaften, die unverändert auch für solche Figuren bestehen. Die Aufgabe, zu einem Punkt x den entsprechenden x' zu ermitteln, ist lösbar, wenn man zwei sich entsprechende Punkte und das Zentrum, oder zwei sich entsprechende Strecken kennt.

Wird die Ebene \mathfrak{P} so gewählt, daß das Projektionszentrum zwischen ihr und der Originalebene liegt, dann befindet sich auch das Projektionszentrum nach der Vereinigung der beiden Ebenen zwischen den beiden Figuren. Je nachdem nun das Ähnlichkeits-

zentrum außerhalb oder innerhalb eines jeden Paares der parallelen Polygonseiten liegt, heißt es ein äußeres oder ein inneres.

Denken wir uns an Stelle einer polygonalen Figur einen Kreis (Fig. 7), so ist die ähnliche Figur stets wieder ein Kreis. Zu zwei Kreisen k und k' in der Ebene lassen sich zugleich zwei Ähnlichkeitszentren bestimmen, es sind dies die beiden Punkte der Zentrale, in denen sich die Verbindungslinien der Endpunkte aller parallelen Radienpaare schneiden. Die Mittelpunkte der Kreise M und M' entsprechen einander. Zieht man von den Mittelpunkten aus parallele Radien nach derselben Richtung, so schneiden sich die Verbindungslinien ihrer Endpunkte in dem äußeren Ähnlichkeitspunkt O , in dem sich auch die äußeren Tangenten schneiden. Die projizierenden Strahlen, die die Endpunkte der von den Mittelpunkten aus nach entgegengesetzten Richtungen gezogenen parallelen Radien verbinden, schneiden sich in O' , dem inneren Ähnlichkeitspunkt, durch den auch die inneren Tangenten der

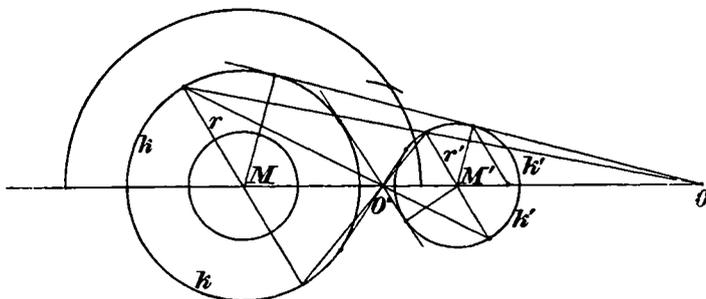


Fig. 7.

Kreise gehen; jeder der beiden Punkte kann als Ähnlichkeitszentrum gewählt werden, jeder teilt nämlich die Strecke MM' nach dem Verhältnis $r:r'$. Zwei Kreise in einer Ebene sind hiernach stets zwei ähnliche Figuren, auch befinden sie sich stets in ähnlicher (perspektiver) Lage und zwar, wie eben erörtert wurde, in doppelter Art.

Von den äußeren Ähnlichkeitspunkten dreier Kreise gilt folgender Satz:

„Die drei äußeren Ähnlichkeitspunkte, welche drei Kreise paarweise bestimmen, liegen auf einer geraden Linie.“ (Satz des Monge.) (Fig. 8.)

Es ist nämlich (vgl. Fig. 7)

$$M_1 O_3 : M_2 O_3 = r_1 : r_2$$

$$M_2 O_1 : M_3 O_1 = r_2 : r_3$$

$$M_3 O_2 : M_1 O_2 = r_3 : r_1$$

$$M_1 O_3 \cdot M_2 O_1 \cdot M_3 O_2 = M_1 O_2 \cdot M_3 O_1 \cdot M_2 O_3 .$$

Die Punkte O_1, O_2, O_3 liegen zugleich auf den Verlängerungen der Seiten des Dreiecks M_1, M_2, M_3 ; da sie, wie eben bewiesen, auf diesen solche Abschnitte bestimmen, daß die Produkte aus je drei nicht anstoßenden gleich sind, so liegen die drei Punkte in einer Geraden. Denn, schneidet eine Transversale die Seiten eines Dreiecks oder ihre Verlängerungen, so sind die Produkte aus je drei nicht anstoßenden Abschnitten der Seiten einander gleich (Satz des Menelaos). Umgekehrt, bestimmen drei Punkte auf den Verlängerungen der Seiten eines Dreiecks solche Abschnitte, daß die

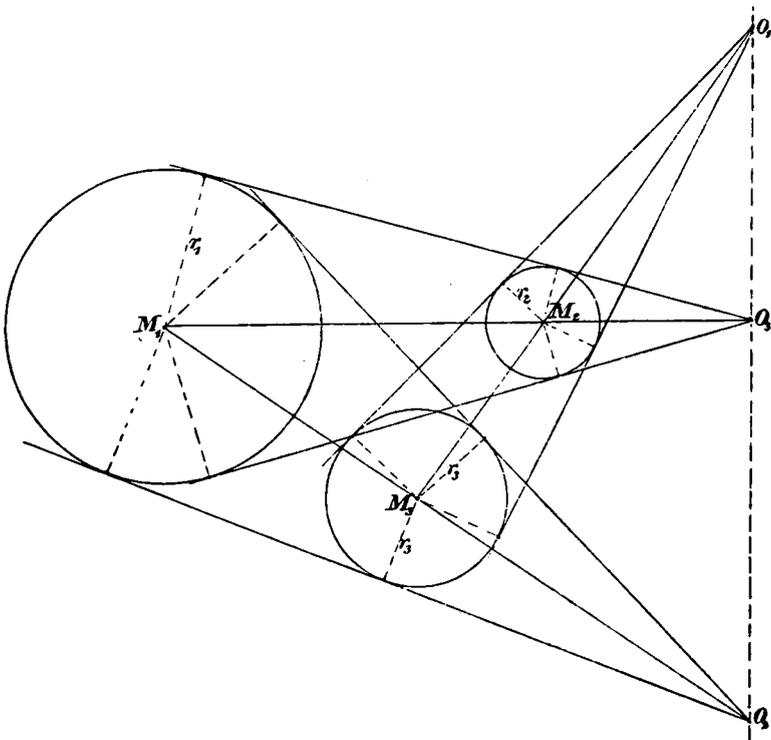


Fig. 8.

Produkte aus je drei nicht anstoßenden Abschnitten gleich sind, so liegen die Punkte auf einer Geraden. Der Satz des Monge könnte auch wie folgt ausgesprochen werden: Konstruiert man zu einem Kreise M_3 mittels eines Zentrums O_1 den Kreis M_2 , ferner zu M_3 mittels des Zentrums O_2 den Kreis M_1 , dann sind auch die Kreise M_2 und M_1 ähnlich und ähnlich gelegen, und das zugehörige äußere Ähnlichkeitszentrum liegt mit den beiden ersten in gerader Linie. Da aber die Ähnlichkeit in der Ebene immer als ein spezieller Fall der Ähnlichkeit im Raume anzusehen ist, der eben ausgesprochene Satz sich nicht nur für Kreise, sondern auch

für andere ebene Figuren beweisen läßt, so wird sich auch für die Ähnlichkeit im Raume ein ganz ähnlicher Satz angeben lassen, dieser lautet:

„Sind im Raume zwei Figuren F_1 und F_2 zu einer dritten Figur ähnlich und ähnlich gelegen, so sind sie es auch zueinander; und das zugehörige Ähnlichkeitszentrum liegt mit den beiden andern in gerader Linie.“

Beweis: Es sei (Fig. 9) die Figur F mit F_1 und außerdem F mit F_2 im Raume ähnlich und ähnlich gelegen; die zugehörigen

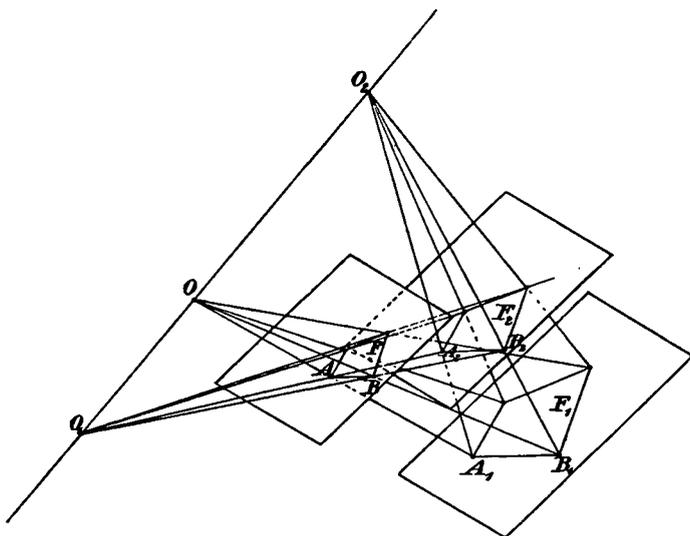


Fig. 9.

Zentren seien bzw. O und O_1 . Durch zwei entsprechende Seiten von F_1 und F_2 , z. B. A_1B_1 und A_2B_2 , läßt sich eine Ebene legen, da diese Seiten parallel sind; nun liegt aber der projizierende Strahl A_1A_2 nicht bloß in dieser Ebene, sondern zugleich auch in der Ebene des Dreiecks AOO_1 , in der auch die Verbindungslinie der Zentren O und O_1 liegt, mithin muß auch A_1A_2 und ebenso B_1B_2 usw. die Gerade OO_1 schneiden, also liegt O_2 mit O und O_1 in gerader Linie.

Affinität ebener Figuren.

5. Affine und affin gelegene Figuren im Raume. Sind Bild- oder Projektionsebene \mathfrak{B} und Originalebene \mathfrak{C} nicht parallel, und denken wir durch alle Punkte und Gerade einer in der Originalebene \mathfrak{C} gelegenen Figur A, B, C, \dots parallel zu einer fest angenommenen Richtung projizierende Strahlen bzw. Ebenen gelegt und letztere von der Ebene \mathfrak{B} geschnitten, so entsteht in \mathfrak{B} eine zweite Figur A', B', C', \dots , die der Figur in \mathfrak{C} eindeutig zugeordnet ist. Die letztere ist aus der ersteren abgeleitet worden oder

die Figur in \mathcal{E} ist auf die Ebene \mathcal{B} projiziert worden mittels eines im Unendlichen befindlichen Zentrums; wir bezeichnen dieses Abbildungsverfahren als Parallelprojektion (vgl. Abschnitt 2), es heißt allgemein schiefe Parallelprojektion, doch für den besonderen Fall, daß die projizierenden Strahlen zur Projektionsebene senkrecht stehen, rechtwinklige oder orthogonale Parallelprojektion. Für eine bestimmte Projektionsrichtung und eine bestimmte Lage der Ebenen \mathcal{E} und \mathcal{B} gibt es zu einer Figur in \mathcal{E} nur eine Figur in \mathcal{B} , die in allen Stücken der in \mathcal{E} zugeordnet ist. Die geometrische Abhängigkeit so entsprechender Figuren heißt Affinität bei affiner Lage, die Figuren selbst affine Figuren in affiner Lage, die projizierenden Strahlen Affinitätsstrahlen, und die Schnittgerade der Ebenen \mathcal{E} und \mathcal{B} Affinitätsachse.

Affine und affin gelegene Figuren entsprechen sich folgendermaßen:

- 1a. Einer Geraden entspricht stets wieder nur eine Gerade oder drei Punkten in gerader Linie entsprechen wieder drei Punkte in gerader Linie.
- 1b. Beide, die gegebene Gerade und ihr Bild, schneiden sich in einem Punkte der Affinitätsachse, also entspricht jeder Punkt der Achse sich selbst.
- 1c. Einer Parallelen zur Achse in \mathcal{E} entspricht wieder eine Parallele in \mathcal{B} .
2. Das Verhältnis je zweier Strecken einer Geraden in \mathcal{E} ist dem ihrer Bilder gleich.

Zwei sich entsprechende Gerade schneiden sich stets in einem Punkte der Achse; daher liegen beide in einer Ebene, die der Projektionsrichtung parallel sein muß.

Solche Gerade können daher immer als die Schenkel eines ebenen Winkels angesehen werden. Werden auf dem einen Schenkel (Fig. 10) zwei beliebige Strecken a und b gewählt und, wie es bei dieser Projektionsmethode der Fall ist, durch die Endpunkte Parallele gezogen, die in der projizierenden Ebene der Geraden liegen, so schneiden diese Parallelen vom zweiten Schenkel, d. i. dem Bild des ersten Schenkels Strecken heraus, die den ersteren proportional sind. Parallelen Geraden können immer nur parallele Gerade entsprechen, und es ist auch das Verhältnis je zweier paralleler Strecken dem ihrer Bilder gleich. Um das zu beweisen, wollen wir die Strecke AB in \mathcal{E} (Fig. 11) um $BE = CD$ verlängern, dann ist $BEDC$ ein Parallelogramm, dem in \mathcal{B} wieder ein Parallelogramm entspricht, mithin ist auch $C'D' \parallel$ und $= B'C'$, also ist auch $AB : CD = A'B' : C'D'$.

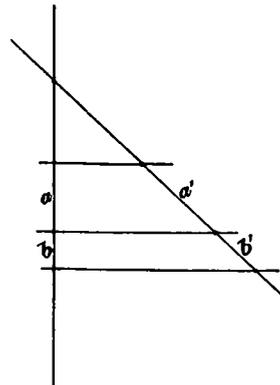


Fig. 10.

3. Einem Winkel α entspricht im allgemeinen ein ungleicher Winkel α' ; doch gibt es, wenn der Winkel α um den Scheitel in seiner Ebene gedreht wird, immer eine Lage, in der dem Winkel α ein gleicher Winkel α' entspricht. Dieses trifft auch dann zu, wenn $\sphericalangle \alpha = 90^\circ$ ist.

a) Der Winkel α ist $< 90^\circ$. Es sei auch die Ebene \mathcal{E} konstruiert, die den Winkel der Ebenen \mathcal{E} und \mathcal{P} halbiert, dann läßt sich zum Punkt S' , dem Bilde des Scheitels S , der zu \mathcal{E} symmetrisch gelegene Punkt S'' , der auch in der Ebene \mathcal{E} liegen muß, angeben. Angenommen, es seien auch die Punkte U und V gegeben, in welchen die Schenkel des $\sphericalangle \alpha$ die Achse schneiden für den Fall, daß der Winkel

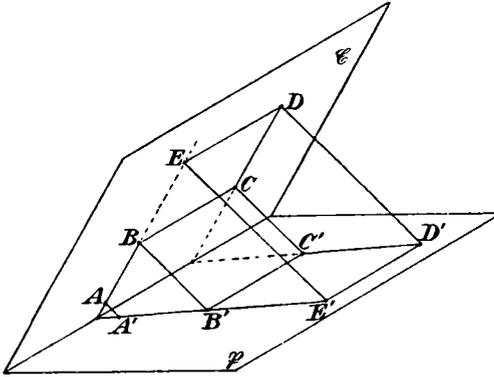


Fig. 11.

$$USV = US'V = US''V$$

ist, dann liegen S und S'' auf einem Kreise der UV als Sehne und dessen

Zentriwinkel über $UV = 2\alpha$ ist; dieser Kreis ist zu konstruieren. Die Konstruktion dieses Kreises für den Fall, daß es sich um affine Figuren einer Ebene handelt, ist im Abschnitt 6 gegeben (S. 15 unter a).

b) Der Winkel ist $= 90^\circ$. Um zu erkennen, daß es auch in diesem Falle die beschriebenen Lagen gibt, denke man sich zur Verbindungslinie SS' im Halbpunkt die senkrechte Ebene \mathcal{E} errichtet und um den Schnittpunkt derselben mit der Affinitätsachse eine Kugelfläche konstruiert, die beide Punkte S und S' enthält. Diese Kugel wird die Affinitätsachse in zwei Punkten U und V schneiden, deren Verbindungslinien mit S wie mit S' rechte Winkel einschließen. Es ist also $USV = US'V = 90^\circ$, denn diese Winkel sind Peripheriewinkel in größten Kugelkreisen über Kugeldurchmessern.

Figuren, die die genannten Eigenschaften besitzen, sind affin und affin gelegen; sind aber bei zwei Figuren alle Eigenschaften erfüllt bis auf 1b und 1c, so sind sie wohl als affin zu bezeichnen, doch befinden sie sich nicht in affiner Lage.

Analog dem am Schlusse des Absatzes 4 angeführten Satze läßt sich auch für affine Figuren folgender Satz beweisen:

„Sind zwei Figuren zu einer dritten Figur in bezug auf eine und dieselbe Achse affin und affin gelegen, so sind sie es auch zueinander.“

Es seien (Fig. 12) $A'B'$ und $A''B''$ aus AB hervorgegangen. Nun ist $AA' \parallel BB'$, $AA'' \parallel BB''$, folglich sind die Dreiecke $AA'A''$

und $BB'B''$ ähnlich und ähnlich gelegen, das Ähnlichkeitszentrum ist Punkt U der Affinitätsachse, in dem sich die drei Geraden AB , $A'B'$, $A''B''$ schneiden. Daher ist auch $A'A'' \parallel B'B''$ usw.

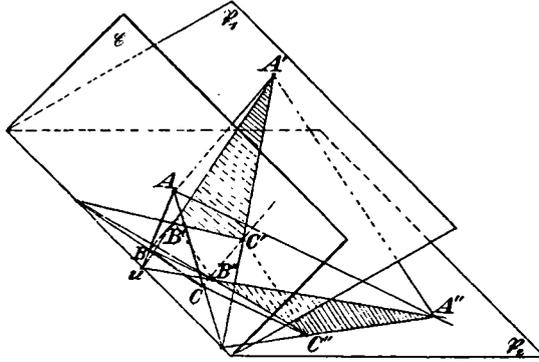


Fig. 12.

Dieser Satz, für den Raum bewiesen, gilt aber auch für affine und affin gelegene Figuren einer Ebene, zu welchen wir gelangen, wenn wir die Ebenen \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 durch Drehung um die Affinitätsachse mit der Ebene \mathcal{E} vereinigen. Es müßte jedoch bewiesen werden, daß den Figuren ihre projektivische Verwandtschaft nicht verloren geht, wenn die Vereinigung der drei Ebenen zu einer Ebene nach dem eben angedeuteten Verfahren stattfindet. Wir beweisen diese Behauptung dadurch, daß wir einer der Ebenen \mathfrak{P} durch Drehung um die Affinitätsachse nur eine andere Lage geben, sie also nicht sofort mit \mathcal{E} vereinigen und nachweisen, daß die in \mathfrak{P} gelegene Figur auch in dieser neuen Lage noch als affine und affin gelegene Figur zu der in \mathcal{E} angesehen werden darf. Wir nehmen, um das zu erkennen, für einen Augenblick die Affinitätsachse senkrecht zu unserer Zeichenebene an

(Fig. 13), so daß sie als Punkt O erscheint; dann erscheinen sämtliche Ebenen als gerade Linien, die sich im Punkte O schneiden. Wird

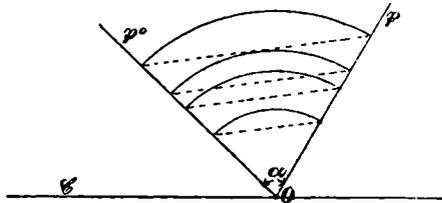


Fig. 13.

jetzt eine der Ebenen, z. B. \mathfrak{P} , um den Winkel α gedreht, so daß sie durch die Linie \mathfrak{P}^α gegeben ist, so hat bei dieser Drehung jeder Punkt einer in \mathfrak{P} gelegenen Figur einen Kreisbogen beschrieben, und die Sehnen aller Kreisbögen sind parallel; daher ist die Figur in \mathfrak{P} zu der in \mathfrak{P}^α affin und affin gelegen. \mathfrak{P} lag aber zu der Figur in \mathcal{E} affin, also ist auch nach vorigem Satz die Figur in \mathfrak{P}^α zu der in \mathcal{E} affin und affin gelegen. Hieraus folgt ohne weiteres:

„Affine und affin gelegene Figuren in affiner Lage bleiben in affiner Lage, wenn eine derselben um die Affinitätsachse beliebig gedreht wird, — also auch dann, wenn die Ebenen zu einer vereinigt werden.“

Bei dieser Vereinigung der Ebenen mit \mathcal{E} fallen selbstverständlich die projizierenden Strahlen ebenfalls in die Ebene \mathcal{E} und bilden in derselben, wie vorher im Raume, Büschel paralleler Geraden.

Affine und affin gelegene Figuren einer Ebene; die Ellipse.

6. Jede Ebene wird durch die Affinitätsachse in zwei Teile geteilt. Die Vereinigung einer Ebene \mathfrak{B} mit der Originalebene \mathcal{E} kann nun erstens in der Weise geschehen, daß der Teil von \mathfrak{B} , in dem sich das Bild der Figur in \mathcal{E} befindet, sich auf den die Originalfigur enthaltenden Teil von \mathcal{E} legt, oder aber zweitens, daß wir Ebene \mathfrak{B} in entgegengesetzter Richtung drehen, dann befinden sich nach der Vereinigung die entsprechenden Figuren auf verschiedenen Seiten der Affinitätsachse (Fig. 13).

Affine und affin gelegene Figuren einer Ebene besitzen nun, wie die räumlichen Figuren, alle im Abschnitte 5 unter 1—3 aufgezählten Eigenschaften. Insbesondere besitzen sie folgende:

1. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte sind parallel.
2. Entsprechende Gerade schneiden sich in einem Punkte der Achse, der sich selbst entspricht.
3. Das Verhältnis zweier Strecken einer Geraden ist gleich dem der affinen Strecken.
4. Parallelen Geraden in \mathcal{E} entsprechen wieder parallele Gerade in \mathfrak{B} .

Auf Grund dieser Beziehungen kann in einer Ebene zu einer gezeichneten Figur die affine und affin gelegene Figur ermittelt werden, wenn man zwei entsprechende Punkte und die Affinitätsachse kennt.

Wird umgekehrt durch Drehung einer Ebene um die Affinitätsachse wieder die räumliche Lage hergestellt, so befinden sich die Figuren ebenfalls in affiner Lage, d. h. die eine kann immer angesehen werden als die Parallelprojektion der andern.

Fundamentalkonstruktion. Zu der Figur $ABCDEFGH$ finde ich in der Ebene der Figur eine affine und affin gelegene, d. h. eine schiefe Parallelprojektion, wenn ich weiter wähle eine Affinitätsachse \mathfrak{A} und für einen Punkt der Figur, z. B. A , einen entsprechenden Punkt A' . Nun ist jeder andere Punkt der Projektion konstruierbar (vgl. die Fig. 14a und b); ich finde B' , indem ich AB bis zum Schnitt mit der Achse in M verlängere, MA' ziehe und mit der durch B zu AA' gezogenen Parallelen zum Schnitt bringe; der Schnittpunkt B' ist dann der gesuchte Punkt u. s. f.

Aus diesen Konstruktionen folgt, daß das Bild einer Geraden g die Verbindungslinie des Achsenschnittpunktes dieser Geraden mit dem Bilde irgend eines Punktes von g ist. Im Abschnitt 5 war

bemerkt worden, daß einem Winkel α im allgemeinen ein ungleicher Winkel α' entspreche, doch kommt der Winkel α , wenn wir ihn

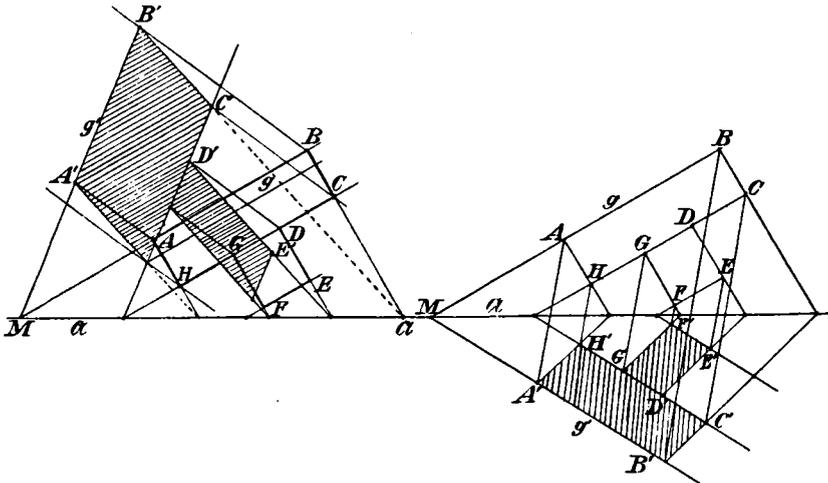


Fig. 14a und b.

um seinen Scheitel drehen, stets in eine Lage, in der sein entsprechender Winkel ihm gleich ist. Die Lage soll ermittelt werden

- a) für einen spitzen Winkel,
- b) für einen rechten Winkel.

a) Sind S und S' die sich entsprechenden Scheitel und \mathfrak{A} die Affinitätsachse (Fig. 15), so konstruiere man das Spiegelbild von S' in bezug auf $\mathfrak{A} = S''$, ziehe SS'' und errichte im Halbpunkt H dieser Geraden die Senkrechte, welche \mathfrak{A} in I schneiden möge. Sind ferner U und V die Schnittpunkte der Schenkel des Winkels α mit der Achse in der Lage des Winkels, in der der entsprechende $\sphericalangle \alpha' = \alpha$ ist, dann ist auch $USV = US''V$ und die Punkte U, V, S, S'' müssen auf einem Kreise liegen, in dem $UMV = 2\alpha$ und Linie UM den Winkel $R - \alpha$ mit der Achse einschließt. Für den Mittelpunkt M dieses Kreises haben wir zunächst nur einen geometrischen Ort, nämlich die Gerade HI ; ein

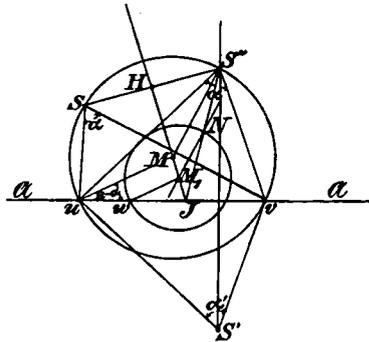


Fig. 15.

zweiter geometrischer Ort muß noch bestimmt werden. Zu dem Zwecke ziehe ich an beliebiger Stelle eine Gerade, die die Achse \mathfrak{A} in W und unter dem Winkel $R - \alpha$, die Linie HI im Punkte M' schneiden möge; wird jetzt um M' ein Kreis mit $M'W$ als Radius beschrieben, so ist dieser dem gesuchten Kreise ähnlich und

ähnlich gelegen, das Ähnlichkeitszentrum ist I . Schneidet Gerade IS'' den konstruierten Kreis in N , dann ist $M'N \parallel MS''$, daher die Parallele zu $M'N$ durch S'' der zweite geometrische Ort für M . Wesentlich einfacher ist die Konstruktion für die Bestimmung der Lage eines rechten Winkels, in der sich derselbe in \mathfrak{B} in wahrer Größe abbildet.

b) $\sphericalangle \alpha = 90^\circ$ (Fig. 16). Im Halbierungspunkte der Verbindungslinie der sich entsprechenden Scheitel errichte man die Senkrechte und beschreibe um den Schnittpunkt mit der Affinitätsachse den Kreis, der durch S und S' geht, dann sind die Schnittpunkte dieses Kreises mit der Achse U und V die gesuchten Punkte; es ist $USV = US'V = 90^\circ$ als Peripheriewinkel im Halbkreis. — Wird zu S' in bezug auf die Affinitätsachse der symmetrische Punkt S'' ermittelt und mit S verbunden, so erkennt man leicht, da Bogen $S'U = S''U$ ist, daß SU den Winkel $S'SS''$, SV den Nebenwinkel halbiert.

Diese Halbierungslinien könnte man zur Bestimmung von U und V benutzen, wenn Punkt M unzugänglich ist.

Die schiefe Parallelprojektion eines Kreises. Kennt man von dem Mittelpunkt eines in \mathfrak{E} befindlichen Kreises den affinen

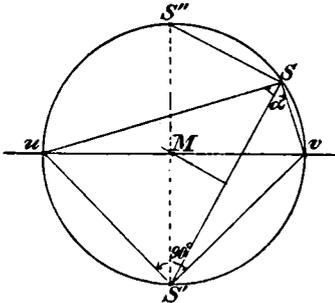


Fig. 16.

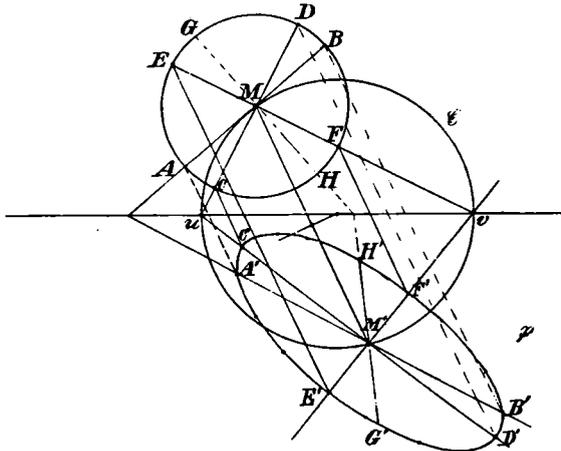


Fig. 17.

Punkt in $\mathfrak{B} = M'$ (Fig. 17), so ist nach den gegebenen Definitionen auch zu jedem Punkt der Peripherie das Bild konstruierbar. Man zieht am besten durch M Durchmesser, dann sind die Bilder dieser Durchmesser Linien, die durch M' gehen und ebenso wie die