Die Lehren

von

Raum, Zeit und Mathematik

in der

neueren Philosophie

nach ihrem ganzen Einfluss dargestellt und beurtheilt

von

Dr. Joh. Julius Baumann,
Professor am Gymnasium zu Frankfurt am Main.

II. Band:

Leibniz, Leibniz und Clarke, Berkeley, Hume.
Kurzer Lehrbegriff von Geometrie, Raum, Zeit und Zahl.
Schluss und Regeln aus dem Ganzen.

Berlin.
Druck nnd Verlag von Georg Reimer.
1869.

Meinem väterlichen Freunde

Herrn Pfarrer Dr. theol. Georg Eduard Steitz

in Frankfurt am Main.

Inhaltsübersicht.

Leibniz.

Leibniz und Clarke.

Berkeley.

Hume.

Leibniz.

1. Abschnitt: Begriffe aus den frühesten Schriften.

Eine philosophische Entwicklungsgeschichte von Leibniz zu schreiben, so anziehend ein solches Unternehmen in extenso wäre, kann hier nicht unsere Aufgabe sein; für unseren Zweck genügt es, aus seinen frühsten Aufsätzen und Schriften, so weit ihre Jahreszahl eine bestimmte ist, einige mathematische und philosophische Begriffe zusammenzustellen, die da zeigen, welche Betrachtungen ungefähr sein frühstes Denken beherrschen. Sehr bezeichnend für seine Art, überall Wahrheitsgehalt vorauszusetzen und die früheren Systeme, wenn es irgend ging, mit sich zu vermitteln, ist sofort die Stelle in § 3 seiner Doctorabhandlung de principio individui 1663 bei Erdmann: „Weil aber, wie durch Zusammenreiben von Kieseln Funken heraussprühen, so durch Zusammenbringen der Ansichten die Wahrheit entdeckt wird, wollen wir sie zuerst in Ordnung aufstellen.“ Wir wenden uns hiernach zunächst den mathematischen Sätzen aus dieser Zeit zu.

1. Geometrie und Raum: a. 1669 S. 51 Erdm.: Dass die Figur eine Substanz sei oder vielmehr, dass der Raum eine Substanz sei, die Figur etwas Substantiales, das halte ich für bewiesen, weil alles Wissen von einer Substanz handelt. Dass aber Geometrie ein Wissen sei, kann nicht geläugnet werden. A. 1669 S. 51 Erdm.: Die Geometrie beweist aus Ursachen: sie beweist nämlich eine Figur aus der Bewegung; z. B. aus der Bewegung eines Punktes entsteht eine Linie, aus der Bewegung einer Linie eine Fläche, aus der Bewegung einer Fläche ein Körper; aus der Bewegung einer geraden Linie über eine gerade entsteht eine gradlinige Figur; aus der Bewegung einer geraden Linie um einen unbewegten Punkt entsteht ein Kreis. Die Constructionen der Figuren sind Bewegungen; weiter werden aus den Constructionen die Eigenschaften von den Figuren erwiesen.

Also ist der Hergang von der Bewegung aus, und folgeweise a priori und aus der Ursache; die Geometrie ist also eine wahre Wissenschaft. Also wird, gar nicht gegen die Absicht des Aristoteles, ihr Object, nämlich der Raum, eine Substanz sein. Es ist in der That nicht so sinnlos, dass die Geometrie handle von der substantialen Form der Körper; denn nach Aristoteles abstrahirt sie von Materie, Zweck und Bewirkendem; also handelt sie entweder über die forma substantialis oder accidentalis; die accidentalis aber ist von der Materie, an welcher sie ist, nicht zu trennen, also bleibt die forma substantialis. S. 53 Erdm.: Der Raum ist das primär-ausgedehnte Wesen (ens primo-extensum) oder der mathematische Körper, der nämlich nichts Anderes enthält als die drei Dimensionen und der allgemeine Ort aller Dinge ist. S. 58 u. 59 Erdm., über den Stil des Nizolius: Dass das Ganze grösser ist als sein Theil, werden wir durch blosse Induction niemals mit vollkommner Sicherheit wissen; denn es brauchte es blos Einer zu läugnen.

2. Zahl und Mathematik überhaupt. a. 1666 S. 8 Erdm.: Verhältniss ist entweder Einheit (unio) oder Uebereinstimmung (convenientia); bei der Einheit werden die Dinge, zu welchen dieses Verhältniss stattfindet, Theile genannt, und, genommen mit der Einheit, das Ganze. Dies findet statt, so oft wir Mehreres (plura) zugleich (simul) als Eines setzen. Als Eines aber wird gedacht alles, was wir durch Einen Act des Verstandes (uno actu intellectus) oder zugleich (simul) denken, z. B. eine grosse Zahl, die wir oft mit blos dunkelem Denken beim Lesen auffassen (caeca quadam cogitatione apprehendimus). — Das Abstracte von Eins ist die Einheit; und weiter das Ganze, welches aus den Einheiten abstrahirt ist, oder die Ganzheit (totalitas) ist die Zahl. Die Quantität ist also die Zahl der Theile; hieraus ist offenbar, dass in dem Dinge selbst Quantität und Zahl zusammenfallen; dass jedoch bisweilen die ersten gleichsam äusserlich durch Beziehung oder Verhältniss zu einem Anderen hülfsweise, nämlich so lange die Zahl der Theile nicht bekannt ist, exponirt werden. Und dies ist der Ursprung der geistvollen analytica speciosa von Descartes. — Es ist also die Analysis die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen oder von der nicht exponirten Quantität, die Arithmetik die Lehre von der exponirten Quantität oder den Zahlen; fälschlich haben die Scholastiker geglaubt, die Zahl entstehe aus der blossen Theilung des Continuum und könne nicht

auf unkörperliche Dinge angewendet werden. Es ist nämlich die Zahl gewissermassen eine unkörperliche Figur, entstanden aus der Vereinigung irgend welcher Dinge, z. B. Gottes, eines Engels, eines Menschen, der Bewegung, welche zusammen (simul) 4 sind. Daher ist die Zahl etwas ganz Allgemeines (universalissimum) und zur Metaphysik gehörig. Die Mathematik ist nicht eine einzige Disciplin, sondern aus mannichfachen Disciplinen zusammengeholte Theile, behandelnd die Grösse des Gegenstandes in jeder einzelnen, die zu Einer Wissenschaft wegen ihrer inneren Verwandtschaft mit Recht geworden sind. Denn wie die Arithmetik und die Analysis von der Quantität der Dinge handeln, so die Geometrie von der Quantität der Körper oder des Raumes, der den Körpern entsprechend ausgedehnt ist (corporibus co-extensum est). Das Ganze selbst (und so auch die Zahl oder die Totalität) kann zerlegt werden in Theile als in kleinere Ganze, dies ist das Fundament der Complexionen, wenn man nur bedenkt, dass es in diesen verschiedenen kleineren Ganzen gemeinsame Theile giebt, z. B. das Ganze sei ABC, so werden kleinere Ganze sein die Theile von ihm AB, BC, AC, und auch der kleinsten oder als kleinsten angenommenen Theile (nämlich der Einheit) Vertheilung (dispositio) unter sich und mit dem Ganzen, welche Lage (situs) genannt wird, kann mannichfach gewechselt werden. So entstehen zwei Arten von Variationen, die der Complexion und der Lage. Sowohl die Complexion als die Lage gehören zur Metaphysik, nämlich zur Lehre vom Ganzen und den Theilen, wenn sie für sich betrachtet werden; wenn wir aber die Variabilität betrachten d. h. die Grösse der Variation, dann kommt man auf die Zahlen und die Arithmetik. — S. 15 Erdm.: Das Wort: all, ganz (omnis) bedeutet nicht eine Menge, sondern eine Zusammenfassung von Einzelnen.

3. Zeit, und ä. a. 1669 S. 53 Erdm.: Gestalt, Grösse, Lage, Zahl u. s. w. sind nicht Dinge, die von Raum, Materie, Bewegung realiter verschieden wären, sondern nur Beschaffenheiten zwischen dem Raum, der Materie, der Bewegung und deren Theilen gemacht von dem darüber kommenden Geist. Gestalt = Gränze des Ausgedehnten; Grösse = Zahl der Theile in einem Ausgedehnten; Zahl definire ich als 1 und 1 und 1 oder als Einheiten. Lage lässt sich auf Gestalt zurückführen, sie ist nämlich die Configuration von Mehrerem; die Zeit ist nichts Anderes als die Grösse der Bewegung; und da alle Grösse Anzahl von Thei-

len ist, so ist es nicht zu verwundern, dass Aristoteles die Zeit als die Zahl der Bewegung bestimmt hat. a. 1668 S. 46 Erdm.: Denn die Zeit, auch die unendliche, kann nicht als Ursache der Bewegung gedacht werden.

4. Körper und Bewegung: Wie diese Lehren zu verstehen sind, ergiebt sich aus dem, was er damals über die Natur des Körpers dachte. a. 1693, S. 117 Erdm. spricht er sich so aus: „2 kleine Abhandlungen, von mir vor 20 Jahren verfasst, die eine über die Theorie der abstracten Bewegung, wo ich sie ausser dem System betrachtet habe, als wäre sie ein blos mathematisches Ding, die andere über die Hypothese der concreten und systematischen Bewegung, so wie sie sich wirklich in der Welt zeigt.“ Ueber Mehreres ist er besser unterrichtet, z. B. „ich erkläre mich jetzt ganz anders über das Untheilbare.“ Den Körper hat er betrachtet wie Descartes und Gassendi; das war unrichtig. — a. 1668 S. 45 Erdm.: Zur inexistentia in einem Raume gehört Bewegung; während nämlich der Körper anfängt in einem anderen Raume zu existiren, als früher, bewegt er sich eben damit. Zur Natur des Körpers gehört darum Beweglichkeit (mobilitas); denn er kann sein in einem anderen gleichen und ähnlichen Raume, wie der frühere war, d. h. er kann sich bewegen, aber es gehört dazu nicht die Bewegung selbst; denn Bewegung ist Ortsveränderung, aus dem blossen Sein in einem Raume folgt keine Bewegung, sondern Beharren in demselben oder Ruhe. S. 53 Erdm.: Bewegung ist die Raumveränderung.“ —

Hiernach ist es nicht zweifelhaft, dass Leibniz anfänglich nicht nur über den Körper dachte, wie Descartes, sondern dass er den Raum für eine Substanz hielt und für etwas, was der Ort aller Körper sei, entgegen seiner späteren Ansicht; das Zweite aber und ungleich Bedeutsamere ist dies, dass Leibniz die Zahl für etwas ganz Allgemeines und zur Metaphysik Gehöriges erklärt, für eine unkörperliche Figur. Die Aeusserung im Sinne behaltend, wollen wir uns noch kurz in seinen philosophischen Ansichten aus jenen Jahren umsehen.

5. Anwendung des Begriffes „Theile.“ a. 1666 S. 12 Erdm.: Da Alles, was ist oder gedacht werden kann, regelmässig (fere) zusammengesetzt ist aus wirklichen oder wenigstens vorstellbaren (conceptualibus) Theilen, so muss das, was der Art nach verschieden ist, entweder dadurch verschieden sein, dass es andere Theile hat, und dann sind die Complexionen anzuwenden,

oder durch die andere Lage, und das ergiebt die Dispositionen; jene werden als Verschiedenheit der Materie, diese als die der Form betrachtet. S. 23 Erdm.: Ferner, um sicher zu finden, woraus alles gemacht wurde, muss man zur Feststellung der Prädicamente dieser Kunst und gewissermassen ihrer Materie die Analyse anwenden. Die Analyse ist folgende: jedweder gegebene Ausdruck soll aufgelöst werden in seine formalen Theile, oder es soll seine Definition angegeben werden; diese Theile wiederum in Theile, oder Definition der Definition der Ausdrücke, bis zu den einfachen Theilen oder den undefinirbaren Ausdrücken. a. 1666 S. 19 Erdm.: Die Lehre von den Variationen, welche allein fast durch das ganze Unendliche den ihr folgenden Geist führt, und die Harmonie der Welt und den innersten Bau der Dinge und die Reihe der Formen zugleich umfasst. Desto vollkommener erkennt Einer eine Sache, so urtheilt man, je mehr er der Sache Theile und die Theile der Theile und deren Gestalten und Lagen aufgefasst hat. Dieses Verhältniss der Figuren muss zuerst abstract in Geometrie und Stereometrie durchforscht werden; wenn man von da zur Naturgeschichte und zur Wirklichkeit (existentia) oder zu dem, was wirklich in den Körpern gefunden wird, gekommen ist, so wird sich eine weite Thür zur Physik eröffnen; es wird offen liegen die Gestalt der Elemente (facies) und der Ursprung der Qualitäten und deren Mischung und alles, was wir bis jetzt in der Natur nur mit Staunen ansahen. S. 20: Die Jurisprudenz ist auch sonst der Geometrie ähnlich, namentlich aber darin, dass beide Elemente und Fälle haben. Die Elemente sind die einfachen Bestimmungen, in der Geometrie Figuren, Dreieck, Kreis etc., in der Jurisprudenz: Rechtsgeschäft (actus), Versprechen, Veräusserung etc.; Fälle sind die Complexionen dieser Elemente, die in beiden Wissenschaften unendlich variabel sind. a. 1666 S. 26 Erdm.: er beruft sich auf Bisterfeld epitome artis meditandi, welche sich ganz gründet auf die immeatio oder περιχώρησις, wie er es nennt, universalis von allem in allem, auf die Aehnlichkeit und Unähnlichkeit von allem mit allem, deren Prinzipien die Relationen sind. S. 36 Erdm.: Das Beispiel, wie alle Wörter entstehen aus den wenigen Buchstaben, hat zur Erklärung des Ursprungs der Dinge aus den Atomen Aristoteles bei der Lehre Democrits selbst gebraucht. a. 1666 S. 7 Erdm.: Jeder Körper von unendlichen Theilen oder, wie gewöhnlich gesagt wird, das Continuum ist in's Unendliche theilbar." —

Was liegt in diesen Sätzen vor? Zunächst eine Gleichstellung der Ausdrücke Theile, Theile der Theile, einfacher Theil mit den Ausdrücken: Definition, Definition der Definition, undefinirbare Ausdrücke; diese Gleichstellung ist in der Logik von je her gebräuchlich und ganz unbedenklich, so lange man festhält, dass für die ersteren Namen aus dieser Gleichsetzung nicht folgt, dass sie, im arithmetischen oder geometrischen strengen Sinn genommen, noch für die zweiten gesetzt werden dürften. Es ist aber bei Leibniz deutlich, dass er die Worte: Theil etc. bereits in einem mathematischen Sinne gebraucht, aber noch schwankend, ob mehr im arithmetischen oder geometrischen Verstande; wenn man sich aber sagt, dass der Punkt z. B. für geometrisch und für arithmetisch könnte ausgegeben werden, so macht dies hier keinen grossen Unterschied. Kurz, wir finden in solchen Betrachtungen, wie sie oben aufgeführt sind, die Anfänge der Gedankenbildung, welche später zu den Monaden geführt hat; und in dem was S. 26 aus Bisterfeld genommen ist, liegt bereits, aber noch gleichsam im Schlummer, die Aehnlichkeit im Wesen der Monaden sammt dem principium indiscernibilium.

6. Denken, Universalien, Essenz: S. 23 Erdm.: Th. Hobbes hat mit Recht behauptet, das ganze Werk unseres Geistes sei ein Zusammenrechnen; es werde dasselbe aber vollbracht theils durch Addiren einer Summe theils durch Subtrahiren einer Differenz. Wie es also zwei Hauptzeichen der Algebraisten und Analytiker giebt, + und —, so gleichsam zwei Copulae: est und non-est; mit der ersten verknüpft der Geist, mit der zweiten theilt er. Est ist nicht eigentlich eine Copula, sondern ein Theil des Prädicats; eigentlich müsste man sagen: der Mensch ist wirklich (revera) ein Thier, der Mensch ist nicht (non est) ein Stein. —

a. 1663, de princ. indiv. § 22 Erdm.: Gott kann nicht, wie Scotus meinte, vielleicht machen, dass das Universale ausserhalb des Singulären ist, und ähnlicherweise das genus ausserhalb der species; denn das gäbe keine adäquate Theilung; es gäbe so ein Thier, das weder vernünftig noch unvernünftig wäre, eine Bewegung, die weder gerade noch krumm (obliqua) wäre; § 23, denn es gäbe dann eine Linie, die real weder gerad noch krumm wäre, was völlig absurd ist.

a. 1663, de princ. indiv. Coroll. III: die essentiae der Dinge sind wie die Zahlen. IV: die essentiae der Dinge sind nicht ewig, ausser wie sie in Gott sind; a. 1666 S. 25 Erdm.: Sätze, welche ewige Wahrheiten sind oder nicht durch den Willen Gottes, sondern durch ihre eigene Natur bestehen. Alle Einzelbehauptungen aber, wie eine geschichtliche, z. B. Augustus war Kaiser der Römer, oder Beobachtungen, d. h. allgemeine Sätze, deren Wahrheit aber nicht in ihrer essentia, sondern in ihrer existentia gegründet ist, und die wahr sind gewissermassen durch Zufall." —

Hier stimmt die Auffassung des Denkens als eines Rechnens ganz mit der allgemeinen Bedeutung, welche der Zahl zugesprochen ist; die zweite Stelle zeigt bereits das Dringen auf durchgängige Bestimmtheit der Begriffe und in den Worten: sonst gäbe es keine adäquate Theilung, liegt wie im Keime das spätere Prinzip der Angemessenheit. Die letzten Stellen endlich enthalten die Gedanken von den ewigen und zufälligen Wahrheiten, von dem Schweben der Essentien im Verstande Gottes, als unabhängig von seinem Willen, wie sie seinen späteren ausgebildeten Vorstellungen zum Grunde liegen. Den Satz, die essentiae der Dinge sind wie die Zahlen, lassen wir in seiner Unbestimmtheit und Vieldeutigkeit vor der Hand stehen, er zeigt nur wieder, wie der Zahlbegriff L. beschäftigt hat und ihm der Schlüssel schien, mit dem das Letzte der Erkenntniss aufgethan werden könne. —

Damit man in der Kürze sieht, wie sonst L.'s Denken damals beschaffen war, stellen wir noch wenige Punkte zusammen über

7. Erkenntniss, deren Prinzipien und Arten, über Substanz und Wissenschaft. S. 65 Erdm.: Zum soliden Urtheilen gehört 1) Klarheit der Wörter, 2) dass die Sinne vor Irrthum durch die rechte Beschaffenheit von Sensorium und Medium, 3) dass der Verstand vor ihnen durch blosse Beobachtung der Regeln der Folgerichtigkeit bewahrt werde. — S. 91 Erdm.: Zwei Axiome von frühe an: Suche stets in Worten Klarheit, in Sachen Anwendung (usum). Später hat er gelernt, dass das erste die Basis alles Urtheils, das zweite die der Erfindung ist; — Auflösung in Elemente, Versuche. — S. 43 Erdm.: Es giebt zwei erste Sätze, einer ist Prinzip aller Theoreme oder nothwendigen Wahrheiten: was ist (so und so beschaffen ist), das ist oder ist nicht (so und so beschaffen) oder umgekehrt; das andere ist

das Prinzip aller Beobachtungen oder zufälligen Sätze: irgend Etwas existirt. Ibid: Es giebt vollkommene Beweise in allen Zweigen der Wissenschaft.

a. 1666 S. 53 Erdm.: Behauptung, dass es keine Dinge in der Welt giebt ausser Geist, Raum, Materie, Bewegung; – ausser diesen sei nichts nöthig zur Welterklärung, ja andere Dinge könnten gar nicht sein. — Ferner: der menschliche Geist kann sich nichts Anderes vorstellen (imaginari) als Geist (wie er nämlich sich selbst denkt), Raum. Materie, Bewegung, und was aus diesen unter einander (inter se comparatis) entspringt; alles, was man überdies hinzuthut, sind blos Worte, die genannt und unter sich mannichfach combinirt, aber nicht erklärt und verstanden werden können. Denn wer kann sich ein Ding vorstellen, das weder von Ausdehnung noch von Denken Etwas hat. Wenigstens können alle, die von den unkörperlichen Substanzen der Dinge reden, ihre Meinung nicht erklären ausser durch Uebertragung, die vom Geiste entlehnt ist. Von diesem ist jenen zuertheilt worden der appetitus oder der natürliche instinctus, woraus auch natürliche Erkenntniss folgt; daher das Axiom: natura nihil facit frustra, omnis res fugit sui destructionem, similia similibus gaudent, materia appetit formam nobiliorem u. A. der Art, während wirklich in der Natur keine Weisheit ist, kein Begehren, die schöne Ordnung aber daraus entsteht, dass sie ein Uhrwerk Gottes ist. —

a. 1669 S. 50 Erdm.: Ferner, wenn die Qualitäten durch die Bewegung allein verändert werden, so wird eben damit auch die Substanz verändert werden, z. B. wenn man das Licht oder die Wärme wegnimmt, so nimmt man das Feuer weg. — Die Essentia unterscheidet sich von ihren Eigenschaften nur durch die Beziehung auf die Wahrnehmung (sensum); — Substanz, wie eine Stadt von innen aus gesehen; Qualitäten, wenn man von aussen herankommt; Ost-, Westseite etc. = Mannichfaltigkeit der Organe. S. 63 Erdm.: Das Concrete sind wirkliche Dinge, das Abstracte sind nicht Dinge, sondern Weisen (modi) der Dinge; Weisen aber sind nichts Anderes als Verhältnisse der Dinge zum Verstand oder Fähigkeiten zu erscheinen.

a. 1666 S. 8 Erdm.: Die Metaphysik handelt theils vom Ding (ens) theils von den Eigenschaften des Dinges; — des Dinges absolute Eigenschaft = Qualität; seine respective, und zwar des Dinges zu seinem Theil, wenn es deren hat = Grösse, oder des

Dinges zu einem anderen Dinge = Relation. — a. 1669 S. 51: Daher Harmonie der Wissenschaften: Theologie oder Metaphysik = über die bewirkende Ursache der Dinge, nämlich den Geist; moralische Philosophie (= praktische oder staatliche) über der Dinge Zweck, nämlich das Gute; Mathematik (reine) über der Dinge Form, nämlich die Gestalt; Physik über die Materie der Dinge und die aus ihnen durch Zusammenfassung mit den übrigen Ursachen resultirende einzige Affection, nämlich die Bewegung." —

In diesen Betrachtungen und Erklärungen von L. ist von der eigenthümlichen Verwendung des Begriffs der Zahl, die uns oben aufstiess, nichts zu merken; allenfalls möchte man in der Aufstellung, die Substanz sei wie eine Stadt von innen aus gesehen, die Neigung im Voraus spüren, falls es etwa nicht gelänge von aussen d. h. durch die Wahrnehmung in diese Stadt der Substanz einzudringen, die Sache durch einen Blick von oben in das Innere zu versuchen, wie er es später gethan hat, allein solche Sachen sagen sich vielleicht recht schön, wenn man das Spätere kennt, aber für sich betrachtet würden alle diese letzteren Stellen nichts in der Weise Eigenthümliches an sich tragen oder andeuten, wie die vor ihnen abgehandelten. Wir wenden uns daher schliesslich dazu, einige Stellen zu geben, welche zeigen sollen, mit welchen Gedanken ungefähr L. sich noch schon mehr im Uebergang zu seiner ausgebildeten Denkweise beschäftigt hat. Es sind dies 3 Stellen, welche handeln vom:

8. reinen Denken, vom Allgemeinen im Denken und von der Unabhängigkeit der Wahrheit von uns.

a. 1668 S. 47 Erdm.: Das Denken ist 1) ein unmittelbar durch Empfindung wahrnehmbares Ding (sensibilis res); der Geist (mens) nämlich, der sich als denkend empfindet, ist sich selbst unmittelbar; 2) das Denken ist ein durch Empfindung wahrnehmbares Ding ohne die Vorstellung (imaginatio) von Theilen. Dies ist auf Versuch klar. Denn das Denken ist eben das Etwas (nescio quid), was wir empfinden, wenn wir empfinden, dass wir denken. „Wenn wir z. B. empfinden, dass wir an Titus gedacht haben, so empfinden wir nicht blos, dass wir das Bild von Titus, welches allerdings Theile hat, im Geist (animo) gehabt haben, weil dies zum Denken nicht ausreicht; denn wir haben Bilder im Geist, auch wenn wir nicht an sie denken, — sondern wir empfinden ausserdem, dass wir auf jenes Bild des Titus unsere

Aufmerksamkeit gerichtet haben (advertisse), in welcher Vorstellung (imaginatio) des Aufmerkens wir keine Theile antreffen. Dasjenige, bei welchem eine Thätigkeit ist ein unmittelbar durch Empfindung wahrnehmbares Ding ohne Vorstellung von Theilen, bei dem ist irgend eine Thätigkeit ohne Theile. Denn als wie beschaffen etwas unmittelbar empfunden wird, so ist es beschaffen; denn des Irrthums Ursache ist das Medium, weil, wenn das Object der sinnlichen Wahrnehmung (sensus) die Ursache des Irrthums wäre, immer falsch empfunden würde; wäre es das Subject, so würde es immer falsch wahrnehmen. Wovon irgend eine Thätigkeit ohne Theile ist, bei dem ist irgend eine Thätigkeit nicht Bewegung, denn jede Bewegung hat Theile; wo keine Theile, da ist keine Auflösung und kein Vergehen, also ist die Seele unsterblich.

a. 1670 S. 70 Erdm.: Wenn das Allgemeine nichts ist als die Sammlung des Einzelnen, so wird folgen, dass man kein Wissen hat durch Beweis, sondern blos durch Sammlung von Einzelnem oder Induction. Auf diese Weise aber werden die Wissenschaften völlig zerstört und die Skeptiker haben gewonnen. Es giebt dann keine vollkommen allgemeingültigen Sätze, sondern blos alles, was ich erfahren habe, ist so und so; und es bleibt möglich, dass Unversuchtes verschieden sei. Aber, wird man einwenden, wir sagen allgemeingültig, dass Feuer d. h. ein leuchtender, beweglicher, dünner Körper, durch Holz in gewöhnlicher Weise erregt, brennt, wiewohl niemand alle solche Feuer versucht hat, sondern weil bei denen, die wir erfahren haben, die Sache offenbar geworden ist. So ist es; daraus vermuthen wir und glauben es auch mit moralischer Gewissheit, dass alle Feuer der Art brennen und brennen werden, wenn man die Hand an sie hält. Aber diese moralische Gewissheit ist nicht gegründet in der blossen Induction, aus ihr nämlich würde man sie mit keinem Vertrauen schliessen können, sondern aus einem Zusatz oder mit Hülfe folgender allgemeiner Sätze, die nicht von der Induction des Einzelnen, sondern von einer allgemeinen Idee oder der Erklärung der Termini abhängen: 1) Wenn die Ursache dieselbe oder in allem ähnlich ist, so ist die Wirkung dieselbe oder in allem ähnlich; und von dem 2ten: Das Dasein einer Sache, die nicht wahrgenommen wird, wird nicht vorausgesetzt (praesumitur); und endlich von dem 3) Alles, was nicht vorausgesetzt wird, wird in der Praxis für nichts gerechnet, es werde denn vorher bewiesen. Hieraus wird zu Stande gebracht die praktische oder moralische Gewissheit des Satzes: dass all' jenes Feuer brennen werde. Denn es sei jenes Feuer so beschaffen, wie irgend ein mir jetzt vorliegendes, so behaupte ich, dass es in allem (soviel zur Sache gehörig ist) dem früheren ähnlich sei, weil nach der Voraussetzung ich keine etwas ausmachende Unähnlichkeit bemerke; denn was nicht wahrgenommen wird, wird nicht vorausgesetzt nach 2) und ist in der Praxis für nichts zu achten nach 3), also wird auch dieses brennen. Diese Unterstützungen hängen von allgemeinen Ueberlegungen ab; denn wären sie von der Induction, so würden sie weiterer Unterstützung bedürftig sein, und eine moralische Gewissheit wäre in's Unendliche nicht zu erreichen.

a. 1677 S. 76—78 Erdm.: Die Geometer zeigen, dass der Kreis die raumreichste von den Figuren desselben Umfangs ist; und wenn es 2 Inseln gäbe, die eine kreisrund, die andere viereckig, die in gleicher Zeit umgangen werden könnten, so enthalte die kreisrunde mehr Land. Aus dem Zugeständniss, dass dies wahr sei, wenn es auch von uns nicht gedacht werde, die Folgerung: also glaubst Du, dass in den Dingen, nicht in den Gedanken Wahrheit und Falschheit sei? Dagegen: wie es eine Falschheit, so giebt es eine Wahrheit der Gedanken, und die Vermittlung ist diese: da nicht alle Gedanken, die gebildet werden können, wirklich gebildet werden, so geht die Wahrheit zwar auf Sätze und Wahrheiten, aber als mögliche, so dass wenigstens das gewiss ist: wenn jemand auf diese oder die entgegengesetzte Weise denke, werde sein Gedanken wahr oder falsch sein. Was die Ursache angeht, welche da sein muss, warum ein Gedanke wahr oder falsch sei, so liegt diese in der Natur der Dinge, wenigstens nicht blos in unserer Natur; denn nothwendig ist, dass sowohl meine Natur als auch die der Dinge, über welche ich denke, von der Art ist, dass ich, sobald ich nach rechter Methode zu Werke gehe, schliesse, der Satz, um den es sich handelt, sei entweder wahr oder falsch. Dagegen hat Hobbes behauptet, die Wahrheit der Sätze hänge ab von der Wahrheit der Definitionen, diese von der Willkür der Menschen, welche die Wörter mache oder andere Zeichen, wie die mathematischen. Aber es ist einzuwenden, dass die Wahrheit schwerlich aus den Wörtern stammt, da im Gegensatz hierzu bekanntermassen die Geometrie der Griechen, Lateiner und Deutschen die nämliche ist. Allerdings, fehlten uns die Zeichen, so würden wir niemals etwas deutlich (distincte) denken und schliessen. Die Figuren der Geometrie sind Zeichen; der gezeichnete Kreis ist nicht der wahre Kreis, und braucht es nicht zu sein, sondern es ist genug, dass er von uns dafür angesehen werde. Aber dieser Kreis hat eine gewisse Aehnlichkeit mit dem wahren Kreis, und dieser ist sicherlich nicht willkürlich. Auch zwischen der Zehnzahl und dem Zeichen für zehn ist ein Verhältniss oder eine Ordnung in den Zeichen wie in den Dingen, vorzüglich falls die Zeichen gut erfunden sind. Wenn daher auch die Zeichen willkürlich sind, so hat doch ihre Anwendung und Verknüpfung etwas, was nicht willkürlich ist, nämlich eine gewisse Proportion zwischen dem Zeichen und der Beziehung verschiedener Zeichen, die die nämlichen Dinge ausdrücken, z. B. φωσ-φόρος, Lucifer. Diese Proportion nun oder dies Verhältniss ist das Fundament der Wahrheit. Es macht nämlich, dass, ob wir nun diese oder andere Zeichen anwenden, immer das Nämliche oder Gleichgeltende oder in Bezug auf die Proportion Entsprechende herauskommt, wenn gleich es wohl nothwendig ist, immer irgend welche Zeichen zum Denken anzuwenden. Z. B. bei den Zahlen wird die Sache immer auf die nämliche Weise gehen, ob man das Decimal- oder, wie manche gethan haben, das Duodecimalsystem gebraucht, und nachher das, was man auf verschiedene Weise durch Rechnung entwickelt hat, in Sandkörnern oder anderen Stoffen darstellt; denn es kommt immer das Nämliche heraus. Die Wahrheit besteht nicht in dem, was in den Zeichen willkürlich ist, sondern in dem, was beständig ist, nämlich die Beziehung auf die Dinge." —

Wir heben an diesen Stellen nur Einiges hervor. Die erste beweist nur, dass das Denken nicht rein sensualistisch zu Stande kommt, aus dem Begriff der Aufmerksamkeit des Geistes; selbst die Richtigkeit der sonstigen Argumentation zugegeben, würde nicht mehr folgen, als dass der Geist nicht durch Auflösung in Theile vergänglich sei, und auch nur als dieses nackte, blosse Aufmerken Unsterblichkeit habe; die Art, wie Irrthum blos in das Medium zwischen Subject und Object verlegt wird, würde zu viel beweisen. — Die zweite Stelle füllt den Begriff des Geistes aus mit der Hindeutung auf allgemeine, nicht aus der Erfahrung stammende, also in ihm selber liegende Sätze. Die Ausdrücke in praesumitur weisen auf die Jurisprudenz, wir werden einer ähnlichen Anwendung öfter bei L. begegnen, von ihm hat sie wohl Kant bei der Deduction der Kategorien genommen; diese Denkweise ist nicht unbedenklich, denn sie ist mitten aus dem Element der moralischen Gewissheit oder den ἔνδοξα gegriffen. Der Schlusssatz, dass ohne diese Annahme moralische Gewissheit in's Unendliche nicht zu erreichen sei, ist keineswegs beweisend, sondern höchstens unser Verfahren entschuldigend. — Die dritte Stelle zeigt die grosse reale Verwendung der Mathematik als Instanz für Wahrheit, die unabhängig von unserer Willkür, und den Hinweis, dass Wahrheit nicht blos auf Wirkliches, sondern auf Mögliches geht. Dabei wird zum Grunde gelegt die Annahme, dass es für Wahrheit und Falschheit immer einen Grund geben muss, welcher also nicht blos in unserer Natur, sondern in der Natur der Dinge liege. Dies ist der Gedanke von Descartes her, dass nicht blos für jedes Ding, sondern für jede Idee nach einer Ursache müsse gefragt werden; ein Gedanke, welcher denn L., ähnlich wie Descartes, auf Gott als das Fundament der Ideen leitete, nur in ganz anderer Ausführung als bei Descartes.

Indem wir uns nunmehr an die Darstellung der ausgebildeten Lehren von Leibniz begeben, bemerken wir zuvörderst, dass wir seinen Streit mit Clarke zunächst weglassen, um dies anziehende Schauspiel von zwei im Kampfe begriffenen wissenschaftlichen Gesammt-Ueberzeugungen nicht in Stücke zu zerreissen, sondern es später vollständig im Auszug aufzuführen; und ferner halten wir es für gut, auch die Darstellung aus den mehr philosophischen und den überwiegend mathematischen Schriften nicht sofort in Eins zu verschmelzen, sondern bei den einschlagenden Begriffen die zweiten auf die ersten folgen zu lassen.

2. Abschnitt: Ueber Mathematik überhaupt.

A. Philosophische Schriften.

1. Die mathematischen Wahrheiten sind nothwendige Wahrheiten und also angeborene Wahrheiten. S. 195 Erdm.: Hieraus erhellt, dass die nothwendigen Wahrheiten, wie man solche in der reinen Mathematik und besonders in der Arithmetik und Geometrie findet, Prinzipien haben müssen, deren Beweis nicht abhängt von den Beispielen, und also auch

nicht von dem Zeugniss der Sinne, wiewohl man ohne die Sinne sich nie hätte einfallen lassen, an sie zu denken. — Dies hat Euklid wohl begriffen, als er durch Vernunft zeigte, was man genugsam sieht durch Erfahrung und die sinnlichen Bilder. 208 Erdm.: Die ganze Arithmetik und die ganze Geometrie sind uns angeboren, und sind in uns auf virtuelle Weise, in der Art dass man sie auffinden kann, wenn man das, was man schon im Geiste hat, aufmerksam betrachtet und ordnet, ohne sich irgend einer durch die Erfahrung oder die Ueberlieferung Anderer erlernten Wahrheit zu bedienen, wie Plato im Medon. S. 209 Erdm.: Der ursprüngliche Beweis der nothwendigen Wahrheiten kommt blos vom Verstande, die anderen kommen von den Erfahrungen und den Beobachtungen der Sinne; — nothwendige Wahrheiten — die Sinne können deren unfehlbare und beständige Sicherheit nicht beweisen. Die intellectuellen Ideen, welche die Quelle der nothwendigen Wahrheiten sind, kommen nicht von den Sinnen; — die Ideen, die von den Sinnen kommen, sind verworren, und die Wahrheiten, die von ihnen abhängen, sind es gleichfalls, wenigstens zum Theil, während die intellectuellen Ideen und die Wahrheiten, die von ihnen abhängen, deutlich sind, aber weder die einen noch die anderen haben ihren Ursprung von den Sinnen.

2. Ihre Begriffe sind nicht willkürlich. S. 319 Erdm.: In Physik und Mathematik steht es nicht in unserer Macht, Combinationen nach unserer Laune (à notre fantaisie) zu machen, sonst würde man das Recht haben von regelmässigen Decaedern zu sprechen, und man würde im Halbkreis ein Grössencentrum suchen, wie es in ihm ein Centrum der Schwere giebt. Denn es ist in der That überraschend, dass das eine darin ist, und dass das andere nicht darin sein kann.

3. In ihr ist Unterschied sofort Artunterschied. S. 313 Erdm.: In der strengen Art der Mathematik bewirkt die geringste Verschiedenheit, welche macht, dass 2 Dinge nicht in allem ähnlich sind, — dass sie der Art nach verschieden sind. Kreise und Parabeln sind so von Einer Art, aber nicht Ellipsen und Hyperbeln.

4. Sie beweist in forma. S. 395 Erdm.: Es fehlt wenig daran, dass die Beweise Euklid's am öftesten Argumente in forma sind; denn wenn er scheinbar Enthymeme macht, so wird der unterdrückte Satz, der zu fehlen scheint, ergänzt durch die An-

führung am Rande, wo man das Mittel giebt, ihn schon bewiesen zu finden, was eine gewisse Abkürzung ergiebt, ohne der Stärke etwas zu entziehen. Diese Umkehrung, Zusammensetzung und Theilung der Gründe, deren er sich bedient, sind nur Arten von besonderen, der Mathematik und der Materie, die sie behandelt, eigenen Schlussformen, und sie beweist diese Formen mit Hülfe der allgemeinen Formen der Logik. S. 421 und 22: — als zum Exempel die Euklidischen Schlussformen, da die Verhaltungen (proportiones) versetzt werden invertendo, componendo, dividendo rationes etc. Ja selbst die Additionen, Multiplicationen oder Divisionen der Zahlen, wie man sie in Rechenschulen lernt, sind Beweisformen (argumenta in forma), und man kann sich auf sie verlassen, weil sie kraft ihrer Form beweisen; und auf solche Weise kann man sagen, dass eine ganze Buchhalterrechnung förmlich schliesse und aus argumentis in forma bestehe. So ist es auch mit der Algebra und vielen anderen förmlichen Beweisen bewandt, so nämlich nackend und doch vollkommen sind.

5. Induction nur vorläufig. S. 341 Erdm.: Es geschieht auch, dass die Induction uns Wahrheiten in den Zahlen und Figuren darbietet, deren allgemeinen Grund man noch nicht entdeckt hat.

6. Sie führt ihre Erprobung mit sich. S. 122 Erdm.: Die mathematischen Dinge führen ihre Erprobung und Bewährung mit sich, was die Hauptsache ihres guten Fortgangs ist; vorher: Mir scheint in diesen Dingen mehr als selbst in der Mathematik Klarheit und Gewissheit nöthig, weil etc.

7. Mathematik ist ideal, aber doch von realer Anwendung. S. 190 Erdm.: Wiewohl so die mathematischen Betrachtungen ideal sind, so mindert dies doch nichts an ihrem Nutzen, weil die wirklichen Dinge sich von ihren Regeln nicht entfernen können; und man kann in Wirklichkeit sagen, dass hierin die Realität der Phänomene besteht, welche sie von Träumen unterscheidet. Uebrigens haben die Mathematiker die metaphysischen Erörterungen gar nicht nöthig, noch auch nöthig sich abzuplagen mit der reellen Existenz der Punkte, der Untheilbaren, des unendlich Kleinen und des im stricten Sinne Unendlichen; — es genügt für die Mathematiker zur Strenge ihrer Beweise, statt der unendlich kleinen Grössen so kleine zu nehmen, als erforderlich ist, um zu zeigen, dass der Irrthum geringer ist als der, den ein Gegner anrechnen wollte, und dass man

folgeweise keinen anrechnen kann, so dass, wenn das exact unendlich Kleine, welches die Verminderung der Anrechnung begränzt, nur sein würde wie die imaginären Wurzeln, dies der Infinitesimalrechnung oder der Rechnung mit Differenzen und Summen nichts schadete, — in der man sich blos irren kann aus Mangel an Verständniss oder an Aufmerksamkeit; denn sie führt ihren Beweis mit sich.

B. Mathematische Schriften.

1. Allgemeine Mathematik: Pertz III, 7 S. 53 (1): Die allgemeine Mathematik ist die Wissenschaft von der Grösse im Allgemeinen, oder von der Art zu schätzen, somit die Schranken zu bezeichnen, innerhalb deren Etwas fällt. Und weil alle Creatur Schranken hat, so kann man darum sagen, wie die Metaphysik die generelle Wissenschaft der Dinge ist, so sei die allgemeine Mathematik die Wissenschaft der Creaturen. Sie hat nun 2 Theile: die Wissenschaft des Endlichen (welche den Namen Algebra hat und zuerst auseinandergesetzt wird) und die Wissenschaft des Unendlichen, wo durch Dazwischenkunft des Unendlichen das Endliche bestimmt wird. (2) Weil aber alle Quantität durch die Zahl der unter einander congruirenden Theile oder die Wiederholung des Masses bestimmt wird, so kommt es dadurch, dass die allgemeine Mathematik zugleich ist die Wissenschaft von der Wiederholung des Masses oder der Zahl, weshalb sie auch den generellen Namen des Calcüls hat.

2. Sie beweist in forma: Pertz III, 7, S. 54: In der Logik giebt es Begriffe, Sätze, Argumentationen, Methoden. Das Nämliche ist in der mathematischen Analyse, wo es giebt Quantitäten, Wahrheiten, die von Quantitäten ausgesagt werden (Gleichungen, Grösseres, Kleineres, Analogien etc.), Argumentationen (nämlich Operationen des Calcüls) und endlich Methoden oder Verfahrungsweisen, welche wir anwenden, das Gesuchte zu erforschen.

3. Analyse und Synthese. Pertz III, 7, S. 206 und 7: Wenn ich, um ein schweres Problem zu lösen, anfange von den leichteren Fällen des nämlichen Problems oder von anderen verwandten Problemen, um nämlich ein Fortschreiten zu finden oder sonst mir den Weg zum Gesuchten zu bahnen, so übe ich in Wahrheit die Synthesis, und wenn ich, irgend eine ganze Wissenschaft oder einen Theil einer Wissenschaft behandelnd, nach den Gesetzen der combinatorischen Kunst alle wichtigere Probleme

durchlaufe, fortgehend von dem Einfacheren zu dem mehr Zusammengesetzten, und so die Lösung irgend eines gesuchten Problems unter andern gewissermassen durch Beschäftigung mit anderen (aliud agendo) finde, so wird man urtheilen, ich habe es durch Synthese gefunden. Sofern ich aber irgend ein Problem so behandle, als ob kein anderes von einem Anderen oder auch von mir schon gelöstes Problem irgend auf der Erde da wäre, insofern gehe ich analytisch zu Werke, indem ich nämlich das vorliegende Problem auf andere leicht zurückführe, bis es auf die ersten Postulate zurückgeführt wird, welche an sich in unserer Gewalt sind; aber die rein analytische Methode ist sehr selten und kaum in der Sterblichen Gewalt, und meist wird Etwas von Synthese oder vorhergefundenen Theoremen oder Problemen beigemischt. Auch giebt es Einiges, was nur mit Hülfe schon aufgestellter Tabellen oder durch eine Art von demonstrativischer Induction gefunden werden kann. Es ist aber die Analyse wiederum entweder sprungweise oder schrittweise; die letztere ist schöner, aber noch nicht hinreichend entwickelt.“ —

Der Sinn dieser Sätze ist dieser: Die mathematischen Wahrheiten führen ein Bewusstsein von unfehlbarer und beständiger, also nothwendiger und allgemeiner Sicherheit oder Gewissheit mit sich, wie es die Thatsachen blos äusserer Erfahrung nicht haben; darum sind sie aus der Erfahrung nicht geschöpft, sondern in dem Geiste haben sie ihren Stammsitz und ihre Quelle; dabei sind sie nicht Geschöpfe unserer Phantasie und dichtenden Willkür, sondern sie geben sich uns als so und so beschaffen, und dieser ihrer Natur gemäss müssen wir mit ihnen verfahren; sie sind sonach zwar nicht äusserlich, wohl aber innerlich gegeben, gegeben nicht als fertig, sondern als Etwas, was durch Thätigkeit des Geistes muss erworben werden, wiewohl die Sinne die unerlässliche Anregung bieten, jenen intellectuellen Inhalt zu entwickeln; es sind deutliche Wahrheiten, daher die Leichtigkeit, Artunterschiede in ihnen aufzustellen. Ihre Beweise sind formell streng wie die logischen und haben ihre Verlässlichkeit kraft dieser Form. Die Darstellung im Sinnlichen dient zur Bewährung und Erprobung, was sehr wichtig ist für den sicheren Fortgang der Wissenschaft, aber ihrer wissenschaftlichen Gewissheit nichts hinzufügt. So sind diese Wahrheiten ideal, d. h. zunächst gültig im Geist und seinem Denken, ihre Realität hängt nicht ab von der erscheinenden Wirklichkeit, umgekehrt stützt sich deren Realität auf die ihrige. Die Mathematik ist auch nicht abhängig von den philosophischen Begriffen, sie hat die Freiheit, sich ihre Begriffe nach ihren Absichten zurechtzulegen; ist sie sicher, dass kein Irrthum möglich ist, so hat sie sich selber Genüge gethan. Alles, was Schranken hat, ist ihr unterworfen, daher alle Creatur, und sie ist als allgemeine Mathematik wesentlich Calcül d. h. Wissenschaft von der Wiederholung des Masses oder der Zahl. In diesen Sätzen ist Mehreres vor der Hand noch undeutlich: wie stellt sich Leibniz das mathematische Denken als solches vor, ist es ohne alle Einbildungskraft? von einer inneren, also der reinen, Anschauung redet er nicht, aber wie soll man sich eine Ellipse denken, ohne ein Bild von ihr zu entwerfen? auch eine Zahl ist immer etwas Zusammengefasstes und als Eins Betrachtetes. Sollen die unerlässlichen Anregungen der Sinne darin bestehen, dass wir, eine sinnlich-wahrgenommene Figur sehend, sie blos mathematisch gewissermassen correct und exact machen und ihre Gesetze dann mit dem Denken herausfinden? Aber jenes Correct- und Exact-Machen ist ein Ergänzen und Umändern der äusseren Anschauung durch die innere und erst mit diesen so angeschauten Wesen beschäftigt sich das logische Denken gemäss ihrer Eigenthümlichkeit. Die mathematischen Wahrheiten sind deutlich. Ueber Klarheit und Deutlichkeit ist die klassische Stelle in der Abhandlung von 1684 S. 79 Erdm.: „Klar nenne ich einen Begriff, wenn ich Etwas habe, woran ich die vorgestellte Sache erkennen kann; der klare Begriff ist entweder verworren oder deutlich. — — Deutlich ist ein Begriff, z. B. wie ihn die Dokimasten vom Golde haben, nämlich nach Merkmalen und Proben, welche ausreichen, ein Ding von allen anderen ähnlichen Körpern zu unterscheiden: solche pflegen wir zu haben bei Begriffen, die mehreren Sinnen gemeinschaftlich sind, wie von der Zahl, der Grösse, der Figur, ebenso bei vielen Gemüthsbewegungen, wie Hoffnung, Furcht, kurz bei allem, wovon wir eine nominale Definition haben, welche nichts Anderes ist als eine Aufzählung ausreichender Merkmale. — Eine deutliche Erkenntniss giebt es von einem undefinirbaren Begriff, wenn er primitiv ist oder Merkmal seiner selbst d. h. wenn er unauflöslich ist und nur durch sich verstanden wird und somit keine Requisite hat; — bei zusammengesetzter Erkenntniss, wenn das Alles, was in der deutlichen Erkenntniss enthalten ist, wiederum deutlich erkannt ist. oder wenn die Analysis bis zu Ende geführt vorliegt, so ist die Erkenntniss eine adäquate, wovon ich nicht weiss, ob die Menschen ein vollkommenes Beispiel geben können, sehr nahe dem kömmt jedoch die Erkenntniss der Zahlen." Aber selbst diese Stelle giebt uns noch keinen ganz sicheren Aufschluss: ist die Mathematik deutlich, weil sie mehreren Sinnen gemeinschaftlich ist, oder weil ihre Begriffe primitive sind? nach dem, was von der Zahl als Beispiel eines fast adäquaten Begriffs gesagt ist, scheint das Letztere vorzuziehen, aber in der Stelle ist auch die erstere Auffassung als Beispiel angeführt; und auch bei jener Annahme liegt noch nichts für unsere Frage Entscheidendes in der Stelle: denn ob diese Deutlichkeit eine anschauliche sei, oder eine blos logische, wäre immer noch nicht klar gestellt. Ferner können wir aus dem oben Angeführten noch nicht erklären, was uns berechtigt, die Mathematik, welche ganz ideal ist, nicht nur als realer Anwendung fähig zu denken, sondern sie sogar wie eine Vorschrift für die Dinge zu behandeln. — Was er über Synthese und Analyse bemerkt, dass nämlich die Analyse, d. h. die Zurückführung auf die ersten Postulate, kaum in der Sterblichen Gewalt sei, spricht wieder gegen die Rückführung der Mathematik auf Anschauung oder auch auf primitive unauflösliche Begriffe; oder meinte Leibniz an der Stelle nur sehr schwere Aufgaben, so dass die ersten Postulate wohl leichter zu finden wären, aber die Anknüpfung eines vorliegenden Problems das Schwere sei und oft kaum Gelingende? Was er über das unendlich Kleine sagt, deutet bereits darauf, dass hier mehr Kunstgriffe als logisch exacte Regeln statthaben; doch behandeln wir das besser in einem zusammenhängenden Kapitel. In der Hoffnung, dass das, was die Behandlung im Allgemeinen noch dunkel gelassen, sich aufhellen wird durch eine ausführliche Darstellung der geometrischen und arithmetischen Lehren im Besonderen, lassen wir jetzt diese folgen, und stellen die Geometrie voraus, wiewohl im Obigen die Leibniz'sche Bevorzugung der Zahl wiederum stark hervorgetreten ist; aber unsere Anordnung wird diese Bevorzugung, wenn sie sich weiter finden sollte, nicht nur nicht verdecken, sondern erst recht hervorspringen lassen.

3. Abschnitt: Geometrie.

A. Philosophische Schriften:

1. Ihre Begriffe sind deutlich, vollständig, nothwendig, angeboren. Pertz II, 1 S. 118: Wenn ich beweisen kann, dass es keine anderen Figuren des zweiten Grades giebt als die Kegelschnitte, so kommt das daher, weil ich eine deutliche Idee dieser Linien habe, welche mir ein Mittel giebt zu einer exacten Theilung. S. 294 Erdm.: Hingegen in der Geometrie, wo wir vollständige Begriffe haben (nicht wie bei Gold etc.) ist es ein anderes Ding; denn wir können beweisen, dass die begränzten Schnitte des Kegels und des Cylinders, die durch eine Ebene gemacht werden, dieselben sind, nämlich Ellipsen, und dies kann nicht unbekannt sein, wenn wir Acht darauf geben, weil die Begriffe, die wir davon haben, vollständige sind. S. 606 Erdm.: so ist es nicht mit den Dimensionen der Materie; die Dreizahl derselben ist bestimmt, nicht durch den Grund des Besseren (par la raison du meilleur), sondern durch eine geometrische Nothwendigkeit, weil die Geometer haben zeigen können, dass es nur drei gerade unter sich perpendiculäre Linien giebt, welche sich in einem und demselben Punkte schneiden können. S. 615 Erdm.: denn wenn es eine nothwendige Emanation wäre, wie die der Eigenschaften des Kreises, welche von seiner Essenz abfliessen. S. 211 Erdm.: Was aber den Satz angeht, das Viereck ist kein Kreis, — so kann man sagen, er ist angeboren; denn wenn man ihn ins Auge fasst, so macht man eine Subsumtion oder Anwendung vom Satz des Widerspruchs auf das, was der Verstand selbst liefert, sobald man inne wird, dass diese Ideen, die angeboren sind, unverträgliche Begriffe in sich schliessen.

2. Ihre Ideen und Beweise nicht aus Bildern der Einbildungskraft. S. 345 Erdm.: Dadurch, dass man in der Einbildungskraft die Winkel eines Dreiecks hat, dadurch hat man noch nicht klare Vorstellungen davon. Die Einbildungskraft kann uns nicht ein den spitz- und stumpfwinkligen Dreiecken gemeinsames Bild liefern, und doch ist die Vorstellung des Dreiecks ihnen gemeinsam. So besteht diese Idee nicht in den Bildern, und es ist nicht so leicht, wie man denken könnte, gründlich die Winkel eines Dreiecks zu verstehen. S. 381—82 Erdm.: Die Geometrie, die nur von dem ausgeht, was uns die Bilder sagen, ohne die Strenge der Beweise zu suchen durch die Definitionen

und Axiome, welche die Alten in dieser Wissenschaft gefordert haben, das ergiebt eine praktische Geometrie talis qualis, aber nicht eine für die, welche die Wissenschaft haben wollen, die selbst dienlich ist die Praxis zu vervollkommnen; das ergiebt nur eine empirische Geometrie, wie wahrscheinlich die der Aegypter und Chinesen war; was uns der schönsten physischen und mechanischen Entdeckungen würde beraubt haben, welche uns die Geometrie hat finden lassen, und die überall unbekannt sind, wo unsere Geometrie unbekannt ist. Es hat auch den Anschein, dass man, den Sinnen und ihren Bildern folgend, würde in Irrthümer gefallen sein; ungefähr wie man sieht, dass alle, die nicht in der exacten Geometrie unterrichtet sind, es als eine unzweifelhafte Wahrheit auf den Glauben ihrer Einbildungskraft hin annehmen, dass 2 Linien, die sich continuirlich nähern, sich endlich treffen müssen, wogegen die Geometer conträre Instanzen bei gewissen Linien geben, die sie Asymptoten nennen. Aber ausserdem würden wir desjenigen beraubt sein, was ich am meisten an der Geometrie schätze, rücksichtlich der Anschauung (contemplation), welches die wahre Quelle ist, die ewigen Wahrheiten sehen zu lassen, und des Mittels, uns ihre Nothwendigkeit, welche die verworrenen Vorstellungen der Sinne uns nicht zeigen können, begreiflich zu machen. Ihr werdet mir sagen, dass Euclid gleichwohl gezwungen gewesen ist sich auf gewisse Axiome zu beschränken, deren Evidenz man nur verworren mittelst der Bilder einsieht. Ich gestehe, dass er sich auf diese Axiome beschränkt hat, es war aber besser, sich auf eine kleine Anzahl von Wahrheiten dieser Art zu beschränken, die ihm die einfachsten erschienen, und die anderen von ihnen abzuleiten, als viele undemonstrirt zu lassen etc. — Begnügt man sich verworren zu sehen, so leidet die Genauigkeit der Beweise; soll die Verbindung der Ideen gesehen und deutlich ausgedrückt werden, so muss man zurückgehen auf die Definitionen und identischen Axiome; und manchmal werdet Ihr genöthigt sein, Euch mit einigen wenigen primitiven Axiomen zu begnügen, wie Euclid und Archimedes gethan haben, wenn Ihr Mühe haben werdet zu einer vollkommenen Analyse zu kommen, und Ihr werdet besser daran thun, als einige schöne Entdeckungen, die Ihr vermittelst jener bereits finden konnt, zu vernachlässigen und zu verschieben; wir hätten keine Geometrie (als beweisende Wissenschaft), wenn die Alten nicht hätten weiter gehen wollen, ehe sie die Axiome bewiesen hatten, die sie anzuwenden genöthigt waren.

S. 291 Erdm.: Vom Chiliogon hat man die Vorstellung. Wenn ich die Zahl im Zählen unterscheide, so kenne ich sehr wohl die Statur und die Eigenschaften des vorgelegten Polygons, sofern sie die des Polygons sind, und folglich habe ich die Vorstellung davon; — aber das Bild eines Chiliogons kann ich nicht haben, und man müsste viel ausgesuchtere und geübtere Sinne und Einbildungskraft haben, um es durch diese von einem Polygon zu unterscheiden, welches eine Seite weniger hätte. Aber die Kenntniss der Figuren hängt ebensowenig wie die der Zahlen von der Einbildungskraft ab, wiewohl sie dabei hilft; und ein Mathematiker kann die Natur eines Neunecks und Zehnecks genau kennen, sofern er das Mittel hat, sie zu machen und zu prüfen, ob er sie gleich mit dem Gesicht nicht unterscheiden kann. Zwar ein Arbeiter und ein Ingenieur, der vielleicht die Natur desselben nicht hinlänglich kennt, wird vor einem grossen Geometer den Vortheil voraushaben, dass er sie unterscheiden kann, blos indem er sie sieht, ohne sie zu messen, wie es Colporteure giebt, die das Gewicht von dem, was sie tragen sollen, sagen können, ohne sich um ein Pfund zu irren, worin sie den geschicktesten Statiker der Welt übertreffen. Diese empirische Kenntniss kann grossen Nutzen haben, um rasch zu handeln, wie ein Ingenieur oft thun muss wegen der Gefahr, der er sich aussetzt, wenn er anhält. Indess dies klare Bild oder dies Gefühl, das man von einem regelmässigen Zehneck oder von einem Gewicht von 99 Pfund haben kann, besteht nur in einer verworrenen Vorstellung, weil sie nicht dazu dient, die Natur oder die Eigenschaften dieses Gewichts oder dieses regelmässigen Zehnecks zu entdecken, was eine deutliche Vorstellung erfordert. Dies Beispiel dient dazu, den Unterschied der Ideen besser zu verstehen, oder vielmehr den von Idee und Bild. S. 388 Erdm.: Ich stimme aber dem nicht bei, dass in der Mathematik die Beweise, welche speziell auf die Figuren gehen, die man zieht, die allgemeine Gewissheit geben, wie Ihr es zu nehmen scheint (nämlich durch die Mittelvorstellung von der Unveränderlichkeit der nämlichen Beziehungen zwischen den nämlichen Dingen, z. B. wenn sie einmal gleich gewesen sind, so werden sie es noch sein); denn man muss wissen, dass nicht die Figuren es sind, welche den Beweis bei den Geometern geben, obwohl der ekthetische Stil das glauben macht. Die Kraft des Beweises ist unabhängig von der gezeichneten Figur, die nur gezeichnet ist, um das Verständniss von dem zu erleichtern, was man sagen will, und um die Aufmerksamkeit zu fixiren; die allgemeinen Sätze d. h. die Definitionen, die Axiome und die bereits bewiesenen Lehrsätze sind es, welche die Beweisführung ausmachen, und sie aufrecht erhalten würden, wenn sie nicht da wäre. Darum hat ein gelehrter Geometer, wie Schrubelius, die Figuren Euclids ohne ihre Buchstaben gegeben, die sie mit dem Beweis, der beigefügt ist, verbinden könnten; und ein anderer, wie Herlinus, hat dieselben Beweise auf Syllogismen und Prosyllogismen zurückgeführt. S. 381 Erdm.: Soviel Eifer die alten Geometer hatten, so sind sie doch nicht zum Ziele gekommen (bei der letzten Analyse der Vorstellungen). Euclid z. B. hat unter die Axiome gesetzt, was sich öfter gefunden hat, dass 2 gerade Linien sich nur einmal treffen können. Die Einbildung (imagination), genommen aus der Erfahrung der Sinne, erlaubt nicht, uns mehr als ein Zusammentreffen zweier geraden Linien vorzustellen, aber darauf darf die Wissenschaft nicht gegründet werden. Und wenn jemand glaubt, dass diese Einbildung die Verbindung der deutlichen Vorstellungen giebt, so ist er nicht genügend über die Quelle der Wahrheiten unterrichtet, und eine Menge Sätze, welche beweisbar sind durch andere voraufgehende, werden bei ihm für unmittelbar gelten. Diese Art Bilder sind nur verworrene Vorstellungen, und wer die gerade Linie nur durch dieses Mittel kennt, wird nicht im Stande sein, Etwas von ihr zu beweisen. Darum ist Euclid aus Mangel an einer deutlich ausgedrückten Vorstellung, d. h. einer Definition der geraden Linie, (denn die er inzwischen gegeben hat, ist dunkel und dient ihm nicht bei den Beweisen) gezwungen gewesen, auf zwei Axiome zurückzugehen, die ihm die Stelle der Definition vertreten haben, und die er in seinen Beweisen anwendet: das eine ist, dass zwei gerade Linien keine gemeinsamen Theile haben, das andere, dass sie keinen Raum einschliessen. Archimedes hat eine Art Definition der Geraden gegeben, wenn er sagt, es sei die kürzeste Linie zwischen 2 Punkten, aber er setzt stillschweigend voraus (indem er in den Beweisen solche Elemente anwendet, wie die bei Euclid, welche auf die so eben erwähnten Axiome gegründet sind), dass die Affectionen, von denen diese Axiome sprechen, der Linie, welche er definirt, zukommen.

3. Bestimmte Länge nicht in blosser Vorstellung. S. 292 Erdm.: Die Grösse hat keine Bilder in sich; diejenigen, welche man von ihr hat, hängen nur ab von der Vergleichung mit den Organen und mit den anderen Objecten, und es ist unnütz, hier die Einbildungskraft anzuwenden. S. 239 Erdm.: Es ist unmöglich, die Vorstellung einer bestimmten genauen Länge zu haben. Man kann nicht sagen und nicht im Geiste fassen, was ein Zoll oder ein Fuss ist. Man kann die Bedeutung dieser Namen nur aufbewahren durch wirkliche Masse, die man voraussetzt als sich nicht ändernd, durch die man sie immer wieder finden kann. So hat Greane, ein englischer Mathematiker, sich der ägyptischen Pyramiden bedienen wollen, welche ziemlich lang gedauert haben und augenscheinlich noch einige Zeit dauern werden, um unsere Masse zu bewahren, indem man der Nachwelt die Proportion bemerkt, die sie zu gewissen auf einer dieser Pyramiden gezeichneten Massen haben. Zwar hat man seit Kurzem gefunden, dass die Pendel dienlich sind, die Masse zu verewigen (mensuris rerum ad posteros transmittendis), wie Huygens, Mouton und Buratini haben zeigen wollen, indem sie das Verhältniss unserer Längen zu denen eines Pendels bezeichneten, welches z. B. genau eine Secunde schlägt, d. h. den 864,000sten Theil einer Umdrehung der Fixsterne oder eines astronomischen Tages. Aber bei diesem Pendelmass ist die Unvollkommenheit, dass man sich auf gewisse Länder beschränken muss; denn die Pendel haben unter der Linie eine geringere Länge nöthig, um in derselben Zeit zu schlagen. Und man muss noch die Beständigkeit des wirklich fundamentalen Masses voraussetzen, d. h. die der Dauer eines Tages oder einer Umdrehung der Erdkugel um ihre Axe und selbst die der Ursache der Schwere, von anderen Umständen nicht zu reden.

4. Art der Begriffsbestimmungen und Beweise. S. 306 Erd.: Die reale Definition lässt die Möglichkeit der Definition sehen, die nominale thut das nicht; die Definition von 2 parallelen Geraden, welche sagt, dass sie in der nämlichen Ebene sind und sich nicht treffen, wenn man sie gleich ins Unendliche verlängert, ist nur nominal; denn man könnte Anfangs zweifeln, ob es möglich ist. Wenn man aber begriffen hat, dass man eine Gerade in einer Ebene parallel zu einer gegebenen Geraden ziehen kann, vorausgesetzt dass man Acht darauf habe, dass die Spitze des Griffels, der die parallele beschreibt, immer

gleichweit entfernt von der gegebenen bleibt, so sieht man zugleich, dass es möglich ist, und warum sie diese Eigenschaft haben, sich niemals zu treffen, welche ihre nominale Definition ausmacht, die aber nur das Kennzeichen des Parallelismus ist, wenn die 2 Linien gerade sind, während sie, wenn eine wenigstens krumm wäre, von der Beschaffenheit sein könnten, sich niemals treffen zu können, und gleichwohl nicht parallel sein würden. — S. 339 Erdm.: Die Geometrie hat den Satz des Widerspruchs nothwendig in ihren Beweisen, die auf das Unmögliche führen. — S. 363 Erdm.: Die Geometrie ist ohne Zweifel eine von diesen Wissenschaften (die auf die allgemeinen Axiome gebaut sind). Euclid wendet die Axiome ausdrücklich in den Beweisen an, und das Axiom, dass 2 homogene Grössen gleich sind, wenn die eine weder grösser noch kleiner ist als die andere, ist das Fundament der Beweise von Euclid und Archimedes über die Grösse der krummen Linie.

Beweis von Axiomen. S. 81 Erdm.: Das Ganze ist grösser als der Theil.

1. Def.: kleiner ist, was dem Theil eines Anderen (des Grösseren) gleich ist;
2. Ax., identisch: jedes ist sich selbst gleich, $a = a$.

Beweis: Was dem Theil eines Ganzen gleich ist, das ist kleiner als das Ganze (nach 1);
der Theil eines Ganzen ist gleich dem Theil eines Ganzen.

Also ist der Theil des Ganzen kleiner als das Ganze. —

Maximen. S. 368 Erdm.: Der Geist, welcher die Einheit in der Vielheit liebt, fügt einige von den Folgerungen zusammen, um Mittel-Schlüsse zu bilden, und das ist der Gebrauch der Maximen und Theoreme; — solche geometrische Maximen sind z. B. der pythagoreische Satz, und der, dass die entsprechenden Seiten ähnlicher Dreiecke proportional sind. Ibid: Ohne die Maximen und schon bekannten Lehrsätze würden die Mathematiker viele Mühe haben vorwärts zu kommen. —

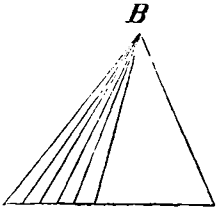
Beweis. S. 393 Erdm.: Gewöhnlich erscheint der erste Grad (Locke's), der, die Beweise zu entdecken, nicht so, wie es zu wünschen wäre. Es sind Synthesen, die gefunden worden sind manchmal ohne Analyse, und manchmal ist die Analyse unterdrückt worden. Die Geometer stellen in ihren Beweisen zuerst den Satz auf, der bewiesen werden soll, und um zum

Beweis zu kommen, stellen sie in einer Figur hin, was gegeben ist. Dies nennt man die Ekthese. Hierauf kommen sie zur Vorbereitung und ziehen neue Linien, die sie für die Beweisführung nöthig haben, und oft besteht die grösste Kunst darin, diese Vorbereitung zu finden. Ist dies gethan, so machen sie die Beweisführung selbst, indem sie Folgerungen aus dem ziehen, was in der Ekthese gegeben ist, und aus dem, was durch die Vorbereitung hinzugefügt worden ist; und indem sie zu diesem Zweck die bereits bekannten oder bewiesenen Wahrheiten anwenden, kommen sie zum Schluss. Es giebt aber Eälle, wo man sich der Ekthese und der Vorbereitung überhebt. — S. 397 Erdm.: In dem Beweis (47 Euclid 1), der das Quadrat der Hypotenuse gleich zeigt den Quadraten der Seiten, theilt man das grosse Quadrat in Stücke .und die 2 kleinen auch, und es findet sich, dass die Stücke der 2 kleinen Quadrate sich alle in dem grossen finden können und weder mehr noch weniger. Das heisst die Gleichheit in forma beweisen, und die Gleichheit der Stücke wird auch durch Argumente in guter Form bewiesen. Die Analyse der Alten war nach Pappus: das anzunehmen, wonach man fragt, und daraus Folgerungen zu ziehen, bis man auf etwas Gegebenes oder Bekanntes kommt. Ich habe bemerkt, dass zu diesem Effect die Sätze reciprok sein müssen, damit der synthetische Beweis rückwärts die Spuren der Analyse durchgehen kann, aber es ist doch immer ein Ziehen von Folgerungen. S. 416 Erdm.: Selbst die Geometrie, von Euclid synthetisch behandelt als eine Wissenschaft, ist durch andere als Kunst behandelt worden, und könnte nichtsdestoweniger demonstrativisch behandelt werden unter dieser Form, die dabei selbst die Erfindung zeigen würde; wie wenn sich jemand vornähme, alle Arten von flachen Figuren zu messen, und, mit den geradlinigen anfangend, auf den Einfall käme, dass man sie in Dreiecke theilen kann, und dass jedes Dreieck die Hälfte eines Parallelogramms ist, und dass die Parallelogramme auf Rechtecke zurückgeführt werden können, deren Messung leicht ist. — S. 570 Erdm.: Es giebt eine Art Geometrie, welche Jungius von Hamburg, einer der ausgezeichnetsten Männer seiner Zeit, empirisch nannte. Sie bedient sich demonstrativischer Erfahrungen und findet mehrere Sätze Euclid's, besonders aber diejenigen, welche die Gleichheit zweier Figuren angehen, indem sie die eine in Stücke schneidet und diese Stücke wieder verbindet, um eine andere daraus zu machen.

Auf diese Art macht man, indem man die Quadrate der zwei Seiten des rechtwinkligen Dreiecks gehörig (comme il faut) in Stücke schneidet und diese Stücke gehörig ordnet, das Quadrat der Hypotenuse, d. h. hat empirisch den 47. Satz des 1. Buches von Euclid bewiesen.

5. Definitionen von Figur, Figuren, Punkt. S. 80 Erdm.: Die Figur ist nichts Anderes als eine Modification der absoluten Ausdehnung. S. 239 Erdm.: Eine Flächenfigur ist begränzt durch eine Linie oder durch Linien; die Figur eines Körpers aber kann ohne bestimmte Linien begränzt sein, wie z. B. die einer Kugel. Eine einzige gerade Linie oder ebene Fläche kann keinen Raum umschliessen und keine Figur machen. Eine einzige Linie kann aber eine ebene Figur umschliessen, z. B. Kreis, Eilinie, wie gleichfalls eine einzige krumme Fläche eine feste (solide) Figur umschliessen kann, wie die Sphäre oder das Sphäroid. Uebrigens können nicht allein mehrere gerade Linien oder ebene Flächen, sondern auch mehrere krumme Linien oder mehrere krumme Flächen zusammenlaufen und selbst Winkel unter einander bilden, sobald die eine nicht die Tangente der anderen ist. Es ist nicht leicht, die Definition der Figur im Allgemeinen zu geben, nach dem Herkommen der Geometer. Zu sagen, dass es eine begrenzte Ausdehnung ist, würde zu allgemein sein; denn eine gerade Linie z. B., obwohl begränzt durch die zwei Enden, ist keine Figur und selbst 2 gerade Linien können keine bilden. Zu sagen, es sei ein Ausgedehntes, begränzt durch ein Ausgedehntes, ist nicht allgemein genug; denn die ganze sphärische Fläche ist eine Figur, und doch ist sie nicht begränzt durch ein Ausgedehntes. Man kann noch sagen, die Figur ist ein begränztes Ausgedehntes, in welchem es eine Unendlichkeit von Wegen von einem Punkte zum anderen giebt. Dies umfasst die ohne scheidende (terminantes) Linien begränzten Flächen, welche die voraufgehende Definition nicht umfasste, und schliesst die Linien aus, weil es in einer Linie von einem Punkt zum andern nur einen Weg giebt oder eine bestimmte Anzahl von Wegen. Aber es würde noch besser sein, zu sagen, die Fignr ist ein begränztes Ausgedehntes, welches eine ausgedehnte Durchschneidung erfahren kann, oder vielmehr, welches Breite hat, ein Ausdruck, von dem man bis jetzt auch nicht die Definition gegeben hat. S. 240 Erdm.: gegen Locke, dass alle Figuren nichts anders sind als die einfachen Modi des Raumes, Theoph: die einfachen

Modi wiederholen nach Euch dieselbe Vorstellung, in den Figuren aber findet nicht immer die Wiederholung des Nämlichen statt. Die krummen Linien sind sehr verschieden von den geraden und unter einander. So weiss ich nicht, wie die Definition des einfachen Modus hier statt haben soll. — S. 331 Erdm.: Man kann eine Parabel im Sinne der Geometer dahin definiren, dass es ist eine Figur, in welcher alle einer gewissen Geraden parallelen Radien durch die Reflexion in einem gewissen Punkte oder Brennpunkte wieder vereinigt sind. Es ist aber vielmehr das Aeussere oder die Wirkung, die durch diese Vorstellungen oder Definitionen ausgedrückt ist, als das Innere dieser Figur oder das, was sofort ihren Ursprung kann erkennen lassen. Man kann selbst im Anfang zweifeln, ob eine solche Figur, wie man sie wünscht, oder die diese Wirkung machen soll, etwas Mögliches ist, und das ist es, was bei mir erkennen lässt, ob eine Definition blos nominal und von den Eigenschaften entnommen, oder ob sie auch real ist. Indess wer die Parabel nennt, und sie nur aus der Definition kennt, die ich so eben gegeben habe, versteht darum doch, wenn er von ihr redet, eine Figur, die eine gewisse Construction oder Constitution hat, die er nicht weiss, die er aber zu lernen wünscht, um sie ziehen zu können. Ein anderer, der sie mehr ergründet hat, wird irgend eine andere Eigenschaft hinzufügen, er wird z. B. entdecken, dass bei der Figur, die man verlangt, der Theil der Axe, welcher zwischen der Ordinate und dem Perpendikel, beide an demselben Punkt der Curve gezogen, gelegen ist, immer constant und gleich ist dem Abstand der Spitze (du sommet) und des Brennpunktes. So wird er eine vollkommnere Vorstellung haben als der erste, und wird leichter dahin kommen, die Figur zu ziehen, ob gleich er noch nicht bei ihr ist. Und doch wird man darüber einig sein, dass es die nämliche Figur ist, deren Constitution aber noch verborgen ist. S. 332 Erdm.: Es sind dies verständliche Modi von schwieriger Besprechung, weil wir endlich zu der inneren Constitution der geometrischen Figuren kommen können. In der That ist es sehr geschickten Geometern begegnet, dass sie nicht ausreichend gewusst haben, welches die Figuren waren, von denen sie mehrere Eigenschaften kannten, welche den Gegenstand zu erschöpfen schienen. Es gab z. B. Linien, die man Perlen nannte, von denen man selbst die Quadraturen gab und das Mass ihrer Flächen und der Körper, die durch ihre Umwälzungen gemacht werden, ehe man wusste, dass es nur eine Zusammensetzung von gewissen cubischen Paraboloiden war. So hatte man, indem man vorher diese Perlen wie eine besondere Art betrachtete, nur vorläufige Kenntnisse davon. S. 452 Erdm.: Es ist nicht nothwendig, dass es verschiedene Theile im Punkte giebt, wiewohl verschiedene Punkte daselbst endigen (y aboutissent). S. 454 Erdm.: Der mathematische Punkt ist selbst nichts anderes als ein Modus, nämlich die Extremität; — dass ein Punkt eine Lage hat, heisst nichts Anderes, als dass eine Lage (positio) bezeichnet werden kann, wo ein Körper aufhört. S. 456 Erdm.: Der Punkt ist nicht ein gewisser Theil der Materie und unendliche Punkte in Eins gesammelt würden keine Ausdehnung machen. Beweis: alle unzähligen Dreiecke laufen in Einem Punkt B zusammen. — S. 265 Erdm.: Die Asymtoten, deren scheinbarer Abstand von der geraden Linie verschwindet, ob sie gleich in der Wahrheit der Dinge ewig davon getrennt bleiben. — Pertz II, 1, S. 66: Und man kann selbst sagen, dass es keine feste (arrêtée) und genaue Gestalt an den Körpern giebt wegen der actualen Subdivision der Theile. —



B. Mathematische Schriften.

1. Ableitung der geometrischen Begriffe. Pertz III, 5, S. 141: Doch damit wir Alles methodisch (ordine) behandeln, so muss man wissen, das das Erste ist die Betrachtung des Raumes selber, d. h. des reinen absoluten Ausgedehnten; des reinen, sage ich, nämlich rein von Materie und Veränderung, des absoluten d. h. des unbeschränkten und alle Ausdehnung befassenden. Daher sind alle Punkte in demselben Raum und können auf einander bezogen werden. Ob aber dieser von der Materie unterschiedene Raum ein Ding ist oder blos eine constante Erscheinung oder Phänomen, macht hier nichts aus. Ibid: Wie der Raum die absolute Ausdehnung enthält, so drückt der Punkt das aus, was in der Ausdehnung am meisten beschränkt ist, nämlich die einfache Lage. Daraus folgt, dass der Punkt das Kleinste ist und keine Theile hat, und dass alle Punkte unter sich congruiren (oder zusammenfallen können) und dass sie somit auch ähnlich und, wenn man so sagen darf, gleich sind. Ibid: Wenn 2 Punkte gedacht werden als zugleich existirend oder so wahrgenommen werden, so wird gerade dadurch zu be-

trachten dargeboten ihre Relation auf einander, welche in je 2 anderen Punkten verschieden ist, nämlich die Relation des Ortes oder der Lage, die zwei Punkte zu einander haben, unter welcher ihre Entfernung verstanden wird. S. 145 ib.: Der Weg (durch den wir auch die Entfernung definirt haben) ist nichts anderes als ein continuirlicher successiver Ort. Und der Weg eines Punktes wird Linie genannt. — Wenn bereits 2 Punkte genommen sind, so ist eben damit bestimmt der Weg eines Punktes durch einen sowohl wie den anderen, der einfachste mögliche: diese Linie wird eine gerade genannt. Daraus leitet er die gewöhnlichen Kennzeichen der Geraden ab; unter anderen auch die, die Gerade ist einförmig wegen ihrer Einfachheit, oder sie hat dem Ganzen ähnliche Theile. S. 147 ib.: Dies Alles im Geiste zu verfolgen (consequi) ist nicht schwer, wenn auch die Figuren nur in der Einbildungskraft gezogen werden sollten, und keine andere Charaktere angewendet würden als Worte; weil aber in lang fortgesetzten Schlüssen weder die Worte, wie sie bis jetzt concipirt zu werden pflegen, exact genug sind, noch die Einbildungskraft prompt genug, deshalb haben bis jetzt die Geometer Figuren angewendet. Aber abgesehen davon, dass sie bis jetzt schwer zu zeichnen sind, und von dem Aufenthalt, der die besten Gedanken unterdessen entschwinden lässt, so werden auch oft wegen der Menge der Punkte die Schemata der Linie mit einander verwechselt, besonders wenn wir noch versuchen und forschen; deshalb können die Charaktere auf folgende Weise mit Frucht angewendet werden.

2. Von der Construction. Pertz III, 6, S. 74: Es giebt eine dreifache Construction: 1) die geometrische d. h. eine imaginäre, aber exacte; die mechanische d. h. eine reale, aber nicht exacte; und eine physische d. h. eine reale und exacte. Die geometrische enthält die Weisen, in denen Körper construirt werden können, wiewohl von Gott allein, wenn nur natürlich erkannt wird, dass sie keinen Widerspruch einschliessen, z. B. wenn ein Kreis entsteht durch die Biegung einer Geraden durch die kleinsten Theile (per minima); die mechanische enthält unsere Weisen; die physische die, in welchen die Natur die Dinge bewerkstelligen kann, d. h. welche die Körper durch sich selbst hervorbringen. Pertz III, 7, S. 252: Construction ist die Bestimmung eines gesuchten Punktes durch Ziehen von Linien; also muss die Construction für um so eleganter gelten, je ein-

facher und weniger die Linien sind, welche zu ziehen nöthig ist. S. 253 ib.: Hieraus kann man einsehen, dass die Regeln eleganter Constructionen die nämlichen sind, wie die Vorschriften der Sparsamkeit, welche aus der Oekonomiekunst genommen wird, nämlich nicht Unnöthiges zu benutzen oder etwas in unserer Gewalt stehendes Nützliche nicht unbenutzt zu lassen.

3. Probe einer lichtvollen und logischen Geometrie. Pertz III, 7, S. 260: Es ist oft von scharfsinnigen Männern bemerkt worden, dass die Geometer zwar ganz Wahres und Gewisses lehren, und dies so bestätigen, dass man die Zustimmung nicht versagen kann; dass sie aber den Geist nicht genug aufhellen (illustrare) und die Quellen der Erfindung nicht aufthun, indem der Leser sich zwar gefangen und gefesselt fühlt, aber nicht recht fassen kann, wie er in diese Netze gefallen ist; was bewirkt, dass die Menschen die Beweise der Geometer mehr bewundern als verstehen, und nicht Frucht genug aus ihnen gewinnen für die Verbesserung des Verstandes, welche auch in anderen Disciplinen nützen würde, was mir doch der vorzüglichste Nutzen der geometrischen Beweise scheint. Da mir nun bei öfterem Nachdenken hierüber sehr Vieles beigefallen ist, was dazu dienlich scheint, die Ursachen anzugeben und die Quellen aufzuschliessen, so will ich eine Probe davon in gewöhnlicher Sprache schreiben und mit freier Abfassung, wie es mir jetzt in den Sinn kommt, indem ich mir die ernstere Art der Auseinandersetzung auf eine andere Zeit aufhebe.

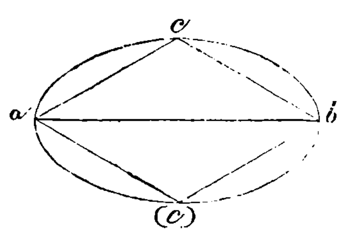
Die Geometer gebrauchen oder können gebrauchen mannichfache von anderwärts entlehnte Begriffe, nämlich von dem Selbigen und Verschiedenen oder vom Coincidenten und Nichtcoincidenten, von dem Inwohnenden und Nichtinwohnenden (de eo, quod inest etc.), vom Congruenten und Incongruenten, vom Aehnlichen und Unähnlichen, vom Ganzen und Theil, vom Gleichen, Grösseren und Kleineren, vom Zusammenhängenden oder Unterbrochenen, von Veränderung, und endlich, was ihnen eigenthümlich ist, von Lage und Ausdehnung. S. 261 ib.: Die Lehre vom Coincidenten und Nichtcoincidenten ist genau (ipsa) die Lehre von den Formen des Syllogismus. Hieraus nehmen wir, dass, was dem nämlichen Dritten coincidirt, unter einander coincidirt; wenn von 2 Coincidirenden das eine dem dritten nicht coincidirt, dass dann auch das andere ihm nicht coincidirt. So zeigt die Geometrie, etc.; folgt ein einzelner Fall.

Von der Lehre von dem, was dem anderen inwohnt, hat einen Theil auch mit Demonstrationen behandelt Aristoteles in der früheren Analytik; er hat nämlich angemerkt, dass das Prädicat dem Subject inwohnt, nämlich der Begriff des Prädicats dem Begriff des Subjects, wiewohl auch umgekehrt die Individuen des Subjects inwohnen den Individuen des Prädicats. Und es könnte noch mehr Allgemeines bewiesen werden von dem Enthaltenden und Enthaltenen oder Einexistirenden, welches von Nutzen sein würde sowohl in Logik als auch in Geometrie, etc.

Es folgt die Lehre vom Bestimmten und Unbestimmten, wenn nämlich in Folge gewisser Daten das Gesuchte so umschrieben ist, dass nur ein Einziges gefunden werden kann, welches diesen Bedingungen Genüge thut. Es giebt auch ein Halbbestimmtes, wenn zwar nicht ein Einziges, sondern Mehreres, jedoch von fester Zahl oder an Zahl endlich aufgezeigt werden kann, das Genüge thue etc.

S. 263 ib.: Congruent ist, was auf keine Weise kann unterschieden werden, wenn es für sich betrachtet wird, wie in Figur 40 die 2 Dreiecke *abc* und *ab(c)*, bei denen nichts hindert, dass eines auf das andere gelegt werde (applicari), so dass sie zusammenfallen. Sie werden also jetzt blos durch die Lage unterschieden, oder durch die Beziehung auf irgend etwas schon durch die Lage Gegebenes, etc.

Figur 40.



4. Zu Euclids Prota. Pertz III, 5 S. 183: Zu den Definitionen des 1. Buches.

I. „Ein Punkt ist, worin es keine Theile giebt.“

Man muss hinzusetzen „was eine Lage hat“, sonst würde auch ein Augenblick der Zeit und die Seele ein Punkt sein.

II. „Eine Linie ist eine Länge ohne Breite.“

Es hätte müssen definirt werden, was Länge und Breite sei, damit es nicht scheine, dass etwas Dunkles durch ein gleich Dunkles erklärt werde. Ich möchte also so definirt haben: eine Linie ist eine Grösse, deren Schnitt (sectio) keine Grösse ist. Und von dieser Grösse kann man sagen, sie ist ohne Breite, da die Breite nichts anderes ist als die Quantität des Schnittes, die Länge aber die, in welcher (secundum quam) der Schnitt nicht gemacht wird.

S. 190 ib. Ein ebener Winkel ist die Neigung zweier Linien, die sich in einer Ebene wechselseitig berühren und nicht gerade (in directum) liegen, zu einander.

S. 206 zu den Axiomen des 1. Buches von Euclid.

Axiom I: Was mit demselben gleich ist, ist auch unter einander gleich. Und was grösser oder kleiner ist als Eines der Gleichen, ist auch grösser und kleiner als das andere der Gleichen.

Axiom II: Wenn Gleiches zu Gleichem hinzugefügt wird, so ist auch das Ganze gleich.

Axiom 3, 4, 5, 6, 7 sollen ausgeschrieben werden.

(1) Dies alles kann auch aus der Definition von gleich (aequalium) bewiesen werden, wenn nämlich gleich das ist, bei dem eins dem anderen substituirt werden kann ohne Aenderung (salva) der Quantität.

5. Einzelne Lehren: Ganzes und Theil, Aehnlich und Unähnlich u. dgl. Pertz III, 7 S. 274: Es ist offenbar, dass das Ganze im Theil ist oder dass, wenn das Ganze gesetzt ist, ebendadurch der Theil unmittelbar gesetzt wird, oder wenn der Theil gesetzt ist mit einigen anderen Theilen, dass ebendadurch das Ganze gesetzt wird, so dass die Theile, zusammen mit ihrer Setzung (positione) genommen, nur dem Namen nach vom Ganzen verschieden sind, und der Name des Ganzen nur der Abkürzung halber für sie selbst in Rechnung gesetzt wird. Es giebt auch Einiges, was einwohnt (insunt), obgleich es nicht Theile sind, wie die Punkte, die in einer Geraden angenommen werden können, der Durchmesser, welcher in einem Kreis kann angenommen werden; daher muss der Theil dem Ganzen homogen sein, und wenn somit die 2 A uud B homogen sind und in A selbst B ist, so wird A das Ganze sein und B der Theil, und somit können die anderwärts von mir gegebenen Beweise über das Enthaltende und Enthaltene oder Einexistirende auf das Ganze und den Theil übertragen werden.

S. 275: Nachdem wir von der Grösse und der Gleichheit gesprochen haben, ist es Zeit auch von der Species oder Form und Aehnlichem zu reden; denn die Anwendung der Aehnlichkeit in der Geometrie ist sehr gross, ihre Natur aber wird als nicht genügend entwickelt erachtet (habetur), weshalb Vieles mit Umschweifen bewiesen wird, was bei richtiger Betrachtung sofort beim ersten Blick klar ist. — Es steht aus dem Buche

Euclids über die Data fest, dass Einiges gegeben ist der Lage nach (positione), Einiges der Grösse nach (magnitudine), Einiges der Gestalt nach (specie). Wenn Etwas aus gewissen Daten der Lage nach gegeben wird, dann wird ein Anderes, welches aus Demselben auf dieselbe (bestimmte) Weise gegeben wird, dem ersten coincident sein oder dasselbe der Zahl nach; wenn Etwas aus Einigem der Grösse nach gegeben ist, und ein Anderes aus demselben oder Gleichem auf dieselbe (bestimmte) Weise gegeben wird, so wird es dem ersten gleich sein; wenn Etwas aus Einigem der Gestalt nach gegeben wird, und ein Anderes aus Demselben oder Aehnlichem auf dieselbe (bestimmte) Weise gegeben wird, so wird es von derselben Gestalt (species) mit dem ersten sein oder ähnlich. Endlich was ähnlich und gleich ist, ist congruent. Und was nach Grösse und Gestalt gleicherweise gegeben ist, von dem kann man sagen, es sei exemplarisch oder typisch gegeben, so dass, was von demselben Typus oder Exempel ist, d. h. gleicherweise von derselben Qualität oder Form und Quantität, dies congruent genannt wird. Ferner, was auf keine Weise unterschieden werden kann, weder durch sich noch durch Anderes, das ist durchaus dasselbige oder coincident, und von solcher Art ist bei den Dingen, bei welchen nichts betrachtet wird als ihre Ausdehnung, dasjenige, was dieselbe Position hat und was demselben Ort actu congruirt. Es giebt aber Einiges, was in allem übereinkommt, oder von demselben Typus oder Exempel, und doch der Zahl nach verschieden ist, wie gleiche Geraden, 2 in allem ähnliche Eier, 2 Siegel, die in gleichförmiges Wachs aus demselben Typus abgedrückt sind. Hieraus ist offenbar, dass sie, an sich betrachtet, auf keine Weise können unterschieden werden, wiewohl sie unter einander können verglichen werden. S. 275—76 ib: Sie werden also blos durch ihre Lage gegen Aeusseres unterschieden. Wenn z. B. 2 Eier vollkommen ähnlich und gleich sind, und neben einander gestellt werden, so kann wenigstens eins bezeichnet werden als östlicher oder westlicher als das andere, oder nördlicher oder südlicher, oder als mehr oben oder mehr unten oder damit, dass eins einem ausser ihm gelegenen Körper näher ist. Und das wird congruent genannt, was von der Art ist, dass gar nichts von dem einen kann behauptet werden, ohne dass es auch vom andern verstanden werden kann, mit dem blossen Unterschied der Zahl oder des Individuums oder der Lage, welche jedes in einer bestimmten Zeit hat, weil weder Mehreres zur nämlichen Zeit im nämlichen Orte ist noch das Nämliche an mehreren Orten. Aehnlich aber ist das, dessen Gestalt oder Definition die nämliche ist, oder was zur nämlichen untersten Art gehört, wie alle beliebigen Kreise von derselben Art sind, und die nämliche Definition allen zukömmt, und der Kreis nicht in verschiedene Species untergetheilt werden kann, welche sich irgendwie durch die Definition unterschieden. Denn wiewohl es einen Kreis von einem Fuss geben kann und einen anderen von einem halben Fuss etc., so kann doch von Fuss keine Definition gegeben werden, sondern man braucht einen festen und beharrenden Typus; deshalb pflegt man die Masse der Dinge aus dauerhafter Materie zu machen, und es hat darum jemand vorgeschlagen, die Pyramiden von Aegypten dazu zu verwenden, welche so viele Jahrhunderte schon gedauert haben und wahrscheinlich noch dauern werden. — Wenn aber Gott alles veränderte mit Beibehaltung derselben Proportion, so würde uns jedes Mass verloren sein, und wir könnten nicht wissen, wie weit die Dinge verändert sind, weil kein Mass in sicherer Definition befasst und somit auch nicht im Gedächtniss festgehalten werden kann, sondern seine reale Erhaltung nöthig ist. Aus allem diesem ist, glaube ich, der Unterschied zwischen Grösse und Gestalt (species) oder zwischen Quantität und Qualität klar." —

Das sind die Hauptsätze von Leibniz über Geometrie; wir betrachten sie im Anschluss an das beim vorigen Abschnitt Bemerkte. Zunächst ist aus A 2 ersichtlich, dass ihm die geometrischen Ideen wirkliche Begriffe sind, d. h. Vorstellungen, welche mehreren Dingen gemeinsam sind, z. B. die Idee des Dreiecks ist nach ihm nicht eine Vorstellung der Einbildungskraft, denn sonst, sagt er, müsste es ein Bild in der Einbildungskraft geben, welches den spitzwinkligen und den stumpfwinkligen Dreiecken gemeinsam wäre; dies aber vermag die Einbildungskraft nicht. Die Geometrie stammt aber auch nicht aus den Sinnen; denn das ergäbe keine Genauigkeit; bleibt also, dass sie auf Verstandesbegriffen gegründet ist. Zwar die Evidenz der euclidischen Axiome wird nur verworren mittelst der Bilder eingesehen, aber man thut gut daran, einstweilen mit Voraussetzung derselben alles Uebrige zu beweisen. Man muss auf Definitionen und identische Axiome zurückgehen, und wird manchmal besser thun Euclid's Beispiel zu folgen, als zu warten, bis man die Axiome bewiesen hat. Die Kenntniss der Figuren hängt nicht von der Einbildungskraft ab, wiewohl sie dabei hilft. Wenn so die Geometrie nicht in den Sinnen und nicht in der Einbildungskraft ihre Quelle hat, sondern im Verstande, wie ist denn diese Quelle beschaffen, in welcher Weise fliessen aus ihr die geometrischen Wahrheiten? Sieht man im Einzelnen nach, z. B. wie er unter A 4 das Axiom beweist, das Ganze ist grösser als der Theil, so findet man, dass dieser Beweis, abgesehen von dem Satz $a = a$, welcher die unentbehrliche Bedingung aller Art von Erkenntniss ist, wesentlich und ausschliesslich beruht auf der Definition: kleiner ist, was dem Theil eines Anderen (des Grösseren) gleich ist. Diese Definition aber und die in ihr vorkommenden Begriffe: kleiner, grösser, Theil, gleich, ist gegründet auf Anschauung des Geistes in räumlichen Verhältnissen und anders hat man keine Vorstellung davon. Die reale Definition der Parallelen unter A 4 wäre nach Leibniz ganz untauglich, wenn die Beschreibung mit dem Griffel als die Quelle der Wahrnehmung dieser Eigenschaften gelten sollte, der Geist, welcher den Griffel lenkt und in sich und aus sich sieht, dass man Linien so und so ziehen kann, wenn auch die wirklichen gezogenen seiner Vorstellung nicht ganz entsprechen würden, diese innere Anschauung, die freilich eine thätige und gedankenmässige ist, sie ist die Quelle des Satzes. Unter B 1 verfährt daher Leibniz auch ganz construirend, d. h. er setzt den absoluten und reinen Raum voraus, zunächst mathematisch d. h. allerdings nach seiner Weise, indem er bloss die Wahl lässt, dass dieser Raum entweder ein von der Materie unterschiedenes Ding sei oder aber eine constante Erscheinung und ein Phänomen, also etwas, was uns so vorkommt, ohne doch zu sein; die dritte Möglichkeit, den Raum geometrisch zunächst als eine freie, innerlich gegebene Anschauung zu fassen, war ihm entgangen. Auch Punkt und Linie erhält er dort nicht anders als durch Zurückgehen auf ein angenommenes Kleinste der Ausdehnung und durch Fortgehen zwischen 2 Punkten und zwar durch das einfachste mögliche, also nach Versuch von mehreren, die gerade Linie. An der Stelle ist ihm Einbildungskraft und Wort schon recht als Mittel des Verständnisses, nur das Zeichnen, das äussere, der Figuren möchte er durch etwas Bequemeres und Uebersichtlicheres ersetzt haben. — Indess wenn auch die Elemente wesentlich ihre Evidenz zur Zeit noch der Einbildungskraft verdankten, so sollten doch die Lehrsätze im

Verstande gegründet sein; aber man sehe nur, wie Leibniz unter A 4 die Hülfslinien als das Wichtigste zum Beweis nennt, und gehe den von ihm selbst angeführten Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes bei Euclid durch, ob er nicht mit der Anschauung geführt wird, aber freilich nach den Regeln der Logik, sofern diese überhaupt bei allem Denken dabei sind und speziell gewöhnlich an der Mathematik ihre klärste Rechtfertigung finden. Es ist noch zu beachten, dass das, was Leibniz die empirische Geometrie des Jungius nennt, im Grunde dasselbe ist, wie der Beweis Euclids. Das logische Element der Geometrie schien indess Leibniz so überwiegend, dass er B 3 in den Proben einer lichtvollen Geometrie dies Lichtvolle sucht in einer Zurückführung auf die Logik, aber so wie er zum Congruenten kommt, bricht die Anschauung allein durch oder der Begriff wird falsch. Seine Ergänzungen zu Euclid's Prota B 4 sind keine Verbesserung; während Euclids Länge ohne Breite leicht in der geistigen Anschauung verstanden wird, ist die Leibniz'sche Verbesserung, Grösse, deren Schnitt keine Grösse ist, erstens viel unverständlicher und mehr mechanisch — denn man muss die Grösse darauf hin untersuchen und so erst finden, welche von ihnen für eine Linie gelten kann, — und zweitens muss man bei Grösse doch sofort an Linie denken, um nicht ins Weite oder in ganz Anderes abzuirren. Auch die einzelnen Lehren unter B 5 tragen nichts von besonderer Deutlichkeit an sich und würden ohne die entwerfende Anschauung ohne Bedeutung bleiben. So können wir die Leibniz'sche Auffassung der Geometrie als beruhend auf Definitionen von Begriffen und die Darstellung ihrer Beweismethode als einer wesentlich logischen als verfehlte Erklärungsversuche betrachten; die Beweise sind logisch, aber das ist nicht ihr Eigenthümliches — dies ist die construirende Anschauung, welche sich in der logischen Form blos darlegt, die Definitionen sind logisch, aber ihr Inhalt enthält die Grundelemente jener Anschauung; diese Anschauung ist ebenso sehr thätig d. h. machend, wie leidend d. h. das Gegebene in sich findend. Diese Anschauung ist durchaus nicht immer eine vollständig bestimmte; sie bestimmt beim Winkel nichts als die Neigung der Schenkel zu einander und lässt die Grösse desselben mit Bewusstsein unbestimmt, weil sie zum Winkel als solchem nichts austrägt. Die geistige Anschauung des Dreiecks ist mehr eine Vorschrift, eine solche Figur durch 3 Linien zu construiren, als ein ausgeführtes

Bild; daher ist es durchaus nicht nöthig ein Gemeinbild vom spitz- und stumpfwinkligen Dreieck zu haben. Dass es schwer ist, die Definitionen von Figur und Figuren genau und umfassend zu finden, beweist nicht, dass die Geometrie auf Begriffen ruht, sondern zeigt blos, dass die logische Behandlung und die methodische Bearbeitung dieser keineswegs trägen, sondern der Uebung und Anstrengung bedürfenden Anschauung eben thatsächlich nicht leicht ist. — Von grosser Bedeutung ist der Gedanke, dass eine bestimmte Länge, wie Fuss, Zoll, nicht in der blossen Vorstellung wurzelt, sondern in wirklichen, aussen gegebenen Massen ihre Stätte hat. Der Gedanke ist uns bereits bei Hobbes begegnet; er bringt die Erkenntniss der Sinne auch in der Geometrie zu Ehren, sofern sie die Kunst zu messen ist, und ist das Gegenstück zu der Art, wie Descartes die Sinnesempfindungen in der Ethik zu Ehren brachte, als welche den Geist und seine Gedanken festhalten und zum Verweilen bringen. Der Anschauungstheorie in der Geometrie thut der Gedanke keinen Eintrag; denn die geraden Linien und ihre Verbindungen, der Kreis u. s. w., haben ihre Eigenschaften als Grössen und nicht als so und soviel zöllige Grössen, und die freie Erfindung in der Verwendung der mathematischen Begriffe wird dadurch nicht eingeengt, und unter der Annahme und bei der Behandlung bestimmter Grössen wird das der Geometrie eingeborne freie Element keineswegs beeinträchtigt. —

4. Abschnitt: Arithmetik, gewohnliche.

A. Philosophische Schriften.

1. Die Zahl ist Idea adäquata und angeboren, muss aber gelernt werden. S. 294 Erdm.: Eine adäquate Idee ist die, welche so deutlich ist, dass alles, was in ihr vorkommt, deutlich ist; von dieser Art ist so ziemlich die Idee der Zahl. S. 212 Erdm.: Es ist nicht wahr, dass alles, was man lernt, nicht angeboren sei; — die Wahrheiten der Zahlen sind in uns, und nichts destoweniger lernt man sie, sei es, indem man sie aus ihrer Quelle zieht, wenn man sie auf beweisende Art lernt (was eben zeigt, dass sie angeboren sind), sei es, indem man sie in den Beispielen erprobt, wie es die gewöhnlichen Rechenmeister machen, die ihre Regeln durch Ueberlieferung lernen,

da sie ihre Gründe nicht wissen. S. 209 Erdm.: Die, welche gelernt haben bis 10 zu zählen, und die Art wissen weiter zu gehen durch eine gewisse Replication von Zehnern, verstehen ohne Mühe, was 18, 19, 37 ist, nämlich einmal, zwei- oder dreimal 10 mit 8, 9 oder 7; aber um daraus den Schluss zu ziehen, dass $18 + 19 = 37$ macht, dazu ist vielmehr Aufmerksamkeit erforderlich, als zu erkennen, dass $2 + 1 = 3$ sind, was im Grunde nichts ist als die Definition von 3.

2. Definitionen und Modi bei Zahlen; Zahlen sind entia. S. 340 Erdm.: Drei ist soviel wie 2 und 1, — das ist nur die Definition des Terminus 3; denn die einfachsten Definitionen der Zahlen werden auf diese Weise gebildet: 2 ist 1 und 1, 4 ist 3 und 1, u. s. f. Allerdings ist dabei eine verschwiegene Behauptung, nämlich, dass diese Vorstellungen möglich sind; und dies wird hier intuitiv erkannt, so dass man sageu kann, eine intuitive Erkenntniss ist in den Definitionen begriffen, sobald sich ihre Möglichkeit sofort zeigt. S. 361 Erdm.: 1 und 1 macht 2, dies ist nicht eigentlich ein Urtheil, sondern die Definition von 2, obgleich dies von Wahrem und Einleuchtendem daran ist, dass es die Definition einer möglichen Sache ist; was das Axiom Euclid's anlangt (gleich von gleich giebt gleich), wenn es auf die Finger der Hand angewendet wird, so will ich zugeben, dass es ebenso leicht ist, das zu verstehen, was Ihr von den Fingern sagt, wie es von A und B einzusehen; aber um nicht oft dasselbe zn thun, bezeichnet man es allgemein, und hernach genügt es, Subsumtionen zu machen. S. 243 Erdm. Phil.: Die verschiedenen Modi der Zahl sind keiner anderen Verschiedenheit fähig als des mehr oder weniger, darum sind es einfache Modi wie die des Raumes. Theoph: Das kann man von der Zeit und der geraden Linie sagen, aber keinesfalls von den Figuren und noch weniger von den Zahleu, die nicht blos verschieden sind an Grösse, sondern auch unähnlich. Eine gerade Zahl kann in zwei auf gleiche Weise getheilt werden, und nicht eine ungrade, 3 und 6 sind trianguläre Zahlen, 4 und 9 sind Quadrate, 8 ist ein Cubus u. s. f., und dies findet bei den Zahlen noch mehr statt als bei den Figuren; denn 2 ungleiche Figuren können einander vollkommen ähnlich sein, aber niemals zwei Zahlen; doch wundere ich mich nicht, dass man sich hierüber oft täuscht, weil man gewöhnlich keine deutliche Vorstellung von dem hat, was ähnlich oder unähnlich ist. Ihr seht also, dass

Eure Vorstellung oder Eure Anwendung der einfachen Modification oder der gemischten eine Verbesserung sehr nöthig hat. — S. 435: Die Zahlen, Einheiten, Brüche haben die Natur von Relationen, und können soweit entia genannt werden. Der Bruch der Einheit ist nicht weniger ein ens als die Einheit selbst.

3. Beweise und Kunstgriffe beim Zählen. S. 363 Erdm.: Es ist keine unmittelbare Wahrheit, dass 2 und 2 = 4 sind; vorausgesetzt, dass 4 bezeichnet 3 und 1. Man kann sie beweisen und zwar so:

Definitionen 1) 2 ist 1 und 1.
2) 3 ist 2 und 1.
3) 4 ist 3 und 1.

Axiom: gleiche Dinge an die Stelle gesetzt, bleibt Gleiches.

Beweis: 2 u. 2 ist 2 u. 1 u. 1 (nach Def. 1);
2 u. 1 u. 1 ist 3 u. 1 (nach Def. 2);
3 u. 1 ist 4 (nach 3).

Also (nach dem Axiom) ist 2 und 2 = 4. W. z. b. S. 237 Erdm.: Was die genaue Menge anlangt, so können die Menschen selbst die Zahlen der Dinge nur durch eine gewisse Kunstfertigkeit wissen, wie wenn sie sich der Zahlwörter bedienen, um zu zählen, oder der Vertheilungen in einer Figur, welche sofort, ohne dass man zählt, erkennen lassen, ob etwas fehlt. S. 243 Erdm.: Auf diese Art allein (Einheit zu Einheit zu thun und Namen geben = zählen) kann man nicht weit gehen. Denn das Gedächtniss würde zu sehr belastet werden, wenn man einen ganz neuen Namen für jede Hinzufügung einer neuen Einheit behalten müsste. Darum hat man eine gewisse Ordnung und eine gewisse Replication in diesen Namen nöthig, indem man nach einer gewissen Progression wieder anfängt. S. 244 Erdm. zu dem Vorschlag zu sagen: Billion, Trillion bis Nonillion, Theoph: Diese Bezeichnungen sind recht gut. Es sei X = 10; dies angenommen ist eine Million X^6, eine Billion X^{12}, eine Trillion X^{18}, und eine Nonillion X^{24}.

4. Schwierigkeiten bei den Zahlen S. 399 Erdm.: Auch macht die Menge der Betrachtungen, dass die Wissenschaft der Zahlen sehr grosse Schwierigkeiten hat. Denn man sucht Abkürzungen, und man weiss zuweilen nicht, ob sie die Natur für den Fall, um den es sich handelt, in ihren Falten (replis) hat. Z. B. was giebt es dem Anschein nach Einfacheres als den Begriff der Primzahl? d. h. einer ganzen Zahl, die durch jede

andere untheilbar ist ausser durch die Einheit und sich selber. Indessen sucht man noch ein positives und leichtes Kennzeichen, um sie sicher zu erkennen, ohne alle primitive Divisoren zu versuchen, welche kleiner sind als die Quadratwurzeln der gegebenen Primzahl. Es giebt eine Menge von Kennzeichen, die ohne viel Rechnen erkennen lassen, dass die und die Zahl keine Primzahl ist, man sucht aber eines, das leicht wäre und sicher erkennen liesse, dass es eine Primzahl ist, wenn es eine ist. Dies macht auch, dass die Algebra noch so unvollkommen ist, ob es gleich nichts Bekannteres giebt, als die Ideen, deren sie sich bedient, weil sie nur Zahlen im Allgemeinen bedeuten; denn das Publicum hat noch nicht das Mittel, die irrationalen Wurzeln einer Gleichung über den 4ten Grad hinaus auszuziehen (ausser in einem sehr beschränkten Fall), und die Methode, deren Diophant, Scipion, Du Fer und Ludwig v. Ferrara sich bedient haben beziehungsweise für den 2., 3. und 4. Grad, um sie auf den 1sten zurückzuführen, sind alle verschieden unter einander, d. h. die, welche für einen Grad dient, ist einen Grad verschieden von der, welche für den anderen dient. Denn der 2te Grad oder der der Quadratgleichung wird auf den ersten zurückgeführt, blos indem man den 2ten Ausdruck wegnimmt. Der 3te Grad oder der der cubischen Gleichung ist aufgelöst worden, weil, wenn man die unbekannte in Theile zerlegt, glücklicherweise eine Gleichung des 2ten Grades herauskommt. Und im 4ten Grad oder dem des Biquadrats fügt man Etwas auf beiden Seiten hinzu, um sie auf beiden Seiten ausziehbar zu machen; und es findet sich weiter glücklicherweise, dass, um dies zu erhalten, man blos eine cubische Gleichung nöthig hat. Dies Alles aber ist nur eine Mischung von Glück oder Zufall mit Kunst und Methode; und als man es mit den 2 letzten Graden versuchte, wusste man nicht, ob es gelingen werde. Auch braucht man noch irgend welchen anderen Kunstgriff, um den 5. und 6. Grad mit Erfolg zu behandeln, welche zu den sursoliden und bicubischen gehören; und obwohl Descartes geglaubt hat, die Methode, deren er sich beim 4. Grad bedient, indem er die Gleichung betrachtet als hervorgebracht durch 2 quadratische Gleichungen (was im Grunde nicht mehr geben kann als die von L. v. Ferrara), werde auch beim 6. von Erfolg sein, so hat sich dies nicht so gefunden. Diese Schwierigkeit lässt erkennen, dass sogar die klarsten und deutlichsten Vorstellungen uns nicht immer Alles geben, was man verlangt, und alles, was man aus ihnen ziehen kann; und dies lässt weiter urtheilen, dass viel daran fehlt, dass die Algebra die Erfindungskunst sei, weil sie selbst eine allgemeinere Kunst nöthig hat; man kann selbst sagen, dass die spécieuse im Allgemeinen, d. h. die Kunst der Zeichen eine wunderbare Hülfe ist, weil sie die Einbildungskraft entlastet. Man wird nicht zweifeln, wenn man die Arithmetik von Diophantes und die geometrischen Bücher von Apollonius von Perga und Pappus sieht, dass die Alten etwas davon hatten. Viéta hat dem mehr Ausdehnung gegeben, indem er nicht blos das, was gesucht wird, sondern auch noch die gegebenen Zahlen durch allgemeine Zeichen ausdrückt, indem er beim Rechnen das thut, was Euclid bereits im Schliessen that; und Descartes hat die Anwendung dieses Calcüls auf die Geometrie ausgedehnt, indem er die Linien durch Gleichungen bezeichnet. Uebrigens hat auch noch nach der Entdeckung unserer modernen Algebra Bouillaud (Ismaël Bullialdus), ein ohne Zweifel ausgezeichneter Geometer, nur mit Staunen die Beweise des Archimedes über die Spirale betrachtet und konnte nicht begreifen, wie dieser grosse Mann auf den Einfall gekommen war, die Tangente dieser Linie für die Dimension des Kreises zu verwenden. Der Pater Gregorius von St. Vincent scheint es schon geahnt zu haben, indem er urtheilt, er sei dazu gekommen durch den Parallelismus der Spirale mit der Parabel. Dieser Weg aber ist nur ein particulärer, während der neue Calcül der Infinitesimalen, der mit den Differenzen vorgeht, auf den ich gekommen bin und den ich dem Publicum mitgetheilt habe, einen allgemeinen giebt, wo diese Entdeckung mit der Spirale nur ein Spiel ist und einer der leichtesten Versuche, wie fast Alles, was man vorher in Sachen der Dimensionen der Curven gefunden hatte. Der Grund des Vortheils dieses neuen Calcüls ist noch, dass er die Einbildungskraft entlastet in den Problemen, welche Descartes aus seiner Geometrie ausgeschlossen hatte unter dem Vorwand, dass sie zum grössten Theil auf das Mechanische führten, weil sie zu seinem Calcül nicht passten.

B. Mathematische Schriften.

1. Zahlzeichen. Pertz III, 7, S. 17.: — mich begnügend hinzuzufügen, — dass das allgemeine Instrument menschlicher Erfindung passende Zeichen (characteres) sind, was hinreichend klar ist am Beispiel der Arithmetik und Algebra und selbst der Geometrie; denn der Verstand muss wie durch einen sinnlich-

wahrnehmbaren (sensibili) Faden regiert werden, damit er nicht in Irrgänge schweift, und da er vieles nicht auf einmal deutlich umfassen kann, so schont er, durch Anwendung der Zeichen für die Dinge, die Einbildungskraft: es ist jedoch ein grosser Unterschied, wie die Zeichen angewendet werden, um die Dinge mit Nutzen darzustellen (referant); und schon jetzt gestehe ich, dass, wieviel ich nun zu den mathematischen Erfindungen hinzugethan haben mag, dies seine Entstehung blos dem verdankt, dass ich den Gebrauch der Symbole, welche Quantitäten vorstellen, verbessert habe. Pertz III, 4, S. 461: ohne Zweifel, weil die arabischen Zeichen (characteres) bequemer sind, d. h. die Genesis der Zahl besser ausdrücken.

2. Proben von Rechnungsarten. Pertz III, 5, S. 78: Addition, Definition: Wenn mehrere Grössen einfach (simpliciter) gesetzt sind, z. B. a, b, und eben dadurch eine neue ihnen homogene, z. B. m entsteht, so wird die Operation Addition genannt; die neue Gleichung (aequatio) heisst Summe, und die Darstellung wird so sein: $a + b = + m$. $+$ oder plus ist das Zeichen der Addition, d. h. der einfachen Setzung. Dasselbe gilt bei Mehreren, z. B. wenn $+ a + b + c = m$.

Scholium. Die Sache kommt nämlich hinaus auf eine einfache Addition der Zahlen, durch welche wegen der nämlichen für die Einheit gesetzten Sachen die Grössen ausgedrückt werden.

Theorem: $+ a + b = + b + a$
ist klar aus dem Voraufgehenden, weil es dort keinen Unterschied macht, in welcher Ordnung sie gestellt werden; es genügt, dass eins mit dem anderen gesetzt wird.“ —

In den Worten von Leibniz, die Definition: 1 und 1 macht 2, ist das von Wahrem und Einleuchtendem, dass es die Definition einer möglichen Sache ist, bricht zum ersten Mal im Mathematischen die Anschauungsgrundlage desselben durch; denn woher weiss man, dass es möglich ist? ist es eine geheime Stimme, die nur leise, aber vernehmlich sagt: es ist möglich? nein, es ist nicht Ahnung, auch nicht sittliche Ueberzeugung, was uns die Wahrheit hier kund thut, sondern wir mögen es in äusserer oder innerer Anschauung probiren, so finden wir kein anderes Ergebniss und sehen nicht ab, wie wir ein anderes finden könnten, als dass, wer der Vorstellung von 1 und 1 fähig ist und ferner deren Zusammenfassung zu einer neuen Vorstellung, nur auf die von 2 kommen kann. Daher ist es sehr wahr, was Leibniz bemerkt, dass die Zahlen angeboren seien und doch gelernt werden müssten, a priori ist die Anschauung, auf der sie beruhen, aber diese Anschauung muss erzeugt werden, und um weiter in ihr zu kommen, muss man mit den Elementen experimentiren; das Eigenthümliche ist aber, dass man sie nicht von aussen zum Experiment herbeiholen muss, sondern sie innerlich hat, aber zusammenbringen muss, damit sie ihre Beschaffenheiten unter einander offenbaren. Dass die Zeichen soviel zur Zahlenkunst ausmachen, beweist blos, wie schwach unser Gedächtniss, also auch das für die anschauende Erkenntniss in der Regel ist. Was Leibniz wieder den Beweis nennt dafür, dass 2 und $2 = 4$ ist, ist nichts als die Auflösung in die früheren Anschauungen, deren Durchgehen zu der von 2 und $2 = 4$ führen kann. Auch das Theorem $+ a + b = + b + a$ wird aus der Anschauung der Sache selbst erwiesen. Eins ist bemerkenswerth: die Verehrung, welche Leibniz für den Zahlbegriff hat; die Zahl ist die klarste und deutlichste Vorstellung, die adäquate Idee, in welcher alles, was in ihr, der deutlichen, vorkommt, wiederum deutlich ist. Sollte man darnach nicht erwarten, ihre Begriffe und Methoden seien von völliger Durchsichtigkeit rückwärts und vorwärts? Leibniz hat selber die Instanzen dagegen stark betont. Und wenn wir uns erinnern, wie er bereits früher die Einheit selbst definirt: Eins ist, was wir mit Einem Act des Geistes befassen, so ist zu besorgen, dass diese Deutlichkeit blos eine formelle ist, dass über den Inhalt eines 1, ob es z. B. selbst wieder Vieles oder Eins sei, aus dem Begriff des Eins, d. h. daraus, dass wir es als Eins setzen, nichts gefolgert werden darf, dass somit die Elemente der Zahlkunst, die Einheiten, in sich selber schlechterdings undeutlich sind; mit andern Worten: man wird schliessen können: wo Dinge als viele aufgefasst werden, da sind auch Dinge mitgesetzt, welche als Einheiten aufgefasst werden; aber damit ist nicht das Mindeste gesagt, wie diese Einheiten selber sind, ob Eins, ob Vieles; weil zwar die formelle Vorstellung einer 1 sehr deutlich ist, aber ihr Inhalt an und für sich noch völlig undeutlich.

5. Abschnitt: Continuum in Geometrie und Arithmetik.

A. Philosophische Schriften. S. 451 Erdm.: im Continuum ist der Begriff eines Ausgedehnten, absolut gefasst, voraufgehend dem Begriff eines Ausgedehnten, wo die Modification beigefügt ist. S. 244 Erdm.: Wir wollen eine gerade Linie nehmen und sie verlängern, so dass sie das Doppelte von der ersten ist. Es ist nun klar, dass die zweite, weil sie der ersten vollkommen ähnlich ist, ebenfalls verdoppelt werden kann, um dann eine dritte zu haben, die wiederum den vorhergehenden ähnlich ist; und da derselbe Grund immer besteht, so ist es niemals möglich, dass man angehalten werde, so dass die Betrachtung der Unendlichkeit von der der Aehnlichkeit oder des nämlichen Grundes kommt, und ihr Ursprung der nämliche ist mit dem der allgemeinen und nothwendigen Wahrheiten. Dies lässt erkennen, dass das, was der Fassung dieser Idee Vollendung giebt, sich in uns selbst findet und nicht von den Erfahrungen der Sinne kommen kann, ganz wie die nothwendigen Wahrheiten nicht durch Induction und die Sinne bewiesen werden können. — — Man täuscht sich aber, wenn man sich einen absoluten Raum einbilden will, der da sei ein unendliches, aus Theilen zusammengesetztes Ganze. Es giebt nichts der Art. Es ist das ein Begriff, der einen Widerspruch einschliesst, und diese unendlichen Ganzen und ihre Gegensätze, die unendlich Kleinen, sind nur brauchbar (de mise) im Calcül der Geometer, ganz wie die imaginären Wurzeln der Algebra. S. 434 Erdm.: Das Continuum ist ins Unendliche theilbar. Dies ist bei der geraden Linie schon darum gewiss, weil ihr Theil dem Ganzen ähnlich ist; da also das Ganze getheilt werden kann, so wird es auch ein Theil können und in ähnlicher Weise jeder Theil des Theils. Die Punkte sind nicht Theile des Continuums, sondern Extremitäten, und es giebt ebensowenig einen kleinsten Theil der Linie als einen kleinsten Bruch der Einheit. S. 452 Erdm.: Ein derartiger Winkel (der der nächste nach dem Rechten wäre) ist eine Fiction, wie der der Einheit nächstkommende Bruch oder die der Null am nächsten kommende Zahl oder die kleinste von allen Zahlen. Die Natur der Continuirung erlaubt nicht, dass es so etwas giebt. S. 118 Erdm.: Was das Untheilbare angeht, so kann man, wenn man damit die einfachen Extremitäten der Zeit oder der Linie meint, daran nicht neue Extremitäten vorstellen, auch nicht actuelle oder potentielle Theile. So sind die Punkte weder dick (gros) noch klein, und es bedarf keines Sprunges, sie zu durchlaufen. Uebrigens ist das Continuum, wiewohl es überall solche Untheilbare hat, nicht daraus zusammengesetzt.

S. 349 u. 50 Erdm.: Die geometrischen Figuren scheinen einfacher als die moralischen Dinge, aber sie sind es nicht, weil das Continuum das Unendliche einschliesst, aus dem (d'où) man wählen muss. Z. B. ein Dreieck in 4 gleiche Theile zu zerlegen, 2 gerade über sich perpendiculäre Linien, das ist eine Frage, die einfach scheint und ziemlich schwer ist. S. 243, „bei den Zahlen sind die Ideen genauer;" dagegen Théoph: Dies muss man von der ganzen Zahl verstehen. Denn sonst ist die Zahl in ihrer weiten Bedeutung, umfassend die taube, gebrochene, transcendente und alles, was sich zwischen 2 ganzen Zahlen fassen lässt, der Linie proportional, und es giebt darin so wenig ein minimum wie im Continuum. Auch findet die Definition, wonach die Zahl eine Menge von Einheiten ist, nur statt bei ganzen Zahlen. Die genaue Definition der Vorstellungen bei der Ausdehnung besteht nicht in der Grösse; denn um genau die Grösse wieder zu erkennen, muss man auf die ganzen Zahlen zurückkommen, oder auf andere vermittelst der ganzen bekannte Zahlen; so muss man von der continuirlichen Grösse zurückgehen auf die Discrete, um eine deutliche Kenntniss der Grösse zu haben. So können die Modificationen der Ausdehnung, wenn man sich nicht der Zahlen bedient, nur durch die Figur unterschieden werden, wenn man dies Wort so allgemein nimmt, dass es Alles bezeichnet, was macht, dass 2 Ausgedehnte einander ähnlich sind.

B. Mathematische Schriften. Pertz III, 7, S. 22: Aehnlich kann auch der feste Raum oder die Masse (spatium solidum seu amplitudo) ins Unendliche continuirt werden, weil je ein Theil desselben als dem Ganzen ähnlich genommen werden kann. Daher wird auch die Ebene und die Gerade ins Unendliche continuirt. Auf dieselbe Weise wird gezeigt, dass der Raum wie eine Gerade und ebenso die Zeit und überhaupt das Continuum ins Unendliche kann untergetheilt werden. Denn bei der Geraden und der Zeit ist der Theil dem Ganzen ähnlich und kann auch in derselben Weise getheilt werden (secari), wie das Ganze, und wiewohl es Ausgedehnte giebt, bei welchen der Theil nicht dem Ganzen ähnlich ist, so können sie doch in solche umgestaltet und in derselben Weise getheilt werden, wie die, in welche sie umgestaltet werden. Pertz III, 7, 284: Uebrigens muss auch vom Continuum etwas gesagt werden und von der Veränderung, ehe wir zur Erklärung von Ausdehnung und Bewegung (welches

Arten davon sind) kommen. Das Continuum ist ein Ganzes, bei dem je 2 beliebige Cointegrirende (oder solche, welche zugleich sind und dem Ganzen coincidiren) etwas Gemeinsames haben, oder, wenn sie nicht redundirend sind und keinen gemeinsamen Theil haben, oder wenn das Aggregat der Grösse derselben dem Aggregat des Ganzen gleich ist, dann haben sie wenigstens einen gemeinsamen Terminus. Und wenn man sonach von Einem zum Anderen übergehen soll continuirlich, aber nicht sprungweise, so muss man durch jenen gemeinsamen Terminus gehen etc. 285: Wir können ein Continuum denken nicht blos im zugleich Existirenden, auch nicht blos in Zeit und Ort, sondern auch in irgend einer Veränderung, z. B. wenn wir setzen, dass ein Kreis continuirlich umgestaltet werde und durch alle Arten der Ellipsen hindurchgehe mit Beibehaltung seiner Grösse, so kann man ein Aggregat aller dieser Zustände oder aller dieser Ellipsen vorstellen wie ein Continuum, obwohl alle diese Ellipsen nicht an einander gesetzt werden, da sie ja auch nicht zugleich coexistiren, sondern eine wird aus der anderen.“ —

Versteht man dies Alles, wie es Leibniz gemeint hat, rein mathematisch — was sich im Referate von sonstigen Beziehungen einmischen musste, lassen wir für jetzt bei Seite —, so ist nichts gegen die Betrachtungen einzuwenden. Die Art, wie er sich das Continuum oder vielmehr die Continuirung beweist, soll wohl nicht besagen, dass wir erst so zur Vorstellung kämen, sondern dass wir uns so verdeutlichen mögen, dass wir sie haben; die Art selbst beruht durchaus auf der inneren Anschauung. Was die Bezeichnung der Punkte betrifft als Extremitäten, so ist damit wohl gemeint, ein Punkt sein heisst soviel, wie hier will der Geist enden oder ein Ende setzen, so dass von Theil oder Theilung im eigentlichen Sinne nicht die Rede ist. Zu bemerken ist auch hier wieder die Hervorhebung der Zahl als des Mittels die continuirliche Grösse genau zu erkennen. —

6. Abschnitt: Das mathematisch Unendliche und die Rechnung damit.

A. Philosophische Schriften. S. 138 Erdm.: Ich glaube mit Locke, dass, eigentlich zu reden, man sagen kann, es giebt keinen Raum, keine Zeit, keine Zahl, welche unendlich wäre, sondern es ist nur wahr, so gross immer ein Raum, eine Zeit, eine Zahl sein mag, so giebt es immer eine andere, welche grösser als sie ist, ohne Ende; uud so findet sich das wahrhaft Unendliche nicht in einem Ganzen, das aus Theilen zusammengesetzt ist. — Indem man übrigens ein zusammengesetztes Unendliche verwirft, leugnet man nicht, was die Geometer, und insbesondere der ausgezeichnete Newton, von den series infinitae beweisen. S. 436 Erdm.: Und genau zu reden, so muss man anstatt unendliche Zahl sagen, es sei mehr da, als durch irgendwelche Zahl kann ausgedrückt werden, oder statt einer unendlich geraden Linie, es solle gezogen werden eine gerade Linie über jede angebbare Grösse hinaus, so dass immer eine grössere da ist. Zum Begriff einer Zahl, einer Linie und jedes Ganzen gehört es, begrenzt zu sein. S. 436ᵃ Erdm.: Es ist also eine Abkürzung der Rede, wenn wir von Eins sprechen, wo mehr ist als durch Ein ausdrückbares Ganze befasst werden kann, und als Grösse aussprechen, was deren Eigenschaften nicht hat. Denn wie von der unendlichen Zahl nicht gesagt werden kann, ob sie gerade oder ungerade sei, so auch nicht von der unendlichen Geraden, ob sie mit einer gegebenen Geraden commensurabel sei oder nicht, so dass diese Redeweisen vom Unendlichen als Einer Grösse nur uneigentlich sind, gegründet in einer Analogie; die aber, näher geprüft, nicht bestehen können. Ibid.: Philosophisch zu reden, statuire ich ebensowenig unendlich kleine als unendlich grosse Grössen oder ebensowenig infinitesimale als infinituple. Beide halte ich für Fictionen des Geistes durch abgekürzte Redeweise, geschickt für den Calcül, wie auch die imaginären Wurzeln in der Algebra sind. Indessen habe ich bewiesen, dass diese Ausdrücke einen grossen Nutzen haben zur Abkürzung des Denkens und sogar zur Erfindung, und zum Irrthum nicht verleiten können, da es ausreicht, für das unendlich Kleine zu setzen ein so Kleines, wie man will, so dass der Irrthum geringer ist als das gegebene, woraus folgt, dass es Irrthum daraus nicht geben kann. S. 436 Erdm.: Ich will einen Vergleich gebrauchen: denke dir einen Kreis und beschreibe in demselben 3 andere Kreise, so gross als du kannst, unter einander gleich, und in jedem neuen Kreis und Zwischenraum zwischen den Kreisen wiederum 3 grösste gleiche Kreise, und denke dir, man ginge so ins Unendliche fort, so wird darum nicht folgen, dass ein unendlich kleiner Kreis gegeben werde oder ein Centrum, das einen eigenen Kreis habe, in den (gegen die Voraussetzung) kein anderer beschrieben würde. S. 244

Erdm.: Genau zu reden, ist es wahr, dass es ein Unendliches von Dingen giebt, d. h. dass es immer mehr giebt, als man angeben kann; aber es giebt keine unendliche Zahl und keine Linie oder andere Quantität, welche unendlich wäre, wenn man sie für wahrhafte Ganze nimmt, wie leicht zu zeigen ist. Die Schulen haben dies sagen wollen oder sollen, indem sie ein synkategorematisches Unendliche zuliessen, wie sie sich ausdrücken, und nicht ein kategorematisches Unendliche. S. 449 Erdm.: Jede Zahl ist endlich und angebbar (assignable), jede Linie gleichfalls, und die Unendlichen oder Unendlich-Kleinen bezeichnen hierin nur Grössen, die man so gross oder so klein nehmen kann, als man will, um zu zeigen, dass ein Irrthum geringer ist als der, den man angegeben hat (assigné), d. h. dass ein Irrthum nicht da ist; oder man versteht wohl unter unendlichklein den Zustand des Verschwindens oder Anfangens einer Grösse, die nach dem Vorbild der bereits gebildeten (formées) Grössen vorgestellt wird. S. 744 Erdm.: Ein Unendliches aber, nach unserer Fassungskraft zu reden, ist grösser als ein anderes, z. B. die Summe dieser Reihe $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ etc. ins Unendliche ist unendlich und übertrifft jede angebbare Zahl; indessen die Summe dieser Reihe $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}$ etc. ins Unendliche ist unendlich grösser als die vorhergehende. Pertz II, 1, S. 209: Denn das Infinitesimale oder unendlich Kleine betrachte ich als Differenzen des Ordinären (ordinariorum) oder als momentane Incremente. Jener Calcül hat einen grossen Nutzen in der Uebertragung der Mathematik auf Natur, weil er lehrt, über das Unendliche Rechnung anzustellen (ratiocinari), alles aber in der Natur hat den Charakter eines unendlichen Urhebers. S. 210 ibid.: Die Analyse des Unendlichen, durch welche die Mathemathik selber über die bisher gewohnten Begriffe, d. h. über die Einbildungskraft (imaginabilia) sich erhebt, in welche fast allein Geometrie und Analysis bis jetzt versenkt war.

B. Mathematische Schriften. Pertz III, 5, S. 389: Das continuirliche oder discrete Unendliche ist eigentlich weder Eins noch ein Ganzes noch ein Quantum, und wenn eine gewisse Analogie für ein solches von uns angewendet wird, so ist das, kurz zu sagen, Redeweise; wenn nämlich mehr da ist, als durch irgend eine Zahl befasst werden kann, so werden wir doch jenen Dingen analogisch eine Zahl beilegen, welche wir unendlich nennen etc.

Pertz III, 4, S. 218: Uebrigens ist meine, öfter auseinandergesetzte Meinung die, dass die unendlich Kleinen ebenso wie die unendlichen Quantitäten zwar Fictionen sind, aber nützlich, um zugleich kurz und sicher zu rechnen; und dass es ausreicht, dass sie genommen werden wirklich (vere) so klein, als nöthig ist, damit der Irrthum kleiner sei als ein gegebener (dato); daraus zeigt er sich als 0. Für diese Meinung habe ich unzweifelhafte Argumente, welche auseinanderzusetzen für jetzt zu weitläufig sein würde. Indessen stellen wir das unendlich Kleine nicht vor als einfach und absolut nichts, sondern als respectiv nichts, d. h. als zwar verschwindend in nichts, jedoch behaltend den Charakter dessen, was verschwindet. Wir stellen vor, dass solches, multiplicirt mit (ducta in) einer unendlichen, auch modificirten Quantität, hervorbringt (producere) eine gewöhnliche (ordinariam) Quantität. Nicht unpassend wird hieraus von dir (Grandi) das Geschäft des Schöpfers erläutert, wo die unendliche absolute Kraft aus dem Nichts etwas hervorbringt. Wenigstens (certe) stellen wir in unserer Analyse vor, dass eine unendliche modificirte Gerade, z. B. $aa:dx$ multiplicirt mit der in 0 übergehenden Geraden dx oder, was dasselbe ist, mit dem Zustand der Vernichtung (annihilatio) der continuirlich abnehmenden Geraden x das gewöhnliche Rechteck aa hervorbringt. Allerdings setzen an Zahl unendliche (d. h. grösser als jede Zahl) Grössen niemals ein unendliches Ganze zusammen, und eine wahre Unendlichkeit findet sich nur bei dem Unendlichen der Kraft (virtutis), welches gar keine Theile hat; und darum ist weder die Ewigkeit noch die unendliche Gerade, wiewohl in Einem Namen ausgedrückt, Ein Ganzes, und jene Quantitäten unseres Calcüls sind ausserordentliche Fictionen, doch sind sie deshalb nicht zu verwerfen, noch die Analogie mit jenen zu verwerfen, die, wie ich nicht in Abrede stellen will, der wahren Religion vielleicht nützen können, da es im Calcül gerade so ist, als wären sie wahre Quantitäten, und da sie ein Fundament in der Sache haben und eine Art ideale Quantität, wie die imaginären Wurzeln etc. Pertz III, 5, S. 322: Uebrigens glaube ich, dass gleich ist nicht blos das, dessen Differenz überhaupt 0 ist, sondern auch das, dessen Differenz unvergleichlich klein ist; und obwohl man diese nicht überhaupt 0 nennen darf, so ist es doch keine Quantität, die mit dem vergleichbar wäre, zwischen dem es eine Differenz giebt. Z. B. wenn du zu einer Linie den

Punkt einer anderen Linie hinzufügst, oder zu einer Oberfläche eine Linie, so vermehrst du die Quantität nicht. Dasselbe gilt, wenn du zwar eine Linie zu einer Linie hinzufügst, aber eine unvergleichlich kleinere. Durch keine Construction kann eine solche Vermehrung dargestellt werden (exhiberi). Nämlich nur diejenigen homogenen Quantitäten sind vergleichbar, so meine ich mit Euclid lib. V, def. 5, von denen eine, mit einer Zahl, aber mit einer endlichen, multiplicirt, die andere übertreffen kann. Was sich durch solche Quantität nicht unterscheidet, ist, wie ich annehme, gleich, was auch Archimedes angenommen hat und alle anderen nach ihm, und das ist es eben, was man sagt mit dem Ausdruck: die Differenz sei kleiner als jede gegebene. Und zwar kann nach dem Archimedischen Verfahren die Sache immer durch deductio ad absurdum festgestellt werden; — es reicht nämlich aus, dass sie intelligibel ist und zum Erfinden nützlich. S. 350 ibid.: Ich werde selbst hinzufügen, — dass man nicht nöthig hat, das Unendliche hier nach der Strenge zu nehmen, sondern nur so, wie man in der Optik sagt, die Strahlen der Sonne kommen von einem unendlich entfernten Punkt und werden so für parallel geschätzt. Und wenn es mehrere Grade von Unendlichen oder unendlich Kleinen giebt, so ist es damit, wie wenn der Globus der Erde geschätzt wird als ein Punkt rücksichtlich der Entfernung der Fixsterne, und eine Kugel, mit der wir hantiren, ist auch ein Punkt im Vergleich mit dem Halbmesser der Erdkugel, so dass die Entfernung der Fixsterne ist ein unendlicherweise Unendliches oder ein Unendliches des Unendlichen mit Bezug auf den Diameter der Kugel. Denn statt des Unendlichen oder unendlich Kleinen nimmt man Quantitäten so gross oder so klein, als dazu erforderlich ist, dass der Irrthum kleiner ist als ein gegebener Irrthum, so dass man sich vom Stil des Archimedes nur in den Ausdrücken entfernt, welche in unserer Methode directer sind und der Erfindungskunst gemässer.

Pertz III, 5 Brief an Wolff über den Satz, dass $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ etc. ins Unendliche $= \frac{1}{2}$ sei, und wie die Absurdität vermieden werden könne, welche sich in einem solchen Satz zu zeigen scheint. (Grandi hatte die Frage wieder angeregt.) „Ich sehe ein, dass Grandi dem Unendlichen diese Kraft beilegt, aus dem Nichts Etwas zu machen, und dass er daraus nicht unpassend die Erschaffung der Dinge anschaulich machen will, welche aus Nichts erfolgt durch die göttliche Allmacht. Aber die Schöpfung ist keine einfache Wiederholung von Nullen (nihilorum), sondern enthält eine neue positive hinzugefügte (superadditam) Realität. S. 385 ibid.: Und dies (der Grandi'sche Beweis und sein Ergebniss) stimmt überein mit dem Gesetz der Continuität, das von mir früher in Bayle's literarischen Neuigkeiten zuerst aufgestellt und auf die Gesetze der Bewegung angewendet worden ist; davon kommt es, dass beim Continuirlichen das exclusiv Letzte behandelt werden kann als inclusiv, und so der letzte Fall, obgleich seiner ganzen Natur nach verschieden, im allgemeinen Gesetz der übrigen verborgen ist, und zugleich auf paradoxe Weise und so zu sagen nach einer philosophisch-rhetorischen Figur der Punkt als in der Linie, die Ruhe als in der Bewegung, der specielle Fall als im contradistinguirten allgemeinen befasst angesehen werden kann, als ob der Punkt eine unendlich kleine oder verschwindende Linie wäre, die Ruhe eine verschwindende Bewegung und anderes der Art, was Joachim Jungius, ein tiefer Geist, erträglich wahr (toleranter vera) würde genannt haben, und was sehr zur Erfindungskunst dient, ob es gleich meinem Urtheil nach Etwas von Fiction und Imaginärem enthält, was jedoch durch Reduction auf die gewöhnlichen Ausdrücke so leicht zu rectificiren ist, dass ein Irrthum nicht vorkommen kann; auch sonst kann die Natur, da sie immer ordnungs-, nicht sprungweise verfährt, das Gesetz der Continuität nicht verlassen.

Aber freilich hier zeigt sich eine Schwierigkeit, die sowohl von dir als von Marchetti mit Recht eingeworfen worden ist; denn da $B\surd - B\surd$ oder $1-1=0$ ist, folgt daraus nicht, dass $B\surd - B\surd + B\surd - B\surd + B\surd - B\surd +$ etc. ins Unendliche oder $1-1+1-1+1-1$ etc. ins Unendliche nichts Anderes sei als $0+0+0$ etc., wie es aber $\frac{1}{2}$ machen könne, ist nicht deutlich. 386—87 ibid.: Jetzt wollen wir die wahre und vielleicht unerwartete, mindestens sonderbare (singularem) Lösung des Räthsels und den Grund des Paradoxen vorbringen, indem wir zurückgehen auf die endliche Reihe und dann übergehen zur unendlichen. Man muss nämlich erwägen, dass die Fälle der endlichen Reihe zwei sind, die von einander unterschieden werden müssen, und dass sich diese im Fall der unendlichen Reihe auf wunderbare Weise vermischen. Nämlich die endliche Reihe $1-1+1-1$ etc. kann auf doppelte Weise erklärt werden; denn entweder besteht sie aus einer gleichen Anzahl Glieder und endigt sich mit —, z. B. $1-1$, oder $1-1+1-1$, oder $1-1+1-1+1-1$, oder wie weit man zuletzt fortschreitet; in diesen Fällen kommt immer 0 heraus; oder aus einer ungleichen Zahl von Gliedern und endigt sich mit +, z. B. 1, oder $1-1+1$, oder $1-1+1-1+1$, oder soweit man endlich fortgeht; in diesen Fällen kommt immer 1 heraus. Wenn aber die Reihe unendlich ist, nämlich $1-1+1-1+1-1$ etc. ins Unendliche, so dass sie jegliche Zahl überschreitet, dann verschwindet, wenn die Natur der Zahl verschwindet, auch die Bezeichnung (assignabilitas) von gleich und ungleich; und da kein Grund ist mehr für die Gleichheit oder Ungleichheit und somit nicht mehr für das Herauskommen von 0 als von 1, so geschieht es durch das wunderbare Ingenium der Natur, dass durch den Uebergang vom Endlichen zum Unendlichen zugleich geschieht ein Uebergang vom Disjunctiven (welches jetzt aufhört) zu dem Einen (was übrig bleibt) Positiven, welches das Mittlere ist unter den Disjunctiven. Und weil von denen, welche über die Schätzung des Würfels geschrieben haben, gezeigt worden ist, dass, sobald das Mittlere zwischen 2 auf gleichem Grunde ruhenden Quantitäten genommen werden muss, das arithmetisch Mittlere genommen werden müsse, welches ist die Hälfte der Summe, so beobachtet also die Natur der Dinge dasselbe Gesetz der Gerechtigkeit hier, und somit, da $1-1+1-1+1-1+$ etc. in dem endlichen Fall einer ungeraden Gliederzahl 1 ist, so folgt, wenn beides verschwindet in dem Fall von Gliedern, die an Zahl unendlich sind, wo die Rechte von gerad und ungerad verwischt werden und ebensoviel Grund für jedes von beiden ist, dass dann herauskommt $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$. W. z. b. Ferner ist diese Art zu argumentiren, ob sie gleich mehr metaphysisch als mathematisch scheinen mag, doch fest; auch sonst ist der Gebrauch der Canones der wahren Methaphysik (welche über die Nomenclatur der Wörter hinausgeht) in der Mathematik, der Analysis, selbst in der Geometrie grösser, als man gemeiniglich meint.

Pertz III, 7, S. 273: Auch die Methode mit (per) dem Untheilbaren oder Unendlichen, oder vielmehr mit dem unendlich Kleinen oder unendlich Grossen oder den Infinitesimalen oder Infinituplen ist von vorzüglicher Brauchbarkeit. Sie enthält nämlich eine Auflösung gewissermassen in ein gemeinsames Mass, ob es gleich kleiner ist als jede gegebene Grösse, oder eine Art, durch welche gezeigt wird, dass durch Vernachlässigung von Einigem, was den Irrthum kleiner macht als jeden gegebenen und somit = 0, von zweien, die zu vergleichen sind, das eine durch Transponiren in das andere bildbar ist. Man muss aber wissen, dass eine Linie nicht zusammengesetzt wird aus Punkten, eine Fläche nicht aus Linien, ein Körper nicht aus Flächen, sondern eine Linie aus kleinen Linien, eine Fläche aus kleinen Flächen, ein Körper aus unbestimmt kleinen Körpern, d. h. es wird gezeigt, dass 2 Ausgedehnte verglichen werden können, indem man sie auflöst in gleiche oder unter sich congruente noch so kleine Theilchen als in ein gemeinsames Mass, und dass der Irrthum immer kleiner ist als eins von solchen Theilchen oder wenigstens von einem endlichen constanten oder abnehmenden Verhältniss zu ihm (rationis ad ipsam), woraus erhellt, dass der Irrthum einer derartigen Vergleichung kleiner ist als jeder gegebene.

Pertz III, 5, S. 307: So darf man sich nicht erstaunen, wenn unser neuer Calcül der Differenzen und Summen, welcher die Betrachtung des Unendlichen einhüllt und sich folglich von dem entfernt, was die Einbildungskraft erreichen kann, nicht sofort zu seiner Vollkommenheit gelangt ist." —

Die Sachen stehen demnach so bei Leibniz: wir wissen, dass jede Linie, jede Zahl endlich ist; aber diese gewusste, aus dem Begriff gewusste Endlichkeit kann so gross oder so klein sein, dass unser Auffassungsvermögen nicht nachkann und wir dieses „zu gross für uns oder zu klein für uns" bezeichnen als unendlich. So ist die Sache philosophisch; anders aber lässt sie sich mathematisch ansehen und behandeln. Die Rechnung mit dem unendlich Kleinen ist eine Fiction, aber nicht ohne Fundament in der Sache oder, wie er es öfter ausgedrückt hat, sie ist brauchbar für die Natur. Damit gesteht Leibniz zu, dass sie rein logisch zunächst nicht zu halten ist: ein Irrthum, der nur kleiner ist als jeder gegebene, ist zwar für die Praxis keiner, deshalb ist er logisch immerhin da; eine Grösse, die zwar in nichts verschwindet, aber doch den Charakter dessen, was verschwindet, behält, ist wie eine Substanz, die aus dem Sein ins Nichtsein überginge und doch den Charakter der Substanz behielte; solche Vorstellungen sind logisch für uns unvollziehbar. Der Satz: gleich ist auch das, dessen Differenz unvergleichlich klein ist, hat praktische Wahrheit — denn solche Dinge sind so gut wie gleich, aber logische nimmermehr. Der Beweis, dass $1-1+1-1$ etc. ins Unendliche $= \frac{1}{2}$ wäre, ist logisch zu verwerfen; denn daraus, dass die endliche Reihe entweder 1 oder 0 ergeben würde, folgt für die unendliche gar nichts; ist denn das Unendliche ein Schwanken zwischen 2 endlichen Fällen? besagt es nach Leibniz nicht einfach, dass die Reihe endlich ist, aber zu gross für unser Fassungsvermögen, so dass einer von beiden Fällen stattfindet, wir nur nicht wissen, welcher? und machen wir die Unendlichkeit der Reihe selbst, so verzichten wir damit eben auf eine Erkenntniss des Resultates. Die anderweitigen Gründe, welche Leibniz anführt, sind nicht haltbarer; die Berufung auf die Natur als das Werk eines unendlichen Gottes schliesst die Anwendung des mathematisch Unendlichen geradezu aus; denn wenn Gott unendliche Dinge gemacht hat, braucht er darum auch unendlich kleine gemacht zu haben? man kann vor alle Adjectiva das Wörtchen unendlich setzen, soll man daraus schliessen, dass Gott die Dinge auch alle so gemacht habe, unendlich gross, unendlich klein, unendlich dick, unendlich dünn? so beweist das Argument nichts, weil es zu viel beweist. Wenn für das Eine nicht mehr ein Grund ist als für das Andere, für 0 nicht mehr als für 1 bei jenem Ansatz, so werden wir bald als Axiom von Leibniz hören, dass dann gar nichts geschehe; hier aber lässt er $\frac{1}{2}$ herauskommen nach einem Gesetze der Gerechtigkeit. Die Lösung ist eine andere: es kommt entweder 1 heraus oder 0, aber welches, weiss man nicht, und wenn man die Reihe als nicht blos für uns, sondern an sich ohne Ende setzt, so ist sie eben das, als was man sie setzt, d. h. ein endloses Hinzufügen ohne Resultat für das Ganze. Das Gesetz der Continuität hat beim Resultat gar nichts zu thun; das besagt blos, dass man die Reihe fortsetzen kann. Auch ist die Continuität zwischen 1 und 0, falls $\frac{1}{2}$ diese vorstellen soll, blos scheinbar; von 1 zu 0 ist ein unendlicher Fortgang der Verminderung; warum wird $\frac{1}{2}$ genommen mit Weglassung aller grösseren und kleineren Brüche davor und dahinter? So verwerfen wir die logische und metaphysische Rechtfertigung, welche Leibniz dem Calcül gegeben hat, aber diesen Calcül selbst tasten wir nicht an. Wir halten ihn für eine geniale Erfindung, die sich praktisch bewährt hat, für eine Kunst mehr als eine Wissenschaft; rein logisch ist er nicht zu construiren, aus den Elementen der gewöhnlichen Mathematik ergiebt er sich nicht, aber wie man den Kreis betrachten kann als ein Rechteck von unendlich kleinen Seiten und dieses berechnen und finden, dass es so gut ist, als habe man den Kreis selbst berechnet nach seinem Inhalt, so kann man überhaupt die Methode mit dem Unendlichen zu rechnen sich ausdenken, sie probiren, und wenn man findet, dass sie reelle Bewährung hat, sie anwenden, und es ist nicht zu läugnen, dass vieles in der Natur auf sie führt. Sie ist ein geniales Experimentiren, welches glückt, und viel Ueberredendes und Empfehlendes mit sich führt, wenn man sieht, was es leistet und welch mannichfache Anknüpfungspunkte sich für dasselbe darbieten. Wir finden diese Auffassung keineswegs unter der Würde der Mathematik als Wissenschaft: von dieser sind gewisse Elemente uns in leichter und fester Anschauung gegeben, deren wir uns bald construirend bemächtigen; in ihren höheren Theilen ist die Wissenschaft aber ein construirendes Versuchen, vielfach beeinflusst auch von anderen Betrachtungen, hier z. B. nicht von rein arithmetischen, sondern von geometrischen und mechanischen; diese letzteren Betrachtungen legten den Calcül nahe, man versuchte ihn und fand ihn bewährt, so entdeckte man ihn halb, und halb erfand man ihn, und darin besteht seine Rechtfertigung.

7. Abschnitt: Idealbild wissenschaftlicher Methode auf Grund der Mathematik (scientia generalis et characteristica universalis).

Ein solches Idealbild schwebte Leibniz frühe vor; die dazu hinleitenden Gedanken sprechen sich aus z. B. S. 162 Erdm.: Gewogen kann nicht werden, was nicht Kraft und Vermögen hat; was keine Theile hat, hat demgemäss kein Mass; aber es giebt nichts, was nicht die Zahl zulässt. So ist die Zahl gleichsam die metaphysische Figur, und die Arithmetik ist eine Art von Statik des Universums, durch welche die Vermögen der Dinge erforscht werden, — aus der commendatio linguae characteristicae. S. 424 Erdm.: Die Zahlen selbst werden auf vielerlei Art begriffen. Die mathesis pura ist zwar nicht die Vernunftlehre an sich selbst, wohl aber eine dero ersten Geburten und gleichsam deren Gebrauch bei den Grössen oder bei Zahl, Mass und Gewicht; ich habe auch befunden, dass die Algebra selbst ihre Vortheile von einer viel höheren Kunst, nämlich der wahren Logik, entlehne.

1. scientia generalis. S. 82 Erdm.: Die Ursache, warum nur allein bei den Zahlen und den Linien und dem, was durch diese vorgestellt wird, Beweise von den Menschen gesucht werden, ist keine andere, als dass wir leicht zu behandelnde Zeichen, die den Begriffen entsprächen, ausserhalb der Zahlen nicht haben. S. 83 ib.: Es giebt Beweise auch ausserhalb der Grössen; Beweis sind die Formen der Logiker, Einiges von den Juristen in den Pandekten; Manches im Plato und Aristoteles könnte unschwer in Beweisform gebracht werden. Es fehlt eine wahrhaft philosophische Schrift, in der die Begriffe auf ein gewisses Alphabet der menschlichen Gedanken zurückgeführt wären; wäre dies, so könnte alles, was wir aus Gegebenem durch Verstand erreichen, gefunden werden durch eine Art von Rechnung, gerade so wie die arithmetischen oder geometrischen Aufgaben gelöst werden. — Die wahrsten und schönsten kurzen Darstellungen dieser allgemeinsten Analytik menschlicher Gedanken hat mir ein Einblick in die mathematische Analyse gezeigt. — S. 83 ib.: Der Unterschied zwischen den nothwendigen und zufälligen Wahrheiten ist in der That der nämliche, wie der zwischen den commensurabeln und incommensurabeln Zahlen; bei den commensurabeln Zahlen kann eine Auflösung in ein gemeinsames Mass vorgenommen werden, bei den nothwendigen Wahrheiten ein Beweis oder eine Zurückführung auf identische Wahrheiten. Und wie bei tauben Zahlverhältnissen die Auflösung ins Unendliche geht, und man zwar irgendwie auf ein gemeinsames Mass kommt und eine Reihe erhalten wird, aber eine unbegränzte, so bedürfen in gleicher Weise mit demselben Hergang die zufälligen Wahrheiten eine unendliche Auflösung (nämlich Grund des Grundes u. s. f.), welche Gott allein durchmachen kann. Daher werden sie von ihm allein a priori und sicher erkannt. Ibid.: Man muss bemerken, dass durch diese Kunst blos dasjenige kann erhalten werden, was aus Gegebenem mit Ingenium herausgefunden werden kann, oder was aus Gegebenem bestimmt ist, ganz wie bei geometrischen Aufgaben; was aber zum Thatsächlichen gehört und von Glück oder Zufall abhängig ist, gehört insofern offenbar nicht zur Erfindungskunst, aber selbst hierüber vermag die Kunst soviel, als in allem jenem die Vernunft (und sie vermag sehr viel). — Wenn daher aus dem Gegebenen das Gesuchte nicht bestimmt oder ausdrückbar ist, dann werden wir durch diese Analyse Eins von Zweien leisten, dass wir entweder uns ins Unendliche nähern,

oder, wenn die Sache mit Vermuthungen gemacht werden muss, wir wenigstens mit beweiskräftiger Art den Grad der Wahrscheinlichkeit selbst bestimmen, der aus dem Gegebenen erhalten werden kann.

S. 85 Erdm.: Initia scientiae generalis. Evidente Beweise, den mathematischen gleich, deren Gewissheit wie mit den Händen gegriffen und mit den Augen erfasst werden kann.

S. 86 Erdm.: De natura et usu scientiae generalis. Ausreichende Daten zur Auffindung von Wahrheiten sind Prinzipien, die bereits vorhanden sind, und aus denen allein oder mit Hinzunahme von anderen das geschlossen werden kann, um das es sich handelt. Die Data sind ausreichend, wenn die Dinge unter sich eine solche Verknüpfung haben, dass, sobald eins oder zwei oder drei oder mehrere bestimmt sind, auch etwas Anderes bestimmt ist, — so folgt, dass in dem Vorhergehenden die ausreichenden Data sind. S. 87: z. B., weil nur ein einziger Kreis durch 3 Punkte abc, gezogen werden kann, so folgt, wenn jene 3 Punkte gegeben sind, könne das Centrum des gesuchten Kreises oder der Punkt, der sich auf dieselbe Weise verhält zu den Punkten abc, bestimmt gefunden werden, welches stattfinden wird, wenn sowohl auf der Mitte ab ein Perpendikel fg errichtet wird (denn jeder Punkt desselben ist gleichweit ab vom Punkte a und Punkt b), und wenn auf der Mitte vom Punkt bc ein Perpendikel hk errichtet wird, von dem wiederum jeder Punkt gleichweit von b und c entfernt ist; wenn sich daher die 2 Perpendikel schneiden in d (was geschieht, wenn sie nicht parallel sind, oder wenn abc nicht in derselben geraden Linie liegen), so wird der gemeinschaftliche Punkt (in dem allein sie sich schneiden können) gleichweit entfernt sein von den Punkten abc, und wird folglich das Centrum sein. S. 86 ib.: Zwei Theile der scientia generalis: bestimmen, ob eine vorliegende Maschine eine vorliegende Wirkung leisten kann, ist blos Sache des Urtheils, aber sich eine Maschine ausdenken, wenn die Wirkung vorgelegt ist, das ist nicht Sache des Urtheils, sondern der Erfindung. Von dieser giebt es wiederum zwei Theile, einen synthetischen oder combinatorischen, und einen analytischen; der combinatorische findet das, was er sucht, unter Anderem, und bedient sich dabei anderweitiger Kenntnisse; der analytische nimmt alles von dem Problem allein; jener gehört zur Aufstellung vollständiger Wissenschaften und ihrer Theile, dieser zur Auflösung von Problemen, die, wenn nöthig, von dem übrigen Ganzen getrennt sind. S. 86 ib.: Von der allgemeinen Wissenschaft sind ausgeschlossen jene Erkenntnisse, welche blos durch Zufall gefunden werden konnten, z. B., dass der Magnet sich nach den Polen der Erde kehrt; denn das konnte durch keinen Scharfblick im Voraus gesehen werden, wiewohl Anwendungen und Folgerungen auch solcher Erkenntniss von der allgemeinen Wissenschaft abhängig sind, nämlich die Anfertigung des Compasses und sein Gebrauch bei der Schifffahrt.

2. characteristica universalis.

a. 1666, S. 27 Erdm.: allgemeine Schrift: die ersten Ausdrücke, aus deren Verbindung alle anderen werden gebildet werden, sollen mit notae bezeichnet werden; diese notae werden gewissermassen ein Alphabet sein. Es wird aber gut sein, wenn diese notae soviel als möglich natürliche sind, z. B. für Eins ein Punkt, für die Zahlen Punkte, für die Verhältnisse von Ding zu Ding Linien, je nach der Variation der Winkel oder der Termini in den Linien die Arten der Verhältnisse. Diese ganze Schrift wird wie aus geometrischen Figuren gemacht werden, wie bei den Aegyptern und Chinesen; aber diese haben die Sache gemacht ohne Zugrundlegung eines Alphabets, daher zu schwer für das Gedächtniss.

S. 92 Erdm.: Zeichen ist alles, was wir uns beim Denken für die Dinge setzen.

Die Zeichen, die geschrieben oder nach Art der Linien aufgetragen oder plastisch dargestellt sind, — werden characteres genannt.

Mir hat es sich offenbar gezeigt, dass sich alle menschlichen Gedanken in sehr wenige auflösen lassen als die primitiven. Wenn für diese Charaktere bestimmt werden, so können daraus Charaktere der abgeleiteten Begriffe gebildet werden, aus denen immer alle ihre Requisite und die in sie eintretenden primitiven Begriffe, und kurz zu sagen, ihre Definitionen oder Werthe, und daher auch ihre aus den Definitionen erweisbaren Eigenschaften eruirt werden können; so werden Sophismen und Paralogismen nichts sein als Irrthümer des Calcüls in der Arithmetik und Solöcismen und Barbarismen in den Sprachen. Da man aber noch nicht feststellen konnte, wie die Zeichen sollen gebildet werden, so wollen wir einstweilen für sie, die noch künftig zu bilden sind, die Buchstaben des Alphabets gebrauchen oder andere willkürliche Zeichen irgend welcher Art, welche der Verlauf als die passendsten an die Hand geben wird. Der kurze Entwurf sei gemacht nach dem Muster der Algebra: denn der Calculus oder die Operation besteht in der Hervorziehung von Verhältnissen, gemacht durch Vertauschung der Formeln, nach gewissen durch die Thatsachen vorgeschriebenen Gesetzen.

S. 162: Eine Sprache oder Charakteristik, in welcher zugleich die Kunst, zu erfinden und zu urtheilen, enthalten wäre, d. h. deren Merkmale und Zeichen dasselbe leisten würden, was die arithmetischen Merkmale bei den Zahlen und die algebraischen bei den abstract genommenen Grössen leisten. S. 163 ib.: Ihre nähere Beschreibung ist die, dass nämlich ausgedacht werden könnte irgend ein Alphabet menschlicher Gedanken, und dass durch die Combination der Buchstaben dieses Alphabets und die Analyse der daraus gebildeten Wörter alles erfunden und beurtheilt werden könnte. Ein Versuch dazu sei die ars combinatoria. — Er sei dazu gekommen, weil er immer die ersten Prinzipien aufsuchte. — Von Descartes heisst es: denn wenn er die Methode einer rationalen Philosophie herzustellen gleich klar und unwiderleglich gesehen hätte wie die Arithmetik, — nämlich eben die characteristica. S. 164 ib.: Richtig ist die Vernunft erst dann, wenn sie ebenso klar und gewiss sein wird, wie sie bis jetzt in der Arithmetik gewesen ist. — Eine klare und helle Sache = eine auf Zahlen gebrachte. S. 163 ib.: Eine Schule (secta), die diese Art zu philosophiren anwendete, würde durch die Natur der Dinge selbst sofort bei ihrem Entstehen eine Herrschaft über die Vernunft üben nach geometrischer Art, und nur mit der Wissenschaft selbst untergehen. — Es sei nur nöthig, dass die zu Kenntnissen tauglichen (characteristici) Zahlen aller Ideen besessen würden; dies sei einfach und von ihm so gut wie gefunden. S. 164 ib.: Da es aber wegen der wunderbaren Verknüpfung der Dinge sehr schwer ist, die charakteristischen Zahlen weniger, von anderen verschiedener Dinge zu geben, darum habe ich einen, wenn ich mich nicht täusche, hübschen Kunstgriff ausgedacht, durch den man zeigen kann, dass die Schlüsse durch Zahlen können bewährt werden. Ich nehme also an, jene charakteristischen, so bewunderungswürdigen Zahlen gäbe es schon, und wenn ich eine allgemeine Eigenschaft derselben beobachtet habe, so wende ich solche Zahlen, wie auch immer ich sie inzwischen annehme, beständig an und beweise sofort auf wunderbare Weise alle logischen Regeln durch Zahlen, und zeige, wie man erkennen kann, ob Argumentationen in der Form gut sind. Ob aber Argumente kraft ihrer Form gut sind oder schliessen, wird erst dann ohne Arbeit des Geistes und Gefahr des Irrthums können erkannt werden, wenn man die wahrhaft charakteristischen Zahlen der Dinge selbst haben wird. — S. 169 Erdm.: Wenn man nur eine beweisende Encyklopädie hätte, worin blos vorläufig die (vorhandenen) Prinzipien jeder Wissenschaft stünden oder wenigstens die nützlichsten Wahrheiten, so könnte man das Mittel angeben, immer die Consequenzen der fundamentalen Wahrheiten zu finden oder der gegebenen Thatsachen, durch eine ebenso genaue und ebenso einfache Rechnungsart, als die der Arithmetik und Algebra ist.

S. 355 Erdm.: Man könnte eine Charakteristik einführen, eine allgemeine, sehr populäre und bessere als die chinesische, wenn man kleine Figuren statt der Worte anwendete, welche sichtbare Dinge vorstellen durch ihre Züge, und die unsichtbaren durch die sichtbaren, die sie begleiten, indem man damit gewisse additionelle Kennzeichen verbände, welche tauglich wären, die Flexionen und Partikeln verständlich zu machen (faire entendre).

a. 1702 S. 191 Erdm.: Die Mathematik macht einen Theil der intellectuellen Welt aus, und ist am geeignetsten, Eingang in dieselbe zu gewähren. Aber ich glaube selbst, dass ihr Inneres etwas mehr ist; — es giebt eine wichtigere Rechnungsart als diejenige der Arithmetik und der Geometrie, die da abhängt von der Analyse der Ideen. Dies würde eine allgemeine Charakteristik sein.“ —

Der Gedanke, den Leibniz so sehr gehegt hat, ist uns bereits bei Descartes begegnet: dort war er mehr fremdartig, vielleicht angeregt durch Frage und Versuch Anderer, aber bei Leibniz wurzelt er in seinem gesammten Denken. Seine grosse Seite war die Arithmetik und ihre Bereicherung durch die Rechnung mit dem Unendlichen; da diese vielen geometrischen Problemen zu Gute kam, so erschien die Zahl leicht als das Vorzüglichere, Verbreitetere und Mächtigere von den beiden Disciplinen der Mathematik. Die Zahl, anwendbar auf alles, was sich als Eins und Vieles fassen lässt, schien so ein Licht zu werden, welches die Tiefen Gottes und der Welt aufhellen könne. Wie aber die Wissenschaft der Zahl nicht am wenigsten ihre Fortschritte der

Symbolik oder der Kunst der Zeichen zu verdanken schien, so musste man zweierlei haben: die primitiven Begriffe und Zeichen für sie von solcher Vorzüglichkeit, dann war Denken nichts als Rechnen. Beides zu erreichen schien Leibniz wohl möglich; aber es ist bei dem Planmachen geblieben; was er als Beispiele geboten hat, ist mathematischer oder logischer Art; in der Logik ist es leicht und altherkömmlich Beispiele aus der Arithmetik zu nehmen zur Veranschaulichung; so liess sich die Sache auch umkehren. Der Gedanke, welcher dem allem zum Grunde liegt, ist von vornherein verkehrt; die Zahl ist ein blos formeller Begriff: damit dass ich sage: das ist Eins, fasse ich nur die Sache unter dieser Anschauung auf; diese Auffassung schliesst noch gar nicht aus, dass dies Eins ein Vieles ist; Eins ist keine innerliche Qualität und enthält kein Urtheil über dieselbe; um aber die Dinge nach Art der Zahlen behandeln zu können, müssten wir wissen, welche Qualität das als Eins gefasste Ding habe; und müssten dies aus innerer Anschauung wissen, d. h. so, dass wir mit den Dingen innerlich Versuche anstellen könnten, wie wir mit den Zahlen und den Figuren verfahren; dies fehlt so gut wie ganz, und daher würde das Meiste der Erkenntnisse unter das fallen, was Leibniz als das blos zufällig Gewusste ausschloss, oder blos nachträglich an die Methode der allgemeinen Wissenschaft anschloss, die Wissenschaft selbst würde so gegenstandlos und führte auf den leeren Satz zurück: wenn die Begriffe der Dinge uns gegeben wären, wie die Zahlen, so könnten wir auch mit ihnen operiren wie mit den Zahlen. Selbst der Wunsch, eine Zeichensprache für die realen Dinge einzuführen ähnlich der arithmetischen, gehört zu den einleuchtenden Unmöglichkeiten. Der Begriff der Liebe z. B., um einen Begriff aus innerer, also naheliegender Erfahrung zu nehmen, lässt sich nicht als Eine Zahl bezeichnen oder mit Einem Zeichen; denn er hat wesentliche Unterschiede in sich und unzählige Nüancen. Den Plan Leibniz' muss man anerkennen als einen chimärischen, nicht seine Eigenthümlichkeit verwischen durch Hervorhebung einer gewissen Wahrheit, die darin gelegen habe, wie die Chemie in der Alchemie; der Plan hing mit seinen innersten Gedanken zusammen und ist zugleich ein Beweis, dass in diesem Denken Etwas von früh an Falsches war: dies Falsche ist der Gedanke von der Zahl und Arithmetik als einer metaphysischen Figur und einer Art von