

Roshdi Rashed, Christian Houzel
Les *Arithmétiques* de Diophante

Scientia Graeco-Arabica

herausgegeben von
Marwan Rashed

Band 11

De Gruyter

Les *Arithmétiques* de Diophante

Lecture historique et mathématique

par

Roshdi Rashed et Christian Houzel

De Gruyter

ISBN 978-3-11-033593-4
e-ISBN 978-3-11-033648-1
ISSN 1868-7172

Library of Congress Cataloging-in-Publication Data

A CIP catalog record for this book has been applied for at the Library of Congress.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen
Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet
über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

© 2013 Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston

Druck und buchbinderische Verarbeitung: Hubert & Co. GmbH & Co. KG, Göttingen
⊗ Gedruckt auf säurefreiem Papier

Printed in Germany

www.degruyter.com

PRÉFACE

Ce livre est entièrement consacré à la lecture historique et mathématique d'une œuvre rédigée au II^e siècle à Alexandrie et qui a marqué l'histoire des mathématiques pendant au moins un millénaire et demi : les *Arithmétiques* de Diophante.

Lire une œuvre mathématique ancienne et, qui plus est, fondatrice d'une discipline mathématique, comme les *Coniques* d'Apollonius, les *Sphériques* de Ménélaüs ou les *Arithmétiques* de Diophante, n'est pas un acte simple. À cela, plusieurs raisons. Il arrive qu'au cours de sa transmission le texte ait été mutilé, parfois irrémédiablement, par des accidents de tous ordres. Ces œuvres ont été écrites dans une langue aujourd'hui éteinte, et certaines parties n'ont survécu que dans une traduction arabe, dans la langue du IX^e siècle. Tout au long de leur histoire, on a multiplié leurs lectures, et il faut en tenir compte. Autant d'événements qui précisément ont accompagné la transmission des *Arithmétiques* de Diophante : des treize livres qui, à l'origine, composaient l'ouvrage, il n'en demeure que six dans la langue de l'auteur. Quatre nous sont parvenus d'une traduction arabe, qui initialement en comportait sept, faite à Bagdad au IX^e siècle – les trois autres existaient encore au XVII^e siècle mais sont aujourd'hui perdus. Les deux versions, ainsi mutilées, ont encore subi d'autres accidents qui sont décrits dans les introductions aux éditions critiques des textes. Les livres grecs et arabes ont été diversement commentés au cours de l'histoire par d'éminents mathématiciens, tels qu'al-Karajī, al-Būzjānī, al-Samaw'al, Planude, Bombelli, Stevin, Viète, Bachet, Fermat et même Lagrange, qui tous ont lu les *Arithmétiques* à la lumière de mathématiques qui n'étaient pas celles de Diophante. Le nombre et la diversité de ces commentaires sont bien le signe de la richesse mathématique des objets étudiés par le mathématicien alexandrin. À partir du XIX^e siècle, les historiens des mathématiques ont eux aussi multiplié les lectures des *Arithmétiques* et en ont proposé bien des interprétations. Aujourd'hui le débat est encore viv entre les différents interprètes, comme nous le verrons plus loin.

Face à cette pluralité d'interprétations, on se demande évidemment s'il est possible d'opter pour l'une d'entre elles – philologique, arithmétique, algébrique, géométrique ... – ou s'il existe une lecture plus pertinente que les autres, capable de capter la rationalité de Diophante, d'éclairer une

mathesis nécessairement différente de toutes celles qui seront inventées par ses successeurs et ainsi de situer les *Arithmétiques* dans l'histoire.

Il n'empêche qu'exhiber une telle *mathesis* ne revient pas à faire l'économie de toutes les autres lectures. Et, de fait, revendiquer l'unicité de l'une d'entre elles dans le cas d'une œuvre aussi riche et complexe relève davantage de l'exégèse religieuse que de la recherche historique. Car une lecture actuelle du livre de Diophante, sous peine d'être myope ou triviale, se nourrit à toutes celles qui l'ont précédée. Elle oblige l'historien, en quelque sorte, à multiplier ses tâches et à exercer plusieurs métiers.

Le prélude nécessaire à tout commentaire mathématique est une édition fiable des textes. Il y a plus d'un siècle, P. Tannery, avec la compétence que l'on sait, a établi les six livres grecs et les a traduits en latin. Plus récemment, A. Allard a passé au crible la tradition grecque et byzantine du texte, dont il a fourni une nouvelle édition critique accompagnée d'une traduction française. Quant aux livres que j'ai découverts dans leur traduction arabe, je me suis acquitté de leur édition critique et de leur traduction en français.

Une fois cette tâche accomplie, reste à reconstruire l'organisation architectonique des *Arithmétiques*, à démêler les réseaux des significations mathématiques, à exhiber la structure de l'argumentation de Diophante, à mettre au jour ses présupposés et ses intuitions. En examinant les articulations de ces structures syntactiques et sémantiques, on peut reconstituer le texte et l'insérer dans la, ou les traditions, auxquelles il appartient. Mais, puisqu'il s'agit d'une œuvre mathématique, cette tâche est inséparable de l'examen de la vérité des énoncés, des propositions et des solutions de tous les problèmes. Chacun sait en effet que c'est en reprenant les démonstrations et en vérifiant les solutions que l'historien des mathématiques effectue sa lecture. Or dans le cas des *Arithmétiques*, il se heurte à une difficulté supplémentaire qui n'est pas l'effet d'un quelconque défaut de l'ouvrage, mais bien au contraire de la richesse de son contenu. C'est en effet précisément cette fécondité qui a autorisé la pluralité des traductions dans les langues des mathématiques postérieures, celles de l'algèbre, celles de l'arithmétique et même celles de la géométrie, des 280 problèmes résolus par Diophante et qui nous sont parvenus. Ces traductions ne sont nullement virtuelles, elles sont effectives et jalonnent l'histoire à partir du X^e siècle et jusqu'à nos jours.

Confronté à cette difficulté, ainsi qu'à d'autres obstacles que j'ai pu rencontrer lors de l'édition critique de la version arabe des *Arithmétiques*, j'ai dû élaborer une stratégie de lecture de cette œuvre de Diophante qui me permît de répondre aux questions historiques et mathématiques qui se posaient. Après une étude philologique aussi minutieuse que possible, il a

fallu multiplier les lectures tout en évitant d'en attribuer aucune à Diophante. En plus d'une transcription algébrique du texte, j'ai conçu un modèle interprétatif propre à expliquer comment Diophante a construit ses problèmes et choisi ses coefficients, quelles méthodes il a appliquées, comment il a obtenu les transformations qu'il opère et les algorithmes qu'il utilise. Il fallait pour forger ce modèle exposer les notions géométriques qui le sous-tendent ; ce qui fut fait dans un chapitre à part, intitulé « La méthode de la corde », où le lecteur est averti qu'il ne doit pas prendre le modèle proposé pour l'objet commenté. Pourtant bien des lecteurs pressés sont restés sourds à cet avertissement maintes fois réitéré.

Une fois paru ce travail, en 1984, je l'ai poursuivi en commentant les livres grecs, d'abord les trois premiers, communs aux deux versions, grecque et arabe, puis les trois livres qui ne sont connus qu'en grec (IV, V et VI). C'est alors que le projet de commenter l'ensemble des livres des *Arithmétiques* transmis s'est fait jour, sous la forme d'une première lecture complète de l'ouvrage. Christian Houzel a trouvé que l'idée en valait la peine et a bien voulu m'accompagner dans cette entreprise. Nous avons donc repensé le chapitre sur la méthode de la corde pour remédier à ses manques et lui donner davantage de consistance et d'extension et nous avons complété et corrigé les commentaires déjà rédigés et achevé l'ensemble. Le résultat visé est une étude plus complète et plus homogène des *Arithmétiques*.

On trouvera dans un chapitre introductif une discussion détaillée du projet arithmétique de Diophante ainsi que des lectures qui en ont été faites. Ce chapitre synthétique est suivi d'un autre où l'on explicite les notions géométriques nécessaires à la construction du modèle interprétatif que nous proposons, puis d'un troisième qui traite de l'identification des méthodes de Diophante. Vient ensuite un commentaire historique et mathématique de tous les livres des *Arithmétiques*.

Nous insistons une fois encore pour dire que nous n'attribuons à Diophante que son propre texte, tel qu'il a été établi dans les éditions critiques. Nous ne répéterons jamais assez que les *Arithmétiques* ne sont ni un livre d'algèbre ni un livre de géométrie algébrique, mais bien un livre d'arithmétique où sont appliqués des procédés algébriques avant la lettre.

Je remercie vivement Madame Aline Auger qui, avec scrupule et compétence, a préparé le manuscrit à l'impression et composé les index.

Roshdi Rashed
Bourg-la-Reine, mars 2013

SOMMAIRE

Préface	v
INTRODUCTION : LES <i>ARITHMÉTIQUES</i> DE DIOPHANTE	1
1. Les mathématiques de Diophante	8
2. Le projet de Diophante	20
3. Diophante et Euclide	31
4. Deux lectures des <i>Arithmétiques</i> : algébrique et géométrique	34
CHAPITRE I : LA MÉTHODE DE LA CORDE	
1. Le vocabulaire de la géométrie algébrique	47
2. Multiplicité d'intersection	74
3. La méthode de la corde	83
4. Equations quasi-homogènes	102
5. La méthode de la corde pour la courbe de genre 1	106
6. La double équation du second degré	115
CHAPITRE II : LES MÉTHODES DE DIOPHANTE	
1. Problèmes déterminés et problèmes indéterminés	121
2. Élimination	124
3. La méthode « de la corde »	125
4. Extension de la méthode de la corde aux degrés supérieurs	127
5. Identités remarquables	132
6. Double équation	136
7. Homogénéité et triangles rectangles numériques	140
8. Inégalités et recherche d'approximations	143
9. Enchaînements	148
CHAPITRE III : COMMENTAIRE MATHÉMATIQUE DES <i>ARITHMÉTIQUES</i>	
Livre I	155
Livre II	179
Livre III	219
Livre 4	265
Livre 5	301
Livre 6	317
Livre 7	343
Livre IV	369
Livre V	445
Livre VI	527
APPENDICE : La connaissance de Diophante dans l'Antiquité	595
INDEX	607
OUVRAGES CITÉS	621

INTRODUCTION

LES ARITHMÉTIQUES DE DIOPHANTE

Au cours de ces quelques dernières décennies, notre connaissance de l'œuvre de Diophante d'Alexandrie a considérablement changé, au point que le statut même de celle-ci a subi une profonde transformation. Hier encore, l'un des meilleurs spécialistes de l'histoire des mathématiques grecques et de Diophante, P. Tannery, écrivait que celui-ci « est à peine un Grec, il n'est pas possible qu'il n'ait point subi quelque influence orientale ; si ses écrits ne nous avaient pas été conservés dans la langue qu'il parlait, personne ne pourrait soupçonner qu'ils soient un fruit du génie hellène »¹. Par « oriental », Tannery, tout pénétré de l'idéologie dominante, entend à la fois « calculatoire » et un peu empirique. Le Diophante de Tannery est donc, en fait, un logisticien sans génie géométrique. C'est d'ailleurs ce que lui-même écrit un an après :

[...] c'est un esprit dans le genre de celui de Pappus, un mathématicien érudit plutôt qu'un génie inventeur. Les artifices de ses solutions ont été, comme ensemble, beaucoup trop vantés ; leur valeur est très inégale et, si

¹ P. Tannery, *La Géométrie grecque. Comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons*, Essai critique, Paris, 1887, p. 5. Voir aussi son article « Diophante » dans la *Grande Encyclopédie* (repr. dans *Mémoires scientifiques*, publiés par J.-L. Heiberg et H.-G. Zeuthen, Toulouse / Paris, Éd. Privat et Gauthier-Villars, 1915, t. III, p. 355-358) où il écrit : « Les *Arithmétiques* sont un recueil en réalité passablement confus de problèmes numériques, qui doivent avoir été, au moins en partie, compilés de sources antérieures remontant jusqu'à l'école de Pythagore » (p. 356). Cette affirmation est un peu gratuite. P. Tannery n'avait pas encore achevé l'édition critique de Diophante. Il reprend cette même affirmation dans son article : « La perte de sept livres de Diophante », paru en 1884 et reproduit dans *Mémoires scientifiques*, publiés par J.-L. Heiberg et H.-G. Zeuthen, Toulouse / Paris, Éd. Privat et Gauthier-Villars, 1912, t. II, p. 73-90. Il y reproche à Nesselmann de n'avoir pas « ... assez considéré le mathématicien grec comme un compilateur, ce qu'il est réellement » (p. 83). Il poursuit : « Le recueil de problèmes d'Analyse indéterminée qui nous reste n'offre, en réalité, aucune unité de méthode qui permette de conclure, de ce que paraît ignorer Diophante à tel endroit, que son ignorance est réelle » (*ibid.*). Cette opinion du grand historien à propos du mathématicien compilateur, généralisée en quelque sorte aux mathématiciens grecs un peu tardifs, a ensuite fait des ravages.

aux uns il faut bien reconnaître *la griffe d'un lion inconnu*, d'autres problèmes, à côté, sont, en comparaison, traités plus ou moins maladroitement².

Dans la suite de ses recherches sur Diophante, l'éminent historien nuancera cette position, certes, mais il n'y renoncera pas entièrement. Aujourd'hui, en revanche, le nom du mathématicien d'Alexandrie est devenu l'emblème de quelques chapitres de la recherche avancée en géométrie algébrique et en théorie des nombres – on parle ainsi de l'analyse diophantienne, de la géométrie diophantienne, des approximations diophantiennes, etc. Quant à l'œuvre de Diophante, son volume a pour ainsi dire doublé depuis la découverte de quatre livres de ses *Arithmétiques*, jusqu'ici perdus en grec³. Un des résultats de cette découverte, et non des moindres, a été de renouveler de fond en comble notre connaissance de la structure des *Arithmétiques* et l'ordre des livres qui les composent. Tout aussi significative est la compréhension dont l'œuvre elle-même est devenue l'objet. Les lectures ne s'arrêtent plus désormais au commentaire logistique, à l'exemple de ceux de P. Tannery ou de K. Vogel⁴, ou algébrique, comme ceux de G. H. F. Nesselmann, G. Wertheim et Th. Heath et aussi de P. Tannery, comme on le verra⁵, et elles se sont multipliées. Avec les travaux d'I. Bashmakova⁶, d'A. Weil⁷, et les nôtres⁸, les lectures des *Arithmétiques* se diversifient et tentent de sonder la richesse cachée de la pensée mathématique et des procédés algorithmiques du mathématicien

² P. Tannery, « À quelle époque vivait Diophante ? », dans *Mémoires scientifiques*, publiés par J.-L. Heiberg et H.-G. Zeuthen, Toulouse / Paris, Éd. Privat et Gauthier-Villars, t. I : *Sciences exactes dans l'antiquité*, 1912, p. 62-73, aux p. 63-64.

³ R. Rashed, « Les travaux perdus de Diophante, I », *Revue d'histoire des sciences*, 27.2, 1974, p. 97-122 ; « Les travaux perdus de Diophante, II », *Revue d'histoire des sciences*, 28.1, 1975, p. 3-30 ; *Ṣinā'at al-jabr (L'Art de l'Algèbre de Diophante)*, Le Caire, Bibliothèque Nationale, 1975 ; *Les Arithmétiques*, tome III : Livre IV, tome IV : Livres V, VI, VII, Collection des Universités de France, Paris, Les Belles Lettres, 1984.

⁴ K. Vogel, « Diophantus of Alexandria », *Dictionary of Scientific Biography*, vol. IV, New York, 1971, p. 110-119.

⁵ G. H. F. Nesselmann, *Die Algebra der Griechen*, Berlin, 1842, repr. Frankfurt, 1969, p. 294 *sqq.* ; G. Wertheim, *Die Arithmetik und die Schrift über Polygonalzahlen des Diophantus von Alexandria*, Leipzig, Teubner, 1890, p. IV, par exemple ; Th. Heath, *Diophantus of Alexandria : A Study in the History of Greek Algebra*, 2^e éd. 1910, repr. Dover, 1964.

⁶ I. G. Bashmakova, « Diophante et Fermat », *Revue d'histoire des sciences*, t. XIX, 1966, p. 289-306 ; *Diophant und diophantische Gleichungen*, Basel / Stuttgart, Birkhäuser, 1972 ; « Diophantine Equations and the Evolution of Algebra », *American Mathematical Society Translation* (2), vol. 147, 1990, p. 85-100.

⁷ A. Weil, *Number Theory : an Approach through History. From Hammurapi to Legendre*, Boston / Basel / Stuttgart, Birkhäuser, 1983, p. 27-31.

⁸ Cités note 3.

d’Alexandrie. En bref, l’historiographie de Diophante a subi une véritable mutation, qu’il s’agisse de l’œuvre elle-même ou de ses interprétations. Cette mutation rend alors caduque l’ancien discours sur Diophante, ainsi que tout discours qui ne considère pas l’intégralité des livres des *Arithmétiques*. Mais un seul point a, malheureusement, résisté à ce renouveau : notre connaissance de la vie du mathématicien reste aussi pauvre qu’elle l’était il y a un siècle.

De la vie de Diophante, nous ignorons presque tout ; même ses dates restent incertaines. Cette situation n’a pas manqué d’alimenter les conjectures les plus fantaisistes, où certains se sont complus. Dans le livre qui lui est attribué sur *Les Nombres polygones*, il cite Hypsiclès⁹. D’autre part, Théon d’Alexandrie le mentionne¹⁰. Diophante est donc un alexandrin qui a vécu après Hypsiclès et avant Théon, c’est-à-dire après la première moitié du II^e siècle avant notre ère, et avant la seconde moitié du IV^e siècle de notre ère. Deux témoignages tardifs sont invoqués pour préciser davantage les dates de Diophante. Le premier revient à Michel Psellus (1020-1105 ?) dont, au siècle dernier, P. Tannery a restitué et commenté un fragment, pour conclure que Diophante aurait été l’ami d’un certain Anatolius, lequel a été identifié – toujours par Tannery – comme Anatolius d’Alexandrie. Il s’agit de celui qui devint en 270 l’évêque de Laodicée (Syrie), que l’historien Eusèbe de Césarée loue pour ses connaissances scientifiques, et dont le mathématicien Jamblique a conservé certains fragments des travaux

⁹ *Diophanti Alexandrini Opera Omnia cum Graecis Commentariis edidit et interpretatus est Paulus Tannery*, 2 vol., Leipzig, Teubner, 1893, vol. I, p. 470, ligne 27 ; p. 472, ligne 20. Voir aussi la traduction française commentée de P. Ver Eecke, *Diophante d’Alexandrie : Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones*, Œuvres traduites pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes, Nouveau tirage, Paris, A. Blanchard, 1959. L’édition de P. Tannery est la première édition critique des *Arithmétiques* de Diophante, ainsi que du livre *Sur les nombres polygones*, depuis la première édition, de Bachet de Méziriac : *Diophantini Alexandrini Arithmeticonum Libri Sex et De Numeris Multangulis Liber unus, nunc primum Graece et Latine editi, atque absolutissimis commentariis illustrati*, Paris, 1621. Sur l’histoire du texte grec, voir A. Allard, « La tradition du texte grec des *Arithmétiques* de Diophante d’Alexandrie », *Revue d’histoire des textes*, 12-13, 1982-83, p. 57-137 ; « Les Scolies aux *Arithmétiques* de Diophante d’Alexandrie dans le *Matritensis Bib. Nat.* 4678 et les *Vaticani Gr.* 191 et 304 », *Byzantion*, t. LIII, fasc. 2, 1983, p. 664-760 ; cf. également son édition critique des *Arithmétiques*, *Diophante d’Alexandrie*, 2 vol., thèse d’agrégation à l’Université de Louvain, 1980. I. Pérez Martín, « Maxime Planude et le ‘Diophantus Matritensis’ (Madrid, Biblioteca Nacional, ms. 4678) : un paradigme de la récupération des textes anciens dans la ‘Renaissance paléologue’ », *Byzantion*, 86, 2006, p. 433-462.

¹⁰ *Diophanti Alexandrini...*, éd. P. Tannery, vol. II, p. 35.

mathématiques. Poussant plus loin sa conjecture, Tannery, non sans audace, fait de Diophante un mathématicien chrétien directement disciple de Denys, évêque d'Alexandrie de 248 à 265. La plupart des historiens de la science hellène, comme F. Hultsch et Th. Heath, n'ont pas retenu cette opinion. On expliquera plus bas pour quelles raisons philologiques précises il faut y renoncer¹¹.

L'autre témoignage est celui du biobibliographe du XIII^e siècle, le Jacobite Abū al-Faraj, connu sous le nom d'Ibn al-'Ibrī (1226-1286), qui affirme sans donner ses sources que Diophante vivait sous le règne de Julien l'Apostat (331-363). Il rappelle aussi que Diophante était contemporain de Themistius (317-388/390). Il mentionne par ailleurs son livre « en algèbre et *al-muqābala* » commenté par Abū al-Wafā' al-Būzjānī¹². Mais il peut fort bien s'agir là d'une confusion entre le mathématicien et un rhéteur du même nom. À défaut de nouveaux arguments décisifs, nous nous contenterons, pour l'heure, d'admettre qu'il s'agit d'un Alexandrin, dont la vie s'écoula probablement entre le deuxième et le troisième siècle, et fut longue – si l'on en croit une célèbre épigramme de l'*Anthologie Palatine* attribuée à Métrodore de Byzance (IV^e siècle), Diophante aurait vécu quatre-vingt-quatre ans.

La littérature historique attribue plusieurs livres à Diophante. Ceux-ci se partagent en deux classes : ceux qui sont parvenus dans la tradition manuscrite grecque ou arabe, et ceux que les historiens proposent à titre conjectural. *Les Arithmétiques* et *Les Nombres polygones* relèvent de la première classe. Mais, entre ces deux ouvrages, la différence, non seulement d'arithmétique mais de style, ne peut que surprendre. En tout cas, P. Tannery n'a pas hésité à mettre en doute l'attribution à Diophante de ce livre sur les nombres polygones¹³. Le problème demeure, pour le moins, ouvert. La seconde classe est née des allusions furtives de Diophante ou d'un scholiaste. Le premier, un peu à la dérobée, évoque des porismes. Il écrit en effet dans le cinquième livre des *Arithmétiques*, d'abord au problème 3 : « ἔχομεν ἐν τοῖς Πορίσμασιν ὅτι ... »¹⁴, « nous avons dans les porismes ... » ; puis il répète à quelques variantes près la même expression

¹¹ Appendice par Marwan Rashed.

¹² Ibn al-'Ibrī, *Tārīkh mukhtaṣar al-duwal*, éd. O. P. A. Ṣāliḥānī, 1^{re} éd., Beyrouth, 1890 ; repr. 1958, p. 82.

¹³ Voir *Diophanti Alexandrini...*, vol. II, p. XVII-XVIII, où il met en parallèle l'ajout du livre de Serenus à l'édition d'Eutocius pour faire un certain volume, et l'ajout du fragment des *Nombres polygones* aux six livres qui restent des *Arithmétiques*, également pour faire du volume.

¹⁴ *Diophanti Alexandrini...*, éd. P. Tannery, vol. I, p. 316, ligne 6.

au problème 5¹⁵ et au problème 16¹⁶. Ce sont ces trois occurrences, placées dans un même livre, qui ont incité Tannery et à sa suite les historiens à attribuer ce titre à Diophante : *Les Porismes*. Mais, en fait, on ignore si les *Porismes* renvoient à un livre indépendant ou à des propositions qui étaient insérées dans les *Arithmétiques*. On attribue encore à Diophante un autre livre, Μοριαστικά, à partir d'une scholie sur un passage de Jamblique¹⁷.

Ce sont, en fait, les *Arithmétiques* qui ont assuré à Diophante son grand destin historique. Cet ouvrage devait comprendre treize livres, selon les termes mêmes de Diophante au préambule du premier livre. Mais, comme seulement six livres avaient été conservés en grec, les historiens, depuis le siècle dernier – G. H. F. Nesselmann, H. T. Colebroke, G. Wertheim, H. Hankel, P. Tannery, C. Henry, T. Heath, et d'autres – ont avancé plusieurs hypothèses pour tenter d'expliquer la perte des sept autres livres, en allant parfois jusqu'à tenter d'en définir le contenu¹⁸.

On savait d'autre part, par les biobibliographes et les mathématiciens arabes du x^e siècle, qu'il existait une traduction arabe des *Arithmétiques* par Qusṭā ibn Lūqā de Baalbek, datant de la seconde moitié du ix^e siècle. Au siècle dernier, l'historien des mathématiques Franz Woepcke¹⁹ remarquait qu'al-Karajī – mathématicien de Bagdad de la fin du x^e siècle – a résumé les trois premiers livres de cette traduction qui, globalement, correspondaient aux trois premiers livres du texte grec qui nous est parvenu. En 1971, la bonne fortune a permis de retrouver à Meshed, en Iran, quatre livres de la traduction arabe, tous perdus en grec. On a établi que ces livres, numérotés de 4 à 7, suivent dans l'ordre les trois premiers livres du texte

¹⁵ *Ibid.*, p. 320, ligne 5.

¹⁶ *Ibid.*, p. 358, lignes 4-5.

¹⁷ Jamblique, *In Nicomachi Arithmetica Introductionem Liber*, éd. E. Pistelli, Leipzig, Teubner, 1894, p. 11, lignes 9-11. Citation reproduite par P. Tannery dans *Diophanti Alexandrini ...*, vol. II, p. 72, lignes 11-12 : « οὕτως ὁ Διόφαντος ἐν τοῖς Μοριαστικοῖς ... ». Récemment, à partir d'une autre scholie au livre de Jamblique (reproduite également par P. Tannery, *Diophanti Alexandrini ...*, vol. II, p. 72, lignes 16-20), J. Christianidis a conjecturé l'attribution à Diophante d'une ἀριθμητικῇ στοιχείωσις, laquelle ne nous semble pas justifiée. Voir J. Christianidis, « Ἀριθμητικῇ Στοιχείωσις : un traité perdu de Diophante d'Alexandrie », *Historia Mathematica*, 18, 1991, p. 239-246 ; et R. Rashed, « Note sur la version arabe des trois premiers livres des *Arithmétiques* de Diophante et sur le problème I.39 », *Historia Scientiarum*, 4-1, 1994, p. 39-46, ainsi que la note à la proposition 39 du premier livre des *Arithmétiques*, plus loin.

¹⁸ Cf. R. Rashed, « Les travaux perdus de Diophante, I » (1974), « Les travaux perdus de Diophante, II » (1975), où cette question a été discutée.

¹⁹ F. Woepcke, *Extrait du Fakhrī*, Traité d'algèbre par Abou Bekr Mohammed Ben Alhaçan Alkarkhī, précédé d'un mémoire sur l'algèbre indéterminée chez les Arabes, Paris, 1853 ; repr. Hildesheim / Zürich / New York, Georg Olms, 1982.

grec ; que la version arabe comporte sept livres ; que les livres IV, V et VI du texte grec ne sont pas à leurs places respectives et que, de plus, ils ont pu être victimes d'un certain désordre²⁰. La situation actuelle des *Arithmétiques* peut globalement être ainsi représentée :

<i>Livres grecs</i> I II III			<u>IV V VI</u>		
			aucune trace en arabe		
<i>Livres arabes</i> <u>1 2 3</u>			<u>4 5 6 7</u>		
identiques en grec et en arabe			perdus en grec		

Le résumé d'al-Karajī ne laisse aucun doute sur les trois premiers livres des *Arithmétiques* perdus en arabe, non plus que sur les problèmes étudiés, et leur ordre. Mais l'absence en grec des livres 4, 5, 6, 7 de la version arabe, ainsi qu'une malheureuse conjecture de P. Tannery sur un éventuel commentaire d'Hypatie des six livres actuels de la version grecque, ont induit bien des historiens en erreur. Certains d'entre eux, peu familiers des traditions textuelles arabes, ont cru pouvoir avancer que la version arabe des *Arithmétiques* ne comprenait que les quatre livres retrouvés ; affirmation vite retirée, aussitôt nos preuves présentées. D'autres – I. Bashmakova et ses collaborateurs – se sont précipités pour suggérer, sans la moindre preuve, que la version arabe vient du prétendu commentaire d'Hypatie, c'est-à-dire d'un commentaire dont nous ne savons même pas s'il a jamais existé²¹. Mais, comme les trois premiers livres sont communs au grec et à l'arabe et comme le quatrième et le cinquième livres grecs sont, on le verra, ceux qui soulèvent le plus de problèmes d'ordre, on aboutit à une situation singulière que ces mêmes historiens ne pouvaient admettre.

À quel point en sommes-nous ? La découverte de quatre livres de la version arabe, si elle a fini par vider de leur contenu toutes les interprétations évoquées plus haut, ne permettait cependant pas de répondre à la question de savoir quand les trois premiers livres de la version arabe ont été perdus, si toutefois ils l'ont vraiment été. Importante pour l'histoire de cette version, une réponse à cette interrogation a l'autre mérite de mettre un terme à toute spéculation sur le nombre des livres qui la composent, et sur leurs rapports avec les trois premiers livres grecs. Cette réponse a été offerte par la découverte de *marginalia* sur un livre d'al-Karajī, qui attestent l'existence au XVII^e siècle encore des trois premiers livres de la version arabe des *Arithmétiques* de Diophante, qui étaient alors lues et citées

²⁰ R. Rashed, « Les travaux perdus de Diophante, I » (1974) ; *L'Art de l'Algèbre de Diophante*, et *Diophante : Les Arithmétiques*, tome III, p. LIX-LXII, note 63.

²¹ Cf. Appendice par Marwan Rashed.

*verbatim*²². Ces citations, même brèves, ajoutées à d'autres faites par des mathématiciens plus anciens, comme al-Samaw'al²³ (m. 1175), confirment, à quelques variantes près dues à la tradition manuscrite grecque rendue en arabe, l'identité des deux versions, grecque et arabe.

Telles qu'elles se présentent maintenant, les *Arithmétiques* comprennent dix livres au lieu de six. On peut même dire qu'elles comportent *au moins* dix livres dans la mesure où le quatrième et le cinquième du texte grec doivent être à nouveau examinés, si l'on veut s'assurer qu'il ne s'agit que de deux livres. En tout cas, ces dix livres se succèdent dans l'ordre suivant :

Les trois premiers livres ; 4 arabe, 5 arabe, 6 arabe, 7 arabe ; IV grec, V grec et VI grec.

Le sixième livre grec porte sur les triangles rectangles numériques et se distingue en quelque sorte des autres ; mais l'ordre des trois derniers appelle un examen approfondi, mené plus loin. Les livres I, II, III grecs sont identiques à 1, 2, 3 arabes²⁴.

Notons enfin que l'histoire de la tradition textuelle des *Arithmétiques* comporte encore un point bien obscur : alors que Qusṭā ibn Lūqā a eu entre les mains un manuscrit de l'ouvrage de Diophante transcrit nécessairement avant le IX^e siècle, qui comprenait sept livres, le manuscrit dont dérivait les autres livres du texte grec ne comportait que six livres, dont seuls les trois premiers sont à leur place. Quand cet accident eut-il lieu, et dans quelles circonstances ? Nous n'avons pour l'heure aucun moyen de le savoir ; mais nous sommes certains, en revanche, que les livres retrouvés non seulement modifient l'organisation des *Arithmétiques* et leur extension mais permettent aussi de mieux saisir l'intention de Diophante et sa conception de l'arithmétique.

Reste encore une question, posée une fois de plus par P. Tannery : tous les problèmes traités dans les *Arithmétiques* sont-ils dus au seul Diophante, où doit-on y voir le résultat d'un travail de compilation ? Tannery écrit :

L'œuvre apparaît donc comme un recueil emprunté à diverses sources, recueil où l'auteur a pu d'ailleurs mettre beaucoup du sien²⁵.

Th. Heath, qui disposait déjà de l'édition critique de Tannery, est bien nuancé à cet égard ; il écrit :

²² Cf. R. Rashed, « Note sur la version arabe des trois premiers livres des *Arithmétiques* de Diophante et sur le problème I.39 ».

²³ Cf. R. Rashed, *Les Arithmétiques*, tome III : Livre IV, p. XXXII *sqq.*

²⁴ Voir plus loin.

²⁵ P. Tannery, « À quelle époque vivait Diophante ? », p. 64.

But, if it was a compilation, we cannot doubt that it was a compilation in the best sense, therein resembling Euclid's *Elements* ; it was a compilation by one who was a master of the subject, who took account of and assimilated all the best that had been written upon it, arranged the whole of the available material in due and progressive order, but also added much of his own, not only in the form of new problems but also (and even more) in the mode of treatment, the development of more general methods, and so on²⁶.

Il reste que, si compilation il y a eu, personne n'a jamais proposé ni source ni auteurs, si ce n'est pour une partie du premier livre. Quant à la conjecture d'une multiplicité d'auteurs, elle ne repose sur aucun document ni aucun fait.

1. LES MATHÉMATIQUES DE DIOPHANTE

Quels sont au juste le, ou les objets, étudiés par Diophante dans les *Arithmétiques* ? Quelles sont les méthodes qu'il a conçues pour construire ces objets ? En bref, quelle est la *mathesis* diophantienne ? Pour répondre à cette question, on ne peut évidemment se contenter de décrire l'ouvrage en citant quelques-uns des 280 problèmes qui nous sont parvenus. Il faudra en effet commencer par nous livrer à deux enquêtes préalables. La première porte sur les faits de l'histoire : quelle est la tradition (ou les traditions) mathématique à laquelle appartenait le mathématicien alexandrin ? La seconde question relève de l'interprétation : Diophante procédait-il par tâtonnement, ou suivant un certain nombre de méthodes, et lesquelles ?

Pour répondre à la première question, on est malheureusement fort démuné. On a peu d'écrits, et encore moins de témoignages, qui pourraient nous éclairer sur les domaines investis par Diophante et sur l'auteur lui-même. On dispose de bien des conjectures avancées par les historiens, mais de fort peu de faits. De plus, l'étude arithmétique menée par Diophante dans son livre diffère, tant par les thèmes que par le style, de tout ce que nous connaissons des mathématiques anciennes. Quant à la seconde question, elle a suscité autant de réponses qu'il existe de commentaires des *Arithmétiques*.

Dans son livre, Diophante lui-même ne cite aucun nom, pas même celui d'Euclide, et n'évoque aucun titre, pas même les *Éléments*, alors que son langage et bien des notions qu'il manie sont euclidiens. Quant aux

²⁶ Th. Heath, *Diophantus of Alexandria*, p. 124. Cf. la discussion détaillée de cette question par K. Barner, « Negative Grössen bei Diophant ? Teil I », « Negative Grössen bei Diophant ? Teil II », *N.T.M.*, NS 15, 2007, p. 18-49, 98-117. Il examine cette question en détail aux pages 19-22.

méthodes générales qu'il applique, il n'en mentionne explicitement qu'une seule, comme on le verra.

À défaut d'écouter Diophante et pour pallier ces absences, les historiens ont coutume depuis le début du siècle dernier d'aller chercher ses prédécesseurs d'abord parmi les mathématiciens grecs et, à défaut et de plus en plus, à Babylone et en Égypte. C'est principalement dans l'essor de l'historiographie des mathématiques babyloniennes et égyptiennes depuis le début du siècle dernier qu'il faut chercher la raison de ce retour vers ces derniers pays²⁷. Mais, cette fois, on rencontre une nouvelle difficulté, en raison de la pauvreté des documents, comparée à la richesse escomptée²⁸. Néanmoins, ces recherches ont eu le mérite de renouveler le cadre général de l'historiographie des mathématiques anciennes. Voici comment O. Neugebauer dessine ce nouveau cadre en 1963, c'est-à-dire au terme de plus de trente ans de recherche fondatrice :

Since we have mathematical cuneiform texts from the Seleucid period and since Greek and Demotic papyri from the Greco-Roman period in Egypt show knowledge of essentially the same basic material, one can no longer doubt that the discoveries of the Old Babylonian period had long since become common mathematical knowledge all over the ancient Near East. The whole tradition of mathematical works under the authorship of Heron (first century A.D.), Diophantus (date unknown), down to the beginning

²⁷ Il s'agit notamment des travaux tels que ceux de F. Thureau-Dangin, « Tablettes d'Uruk », Musée du Louvre, Département des Antiquités orientales, Textes cunéiformes, t. VI, Paris, 1922. Citons également : H. S. Schuster, « Quadratische Gleichungen der Seleukidenzeit aus Uruk », dans *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik. Astronomie und Physik*, Berlin, 1930, p. 194-200. O. Neugebauer, « Zur Geschichte des pythagoräischen Lehrsatzes », dans *Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Mathematisch-Physikalische Klasse, 1928 ; « Zur geometrischen Algebra (Studien zur Geschichte der antiken Algebra III), *Quellen und Studien*, Bd III, 1935, p. 245-259 ; « BM 34568 », *Quellen und Studien der Geschichte der mathematik, Astronomie und Physik*, Abteilung A, 1937, p. 14-23 ; *Mathematische Keilschrift-Texte*, Berlin/Heidelberg/New York, Springer-Verlag, 1973 ; O. Neugebauer et A. Sachs, *Mathematical Cuneiform Texts*, American Oriental Series, vol. 29, New Haven Conn., 1945. Cf. également J. Høyrup, « Mathematical Susa Texts VII and VIII : A Reinterpretation », *Altorientalische Forschungen*, vol. 20.2, 1993, p. 245-260. Cf. également – pour les mathématiques égyptiennes – M. Clagett, *Ancient Egyptian Science. A Source Book*, American Philosophical Society, Philadelphia, 1999, vol. 3 ; R. J. Gillings, *Mathematics in the Time of the Pharaohs*, New York, Dover, 1971.

²⁸ Voici ce qu'écrit O. Neugebauer à propos des mathématiques babyloniennes : « Our task can therefore properly be compared with restoring the history of mathematics from a few torn pages which have accidentally survived the destruction of a great history » (*The Exact Sciences in Antiquity*, 2^e éd., New York, Dover Publications, 1969, p. 30).

Islamic science (al-Khwārizmī, ninth century) is part of the same stream which has its ultimate sources in Babylonia²⁹.

Cette conclusion a été défendue par bien d'autres historiens, tels que S. Gandz³⁰, K. Vogel³¹, B. L. Van der Waerden³², et d'autres par la suite.

Nous n'allons évidemment pas résumer ici les analyses et les conclusions de ces travaux. Nous cherchons seulement à estimer la dette éventuelle de Diophante à l'égard de cette tradition babylonienne, en ne considérant que quelques faits saillants.

Dans les tablettes babyloniennes, on trouve bien des problèmes traduisibles en systèmes de deux équations à deux inconnues, systèmes linéaires et systèmes quadratiques. On trouve aussi des équations du second degré à une seule inconnue. Il est également clair que les mathématiciens babyloniens procédaient par une démarche « algorithmique », et par des formules générales. On retrouve plusieurs de ces problèmes dans le premier livre des *Arithmétiques*, tels que

$$\begin{array}{lll} \begin{cases} xy = a \\ x + y = b \end{cases} & \begin{cases} xy + x + y = a \\ \alpha x + \beta y = b \end{cases} & \begin{cases} x + y = b \\ x - y = c \end{cases} \\ \begin{cases} ax + by = c \\ x + dy = e \end{cases} & \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = a \\ x_2 = bx_1 \end{cases} & \begin{cases} xy - (x - y)^2 = a \\ x - y = b \end{cases} \quad \text{etc.} \end{array}$$

²⁹ « The Survival of Babylonian Methods in the Exact Sciences of Antiquity and Middle Ages », *Proceedings of the American Philosophical Society*, vol. 107, n° 6, 1963, p. 528-535 ; repr. dans *Astronomy and History. Selected Essays*, New York / Berlin / Heidelberg / Tokyo, Springer-Verlag, 1983, p. 157-164, aux pages 158-159. O. Neugebauer répète cette même conclusion dans son livre *The Exact Sciences in Antiquity*, p. 80 : « But, by and large, one has to distinguish two widely separate types of "Greek" mathematics. One is represented by the strictly logical approach of Euclid, Archimedes, Apollonius, etc. ; the other group is only a part of general Hellenistic mathematics, the roots of which lie in the Babylonian and Egyptian procedures. The writings of Heron and Diophantus and works known only from fragments or from papyrus documents form part of this oriental tradition which can be followed into the Middle Ages both in the Arabic and in the western world ». Cette opinion semble avoir été adoptée comme programme de recherche par quelques chercheurs contemporains, comme J. Høyrup.

³⁰ « The Origin and Development of the Quadratic Equations in Babylonian, Greek, and Early Arabic Algebra », *Osiris*, vol. III, 1938, p. 405-550.

³¹ *Vorgriechische Mathematik*, 2 vol., Hanovre, 1959 ; cf. en particulier vol. II, chapitre V : « Babylonische Algebra ».

³² *Science Awakening*, English translation by A. Dresden with additions of the author, 3^e éd., Groningen, Wolters Noordhoff Publishing, s.d.

Mais l'étude menée par Diophante se distingue de celles de ses prédécesseurs babyloniens. D'abord, Diophante donne l'énoncé du problème – *protasis* – en termes généraux ; par exemple : « Trouver deux nombres tels que leur différence et leur produit forment des nombres donnés ». C'est dans l'ecthèse qu'il donne les valeurs numériques. Ainsi, il énonce des problèmes arithmétiques sans aucune référence métrologique ou géométrique. Ces problèmes du premier livre participent d'un projet plus général, celui de construire une théorie arithmétique. De plus, cette partie du premier livre est fort modeste, qu'il s'agisse du nombre des problèmes ou de leur importance, si on la compare à l'ensemble des *Arithmétiques*.

Il en va tout autrement d'autres études des mathématiques babyloniennes, comme celles des triplets pythagoriciens et des triangles rectangles numériques, ainsi que la première composition des formes quadratiques, deux acquis intégrés par Diophante dans les *Arithmétiques*.

Dans la fameuse tablette Plimpton 322, commentée par Neugebauer³³, on suppose que les triplets pythagoriciens avaient été obtenus par la propriété que l'on retrouve chez Euclide³⁴, puis au livre VI de Diophante, et que l'on peut ainsi écrire :

Proposition 1. Soient $x, y, z \in \mathbf{N}^*$; on suppose x et y premiers entre eux et x pair. Alors, pour que (x, y, z) soit un triplet pythagoricien, il faut et il suffit qu'il existe deux entiers p, q de parités opposées, premiers entre eux, et tels que $p > q$, $x = 2pq$, $y = p^2 - q^2$ et $z = p^2 + q^2$.

Dans les quinze lignes de la tablette Plimpton 322, le rapport $\frac{z}{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p} \right)$, dont le carré occupe la première colonne, décroît linéairement. On peut penser, avec Neugebauer, que les Babyloniens ont construit leur table à partir des tables d'inverses, en choisissant des nombres « simples » p et q dont ils connaissaient les inverses. On a en effet

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{z^2}{x^2} - 1 = \frac{1}{4} \left(\frac{p^2}{q^2} + \frac{q^2}{p^2} - 2 \right) = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{p}{q} - \frac{q}{p} \right) \right)^2$$

si

³³ O. Neugebauer et A. Sachs, *Mathematical Cuneiform Texts*, American Oriental Series, vol. 29, New Haven Conn., 1945, p. 37-41. Voir aussi J. Friberg, « Methods and Traditions of Babylonian Mathematics : Plimpton 322, Pythagorean Triples and the Babylonian Triangle Parameter Equations », *Historia Mathematica*, 8, 1981, p. 277-318.

³⁴ Euclide, *Les Éléments*, livre X, lemme à la proposition 28.

$$\frac{z}{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p} \right),$$

d'où

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{q} - \frac{q}{p} \right).$$

Les Babyloniens ont aussi utilisé ces triplets pythagoriciens pour former des « triplets babyloniens » (u, v, w) , tels que $u^2 + v^2 = 2w^2$. En effet, si (x, y, z) est un triplet pythagoricien, alors $u = y - x$, $v = y + x$, $w = z$ forment un triplet babylonien. Si on prend $q = n$, $p = n + 1$, où $n = 1, 2, 3$ et 4 , on obtient

n	x	y	z	u	v
1	3	4	5	1	7
2	5	12	13	7	17
3	7	24	25	17	31
4	9	40	41	31	49

Enfin, si on pose $a = 2xy$, on voit que les triplets babyloniens vérifient un système d'équations de la forme $w^2 + a = v^2$, $w^2 - a = u^2$. C'est le problème des « nombres congruents ».

À cela il faudrait ajouter ce que l'on peut lire comme la première composition de formes quadratiques, c'est-à-dire l'identité

$$(p^2 + q^2)(r^2 + t^2) = (pr \pm tq)^2 + (tp \mp rq)^2,$$

sous-jacente à la tablette T de Suse³⁵, consacrée à la division de trapèzes par des parallèles aux bases. On divise un trapèze de bases U, u par une transversale t parallèle aux bases en deux parties de même aire ; on a donc $t^2 = \frac{1}{2}(U^2 + u^2)$. On cherche alors des transversales R, r parallèles aux bases dans chacune des deux parties, de manière que le trapèze de bases R, r soit divisé par t en deux parties d'aires égales ; ainsi $R^2 + r^2 = U^2 + u^2$. Le scribe introduit des coefficients α, β tels que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ (triplet pythagoricien) et il pose $R = \alpha U + \beta u$, $r = \beta U - \alpha u$. Cette formule de composition est utilisée pour engendrer de nouveaux triplets babyloniens.

³⁵ E. M. Bruins et M. Rutten, *Textes mathématiques de Suse*, Paris, 1961, texte XXIII, p. 114-117 et planche 34.

Exemple (notation sexagésimale) : À partir du triplet babylonien (0;15, 1;45, 1;15), proportionnel à (1, 7, 5), et du triplet pythagoricien (0;36, 0;48, 1), proportionnel à (3, 4, 5), en appliquant la formule de composition, on obtient un nouveau triplet babylonien

$$\begin{aligned}u_1 &= 0;36.1;45 - 0;48.0;15 = 0;51, \\v_1 &= 0;48.1;45 + 0;36.0;15 = 1;33, \\w_1 &= 1.1;33.\end{aligned}$$

Dans ces textes de Suse, on rencontre également des équations indéterminées du premier degré de la forme $ax = b(x + y)$ ³⁶.

Il est fort probable que ces résultats – ainsi que d’autres analyses que la recherche future pourrait découvrir – étaient connus des mathématiciens grecs des ^{vi}^e-^v^e siècles. Il est tout aussi probable qu’ils circulaient à l’époque de Diophante. Mais Diophante y a-t-il eu accès ? On ne peut répondre à la question, et on doit se contenter de constater que ces résultats sont inclus dans les *Arithmétiques*, comme dans tout livre de théorie des nombres par la suite. Soulignons encore que, même si Diophante les a empruntés aux Babyloniens, que ce soit directement ou par l’intermédiaire des mathématiciens grecs, cela ne peut expliquer ni le projet mathématique qu’il réalise dans les *Arithmétiques*, ni le style qui est le sien.

Ainsi, si on considère l’étude des triplets pythagoriciens, on observe cette différence de style et d’intention. Cette étude se présente dans les *Arithmétiques* sous deux formes. Elle apparaît sous la première forme dans les problèmes III.19, V.7 et V.21 à V.26, où ces triplets sont un moyen auxiliaire, éléments d’un lemme technique auquel se ramène le problème indéterminé posé. On la rencontre sous la deuxième forme dans le livre VI, où Diophante cherche des triangles rectangles qui doivent vérifier certaines conditions relatives à l’aire, au périmètre, à leur somme, etc. ; c’est-à-dire différentes fonctions rationnelles de l’inconnue et des paramètres. Diophante ne s’intéresse évidemment pas aux propriétés des entiers qui forment ces triplets pour elles-mêmes, mais comme moyen de poursuivre l’étude des problèmes de « l’analyse de Diophante », ainsi qu’on le verra plus loin.

Venons-en à présent aux prédécesseurs grecs de Diophante, en commençant par le papyrus gréco-égyptien 620 de Michigan, daté du ⁱⁱ^e siècle au plus tard, et commenté par Karpinski et Robbins.

³⁶ Cf. J. Høyrup, « Mathematical Susa Texts VII and VIII ». Sur cette question, il existe une littérature riche et variée. On lira avec profit E. Robson, *Mathematics in Ancient Iraq : a Social History*, Princeton University Press, 2008.

Ce papyrus Michigan 620³⁷ comprend trois problèmes arithmétiques construits selon le même modèle, et dont chacun peut s'écrire comme un système de quatre équations linéaires à quatre inconnues. Le premier problème se récrit :

Four numbers : their sum is 9900 ; let the second exceed the first by one seventh of the first ; let the third exceed the sum of the first two by 300, and let the fourth exceed the sum of the first three by 300 ; to find the numbers [...]³⁸.

$$\begin{cases} x + y + z + t = 9900 \\ y - x = \frac{1}{7}x \\ z - (y + x) = 300 \\ t - (z + y + x) = 300 \end{cases}$$

On pose $x = 7\tau$, d'où $y = 8\tau$, $z = 15\tau + 300$, $t = 30\tau + 600$.

On substitue ces valeurs dans la première équation, on obtient $\tau = 150$, et ensuite $x = 1050$, $y = 1200$, $z = 2550$, $t = 5100$.

L'importance de ce papyrus ne tient pas aux problèmes posés (on en trouve de semblables en Égypte et ailleurs), mais au fait qu'on y désigne l'inconnue par la même notation que celle utilisée par Diophante. Mais, comme l'écrit Th. Heath, cette notation figure aussi dans un manuscrit des *Éléments* d'Euclide et dans un manuscrit de Théon de Smyrne³⁹, ainsi que dans un manuscrit de l'*Arénaire* d'Archimède et dans la *Géodésie* de Héron⁴⁰. Il s'agit donc d'un usage diffus, que Diophante a lui aussi adopté.

Quant à l'arithmétique pythagoricienne, les seuls témoignages qui nous sont parvenus sont tardifs. Proclus rapporte une « méthode pythagoricienne » pour former les triangles rectangles numériques, qui revient à la formule suivante (pour m impair) :

$$\left(\frac{m^2 + 1}{2}\right)^2 = m^2 + \left(\frac{m^2 - 1}{2}\right)^2.$$

³⁷ Voir L. C. Karpinski et F. E. Robbins, « Michigan Papyrus 620 ; the Introduction of Algebraic Equations in Greece », *Science*, 70, 1929, p. 311-314 ; J. Winter, *Papyri in the University of Michigan Collection, Miscellaneous Papyri (Michigan Papyri III)*, Ann Harbor, University of Michigan Press, 1936. A. Allard a examiné ce manuscrit du point de vue paléographique dans sa thèse de 1980, vol. I, p. 18-19.

³⁸ L. C. Karpinski et F. E. Robbins, « Michigan Papyrus 620 », p. 313.

³⁹ *A History of Greek Mathematics*, Oxford, Clarendon Press, 1921, vol. II, p. 456-461.

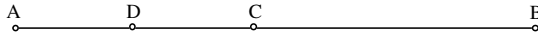
⁴⁰ T. Heath, *Diophantus of Alexandria*, p. 35-36.

On obtient ainsi le triplet

$$\left(m, \frac{m^2-1}{2}, \frac{m^2+1}{2}\right).$$

Selon Proclus, les platoniciens ont étendu cette méthode au cas d'un côté pair et formé le triplet $(2m, m^2-1, m^2+1)$. Mais ces méthodes ne fournissent pas toutes les solutions entières de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$. Ces formules ne dépendent que d'un seul paramètre, alors qu'il en faut deux, comme l'indique la proposition 1⁴¹. Pourtant, si l'on prend m rationnel dans ces formules, on peut récupérer toutes les solutions entières.

Dans le lemme 1 à la proposition 28 du livre X des *Éléments*, Euclide expose une méthode fondée sur la proposition 1, qui donne toutes les solutions entières de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$. À la différence des pythagoriciens, il démontre l'algorithme proposé à l'aide de la géométrie. Il représente les nombres par des segments et il pose $AB = mnp^2$, $BC = mnq^2$, entiers supposés de même parité.



Il suppose de plus que $AB - BC$ est pair et il pose $AD = \frac{AB - BC}{2}$; alors, d'après la proposition 6 du livre II des *Éléments*, on a $AB \cdot BC + CD^2 = BD^2$, c'est-à-dire

$$mnp^2 \cdot mnq^2 + \left(\frac{mnp^2 - mnq^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{mnp^2 + mnq^2}{2}\right)^2.$$

Si on divise par $(mn)^2$, on retrouve $(2pq)^2 + (p^2 - q^2)^2 = (p^2 + q^2)^2$.

Cet algorithme se retrouve dans les *Arithmétiques*, mais sans la démonstration géométrique d'Euclide. Il fera partie de toute recherche ultérieure sur la théorie des nombres.

Venons-en à présent à Proclus, dans son *Commentaire sur la République* de Platon⁴². Il pose un problème qui, une fois traduit en équations, donne l'équation de Fermat $x^2 - ay^2 = \pm 1$ pour $a = 2$. Proclus donne les solutions particulières (3, 2) et (7, 5). Il expose ensuite les considérations suivantes : il pose $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, qui vérifient l'équation $y_1^2 - 2x_1^2 = -1$, puis il pose $x_2 = x_1 + y_1$, $y_2 = 2x_1 + y_1$; ces valeurs vérifient $y_2^2 - 2x_2^2 = 2x_1^2 - y_1^2 = 1$. Si

⁴¹ Cf. p. 11.

⁴² Proclus, *In Platonis Rem publicam commentarii*, éd. W. Kroll, II, 27, 11-22.

nous allons plus loin que Proclus et que nous procédons par induction complète finie, nous obtenons

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, y_n = 2x_{n-1} + y_{n-1} \text{ et } y_n^2 - 2x_n^2 = 2x_{n-1}^2 - y_{n-1}^2 = (-1)^n.$$

En procédant ainsi, on obtient effectivement $(x_2, y_2) = (2, 3), (x_3, y_3) = (5, 7)$, ainsi que la suite $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \dots$ d'approximations de $\sqrt{2}$. S'il est difficile d'attribuer de tels procédés à Platon⁴³, à moins de lui prêter une connaissance de l'induction complète, on peut remarquer qu'un procédé semblable permet d'obtenir une approximation de $\sqrt{3}$ comme celle qu'a utilisée Archimède : $\frac{265}{153}$ ⁴⁴. D'ailleurs le célèbre « problème des bœufs » d'Archimède conduit aussi, une fois traduit, à une équation de Fermat.

Reste la collection des treize problèmes attribués à Héron, qui a fait couler beaucoup d'encre et qui a autorisé certains historiens, comme J. Klein, à rapprocher Héron et Diophante. Il est vrai que, une fois traduits par des équations, ces problèmes sont d'un autre niveau que ceux que nous avons rencontrés jusqu'ici.

Tout a commencé lorsque F. Hultsch, lors de son édition du *Liber Geoponicus*, a trouvé deux de ces problèmes que P. Tannery a traduits ensuite en français, et très brièvement commentés, en 1882⁴⁵. En 1907, J. L. Heiberg édite et traduit en allemand les treize problèmes de la collection, avec un commentaire mathématique de H. G. Zeuthen⁴⁶. Cinq ans plus tard, en 1912, Heiberg donne une édition de la *Geometria* de Héron, qui comporte, entre autres, cette collection de treize problèmes⁴⁷. La question est donc de savoir si Diophante s'est inspiré de cette collection des problèmes attribués à Héron, compte tenu de ce que nous a appris Neugebauer, à savoir que Héron a vécu au premier siècle de notre ère⁴⁸.

⁴³ M. Caveing, *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*, Thèse présentée devant l'Université de Paris X, le 29 octobre 1977, 3 tomes, Université de Lille III, Atelier national de reproduction des thèses, 1982, t. III, p. 1278 sqq.

⁴⁴ Archimède, *La mesure du cercle*, éd. Ch. Mugler, Paris, 1970, t. I, p. 140-143.

⁴⁵ P. Tannery, « L'arithmétique des Grecs dans Héron d'Alexandrie » (1882), *Mémoires Scientifiques*, t. I, p. 189-225, aux p. 221-225.

⁴⁶ J. L. Heiberg et H. G. Zeuthen, « Einige griechische Aufgaben der unbestimmten Analytik », *Bibliotheca Mathematica*, 3 Folge, 8 Band, 1 Heft, 1907-08, p. 118-134.

⁴⁷ *Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia*, vol. IV, éd. J. L. Heiberg, Stuttgart, Teubner, 1976.

⁴⁸ O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*, p. 178.

Notons que ces problèmes font partie d'un livre de « géométrie pratique », dans lequel Héron traite des questions de stéréométrie et de planimétrie, et non pas d'un livre d'arithmétique. Ils se partagent en deux groupes : le premier est constitué de trois problèmes et le second des dix autres.

Prenons pour commencer un exemple du premier groupe, soit le second problème, qui s'énonce :

Trouvez deux rectangles dont les périmètres soient égaux et dont l'un ait une aire quadruple de celle de l'autre.

Héron le résout ainsi :

Élevez 4 au cube, il vient 64 ; retranchez 1 ; il reste 63 pieds pour <le demi-> périmètre de chacun des rectangles. Pour distinguer les côtés, je fais comme suit : prenez 4, retranchez 1, reste 3 ; soit donc 3 pieds pour l'un des côtés. Pour l'autre côté, comme suit : de 63 retranchez 3, reste 60 pieds. Quant à l'autre rectangle, faites comme suit : multipliez 4 par lui-même, il vient 16 pieds ; retranchez 1, reste 15 pieds ; que ce soit là le premier côté. Pour l'autre, comme suit : retranchez 15 de 63, reste 48 ; soit pour l'autre côté 48 pieds. Une des aires est de 720 pieds, l'autre de 180 pieds⁴⁹.

L'énoncé aussi bien que la solution relèvent de toute évidence de cette branche de la géométrie pratique, et non pas de l'analyse de Diophante, où les problèmes portent sur les nombres et leurs espèces et où on procède aux solutions dans un style algorithmique, à l'aide de substitution et d'élimination des inconnues. Pour rendre cette différence manifeste, traduisons symboliquement en équations le texte précédent.

On récrit le système :

$$\begin{cases} x + y = u + v \\ xy = n \cdot uv \end{cases} \quad \text{avec } n = 4.$$

Les étapes de la solution sont les suivantes :

$$x + y = u + v = n^3 - 1 = 63$$

et

$$u = n - 1 = 3, v = n(n^2 - 1) = 60, x = n^2 - 1 = 15, y = n^2(n - 1) = 48.$$

Comment Héron est-il parvenu à cette solution ? Lui-même n'en dit mot, et on serait tenté de s'inspirer de Diophante pour expliquer la solution. Mais, dans ce cas, on annulerait la question à laquelle on essaie de répondre, aporie dans laquelle sont tombés bien des commentateurs de Héron.

⁴⁹ P. Tannery, « L'arithmétique des Grecs dans Héron d'Alexandrie », dans *Mémoires scientifiques*, t. I, p. 223 ; éd. Heiberg, p. 416.

Quoi qu'il en soit, imaginons quelle aurait pu être la démarche de Diophante à ce propos. Il aurait ainsi énoncé le problème :

Trouver quatre nombres tels que la somme de deux d'entre eux soit égale à la somme des deux autres, et le produit des deux premiers égal au quadruple du produit des deux autres.

Il aurait résolu le problème de la manière suivante :

Posons dans la seconde équation $x = t$ et $v = kt$.

L'équation se réécrit :

$$ty = nktu, \text{ avec } n = 4$$

En éliminant t de part et d'autre, on a $y = 4ku$.

Substituons ces valeurs dans la première équation ; on aura

$$t + 4ku = u + kt$$

d'où

$$(4k - 1)u = (k - 1)t.$$

On a la solution évidente

$$x = t = 4k - 1, u = k - 1, y = 4k(k - 1) \text{ et } v = k(4k - 1).$$

Pour $k = 4$, on a la solution de Héron.

Ainsi, Héron résout un problème indéterminé de géométrie pratique, tandis que Diophante ne traite que de problèmes arithmétiques et procède explicitement par élimination, substitution et déplacement des inconnues. Sans doute est-ce cette différence qui explique la prudence de Zeuthen : alors qu'il cherchait, semble-t-il, à rapprocher Héron de Diophante, il s'est ravisé pour placer Héron entre Euclide et Diophante⁵⁰. À son tour, Th. Heath écrit :

Unfortunately there is no guide to the date of the problems just given. The probability is that the original formulation of the most important of the problems belongs to the period between Euclid and Diophantus⁵¹.

Le second groupe des problèmes de cette collection – 4 à 13 – traite des triangles rectangles, également d'une manière géométrico-arithmétique, et non pas selon l'analyse de Diophante. Voici la traduction du cinquième problème :

⁵⁰ *Histoire des mathématiques dans l'Antiquité et le Moyen Âge*, Paris, Gauthier-Villars, 1902, p. 134.

⁵¹ Th. Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. II, p. 447.

Un triangle rectangle d'aire 5 pieds, trouver ses côtés.

Je fais ainsi : examine le produit de 5 par un certain nombre carré ayant 6, afin que, multiplié, il produise l'aire d'un triangle rectangle. Multiplié par 36, il devient 180, c'est l'aire d'un triangle rectangle dont la cathète est 9 pieds, la base 40 pieds, l'hypoténuse 41 pieds. Et je divise 180 par 5 : c'est 36, de racine 6. Prends le sixième de 41, c'est six pieds, un demi, un tiers, l'hypoténuse. Donc l'aire est 5 pieds⁵².

Nul besoin de rappeler encore une fois que ni le style, ni la solution, ne sont ceux de Diophante.

Dans ce problème Héron n'indique pas non plus la voie qui l'a mené à la solution, dont il n'explique pas les étapes. Il en est ainsi pour tous les autres problèmes de cette collection, y compris les quatre derniers (10 à 13), également commentés par Zeuthen, qui les considère les plus intéressants⁵³. Th. Heath partage cette opinion⁵⁴. Ces problèmes sont des cas particuliers d'un seul : trouver un triangle rectangle rationnel tel que la somme de son aire et de son périmètre soit un nombre donné.

De ces treize problèmes, on ne retrouve aucun dans les *Arithmétiques*. Or on ne peut imputer cette absence aux seules circonstances : même si Diophante les avait eus entre les mains, il ne les aurait pas intégrés dans son livre. En effet, il n'y traite pas des problèmes de géométrie pratique – de stéréométrie ou de planimétrie – qui, une fois traduits par l'historien en équations, s'avèrent être des problèmes indéterminés du premier ou du second degré. Tous les problèmes étudiés dans les *Arithmétiques* sont des problèmes arithmétiques, c'est-à-dire qu'ils portent expressément sur les nombres et les espèces des nombres.

Nous venons de passer en revue, bien rapidement il est vrai, des problèmes qui incarnent ce que les mathématiciens antérieurs à Diophante ont pu aborder. Les principaux domaines qu'il partage avec ses prédécesseurs sont ceux des triplets pythagoriciens, des triangles rectangles et celui de la composition de la forme $x^2 + y^2$ avec elle-même. Si des problèmes étrangers à ces domaines ont pu l'inspirer, ce qui reste très difficile à vérifier, il a dû les intégrer, comme tous les autres, à son nouveau projet arithmétique, rompant radicalement avec tout ce qui a pu être conçu auparavant, que ce soit en extension ou en compréhension. En effet, même le domaine des triplets pythagoriciens, ceux des triangles rectangles numériques et de la composition de la forme $x^2 + y^2$ déjà évoqués, ont été investis dans ce projet d'élaborer une nouvelle « théorie arithmétique ». C'est parce qu'on ignore

⁵² Éd. Heiberg, p. 418, 25-p. 420, 10.

⁵³ *Histoire des mathématiques dans l'Antiquité et le Moyen Âge*, p. 130-134.

⁵⁴ Th. Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. II, p. 446-447.

tout des étapes de la formation de ce projet et de sa genèse que les interprétations des *Arithmétiques* n'ont cessé de se multiplier. Or cette abondance d'interprétations est encore encouragée par l'indigence de notre connaissance des successeurs de Diophante dans la période hellénistique.

En fait, il a fallu attendre le neuvième siècle pour que les *Arithmétiques* soient lues et commentées. Mais ces commentaires vont infléchir le texte de Diophante dans un sens ou dans l'autre.

2. LE PROJET DE DIOPHANTE

Peut-on saisir l'objet des *Arithmétiques* dans les termes de Diophante lui-même ? Quelle pouvait être la pensée du mathématicien alexandrin ? Peut-on penser avec rigueur ce que lui-même pensait effectivement sans faire appel à un schème qui n'est pas le sien et sans, d'autre part, se contenter d'expliquer ses mots en recourant à ses propres mots, en apprenti-philologue ? Il est vrai que la philologie, si on la maîtrise, est indispensable à la restitution du texte dans son contexte ; cependant, pour être efficace, elle doit être orientée par une profonde compréhension des mathématiques en jeu et de leur histoire.

Cette question herméneutique se complique très vite dans le cas des *Arithmétiques*, pour les raisons que l'on vient d'exposer : nous ignorons tout des prédécesseurs de Diophante, de ses contemporains et de ses successeurs proches. Il a fallu attendre plus d'un demi-millénaire pour que son traité reparaisse, en partie, dans une traduction arabe, dans laquelle Diophante se présente, si l'on peut dire, comme un successeur d'al-Khwārizmī, dont l'algèbre a fourni au traducteur aussi bien les termes que les grilles de lecture.

C'est parce que les *Arithmétiques* sont un point singulier dans l'histoire que la question de leur objet qui, en droit, n'attend qu'une seule réponse, en a reçu plusieurs. C'est ainsi qu'on a renvoyé le livre, tour à tour, à l'arithmétique égyptienne, à celle de Babylone, à la logistique grecque, à l'arithmétique grecque, à un des moments de l'algèbre et, très récemment, à la géométrie algébrique. Or ces interprétations avaient toutes les raisons de se multiplier. La première est l'apparente simplicité de bien des problèmes étudiés dans les *Arithmétiques*, qui a incité certains historiens à en chercher l'origine chez les anciens. La seconde raison tient au peu d'explications que Diophante nous livre sur ses méthodes : les historiens ont cru pouvoir les chercher chez ses successeurs. La troisième est liée aux lectures que les mathématiciens ont faites des *Arithmétiques*, à partir d'al-Karajī. La der-

nière, enfin, renvoie à l'évolution de l'historiographie des mathématiques, à celle de ses doctrines et de ses méthodes.

Dans ces conditions, c'est évidemment l'approche phénoménologique qui s'impose d'emblée, et on est immédiatement tenté de « revenir aux choses mêmes » en procédant par « réduction eidétique ». Tel est précisément le conseil de J. Klein, lorsqu'il écrit :

But our task consists precisely in bringing the content of Greek mathematics to light not by externally transposing it into another mode of presentation but rather by comprehending it in the one way which seemed comprehensible to the Greeks. Only then can we determine what kind of conceptual means Greek, in distinction from modern, mathematics employs. And similarly, only by making explicit the particular character of Greek intentionality, whose peculiar transformation in the sixteenth and seventeenth century is equivalent to the « introduction of a completely new means of expression for mathematical thinking », namely, a formal « algebraic » symbolism, can the specific conceptual character of the latter be understood⁵⁵.

Reste à savoir si cette démarche, certes séduisante, est praticable et peut aboutir, ou si, une fois encore, on est victime de cette illusion transcendante où la réduction eidétique mène à prendre pour des essences ce qui n'est en fait que des objets historiquement déterminés. Après une analyse philologique et philosophique maîtrisée, Klein finit par dire que Diophante correspond au « primitive stage of algebra⁵⁶ ». Il reste que cette démarche phénoménologique, intéressante lorsque c'est Klein qui est à la manœuvre (même si le texte cité révèle une représentation gauche de l'histoire des mathématiques), s'est récemment révélée néfaste entre des mains moins expertes.

Essayons à notre tour de procéder à une description des *Arithmétiques* à la manière des phénoménologues, mais sans prétendre aucunement à une réduction eidétique.

Dans deux préambules – l'un au premier livre des *Arithmétiques*, l'autre au quatrième – Diophante donne quelques brèves explications sur son projet. Dans le préambule au premier livre, il s'adresse à un certain Dionysios :

[...] j'ai entrepris d'exposer la nature et la puissance des nombres, en commençant par les bases sur lesquelles les choses sont établies. Il se peut que la matière paraisse plus difficile qu'elle ne l'est, parce qu'elle n'est pas encore connue, et que les débutants désespèrent de réussir. Elle te deviendra

⁵⁵ Jacob Klein, *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, translated from the German by Eva Brann, Cambridge, Mass., M.I.T. Press, 1968, p. 127-128.

⁵⁶ *Ibid.*, p. 133.

cependant facile à comprendre, grâce à ton zèle et à ma démonstration : l'ambition jointe à l'enseignement mène rapidement à la science⁵⁷.

Diophante poursuit en introduisant les termes primitifs de la théorie arithmétique : les nombres, les parties des nombres, les « espèces », les opérations qu'on leur applique, les désignations des espèces, etc. Il écrit :

Maintenant que nous avons réuni une matière abondante sur ces expressions mêmes, entrons dans la voie des propositions. Comme ces propositions sont très nombreuses et de grande ampleur, et que, de ce fait, elles sont lentement ratifiées par ceux qui les abordent, et qui ne sont pas secondés par leur mémoire, j'ai essayé de diviser celles qui sont susceptibles de l'être, et surtout de faire le départ de celles qui, au début, se rattachent aux éléments, en procédant, comme il convenait de le faire, des plus simples aux plus compliquées. Elles deviendront ainsi plus accessibles aux commençants, et leur développement se fixera dans la mémoire⁵⁸.

Dans le préambule au quatrième livre, Diophante rappelle qu'il avait traité dans les trois premiers les problèmes composés des « espèces du nombre linéaire et du nombre plan, et également ceux qui proviennent de la réunion des deux ». Il poursuit

[...] comme je les ai disposés selon des degrés que ceux qui apprennent puissent retenir et dont ils puissent saisir les significations, je trouve bon aussi, pour que rien ne t'échappe de ce qui peut être pratiqué en cet art, de te mettre par écrit – également dans ce qui suit – de nombreux problèmes de cette branche, ceux qui appartiennent à l'espèce du nombre appelé solide aussi bien que ceux qui appartiennent à sa composition avec les deux premières espèces. J'y suivrai la même voie et t'amènerai ainsi à t'y élever degré par degré, et d'une branche à l'autre, pour que ceci devienne une coutume et une habitude. Une fois que tu auras appris ce que j'ai inscrit, tu pourras résoudre de nombreux problèmes que je n'ai pas inscrits, puisque je t'aurai tracé la voie pour trouver la plupart des problèmes et que je t'aurai décrit un exemple de chaque espèce⁵⁹.

Il ressort clairement des propres mots de Diophante qu'il entend exposer à des débutants une matière encore inconnue, d'une manière constructive et didactique. Cette intention didactique ne se manifeste pas seulement dans les préambules, mais aussi dans le corps des *Arithmétiques*, lorsque Diophante recourt à des expressions telles que « après t'avoir exposé », « après t'avoir expliqué », « applique cela avec adresse »⁶⁰, etc. ; ou, plus généralement, comme il l'écrit dans le préambule au livre 7 :

⁵⁷ *Diophante d'Alexandrie*, trad. P. Ver Eecke, p. 1.

⁵⁸ *Diophante d'Alexandrie*, trad. P. Ver Eecke, p. 8-9.

⁵⁹ *Les Arithmétiques*, éd. R. Rashed, tome III : *Livre IV*, p. 1.

⁶⁰ Éd. P. Tannery, vol. I, p. 6, 22-23 ; p. 14, 1 ; p. 14, 21.

« [...] afin de consolider l'habileté et d'accroître la pratique et l'habitude »⁶¹. Par là, on peut immédiatement entendre l'ordre de l'exposition, qui va du plus simple au plus complexe, que l'on suit pour mener l'élève par la main et lui permettre ainsi de surmonter graduellement les difficultés. Mais cette signification se superpose à une autre, beaucoup plus profonde et de nature théorique, qui a trait à l'ordre de l'invention : on part des définitions des termes primitifs et de celles des opérations arithmétiques qu'on leur applique, des « éléments », afin d'édifier une « théorie arithmétique », ἀριθμητικὴ θεωρία. Les éléments de cette théorie vont se mettre en place au fur et à mesure de la rédaction du traité. À partir des termes primitifs, de leurs abréviations graphiques et des opérations de l'arithmétique élémentaire (addition, soustraction, multiplication de ces termes⁶²), ainsi que des concepts d'égalité et d'indétermination, on ajoute les méthodes propres de solution, telles que la double égalité, la complétion des carrés et des cubes. Ainsi, du point de vue architectonique, l'exposé de Diophante épouse délibérément la forme et l'ordre de l'exposé euclidien : énoncé général (*protasis*) ; condition nécessaire (*prodiorismos*) pour obtenir une solution rationnelle positive lorsqu'il le faut ; mise de l'énoncé général sous une forme numérique (ecthèse) ; choix de l'inconnue provisoire (le nombre provisoirement indéterminé) ; réécriture des autres inconnues en fonction de celle-ci (le début de la démonstration) ; réécriture du problème sous la forme d'une égalité entre les inconnues et les données ; transformation de cette égalité par l'une des méthodes inventées (c'est précisément ici que se pose la question des méthodes de Diophante) ; enfin, par ces méthodes, on parvient à une égalité entre deux espèces de nombres seulement et à la détermination de la valeur de l'inconnue, en ajoutant ce qui manque aux deux membres et en retranchant des deux membres ce qui est égal.

On peut sans risque de se tromper qualifier cet ordre d'exposition d'euclidien. La démarche constructive et didactique, dans les deux sens de ce dernier terme, était, semble-t-il, destinée à remplacer un exposé axiomatique, encore inaccessible – et pour longtemps encore – en arithmétique diophantienne. Autrement dit, faute de pouvoir procéder par un exposé d'allure axiomatique dans ce nouveau domaine, Diophante a conçu cet ordre constructif et didactique – qui s'inspire en quelque sorte de la méthode « axiomatique » – pour bâtir un exposé qui part des éléments et va ensuite du plus simple au plus complexe, mais il n'a pas fourni les règles de déduction. C'est d'autant plus important qu'il voulait édifier une authen-

⁶¹ R. Rashed, *Les Arithmétiques*, tome IV : *Livres V, VI, VII*, p. 81, 5-6.

⁶² Il est étonnant que Diophante n'explique pas la division, à moins qu'il l'ait fait dans un paragraphe disparu du texte grec.

tique théorie dont les éléments constitutifs sont les nombres : le nombre, ἀριθμός, est considéré, selon la tradition aristotélicienne et euclidienne, comme pluralité d'unités (μοναδῶν πλῆθος), et c'est donc nécessairement un entité positive (ὑπαρξίς, c'est-à-dire « ce qui est », « ce qui existe ») ; les parties fractionnaires ne sont pas appelées « nombres », mais elles sont des parties des quantités ; et, enfin, les notations graphiques des espèces des nombres. Ces éléments de la théorie sont présents non seulement « en personne », mais aussi comme « espèces des nombres ».

On peut montrer que cette importante notion d'espèce (εἶδος) de nombre recouvre également et indifféremment la puissance d'une pluralité déterminée et la puissance d'une pluralité quelconque, c'est-à-dire provisoirement indéterminée, mais qui sera, au terme de la solution du problème, toujours déterminée : il s'agit de l'« inconnue provisoire », ou « nombre non dit », ἄλογος ἀριθμός⁶³, et de ses puissances⁶⁴. Dans le préambule au premier livre, Diophante définit ces termes, ces puissances, jusqu'à la

⁶³ Dans l'édition de P. Tannery des *Arithmétiques*, on lit « [...] ἔχων δὲ ἐν ἑαυτῷ πλῆθος μονάδων ἀόριστον, ἀριθμὸς καλεῖται [...] » (vol. I, p. 6, 4-5). Tannery, dans son étude « Les manuscrits de Diophante à l'Escorial », dans *Mémoires scientifiques*, t. II, p. 418-432, justifie ce choix. Il écrit :

« On lit, en effet, dans tous les manuscrits [...] après l'énumération des diverses puissances jusqu'à la sixième, la phrase suivante : ὁ δὲ μηδὲν τούτων τῶν ιδιωμάτων κτησάμενος ἔχων δὲ ἐν ἑαυτῷ πλῆθος μονάδων ἄλογος ἀριθμὸς (ce mot représenté par son abréviation) καλεῖται καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον τὸ (ici répétition du même signe).

Le mot ἄλογος est inadmissible dans cette phrase ; cependant la tradition manuscrite est attestée par le commentaire inédit de Georges Pachymère qui, au treizième siècle, ne lisait pas autrement et essayait vainement de donner un sens acceptable » (p. 429).

Grâce à une lettre de Psellus, où ce dernier cite ce texte de Diophante et écrit cette locution : « πλῆθος μονάδων ἀόριστον », Tannery a pu trouver une solution au problème. Il présente ensuite une conjecture qui en contient une deuxième pour justifier cette solution (cf. p. 430).

Dans son édition de 1980, A. Allard opte pour la tradition manuscrite et lit la locution ci-dessus : « [...], ἔχων δὲ ἐν ἑαυτῷ πλῆθος μονάδων, ἄλογος ἀριθμὸς καλεῖται, [...] » (*op. cit.* p. 375, 12).

La solution d'André Allard respecte la tradition manuscrite et n'a recours à aucune conjecture. D'autre part, dans la version de Tannery, il s'agit d'une pluralité indéterminée d'unités, qui s'appelle nombre. Mais alors, dans ce cas, on ne distingue pas dans la dénomination entre nombre déterminé et nombre indéterminé. Selon le texte établi par A. Allard, il s'agit toujours d'une « pluralité d'unités qui s'appelle nombre non-dit », c'est-à-dire momentanément et provisoirement indéterminé, et à ce titre différent du nombre déterminé. On comprend pourquoi les traducteurs arabes l'ont rendu par le mot qui désigne l'inconnue, c'est-à-dire « *shay'* ».

⁶⁴ R. Rashed, *Les Arithmétiques*, tome III : *Livre IV*, p. 104-105.

sixième, et en donne certaines abréviations graphiques (qui n'ont rien à voir, contrairement à ce qui a pu être dit, avec une représentation symbolique)⁶⁵. On remarque d'ailleurs que, dans le texte grec, les abréviations sont affectées d'une désinence qui indique leur genre et leur nombre⁶⁶. Après avoir examiné en paléographe tous les manuscrits des *Arithmétiques*, A. Allard écrit que bien des abréviations « telles que $\square$ pour τετράγωνος, ζ pour ἴσος, etc. »⁶⁷ relèvent d'usages paléographiques bien connus. D'ailleurs, le traducteur des *Arithmétiques* en arabe, le grec Qustā ibn Lūqā, ne s'est pas trompé en rendant ces abréviations par les mots d'origine. Ces abréviations n'ont jamais été considérées comme symboles avant le développement de l'algèbre symbolique et, à la différence des symboles algébriques, elles n'ont aucun pouvoir d'extension, ce qui est la propriété fondamentale du symbolisme.

Au quatrième livre, selon le nouvel ordre, Diophante définit la huitième et la neuvième puissance⁶⁸. Notons que la septième puissance n'est jamais mentionnée dans les *Arithmétiques*, grecques ou arabes, et que la cinquième n'apparaît jamais dans les énoncés des problèmes. Ce fait important, qui n'a pas été remarqué, nous ramène à cette notion d'« espèce » (εἶδος) de nombre que nous avons déjà évoquée⁶⁹.

Rappelons que Diophante ne parle que de trois espèces : celle du nombre linéaire, γραμμικός ; celle du nombre plan, ἐπίπεδος ; et, enfin, celle du nombre solide, στερεός. Or ce n'est qu'à propos de ces trois espèces qu'il évoque la nature – φύσις – des nombres. Autrement dit, le genre « nombre » n'embrasse que trois espèces.

Cependant, dans les *Arithmétiques*, Diophante considère le nombre carré comme une espèce du nombre plan et, de même, le nombre cubique comme une espèce du nombre solide. Il admet en outre qu'un nombre peut appartenir à deux espèces, par exemple carré et cube à la fois.

Ces trois espèces de nombre – linéaire, plan et solide – engendrent toutes les autres puissances, lesquelles, à la limite, doivent prendre leur nom. Ainsi, le carré-carré, δυναμοδύναμις, noté $\Delta^Y \Delta$, est un carré,

⁶⁵ Éd. P. Tannery, vol. I, p. 1 à 13.

⁶⁶ Sur les notations, voir aussi F. Cajori, *A History of Mathematical Notations*, vol. I : *Notations in Elementary Mathematics*, La Salle, Illinois, The Open Court Publishing Company, 1974, p. 71-74.

⁶⁷ A. Allard, *Diophante d'Alexandrie. Les Arithmétiques*, t. I, p. 33 sqq.

⁶⁸ R. Rashed, *Les Arithmétiques*, tome III : *Livre IV*, p. 82-84.

⁶⁹ Les mathématiciens du XVI^e siècle ont désigné x^5 et x^7 par « relate premier » ou « Surde Solidum », et « relate second » ou « B. Surde Solidum », alors qu'ils utilisent « unité » (pour le nombre), « racine » ou « côté », « carré », « cube », « carré-carré », « carré de cube ».

δύναμις, Δ^Y . Le carré-carré-carré, le carré-cubo-cube sont également des carrés, le cubo-cubo-cube est un cube. Les puissances engendrées selon un principe additif ne pourraient donc l'être que par composition, et chacune est nécessairement un multiple de 2 ou de 3 ; et de même pour leurs inverses. Ainsi, Diophante définit :

$$\begin{aligned} x^3 &= x^2 \cdot x ; x^4 = x^3 \cdot x = x^2 \cdot x^2 ; x^5 = x^4 \cdot x = x^3 \cdot x^2 ; \\ x^6 &= x^5 \cdot x = x^4 \cdot x^2 = x^3 \cdot x^3 ; x^8 = x^6 \cdot x^2 = x^4 \cdot x^4 ; \\ x^9 &= x^8 \cdot x = x^6 \cdot x^3 = x^5 \cdot x^4 . \end{aligned}$$

C'est parce qu'une telle ontologie des nombres ne peut l'admettre que x^7 est absente de tous les énoncés des *Arithmétiques* : on ne peut en effet la définir comme composée de deux de ces trois espèces génériques. Quant à x^5 , qui cependant s'écrit comme le produit $x^2 x^3$, elle n'apparaît pas dans les énoncés, mais dans les ecthèses et les solutions.

Une fois définis les termes primitifs de la théorie arithmétique, Diophante explique les opérations arithmétiques qu'on peut leur appliquer. Il introduit alors un nouveau signe, σημειον, pour distinguer une quantité soustraite. Il s'agit d'un ψ tronqué, à tête renversée, 𐤀 . Ce signe se substitue à certaines formes des mots λειψις ou λείπειν, mais ce n'est pas systématique. Diophante insiste notamment sur la multiplication et la division, et donne la règle des signes, que l'on peut récrire :

$$(-a) \cdot (-a) = a, \quad (-a) \cdot (+a) = (-a).$$

Le $(-a)$ est donné dans un binôme, et jamais seul. C'est un terme soustrait, ou « soustractif », et non un nombre négatif, car Diophante ne retranche jamais un terme (nombre ou espèce) d'une « position vide », ni un terme positif d'un terme positif plus petit, ce qui aura lieu lors de l'invention de l'algèbre des polynômes avec l'école d'al-Karajī⁷⁰.

⁷⁰ Voici la règle donnée par al-Samaw'al, le successeur d'al-Karajī. On observe la différence entre les deux formulations, celle de Diophante et celle de l'école d'al-Karajī : « Le produit d'un nombre soustractif par un nombre positif est soustractif, et par un nombre soustractif est positif. Si nous soustrayons un nombre soustractif d'un nombre soustractif supérieur, le reste est leur différence soustractive. Si d'un nombre positif, nous soustrayons un nombre soustractif, le reste est leur somme positive. Si d'un rang vide, nous soustrayons un nombre positif, le reste est le même nombre soustractif, et si d'un rang vide nous soustrayons un nombre soustractif, le reste est le même nombre positif. » (Al-Samaw'al, *Al-Bāhir en Algèbre d'As-Samaw'al*, édition, notes et introduction par Salah Ahmad et Roshdi Rashed, Damas, Presses de l'Université de Damas, 1972, p. 70-71.) Dans un tel texte, on peut légitimement traduire le terme *nāqīṣ*,

Cette règle des signes a soulevé la question, controversée, de la connaissance que Diophante pouvait avoir des nombres négatifs⁷¹. Pour éclaircir la question, commençons par citer ses propres mots. Il écrit : Λεῖψις ἐπὶ λείψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὑπαρξιν, λείψις δὲ ἐπὶ ὑπαρξιν ποιεῖ λείψιν, καὶ τῆς λείψεως σημεῖον Ψ ἐλλίπες κάτω νεῦον, $\mathfrak{A}$ ⁷²; que Bachet de Méziriac traduit :

« Minus per minus multiplicatum, producit Plus. At minus per plus multiplicatum, producit minus. Et defectus nota est litera Ψ decurtata deorsum vergens, sic $\mathfrak{A}$ »⁷³.

Quant à P. Tannery, il traduit d'une manière analogue, mais, au lieu de « defectus », il opte pour « negationis » et, au lieu du signe $\mathfrak{A}$, il note $\mathfrak{A}$ [-]. Il écrit :

Minus multiplicatum in minus facit plus et minus in plus facit minus.

Signum negationis est Ψ truncatum deorsum vergens $\mathfrak{A}$ [-]⁷⁴.

Mais Tannery n'a pas été suivi par les traducteurs des *Arithmétiques*. Tout en restant proche de lui, Th. Heath substitue à « signum negationis » « the sign of a minus »⁷⁵. A. Allard s'en éloigne franchement lorsqu'il traduit ce même paragraphe : « Une quantité cédée multipliée par une quantité cédée forme une quantité ajoutée ; une quantité cédée multipliée par une quantité ajoutée forme une quantité cédée. Le symbole de la quantité cédée est Ψ tronqué et à tête renversée $\mathfrak{A}$ ⁷⁶. En philologue, A. Allard évite non

que nous avons rendu par « soustractif », par le mot « négatif », ce qui serait impropre chez Diophante. On peut récrire symboliquement le texte d'al-Samaw'al :

$$x \leq 0, y \geq 0 \Rightarrow xy \leq 0$$

$$x \leq 0, y \leq 0 \Rightarrow xy \geq 0$$

$$x \leq 0, y \geq 0 \Rightarrow x - y \leq 0$$

$$x \leq 0, y \leq 0, |x| \geq |y| \Rightarrow x - y \leq 0$$

$$x \leq 0, y \leq 0, |x| \leq |y| \Rightarrow x - y \geq 0$$

$$x \geq 0 \Rightarrow 0 - x \leq 0$$

$$x \leq 0 \Rightarrow 0 - x \geq 0$$

⁷¹ Sur la discussion entre les historiens à propos du sens de cette règle, voir K. Barner, « Negative Größen bei Diophant ?, I et II ».

⁷² *Diophanti Alexandrini Opera Omnia* ..., éd. P. Tannery, vol. I, p. 12, 19-21.

⁷³ Bachet de Méziriac, *Diophantini Alexandrini Arithmeticonum*..., p. 9.

⁷⁴ *Diophanti Alexandrini Opera Omnia* ..., éd. P. Tannery, vol. I, p. 13.

⁷⁵ Th. Heath, *Diophantus of Alexandria*, p. 130.

⁷⁶ A. Allard, *Diophante d'Alexandrie. Les Arithmétiques*, t. II, p. 427.

seulement le terme « négatif », mais aussi le terme « positif ». C'est d'ailleurs ce qu'avait fait G. Wertheim lorsqu'il traduisait ce même paragraphe par :

Eine abzuziehende Zahl ($\lambda\epsilon\iota\psi\iota\varsigma$), mit einer abzuziehenden multipliziert, giebt eine hinzuzufügende ($\upsilon\pi\alpha\rho\epsilon\iota\varsigma$) ; eine abzuziehende Zahl dagegen, mit einer hinzuzufügenden multipliziert, giebt eine abzuziehende Zahl. Das Zeichen der Subtraktion ist λ (ein verstümmeltes und umgekehrtes Ψ)⁷⁷.

À son tour, Ver Eecke traduit par

Ce qui est de manque, multiplié par ce qui est de manque, donne ce qui est positif ; tandis que ce qui est de manque, multiplié par ce qui est positif, donne ce qui est de manque, et la marque distinctive de ce qui est de manque est λ , c'est-à-dire un Ψ incomplet et renversé⁷⁸.

Ainsi, les traducteurs des *Arithmétiques* – exception faite de Tannery – et la plupart des historiens – Bourbaki⁷⁹ et A. P. Youschkevitch⁸⁰ – ne voient pas dans cette règle l'expression d'une connaissance des nombres négatifs.

Ces termes apparaissent seulement au cours de la soustraction d'un terme positif, avec un résultat positif. À aucun moment, en effet, Diophante ne considère un terme négatif en soi ; c'est toujours un terme soustractif. Lorsque la solution d'un problème contient un terme négatif, c'est son carré qu'il donne.

La composition des *Arithmétiques* s'éclaire du même coup : il s'agit de combiner ces espèces entre elles, sous certaines contraintes, et à l'aide des opérations de l'arithmétique élémentaire et de l'égalité (parfois, de l'inégalité). Résoudre les problèmes formés à l'aide de ces combinaisons, c'est, dans chaque cas, tenter de poursuivre le calcul « jusqu'à ce qu'il reste une seule espèce de part et d'autre » de l'égalité.

À partir de cette notion d'« espèce », il serait impropre de parler de polynôme et d'équation polynomiale dans les *Arithmétiques*, au sens où l'entendent les algébristes depuis al-Karajī au ^e siècle. Mais à cette contrainte s'en ajoute une autre. Si on examine systématiquement le texte

⁷⁷ G. Wertheim, *Die Arithmetik und die Schrift über Polygonalzahlen des Diophantus von Alexandria*, p. 6.

⁷⁸ *Diophante d'Alexandrie*, trad. P. Ver Eecke, p. 7.

⁷⁹ « Diophante ne connaît pas les nombres négatifs ; cette règle (des signes) ne peut donc s'interpréter que comme se rapportant au calcul des polynômes, en permettant de 'développer' des produits tels que $(a - b)(c - d)$ » (N. Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques*, Paris, Masson, 1984, p. 70).

⁸⁰ A. P. Youschkevitch, « Sur trois ouvrages soviétiques récents concernant l'histoire des mathématiques », *Revue d'histoire des sciences*, t. XXX, n° 4, oct. 1977, p. 337-343, aux p. 341-343.

de Diophante, on constate que, par « solution », le mathématicien entend des nombres déterminés, autrement dit, des rationnels positifs. Il arrive même que, avant d'entreprendre la discussion, il impose aux nombres donnés et aux paramètres des conditions supplémentaires, telles que le problème admette une seule solution rationnelle positive : le problème est alors dit *πλασματικός*, « convenablement déterminé » ou « convenablement façonné »⁸¹, c'est-à-dire convenablement mis en état pour permettre de construire une solution rationnelle positive. À aucun moment Diophante ne distingue entre problèmes déterminés et problèmes indéterminés, et nulle part ne figure dans les *Arithmétiques* un quelconque examen des problèmes impossibles, comme tels. On observe en effet que des problèmes déterminés s'intercalent entre les problèmes indéterminés, et que des problèmes qui auraient eu leur place dans le traité en sont absents, comme celui de la somme de deux cubes égale à un cube⁸².

Au cours de ses solutions, Diophante procède par substitution, élimination et déplacement des espèces, c'est-à-dire avec des techniques que les algébristes manieront plus tard. Mais il est hors de doute que son livre est un livre d'arithmétique, dont le domaine est celui des rationnels positifs. Sans doute est-ce le cadre relativement étroit de ce domaine qui a suscité le développement de ces procédés. Les algébristes, eux, à partir d'al-Khwārizmī, travaillent sur des extensions algébriques – quadratiques d'abord – du corps des rationnels.

Reste la question importante de la pratique démonstrative de Diophante et des méthodes qu'il applique. Sa pratique reflète d'ailleurs la situation épistémique de l'« analyse de Diophante » : elle ne se confond ni avec celle des anciens babyloniens ou égyptiens, ni avec celle des géomètres. Contrairement aux premiers, Diophante ne s'arrête pas à vérifier les procédures du calcul ni à en justifier, éventuellement, quelques-unes ; mais il tient à donner une preuve « formelle », à l'exemple des géomètres. Comme, contrairement à ces derniers, il ne dispose pas d'un système déductif pour son analyse, mais seulement constructif et didactique, il procède par « analyse »⁸³ pour construire les solutions. Par ce terme – mentionné plus d'une fois au livre 4 arabe, et par deux fois opposé à « synthèse », il entend ramener un problème déterminé ou indéterminé, à l'aide d'une suite finie d'opérations – changement d'inconnue, substitution, élimination, réduction,

⁸¹ Pour une discussion de la traduction de ce terme, cf. R. Rashed, *Les Arithmétiques*, tome III : *Livre IV*, p. 120-123.

⁸² Voir plus loin.

⁸³ Cf. R. Rashed, *Les Arithmétiques*, tome III : *Livre IV*, p. 69, 1 ; 86, 6 ; 91, 9. Dans ces deux dernières occurrences, on peut lire « nous procédons à la synthèse du problème d'après la manière que nous avons montrée lors de son analyse ».

etc. – (d’aucuns diraient algorithmes), ou bien à un problème résolu auparavant, ou bien à une solution dérivée de l’ensemble des données. Quoique particulière, cette solution doit vérifier l’énoncé général du problème. Cette suite finie d’opérations est conçue et réglée par l’une ou l’autre des méthodes appliquées par Diophante, telles que la double équation, ou celle de l’égalisation des seconds membres, etc. Par le terme « synthèse », qu’il utilise deux fois au livre 4 arabe (p. 86, 6 ; 91, 9), Diophante entend la démarche inverse de l’analyse (il y a double implication stricte). Toute la valeur d’une interprétation des *Arithmétiques*, quelle qu’elle soit, réside dans son pouvoir à la fois d’expliquer la structure du livre, et d’identifier toutes les méthodes qui y sont mises en œuvre.

L’invention de ces techniques algébriques avant la fondation, par al-Khwārizmī, de l’algèbre comme discipline mathématique, indépendante de l’arithmétique et de la géométrie, mais dont les opérations s’appliquent sur celles-ci, va jouer un rôle déterminant dans l’interprétation des *Arithmétiques* à partir du ^xe siècle.

Demandons-nous, pour l’heure, quelles sont la portée et les limites des lectures « phénoménologiques », celle que mène J. Klein à l’aide de la réduction eidétique, et celle que nous opérons ici sans cette réduction. L’avantage certain de semblables lectures est de ne faire appel à rien qui ne soit connu de Diophante, et de s’en tenir au cadre conceptuel des mathématiques grecques. Cette interprétation pourrait coïncider avec ce qu’écrit Zeuthen, lorsqu’il affirme que

[...] le fondement théorique de cet Ouvrage (*i. e.* les *Arithmétiques*) est le même que dans Euclide, et le but des intéressantes recherches de Diophante est toujours [...] d’éviter les quantités irrationnelles ; mais ces études ont chez lui, cependant, une ampleur inconnue jusqu’alors : elles lui permettent d’établir des exemples pour des problèmes déterminés qui, sous des formes très variables, aboutissent à des équations aux solutions rationnelles, et, en particulier, de poser de nombreux problèmes indéterminés auxquels il s’agit toujours de trouver des solutions rationnelles⁸⁴.

Or ces lectures, y compris celle de Zeuthen, si elles rendent bien compte de la démarche de Diophante, sont incapables d’identifier ses méthodes, c’est-à-dire celles que lui-même applique sans les expliquer ni les nommer. Klein ne se pose d’ailleurs pas la question ; Zeuthen la pose, mais, après avoir étudié algébriquement quelques exemples, n’aboutit pas.

⁸⁴ H.-G. Zeuthen, *Histoire des mathématiques dans l’Antiquité et le Moyen Âge*, Paris, Gauthier-Villars, 1902, p. 206.

3. DIOPHANTE ET EUCLIDE

La question reste donc entière : peut-on lire les *Arithmétiques* à la seule lumière des *Éléments* d'Euclide, par quelque méthode que ce soit ? Si cela était possible, sans forcer et sans faire appel à trop d'artifices, on résoudrait plusieurs problèmes d'un coup. On trouverait alors dans l'écrit rédigé avant Diophante sa source d'inspiration, directement connue de lui. Les *Éléments*, chacun le sait, faisaient partie du cursus des mathématiciens alexandrins. On restituerait avec certitude le cadre conceptuel grec des *Arithmétiques*, et on multiplierait les chances d'identifier les méthodes générales de Diophante.

Or tout cela est bien connu des historiens des mathématiques grecques qui ont étudié Diophante – Tannery, Wertheim, Heath, etc. –, et cependant ils ont opté pour d'autres lectures. Seul, à ma connaissance, Alexandre Birkenmajer a tenté cette interprétation en 1935⁸⁵. Selon Birkenmajer, Diophante ne procédait pas par tâtonnement, mais par une méthode générale, fondée sur la théorie des proportions telle qu'elle est exposée dans les *Éléments*. Pour étayer sa thèse, il considère les deux problèmes des *Arithmétiques* qui lui sont le plus favorables, II.8 et II.9. Considérons le premier de ces deux problèmes. Il se récrit :

$$x^2 + y^2 = a^2$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{x}{a+y} = \frac{a-y}{x}.$$

Supposons que ces deux expressions soient égales à un nombre rationnel m , on a

$$y = a - mx \text{ et } my = x - am.$$

Birkenmajer conclut :

La solution donnée par Diophante pour le problème II.8 n'est donc point, au fond, moins générale que celle donnée par les formules

⁸⁵ A. Birkenmajer, « Diophante et Euclide », *Mathematica*, vol. IX, 1935, p. 310-320. J. Christianidis reprend la thèse de A. Birkenmajer, en ajoutant quelques exemples. Comme A. Birkenmajer, il pense qu'il s'agit là d'une méthode générale pour les équations à deux inconnues. Cf. « Les équations $F(x, y) = 0$ dans les *Arithmétiques* et la méthode de Diophante », Contribution au colloque *Histoire de la lecture des anciens en mathématiques, Luminy (Marseille, France), 16-20 octobre 1995*.

$$(*) \quad x = \frac{2m}{m^2 + 1}a, \quad y = \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}a \quad [...]^{86}.$$

On traite le problème II.9 d'une manière analogue.

Or, si Diophante avait procédé, comme le soutient Birkenmajer, par les proportions, il aurait alors utilisé les deux informations supplémentaires obtenues (le système des deux équations linéaires) et résolu un système de deux équations à deux inconnues ; ce qu'il ne fait pas. Il se contente de substituer, et ainsi de reporter $y = a - mx$ dans l'équation initiale pour obtenir (*).

À aucun moment, d'ailleurs, on n'observe dans les *Arithmétiques* une telle mise en forme des proportions de l'équation pour déterminer le changement de l'inconnue. Diophante passe toujours par une inconnue auxiliaire, absolument inutile dans un exposé à l'aide des proportions. En revanche, il procède explicitement par substitution et réduction pour ramener l'équation à « une espèce égale une espèce ».

D'autre part, dans les *Arithmétiques*, toutes les équations indéterminées à deux inconnues que l'on peut finalement mettre sous la forme des proportions, notamment celles que mentionne A. Birkenmajer, sont résolues par Diophante par la méthode de « complétion des carrés et des cubes ». Cette méthode, que Diophante applique explicitement, rend parfaitement compte des solutions de ces équations, sans qu'il faille passer par les proportions. Prenons l'exemple de l'équation

$$y^2 = ax^2 + b$$

avec la condition $a + b$ un carré⁸⁷.

Diophante sait que, si l'on pose $x = 1$, on a immédiatement la condition, soit $a + b = k^2$. Il pose $x = 1 + t$, substitue cette valeur dans l'équation, et obtient

$$y^2 = at^2 + 2at + k^2 ;$$

il applique la méthode de « complétion des carrés » en posant $y = t + k$, et obtient ainsi les solutions.

Si d'ailleurs on veut mettre l'équation initiale sous la forme de proportions, il faut commencer par changer l'inconnue proposée par Diophante, si

⁸⁶ A. Birkenmajer, « Diophante et Euclide », p. 318.

⁸⁷ Cf. R. Rashed, *Les Arithmétiques*, tome III : Livre IV, p. CXII ; et *Les Arithmétiques*, 6.12.

bien que cette mise en forme s'avère inutile. Elle est du reste absente du texte de Diophante.

On ne peut pas dire que ce procédé de mise en forme des proportions expliquerait, comme on l'a écrit, « les transformations effectuées par Diophante au cours de la solution des équations indéterminées à deux inconnues qu'il a incluses dans les *Arithmétiques*.⁸⁸ » On peut donner comme contre-exemple le problème 6.17, qui se récrit :

$$y^2 = x^8 + x^4 + x^2 ;$$

Diophante transforme l'équation en posant $x = t$, $y = t^4 + \frac{1}{2}$.

Même si on oublie le cas des *Arithmétiques*, ce procédé de mise en forme des proportions ne s'applique qu'à des cas particuliers comme $y^2 = P_2(x)$, avec P_2 polynôme du second degré, où le terme en x ou le terme constant est un carré ; et, d'une manière analogue, pour $y^3 = P_3(x)$, avec P_3 polynôme du troisième degré. Les seuls exemples qu'on peut trouver dans les *Arithmétiques* – à part le cas évident $y^2 = ax^2 + bx$ – sont de ce genre.

Diophante utilise la mise en forme des proportions, non pas, certes, comme une méthode générale, mais comme une technique précédée par un changement d'inconnue linéaire destiné à mettre une équation sous la forme d'une double équation. Par exemple :

$$y^2 - x^2 = z^{89}.$$

Diophante pose $y - x = u$, d'où $x + y = \frac{z}{u}$. Il pose ensuite

$$x = t, \quad y = t + u, \quad z = 2ut + t^2,$$

c'est-à-dire qu'il applique la méthode de « complétion des carrés ».

Cette technique de mise en forme des proportions, si elle permet de commenter une petite partie des *Arithmétiques* tout en restant dans le cadre euclidien, ne peut cependant tenir lieu de méthode générale, et rien n'indique qu'elle a été pratiquée par Diophante lors de sa recherche des transformations requises. Cette interprétation ne répond donc pas à la question que nous nous posons à propos des méthodes générales de Diophante.

⁸⁸ J. Christianidis, « Les équations $F(x, y) = 0$ dans les *Arithmétiques* », p. 16.

⁸⁹ Cf. la discussion dans R. Rashed, *Les Arithmétiques*, tome III : Livre IV, p. CXIV.

4. DEUX LECTURES DES *ARITHMÉTIQUES* : ALGÈBRIQUE ET GÉOMÉTRIQUE

La question de l'objet des *Arithmétiques*, si on ne se satisfait pas d'une simple description, fût-elle phénoménologique, comme réponse, en appelle une autre : quelles sont les méthodes générales maniées par Diophante dans son traité ? Quoi de plus naturel, en effet, puisque, dans le domaine mathématique, l'objet est inséparable de la méthode appliquée, qui le forme et l'établit. Or c'est précisément sur ce point que réside la difficulté de commenter cette œuvre singulière. Cette question des méthodes suscite en effet deux familles de réponses et de commentaires. La première est celle des mathématiciens successeurs de Diophante, qui ont travaillé sur l'analyse diophantienne et ont donc rencontré les *Arithmétiques*. Ils sont nombreux, à commencer par al-Karajī, al-Būzjānī et al-Samaw'al, pour aller jusqu'à Lagrange, voire à Jacobi⁹⁰. Chacun à sa manière, ces mathématiciens sont intervenus dans l'œuvre ancienne, l'ont transformée, transcendée, contribuant de ce fait à répandre la connaissance de l'un ou l'autre chapitre des mathématiques. À l'analyse de Diophante vont succéder à partir du X^e siècle l'analyse diophantienne rationnelle et l'analyse diophantienne entière, partie intégrante de la théorie des nombres. Ces contributions sont l'histoire objective de ces chapitres.

La deuxième famille est celle des historiens des mathématiques, depuis la fin du XVIII^e siècle. Bien que leurs réponses à la question que nous nous posons, ainsi que leurs commentaires des *Arithmétiques*, ne soient pas, en fait, indépendants de ceux des mathématiciens, leur objectif est bien différent : ils entendent situer les *Arithmétiques* à la fois dans la chronologie et dans l'histoire conceptuelle. Comme il arrive souvent que l'une des perspectives domine l'autre, on assiste à des conflits d'interprétation. Les lectures des historiens jalonnent un large spectre, qui se déploie de l'arithmétique grecque à la géométrie algébrique moderne. Diophante se présente tour à tour comme un mathématicien de génie, comme l'inventeur de l'algèbre, comme le prédécesseur de Fermat, si ce n'est celui de Hilbert et de Poincaré, et il serait l'ancêtre de tous ces chapitres qui portent aujourd'hui son nom. On étudiera ailleurs* l'histoire du développement de l'analyse diophantienne, et les différentes lectures que les mathématiciens ont faites des *Arithmétiques* de Diophante. Mais, s'il fallait faire l'histoire

⁹⁰ C. G. J. Jacobi (1804-1851), « Über die Kenntnisse des Diophantus von der Zusammensetzung der Zahlen aus zwei Quadraten nebst Emendation der Stelle Probl. Arith. V.12 », dans *Monatsbericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, August 1847, p. 265-278 ; repr. *Gesammelte Werke*, VII, Berlin, 1891, p. 332-344, à la p. 336.

* R. Rashed, *Histoire de l'analyse diophantienne classique : d'Abū Kāmil à Fermat*, Berlin, Walter de Gruyter, 2013.

des lectures des historiens, c'est un autre livre que nous devrions écrire. Ici, nous nous limitons à l'interprétation majoritaire et largement dominante pour en esquisser les principaux traits, à savoir la, ou les lectures algébriques, avant de terminer par la lecture qui emprunte ses instruments à la géométrie algébrique.

La lecture algébrique est assurément la plus ancienne et la plus communément pratiquée. Elle a vu le jour au IX^e siècle, lors de la traduction en arabe des sept livres des *Arithmétiques*. C'est, systématiquement, celle des algébristes après Abū Kāmil (milieu du IX^e siècle) et jusqu'à Lagrange, au moins. Les historiens dans leur grande majorité l'ont faite leur à partir de la fin du XVIII^e siècle. Même ceux qui prétendent s'en écarter l'adoptent d'une manière ou d'une autre (Tannery, Klein, ...). Traduire les problèmes de Diophante dans le langage symbolique de l'algèbre, c'est déjà, partiellement tout au moins, souscrire à cette manière de lire les *Arithmétiques*. Le symbolisme algébrique autorise en effet des généralisations, des itérations, des déductions, etc., que la langue naturelle est souvent inapte à opérer. Or, on l'a vu, la langue de Diophante n'a rien de symbolique, même s'il lui arrive de recourir à quelques abréviations graphiques.

On comprend sans peine que cette lecture algébrique n'ait cessé de se diversifier, en fonction du développement de l'algèbre, d'une part, et des opinions que l'on s'est faites de l'histoire des mathématiques, d'autre part. Quoi qu'il en soit, toutes ces interprétations partagent un fonds commun. C'est ce fonds que nous allons dégager et qui nous évitera de nous perdre dans les détails.

Toutes les lectures algébriques voient dans les *Arithmétiques* une succession de problèmes traduisibles en des équations, ou des systèmes d'équations, algébriques de degré inférieur ou égal à 6 (ou à 9 si l'on tient compte des livres arabes). Certaines de ces équations, ou de ces systèmes, sont déterminées, mais la majorité sont indéterminées, à deux ou plusieurs inconnues, et ne contiennent que des quantités rationnelles. Dans le livre de Diophante, on ne considère que les nombres rationnels positifs ; à aucun moment on ne traite des nombres algébriques pour eux-mêmes, non plus d'ailleurs qu'on ne considère le critère de rationalité en général. S'il arrive à Diophante d'examiner les conditions de rationalité, c'est seulement pour rechercher une solution rationnelle positive. C'est finalement en termes de variables, de puissances, de paramètres et de solutions générales, qu'on interprète les *Arithmétiques*. Ainsi, lorsque Diophante cherche à résoudre le problème : « partager un carré donné en deux carrés », on traduit : un problème indéterminé du second degré, à deux variables, équivalent à l'équa-

tion $x^2 + y^2 = a^2$; et comme, au cours de la solution, Diophante assigne à la donnée a une valeur particulière ($a = 4$), on y voit une représentation d'un paramètre quelconque pour des cas semblables.

On constate que cette interprétation repose sur une double identification : celle de la notion diophantienne d'« espèce » à celle d'une puissance – positive, négative, ou nulle – de l'inconnue des algébristes ; celle de l'égalité entre « espèces » combinée à une équation polynomiale ; ou, comme le dit Zeuthen, « les polynômes composés avec ces quantités (x^n) multipliées par des coefficients numériques⁹¹ ». De plus, ce cadre algébrique a permis – depuis al-Karajī déjà – de regrouper les problèmes des *Arithmétiques* selon des formes polynomiales, et de chercher non pas une seule solution mais, si possible, toutes les solutions de chaque problème. Or, c'est précisément à ce propos que s'est imposée la distinction entre problèmes déterminés et problèmes indéterminés. Une telle lecture, on le comprend aisément, de même que les conséquences qui s'ensuivent (comme ce que nous venons d'affirmer), n'est pas plus fidèle aux *Arithmétiques* qu'à aucune tradition des mathématiques grecques. Elle est historiquement tardive et relève d'une tout autre *mathesis*. De plus les algébristes l'ont peu à peu élaborée et renouvelée au cours de l'histoire.

Quant aux historiens, ils l'ont adoptée – sans exception ou presque – depuis le XVIII^e siècle. L'Abbé Bossut, par exemple, écrit en 1784 dans le Discours préliminaire de l'*Encyclopédie méthodique* :

Diophante, Géomètre de l'école d'Alexandrie, doit être regardé, en quelque sorte, comme l'inventeur de l'Algèbre : du moins on trouve, dans ses ouvrages, des calculs qu'il exécute d'une manière analogue à la méthode qu'on emploie aujourd'hui pour résoudre les équations du premier degré et même celles du second⁹².

Son collègue le Marquis de Condorcet est encore plus explicite. Il écrit dans l'*Esquisse* :

C'est dans l'École d'Alexandrie que nous trouvons les premières traces de ce qu'on a depuis nommé algèbre, c'est-à-dire du calcul des quantités considérées uniquement comme telles. La nature des questions proposées et résolues dans le livre de Diophante exigeait que les nombres y fussent envisagés comme ayant une valeur générale indéterminée et assujettie seulement à certaines conditions.

Mais cette science n'avait point alors comme aujourd'hui ses signes, ses méthodes, ses opérations techniques. On désignait ces valeurs générales par

⁹¹ H.-G. Zeuthen, *Histoire des mathématiques*, p. 208.

⁹² *Encyclopédie méthodique. Mathématiques*, Discours préliminaire, p. XXXI.

des mots, et c'était par une suite de raisonnements que l'on parvenait à trouver, ou développer la solution des problèmes⁹³.

C'est cette même opinion, pour l'essentiel, qu'exposent les livres d'histoire des mathématiques, comme celui de Montucla⁹⁴ et celui de Cantor⁹⁵, plus tard. On la retrouve, nourrie de l'érudition, des nuances et des détails nécessaires, dans les ouvrages spécialisés comme ceux de Nesselmann⁹⁶, de Hankel⁹⁷, de Wertheim⁹⁸, de Zeuthen⁹⁹, de Heath¹⁰⁰, et de bien d'autres. Par exemple I. G. Bashmakova écrit :

Thus we encounter here (dans les *Arithmétiques*) a completely new construction of algebra, based on arithmetic and not, as in Euclid's case, on geometry. But far from being a simple return to the numerical algebra of the Babylonians, this is the beginning of a construction of literal algebra, which found its proper language in the works of Diophantus¹⁰¹.

Ou encore, comme l'écrit E. S. Stamatis :

Erst Diophantos hat durch sein Werk "Arithmetica" der Algebra den Weg gewiesen. Mit Recht nennt man ihn den Vater der Algebra¹⁰².

Parmi les conséquences de cette interprétation algébrique, on note l'usage de la langue de l'algèbre pour traduire le texte même de Diophante. Ainsi, Qus̄tā ibn Lūqā a utilisé celle d'al-Khwārizmī et Bachet de Méziriac a recouru aux abréviations algébriques de son époque dans sa traduction latine. Plus tard, Tannery a opté pour le symbolisme algébrique moderne dans sa traduction latine également. Il en est de même pour la traduction anglaise de Heath et pour la traduction allemande de Wertheim. Récem-

⁹³ *Tableau historique des progrès de l'esprit humain. Projets, Esquisse, Fragments et Notes* (1772-1794), édité sous la direction de J.-P. Schandeler et P. Crépel, Paris, 2004, p. 296.

⁹⁴ *Histoire des mathématiques*, Tome premier, nouveau tirage, Paris, A. Blanchard, 1960, p. 320 *sqq.*

⁹⁵ *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Bibliotheca mathematica Teubneriana, 6, New York, 1965, vol. I, p. 468 *sqq.*

⁹⁶ *Die Algebra der Griechen*, Berlin, 1842, repr. Frankfurt, 1969.

⁹⁷ *Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter*, Leipzig, 1874.

⁹⁸ *Die Arithmetik und die Schrift über Polygonalzahlen des Diophantus von Alexandria*, Leipzig, Teubner, 1890.

⁹⁹ *Histoire des mathématiques dans l'Antiquité et le Moyen Âge*, Paris, Gauthier-Villars, 1902.

¹⁰⁰ *Diophantus of Alexandria : A Study in the History of Greek Algebra*.

¹⁰¹ I. G. Bashmakova, *Diophantus and Diophantine Equations*, Dolciani Mathematical Expositions, n° 20, 1997, p. 8.

¹⁰² E. S. Stamatis, « Diophantos der Mathematiker », *Das Altertum*, 19, 1973, p. 156-164, à la p. 162.

ment, on a adopté le même usage dans la nouvelle traduction allemande, dans la traduction en grec moderne et dans la traduction russe, ainsi que dans la traduction anglaise des quatre livres arabes¹⁰³. La seule exception à cette règle est la traduction de P. Ver Eecke et celle d'A. Allard des livres grecs, ainsi que la nôtre de la version arabe.

Il n'est pas question d'exposer ces lectures algébriques en détail. Certains auteurs récents les rejettent d'un revers de main en les taxant d'anachronisme. Mais c'est faire fi de l'intelligence d'authentiques historiens dont la compétence est hors de doute, comme P. Tannery¹⁰⁴ et Th. Heath. Ce faisant, on s'interdit en effet de comprendre les vraies raisons pour lesquelles cette interprétation algébrique a été adoptée. Or celles-ci sont riches d'enseignement sur l'ouvrage même de Diophante. La première

¹⁰³ *Arithmetik des Diophantos aus Alexandria*, Aus dem Griechischen übertragen und erklärt von A. Czwalina, Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, 1952 ; la traduction en grec moderne par E. S. Stamatis (*Diophantus' Arithmetica. The Algebra of the Greeks*, Athènes, 1963) ; la traduction anglaise des quatre livres arabes par J. Sesiano (*Books IV to VII of Diophantus' Arithmetica in the Arabic Translation attributed to Qusṭā ibn Lūqā*, New York, Springer, 1982) et la traduction russe par I. N. Vesselovski, rédaction et commentaires de I. G. Bashmakova (Moscou, 1974).

¹⁰⁴ P. Tannery divise l'ensemble des problèmes étudiés par Diophante dans les six livres grecs d'abord en deux groupes : problèmes déterminés et problèmes indéterminés. Ces derniers se partagent à leur tour en deux groupes : ceux qui relèvent de « l'analyse algébrique » et ceux qui relèvent de « l'analyse numérique ».

Il donne par exemple le tableau suivant :

Analyse			
Livres	Algébrique	Numérique	Total
II	26	0	26
III	14	7	21
IV	18	14	32
V	2	30	32
VI	7	19	26
Ensemble	67	70	137

Cf. « Études sur Diophante », *Bibliotheca Mathematica*, t. I, 1887, p. 37-43, 81-88, 103-108, t. II, 1888, p. 3-6 ; repr. *Mémoires scientifiques*, t. II. Il reste que, même s'il semble opter globalement pour une interprétation algébrique des *Arithmétiques*, sa connaissance profonde de l'œuvre le faisait hésiter et proposer d'autres vues pénétrantes. À propos de ce livre de Diophante, il écrit, par exemple : « Car rien, dans ce qui nous reste de Diophante, ne ressemble à ce que nous appelons aujourd'hui *analyse indéterminée du premier degré*. Il ne recherche nullement les solutions entières dans les problèmes indéterminés » (*Mémoires scientifiques*, t. II, p. 368) ; ou encore : « Cette analyse a donc un caractère qui la différencie essentiellement de celle qui porte le même nom chez nous, puisque nous nous attachons à la recherche des solutions entières. Le problème général de cette analyse des anciens peut être ainsi formulé [...] » (*ibid.*, p. 377).

est intimement liée à l'histoire des *Arithmétiques*. Le livre de Diophante a été lu et continuellement intégré à l'analyse indéterminée, édifiée comme chapitre de l'algèbre par Abū Kāmil et ses successeurs en arabe, en latin et dans les langues vernaculaires, et cela jusqu'à Euler et Lagrange. Pendant plus d'un millénaire, il a donc été considéré par les algébristes comme un livre de leur discipline. La seconde raison est intrinsèque aux *Arithmétiques* : les calculs qu'y mène Diophante ne valent pas seulement pour les nombres, mais pour les « espèces » des nombres, c'est-à-dire qu'ils opèrent sur des termes relativement généraux, comme cela a lieu en algèbre. La troisième raison est que, au fond, les résultats obtenus par Diophante dans les *Arithmétiques* restent valables sur un corps k arbitraire. En rejetant les interprétations algébriques comme anachroniques, c'est donc toute l'histoire de la réception des *Arithmétiques*, celle de leur impact sur la recherche en analyse indéterminée à partir d'al-Karajī, qu'on oublie. On ignore également la nature des résultats obtenus par Diophante dans ce livre. C'est une critique un peu inconsidérée, qui risque de rejeter le texte interprété en même temps que son interprétation ! C'est en effet une chose d'attribuer cette lecture à Diophante en personne – ce que, semble-t-il, peu d'historiens ont fait ; c'en est une autre de manier cette lecture algébrique comme l'instrument exégétique qui permet d'expliquer la structure et l'organisation des *Arithmétiques* et d'exhiber les méthodes que le mathématicien alexandrin met en œuvre. Cette interprétation doit donc être jugée, non dans une perspective dogmatique qui relève davantage de l'argumentation religieuse que du débat scientifique, mais à l'aune de son pouvoir explicatif et heuristique. On verra alors que cette lecture, si elle éclaire l'organisation des *Arithmétiques* et rend fidèlement compte de certaines parties du traité, laisse dans l'ombre bien d'autres parties. De plus, elle est impuissante à dégager effectivement les méthodes appliquées par Diophante, à l'exception de la double équation, que Diophante explique lui-même, et de la méthode de complétion des carrés et des cubes. Et de fait les partisans de l'interprétation algébrique le reconnaissent souvent, même si ce n'est pas directement. On a coutume de citer le propos de Hankel qui, après avoir dit que « Diophante est le père de l'arithmétique et de l'algèbre dans le sens dans lequel nous étudions ces sciences¹⁰⁵ », écrit quelques pages plus loin :

De la méthode compréhensive plus générale chez notre auteur (Diophante), il n'y a aucune trace à découvrir ; tout problème requiert une méthode tout à fait particulière, qui souvent ne servira même pas pour les problèmes plus proches. C'est pour cette raison qu'il est difficile pour un savant moderne, même une fois étudiées 100 solutions diophantiennes, de résoudre le 101^{ième}

¹⁰⁵ H. Hankel, *Zur Geschichte der Mathematik*, p. 159.

problème, et quand on a fait l'essai et après quelques vaines tentatives, on lit la propre solution de Diophante, on sera surpris de voir comment Diophante quitte soudain la grand'route, s'engage dans un chemin latéral et, après un tour rapide, parvient à son but¹⁰⁶.

Même si elle est un peu forcée, puisque Diophante donne au moins la méthode « de la double équation », cette description de Hankel a le mérite de poser clairement la question fondamentale des méthodes appliquées dans les *Arithmétiques*. De plus, elle laisse entendre que la lecture algébrique, non plus que les autres, ne peut y apporter de réponse complète et satisfaisante. D'ailleurs, d'autres historiens, comme Lucas¹⁰⁷, Ver Eecke¹⁰⁸, Itard¹⁰⁹, Van der Waerden¹¹⁰, entre bien d'autres, sont revenus à cette même question et ont abouti, chacun à sa façon, à une réponse semblable à celle de Hankel.

Or cette interrogation sur les méthodes de Diophante ne date pas de Hankel. D'Alembert l'avait formulée et avait répondu ainsi :

L'art de résoudre ces sortes de questions consiste à employer et à manier tellement les inconnues ou l'inconnue, que le carré et les plus hautes puissances de cette inconnue disparaissent de l'équation, et qu'il ne reste que l'inconnue élevée au premier degré au moyen de quoi on résout cette équation sans avoir recours aux incommensurables¹¹¹.

Tout le problème reste de savoir quelles sont les méthodes utilisées par Diophante pour mener les transformations rationnelles et birationnelles et

¹⁰⁶ *Ibid.*, p. 164-165.

¹⁰⁷ E. Lucas, *Théorie des nombres*, Paris, 1891, p. XXVII, il écrit : « [...] mais, comme ces problèmes [ceux des *Arithmétiques*] demandent plutôt de l'adresse et des procédés ingénieurs que des principes difficiles, et qu'en outre ils sont trop particuliers et conduisent rarement à des conclusions générales [...] ».

¹⁰⁸ Il écrit : « À part les quelques règles indiquées dans le préambule, les résolutions des problèmes de Diophante ne connaissent guère de méthodes fixes telles que nous les comprenons aujourd'hui. Leurs méthodes, en dehors de celle de « la double équation » ne sont généralement que de simples procédés d'un usage plus ou moins fréquent, tels que les procédés d'élimination entre équations de degré supérieur, ou d'ingénieux artifices, qui diffèrent parfois dans les résolutions de problèmes tout à fait analogues, et qui se réduisent presque toujours à des changements d'inconnues et à des substitutions » (P. Ver Eecke, *Diophante d'Alexandrie*, p. XXIV).

¹⁰⁹ J. Itard écrit : « Diophante se contente d'ailleurs d'une solution particulière, obtenue au moyen d'artifices qui ne se prêtent pas à la généralisation » (« Diophante et la tradition diophantienne », *Bulletin de l'association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public*, 35^e année-n° 174, décembre 1955, p. 146-159, à la p. 146).

¹¹⁰ B. L. Van der Waerden, *Science Awakening*, p. 279 : « His method varies from case to case. There is not a trace in his work of a systematic theory of diophantine equations. »

¹¹¹ Article « Diophante », *Encyclopédie Méthodique*, vol. I, Paris, 1784, p. 533.

parvenir, comme il l'écrit, à « une espèce égale à une espèce ». Plusieurs tentatives ont été engagées en ce sens, à l'aide de l'algèbre : celles de Tannery¹¹², de Zeuthen¹¹³ et de Heath¹¹⁴.

À l'évidence, cette question des méthodes de Diophante et de leur nombre est importante non seulement pour comprendre la pratique mathématique du mathématicien, mais aussi pour juger de l'organisation et de la structure des *Arithmétiques*. L'indétermination du nombre de ces méthodes dans les *Arithmétiques*, si elle s'avère, signifierait avant tout la négation de l'unité de l'ouvrage – à moins de supposer que Diophante conduisait ses recherches un peu à l'aveuglette, ce qu'aucun historien des mathématiques n'oserait conjecturer. Force est donc de supposer que Diophante disposait d'un nombre relativement réduit de méthodes générales, grâce auxquelles il était en mesure de concevoir et de résoudre bien plus que les 280 problèmes qui nous sont parvenus. Comme la lecture algébrique ne peut, à elle seule, nous donner accès à ces méthodes et encore moins expliquer les voies empruntées par Diophante, l'idée est venue de lui en superposer une autre, géométrique, et de faire ainsi appel aux éléments de la géométrie algébrique.

De fait, un certain nombre d'historiens contemporains, préoccupés par cette question de la nature des méthodes de Diophante et de leur nombre, ont pensé faire usage des moyens offerts par cette discipline pour lire les *Arithmétiques*. Malgré les positions différentes qu'ils ont adoptées, tous partent du point suivant : une fois traduits en équations les problèmes traités par Diophante, on obtient des équations et des systèmes d'équations algébriques à plusieurs inconnues. Les polynômes obtenus sont définis relativement au corps des rationnels. De plus, Diophante recourt à des transformations rationnelles, et plus spécialement à des transformations birationnelles. Dans ces conditions, aussi bien l'objet – les ensembles algébriques – que les méthodes – les transformations – laissent entrevoir la possibilité de lire les *Arithmétiques* au moyen de la géométrie algébrique.

Mais, parmi ceux qui pratiquent cette lecture, il faut noter différences et nuances. Certains usent des moyens de la géométrie algébrique pour éclairer le texte de Diophante et, réciproquement, y trouver pour la discipline elle-même « ses lettres de noblesse », comme le dit A. Weil. Il écrit ainsi :

Mais on ne peut manquer d'être frappé, déjà chez Diophante, de la fréquence avec laquelle reviennent les équations qui définissent des courbes de genre 0

¹¹² P. Tannery, « Études sur Diophante », *Bibliotheca Mathematica*, p. 83 sqq.

¹¹³ H.-G. Zeuthen, *Histoire des mathématiques*, p. 206-217.

¹¹⁴ Th. Heath, *Diophantus of Alexandria*, p. 58 sq.

et 1, et du fait que ce sont toujours les mêmes méthodes que Diophante met en œuvre pour les résoudre¹¹⁵.

L'éminent mathématicien propose d'interpréter la démarche de Diophante en ces termes, sans toutefois dire que Diophante possédait les notions géométriques de courbe et de genre de courbe ; il suppose seulement qu'il avait celles de polynôme et d'ensemble algébrique. D'autres font un pas supplémentaire et optent pour une position que nous pouvons ainsi résumer : il est vrai qu'aucune notion géométrique n'est mentionnée, mais on peut voir, comme en filigrane, les procédés donnant une représentation paramétrique rationnelle des courbes unicursales simples.

On peut lire de telles déclarations, plus ou moins différemment formulées, sous la plume des mathématiciens, et notamment des spécialistes de l'analyse diophantienne moderne. Quant aux historiens, c'est I. G. Bashmakova et E. I. Slavutin¹¹⁶ qui sont allés le plus loin. I. G. Bashmakova a commencé par publier un court texte en plusieurs langues, où elle explique que l'on trouve dans les *Arithmétiques* les notions et les méthodes de la géométrie algébrique – mais sans véritable contenu géométrique. Elle écrit par exemple :

Malgré toute l'importance des éléments de la nouvelle algèbre, introduits par Diophante, ce ne sont pas ces derniers qui constituent la partie durable de son œuvre. Les idées les plus profondes de l'auteur se rapportent à ce que nous appelons aujourd'hui l'analyse diophantienne¹¹⁷.

Elle écrit encore :

So war es auch in der *Arithmetik* des Diophant, in der einige allgemeine Sätze de algebraischen Geometrie entdeckt und untersucht wurden, aber ohne geometrische Interpretation, im Rahmen der reinen Algebra und Zahlentheorie¹¹⁸.

¹¹⁵ A. Weil, « Sur les origines de la géométrie algébrique », *Compositio mathematica*, vol. 44, fasc. 1-3, 1981, p. 395-406, à la page 398. Il écrit également à propos de Diophante : « C'est justement le langage géométrique qui fait défaut chez Diophante. Son œuvre, ou pour mieux dire sa collection telle qu'elle nous est parvenue, rassemble près de deux cents problèmes dont chacun pose un système d'équations algébriques et en demande une solution en nombres rationnels positifs » (*ibid.*, p. 397).

¹¹⁶ I. G. Bashmakova et E. I. Slavutin, « 'Genesis triangulorum' de François Viète et ses recherches dans l'analyse indéterminée », *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 16, Number 4, 1977, p. 289-306.

¹¹⁷ I. G. Bashmakova, « Diophante et Fermat », p. 290.

¹¹⁸ I. G. Bashmakova, *Diophant und diophantische Gleichungen*, p. 40. Elle écrit également : « The *Arithmetic* begins with an introduction that is, essentially, the first exposition of the foundations of algebra. Here Diophantus constructs the field of rational numbers and introduces literal symbolism. We also find here a formulation of

Ainsi, selon I. G. Bashmakova, Diophante avait découvert quelques propositions générales de la géométrie algébrique, vides de contenu géométrique. Autrement dit, il aurait engagé l'étude directe des ensembles algébriques, sans avoir les moyens de classer les objets étudiés et les transformations utilisées, qui pourraient contenir, selon l'auteur, des transformations affines et des transformations projectives.

Il y a une différence majeure entre la position de l'historienne et celle des mathématiciens, bien qu'ils semblent s'accorder implicitement pour trouver dans les *Arithmétiques* certains éléments de la géométrie algébrique *in statu nascendi*. Diophante serait dans ce cas un aïeul de Poincaré, dans la mesure où il avait amorcé l'étude des propriétés arithmétiques de certaines courbes sur le corps des rationnels ; alors que, pour I. G. Bashmakova, il serait presque son contemporain. Certains auteurs ont taxé cette position d'I. G. Bashmakova du péché capital d'anachronisme. D'autres, plus profonds, se sont trouvés gênés par l'absence de toute trace de langage géométrique dans les *Arithmétiques*¹¹⁹, et en ont tiré la conclusion qu'une telle lecture est forcée ; ou, comme l'écrit A. P. Youschkevitch :

Mme Bashmakova suppose que Diophante lui-même « apercevait les liaisons qui existent entre les équations indéterminées avec les courbes algébriques correspondantes » (p. 10 [de l'introduction à la traduction russe]). Voilà une supposition qui va trop loin et qui serait difficile, ce me semble, à soutenir¹²⁰.

Pour notre part, nous pensons que, quoique « forcée » et ne pouvant pas prétendre au titre d'historique, cette lecture d'I. G. Bashmakova a le mérite d'expliquer les procédures réglées en usage dans les *Arithmétiques*, procédures qui laissent supposer un ordre précis qu'aucune autre lecture n'était en mesure d'explicitier. Encore une fois, il s'agit de la question des méthodes de Diophante. Si donc nous refusons de lire dans les *Arithmétiques* les notions de la géométrie algébrique et celles de l'analyse diophantienne contemporaine, nous proposons en revanche de conserver ces moyens

rules of operation with polynomials and equations. [...] Diophantus took another radical step by introducing negative numbers. It was only then that he obtained a system closed under the four arithmetical operations, that is, a field » (« Diophantine Equations and the Evolution of Algebra », *American Mathematical Society*, 147(2), 1990, p. 85-100, aux p. 90-91).

¹¹⁹ Par exemple, A. Weil, « Sur les origines de la géométrie algébrique », p. 397. Voir aussi N. Schappacher, « Diophante d'Alexandrie : un texte et son histoire », dans *4000 ans d'histoire des mathématiques : les mathématiques dans la longue durée*, Actes du treizième colloque Inter-IREM d'histoire et d'épistémologie des mathématiques, Rennes, 6-8 mai 2000, Rennes, 2002, p. 15-39.

¹²⁰ « Sur trois ouvrages soviétiques récents concernant l'histoire des mathématiques », p. 341.

théoriques, mais au seul titre d'instrument, comme l'outil théorique qui permet d'identifier les méthodes, et aussi de mieux connaître les liens entre les 280 problèmes traités par Diophante et d'éclaircir la structure de son livre. Aucun autre moyen, nous l'avons vu, qu'il soit phénoménologique, philologique, euclidien, algébrique ..., ne permet d'accomplir cette tâche. Il n'est donc pas question ici d'attribuer une quelconque notion géométrique à Diophante, mais nous entendons proposer une traduction des *Arithmétiques* dans une langue et des concepts inconnus de Diophante. Étant donné les rapports d'identification et de différence qui rapprochent et séparent les mathématiques de Diophante de celles qu'il ignorait, cette traduction permet d'identifier ses méthodes et de découvrir la structure de son ouvrage, c'est-à-dire de classer les problèmes et les méthodes de leur solution. C'est cette position qui était déjà défendue il y a trois décennies environ lors de l'étude des *Arithmétiques*, pour les raisons que voici.

On a vu que la tentation immédiate d'interpréter les *Arithmétiques* à l'aide des seuls mots de Diophante ne mène nulle part. Quant à la lecture phénoménologique, elle est simplement descriptive et tourne court. Qu'on l'avoue ou non, ces deux lectures sont animées, clairement ou subrepticement, par les interprétations algébriques dont nous venons de voir qu'elles ne permettent pas d'identifier les méthodes de Diophante.

Il nous semble que, pour commenter une œuvre mathématique ancienne – d'Archimède, d'Apollonius, de Ménélaüs ou de Diophante notamment –, il faille faire appel à l'instrument d'une autre mathématique, avec laquelle elle entretient un rapport diffus d'identité et de différence. Il s'agit donc d'opter pour un *modèle interprétatif* afin d'éclairer l'œuvre ancienne. L'algèbre symbolique aurait pu fournir ce modèle si elle avait été capable d'isoler les méthodes mises en œuvre. À défaut, il est nécessaire de superposer à l'interprétation algébrique une interprétation géométrique. Que le modèle, l'outil heuristique, ne se confonde pas avec l'objet lu, c'est un truisme : ils ne relèvent pas, tout simplement, de la même *mathesis*. En traduisant un texte mathématique dans une autre langue mathématique, on n'est pas davantage coupable d'anachronisme qu'en traduisant un texte ancien dans une langue moderne, toutes choses égales d'ailleurs. Tout dépend de la manière de traduire, comme le savent les linguistes.

Or ce modèle géométrique, nous le verrons, fait ressortir, au-delà de l'apparente diversité des problèmes, des solutions et des procédés qui ont souvent intrigué les commentateurs des *Arithmétiques*, un nombre fort restreint de méthodes, c'est-à-dire d'algorithmes de solution, que toutes les autres lectures sont impuissantes à dégager.

Cette interprétation géométrique n'a rien d'artificiel, une fois acquise la notion de la géométrie algébrique élémentaire – celle de l'étude des cour-

bes à l'aide de leurs équations, comme chez Descartes et Fermat. La première étude est celle de Newton, qui toutefois est restée sans lendemain, jusqu'à l'édition des *Mathematical Papers* par D. T. Whiteside. Il s'agit d'un petit texte intitulé *The generation of rational solutions from given instances*¹²¹. Dans ce texte, Newton interprète la méthode de Diophante comme celle de la construction de points rationnels sur des courbes algébriques du second et du troisième degré, à partir d'un point ou de points rationnels connus, à l'aide des méthodes de la sécante et de la tangente. Ainsi, pour une conique, il fait passer par un point rationnel connu sur la courbe des cordes de pente rationnelle. Il interprète, d'autre part, la solution de l'équation diophantienne $y^2 = P(x)$, P un polynôme du troisième degré, comme la recherche des points rationnels sur la cubique définie par cette équation, à l'aide de la méthode de la tangente ou de celle de la corde, passant par deux points connus sur la courbe. D. T. Whiteside commente ainsi ces méthodes :

Newton introduces for the first time – in its geometrical guise, at least – a general technique for finding rational solutions to non-homogeneous Diophantine equations in two variables (or, equivalently, to corresponding homogeneous ones in three variables). His general principle is all but self-evident : a straight line passing through $n - 1$ rational points of an arbitrary n -th degree curve defined by the Cartesian equation $f(x, y) = 0$ (or by the equivalent homogeneous $f(x, y, z) = 0$) will meet it in a further rational point¹²².

Toujours selon Whiteside, cette recherche de Newton semble être contemporaine de l'époque où il s'intéressait aux problèmes arithmétiques de Diophante.

Ce recours à l'interprétation géométrique continue à s'imposer de façon pour ainsi dire spontanée. Lagrange fait appel à la méthode de la tangente dans son mémoire de 1777 pour construire des points rationnels sur une cubique¹²³. Au cours du XIX^e siècle, on assiste à l'application de ces méthodes – corde et tangente – à des problèmes divers¹²⁴. Il a cependant fallu attendre la fin de ce siècle et le début du siècle suivant pour que, d'une part

¹²¹ *The Mathematical Papers of Isaac Newton (1674-1684)*, éd. D. T. Whiteside, Cambridge, Cambridge University Press, 1971, vol. IV, p. 110-115.

¹²² *Ibid.*, p. 110-111, note 1.

¹²³ « Sur quelques problèmes de l'analyse de Diophante », dans *Œuvres de Lagrange*, publiées par les soins de M. J.-A. Serret, Paris, Gauthier-Villars, 1869, t. IV.

¹²⁴ L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, 3 vol., Washington, Carnegie Institution of Washington, 1919-1923, vol. II, p. 588 et *sqq.*

D. Hilbert et A. Hurwitz¹²⁵, et, d'autre part, H. Poincaré¹²⁶, construisent les fondements théoriques de cette lecture géométrique. Depuis, les noms de Beppo Levi, de L. J. Mordell, d'A. Weil et de tous les successeurs jalonnent le progrès continu de la recherche en ce domaine.

¹²⁵ D. Hilbert et A. Hurwitz, « Über die diophantischen Gleichungen vom Geschlecht Null », *Acta mathematica*, vol. 14, n° 1, 1890-91, p. 217-224.

¹²⁶ H. Poincaré, « Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques », *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5^e série, t. 7, fasc. III, 1901, p. 161-233 ; repr. dans *Œuvres de Henri Poincaré*, t. V, Paris, 1950, p. 483-548. Dans ce mémoire, H. Poincaré cherche à déterminer les points rationnels sur les courbes unicursales et surtout sur les courbes de genre 1.

CHAPITRE I

LA MÉTHODE DE LA CORDE

1. LE VOCABULAIRE DE LA GÉOMÉTRIE ALGÈBRE

Nous nous proposons d'introduire dans ce chapitre les termes de la géométrie algébrique dont nous aurons besoin dans le commentaire des problèmes de Diophante. Il s'agit, dans notre esprit, d'élaborer un « modèle » mathématique pour les *Arithmétiques* de Diophante ; ce modèle, comme tout autre, ne prétend pas refléter la démarche effective de Diophante, mais en donner une construction idéale, ainsi qu'une explication strictement mathématique.

Soit K un corps algébriquement clos de caractéristique 0 ; dans la suite k désigne un sous-corps de K . L'ensemble produit K^n des suites $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ avec $x_i \in K$ est l'espace affine de dimension n et nous le noterons aussi $\mathbf{A}^n$. L'élément x_i de K s'appelle la i -ième coordonnée du point $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbf{A}^n$.

Définition 1.1 – On dit qu'une partie X de $\mathbf{A}^n$ est un ensemble algébrique affine défini sur k s'il existe un ensemble S de polynômes à n variables et à coefficients dans k tel que X soit l'ensemble des points $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de l'espace affine $\mathbf{A}^n$ vérifiant $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ pour tout polynôme F appartenant à S . On dit que S est un système d'équations définissant X .

Remarque. Lorsque tous les polynômes appartenant à S sont homogènes, il revient au même de dire que $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$ ou que $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \in X$ pour $\lambda \in K^* = K - \{0\}$; ainsi X est une réunion de droites issues de l'origine $O = (0, 0, \dots, 0)$ (les *génératrices* de X) et on dit que c'est un cône de sommet O .

Si un ensemble algébrique est défini sur un sous-corps k de K , il est encore défini sur tout corps k' intermédiaire entre k et K : $k \subset k' \subset K$. On note $\mathbf{A}^n(k)$ l'ensemble k^n des points $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbf{A}^n$ dont toutes les coordonnées appartiennent à k . Si X est un ensemble algébrique affine dans

A^n défini sur k , on pose $X(k) = X \cap A^n(k)$; c'est l'ensemble des points de X à coordonnées dans k . On a toujours $X(K) = X$; lorsque $k = \mathbf{Q}$, les points de $X(\overline{\mathbf{Q}})$ sont appelés *points algébriques* de X et ceux de $X(\mathbf{Q})$ sont appelés *points rationnels* de X . La théorie des équations diophantiennes, au sens où nous l'entendons ici, est l'étude des points rationnels des ensembles algébriques affines définis sur $\mathbf{Q}$: notre but, comme nous venons de le dire, est l'analyse de la contribution de Diophante au moyen du langage de la géométrie algébrique élémentaire.

Définition 1.2 – Soient $X \subset A^m$ et $Y \subset A^n$ des ensembles algébriques affines définis sur k ; on dit qu'une application u de X dans Y est régulière et définie sur k si, pour tout $x \in X$, les coordonnées $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ de $u(x)$ sont des fonctions polynomiales à coefficients dans k des coordonnées de x . En particulier, les applications régulières de X dans $A = K$ sont appelées fonctions régulières sur X .

L'ensemble des fonctions régulières sur X définies sur k est un sous-anneau de l'anneau des applications de X dans K et nous le noterons $A_k(X)$; par exemple

$$A_k(A^n) \approx k[X_1, X_2, \dots, X_n].$$

La composée de deux applications régulières est régulière. En particulier, si $u : X \rightarrow Y$ est une application régulière définie sur k , l'application $\phi_u : f \mapsto f \circ u$ est un morphisme d'anneaux de $A_k(Y)$ dans $A_k(X)$. Si $u : X \rightarrow Y$ et $v : Y \rightarrow Z$ sont des applications régulières définies sur k , $\phi_{v \circ u} = \phi_u \circ \phi_v$.

Ainsi, pour l'injection canonique $u : X \rightarrow A^n$, ϕ_u est un homomorphisme de l'anneau de polynômes $k[X_1, X_2, \dots, X_n]$ sur $A_k(X)$; le noyau de cet homomorphisme est l'idéal $I_k(X)$ de $k[X_1, X_2, \dots, X_n]$ formé des polynômes F de $k[X_1, X_2, \dots, X_n]$ tels que $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ pour tout point $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de X , de sorte que l'on a un isomorphisme

$$k[X_1, X_2, \dots, X_n]/I_k(X) \simeq A_k(X).$$

Inversement, supposons donnés des ensembles algébriques affines $X \subset A^m$, $Y \subset A^n$ définis sur k et un homomorphisme ϕ de $A_k(Y) \approx k[X_1, X_2, \dots, X_n]/I_k(Y)$ dans $A_k(X)$; il revient au même de se donner un homomorphisme Φ de $k[X_1, X_2, \dots, X_n]$ dans $A_k(X)$ nul sur $I_k(Y)$ et un tel homomorphisme est défini par les éléments $u_j = \Phi(X_j)$ de $A_k(X)$ ($1 \leq j \leq n$), assujettis à la condition que $\Phi(F) = F(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$ pour tout $F \in I_k(Y)$. L'application u de X dans A^n définie par $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x))$ pour

tout $x \in X$ applique alors X dans Y et on a $\varphi(f) = f \circ u = \varphi_u(f)$ pour tout $f \in A_k(Y)$. Autrement dit, il revient au même de se donner une application régulière définie sur k de X dans Y ou un homomorphisme de $A_k(Y)$ dans $A_k(X)$. Un *isomorphisme* défini sur k de X sur Y est une application bijective de X sur Y qui est régulière, définie sur k ainsi que sa réciproque ; il définit un isomorphisme d'anneaux de $A_k(Y)$ sur $A_k(X)$.

Soient X et Y des ensembles algébriques définis sur k dans A^n ; les relations $X \subset Y$ et $I_k(X) \supset I_k(Y)$ sont équivalentes. L'injection de X dans Y est l'application régulière qui correspond à l'homomorphisme de $A_k(Y)$ sur $A_k(X)$ de noyau $I_k(X)/I_k(Y)$. En particulier, pour que X et Y soient égaux, il faut et il suffit que $I_k(X) = I_k(Y)$. Tout système d'équations à coefficients dans k définissant X est contenu dans $I_k(X)$. Comme les anneaux de polynômes à coefficients dans un corps sont *noethériens*, tout ensemble algébrique X admet un système d'équations *fini*, formé de générateurs de son idéal de définition $I_k(X)$.

On énonce le *théorème des zéros* de Hilbert en disant que, pour tout ensemble algébrique $X \subset A^n$ défini sur K par un système d'équations S , l'idéal $I_k(X)$ est l'ensemble des polynômes appartenant à $K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ dont une puissance appartient à l'idéal engendré par S . En particulier, si ce dernier idéal ne contient pas 1, il en est de même de $I_k(X)$ et X est donc non vide.

Exemple 1.3 – L'application $u : t \mapsto (t, t^2)$ de la droite A dans le plan A^2 est régulière définie sur Q ; son image est la *parabole* X d'équation $y = x^2$. L'application u définit une bijection de A sur X dont la bijection réciproque est la projection $(x, y) \mapsto x$; on a donc un isomorphisme défini sur Q de A sur X . Plus généralement, l'application $t \mapsto (t, t^q)$ (où $q \in N$) définit un isomorphisme défini sur Q de A sur la courbe plane X d'équation $y = x^q$.

Exemple 1.4 – L'application $u : t \mapsto (t^2, t^3)$ de A dans A^2 est régulière définie sur Q ; son image est la *parabole semi-cubique* Y d'équation $y^2 = x^3$. L'application u définit une bijection de A sur Y dont la bijection réciproque v est définie par $v(x, y) = y/x$ si $x \neq 0$ et $v(0, 0) = 0$; ainsi v n'est pas une application régulière et u ne définit pas un isomorphisme de A sur Y . Notons que Y n'est pas isomorphe à A puisque son anneau de fonctions régulières n'est pas intégralement clos, contrairement à $A_Q(A) = Q[T]$; en effet l'élément $t = y/x$ du corps des fractions de $A_Q(Y)$ n'appartient pas à $A_Q(Y)$ tout en vérifiant l'équation $t^2 = x$.

Plus généralement, l'application $u : t \mapsto (t^p, t^q)$, où p et q sont des entiers ≥ 2 et premiers entre eux, définit une application régulière bijective définie sur Q de A sur la courbe Y dont l'équation est $y^p = x^q$ dans A^2 . Si m

et n sont des entiers tels que $mp - nq = 1$, la bijection réciproque v est définie par $v(x, y) = \frac{x^m}{y^n}$ si $y \neq 0$ et $v(0, 0) = 0$; elle n'est pas régulière et Y n'est pas isomorphe à $\mathbf{A}$ car l'élément $t = \frac{x^m}{y^n}$ du corps des fractions de $A_Q(Y)$ n'appartient pas à $A_Q(Y)$ mais il est entier dessus : $t^p = x$.

Exemple 1.5 – L'application $u : (x, y) \mapsto (x, y, xy)$ du plan $\mathbf{A}^2$ dans l'espace $\mathbf{A}^3$ est régulière définie sur $\mathbf{Q}$; son image est le *paraboloïde hyperbolique* Z d'équation $z = xy$. La bijection de $\mathbf{A}^2$ sur Z définie par u est un isomorphisme défini sur $\mathbf{Q}$ puisque sa réciproque est la projection $(x, y, z) \mapsto (x, y)$.

Exemple 1.6 – La donnée d'un point $x \in X$ (ensemble algébrique affine défini sur k), à coordonnées dans k , équivaut à celle d'une application régulière définie sur k de $\mathbf{A}^0$ (espace réduit à un point) dans X , ou encore à celle d'un homomorphisme de $A_k(X)$ sur $A_k(\mathbf{A}^0) = k$; le noyau de cet homomorphisme est l'idéal maximal $\mathbf{I}_k(x)/\mathbf{I}_k(X)$ de $A_k(X)$ formé des fonctions régulières nulles en x ($\mathbf{I}_k(x)$ est l'idéal de $k[X_1, X_2, \dots, X_n]$ engendré par $X_1 - x_1, X_2 - x_2, \dots, X_n - x_n$). Si $u : X \rightarrow Y$ est une application régulière et que $y = u(x)$, $\mathbf{I}_k(y)/\mathbf{I}_k(Y) = \varphi^{-1}(\mathbf{I}_k(x)/\mathbf{I}_k(X))$.

Exemple 1.7 – Soit A une k -algèbre de type fini non nulle, c'est-à-dire un quotient d'une k -algèbre de polynômes par un idéal ne contenant pas 1. On énonce le *lemme de normalisation* de Noether en disant qu'il existe un homomorphisme *injectif* $\varphi : k[T_1, T_2, \dots, T_d] \rightarrow A$ d'une algèbre de polynômes dans A faisant de A une $k[T_1, T_2, \dots, T_d]$ -algèbre *finie*. Il peut se démontrer par récurrence sur le nombre de générateurs de A . Supposons que $A = A_k(X)$ soit l'algèbre des fonctions régulières sur un ensemble algébrique affine X défini sur k ; à φ correspond une application régulière u , définie sur k , de X dans l'espace affine $\mathbf{A}^d$, dont les coordonnées sont les fonctions $u_j = \varphi(T_j)$. Les propriétés de φ impliquent que, pour tout point

$$t = (t_1, t_2, \dots, t_d) \in \mathbf{A}^d,$$

il existe un nombre fini non nul de points $x \in X$ tels que $u(x) = t$; en effet ces points x correspondent aux homomorphismes de $A_k(X)/\mathbf{I}_k(t)A_k(X)$ dans K et $A_k(X)/\mathbf{I}_k(t)A_k(X)$ est une K -algèbre finie non nulle. L'ensemble X apparaît ainsi comme un « revêtement ramifié » de $\mathbf{A}^d$.

Si m est un idéal maximal de $A_k(Y)$, on voit, en utilisant le lemme de Noether, que le corps $A_k(Y)/m$ est une extension finie de k ; à chaque

plongement de $A_k(Y)/m$ comme sous-corps k' de K correspond un point y de Y , à coordonnées dans k' et tel que $m = I_{k'}(y)/I_k(Y)$.

L'ensemble des droites issues de l'origine $O = (0, 0, \dots, 0)$ de A^{n+1} (privées de O) s'appelle l'espace projectif de dimension n et on le note P_n ; c'est le quotient de $A^{n+1} - \{O\}$ par la relation d'équivalence qui identifie $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ à $\lambda x = (\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ pour tout $\lambda \in K - \{0\} = K^*$. On note $x_0:x_1:\dots:x_n$ la classe dans P_n de l'élément $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ de $A^{n+1} - \{O\}$, c'est-à-dire la droite engendrée par ce point. On dit que $x_0, x_1, \dots, x_n$ sont les coordonnées homogènes du point $x = x_0:x_1:\dots:x_n$; elles sont définies à un facteur près, élément de K^* .

Définition 1.8 – On dit qu'une partie X de P_n est un ensemble algébrique projectif défini sur k s'il existe un ensemble S de polynômes homogènes à $n+1$ variables et à coefficients dans k tel que X soit l'ensemble des points $x_0:x_1:\dots:x_n$ de l'espace projectif P_n vérifiant $F(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$ pour tout polynôme F appartenant à S . On dit que S est un système d'équations homogènes définissant X .

On note $P_n(k)$ l'ensemble des points $x_0:x_1:\dots:x_n$ de P_n admettant un système de coordonnées homogènes toutes dans k et, si X est un ensemble algébrique projectif défini sur k dans P_n , on pose $X(k) = X \cap P_n(k)$; c'est l'ensemble des points de X à coordonnées homogènes dans k . On note $I_k(X)$ l'idéal homogène de $k[X_0, X_1, \dots, X_n]$ engendré par les polynômes homogènes F tels que $F(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$ pour tout point $x_0:x_1:\dots:x_n$ de X ; tout système d'équations homogènes à coefficients dans k définissant X est contenu dans $I_k(X)$ et X est défini par n'importe quel système fini de générateurs homogènes de $I_k(X)$. Si X et Y sont des ensembles algébriques projectifs définis sur k dans P_n , les relations $X \subset Y$ et $I_k(X) \supset I_k(Y)$ sont équivalentes; en particulier, pour que X et Y soient égaux, il faut et il suffit que $I_k(X) = I_k(Y)$.

Définition 1.9 – Soient $X \subset P_m$ et $Y \subset P_n$ des ensembles algébriques projectifs définis sur k ; on dit qu'une application u de X dans Y est régulière et définie sur k si, pour tout $x \in X$, les coordonnées homogènes $u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x)$ de $u(x)$ sont des fonctions polynomiales homogènes de même degré, à coefficients dans k , des coordonnées homogènes de x .

La composée de deux applications régulières est régulière. Un isomorphisme d'un ensemble algébrique projectif sur un autre est une bijection régulière ainsi que sa réciproque.

De même, si $X \subset \mathbf{A}^m$ est un ensemble algébrique affine et que $Y \subset \mathbf{P}_n$ est un ensemble algébrique projectif, une application u de X dans Y est dite régulière lorsque, pour tout point x de X , les coordonnées homogènes de $u(x)$ sont des fonctions polynomiales des coordonnées de x . En composant une telle application avec une application régulière v d'un ensemble algébrique affine X' dans X (resp. de Y dans un ensemble algébrique projectif Y'), on obtient une application régulière $u \circ v$ (resp. $v \circ u$) de X' dans Y (resp. de X dans Y').

Soit $(Y_j)_{j \in J}$ une famille d'ensembles algébriques affines (resp. projectifs) définis sur k dans $\mathbf{A}^n$ (resp. dans $\mathbf{P}_n$). Pour tout $j \in J$, Y_j est défini par un système d'équations (resp. d'équations homogènes) S_j et l'intersection $Y = \bigcap_{j \in J} Y_j$ est l'ensemble algébrique défini par le système d'équations $S = \bigcup_{j \in J} S_j$. Considérons maintenant deux ensembles algébriques (affines ou projectifs) Y et Z définis sur k , respectivement par les systèmes d'équations S et T ; leur réunion $Y \cup Z$ est l'ensemble algébrique défini par le système d'équations

$$ST = \{F.G \mid F \in S, G \in T\}.$$

Enfin l'ensemble vide est un ensemble algébrique défini par le système S réduit à un seul polynôme constant $F = 1$. On voit donc que les ensembles algébriques définis sur k sont les ensembles fermés d'une topologie sur $\mathbf{A}^n$ (resp. sur $\mathbf{P}_n$) ; on l'appelle la *k-topologie de Zariski*. Les sous-ensembles algébriques de $\mathbf{A}^n$ (resp. $\mathbf{P}_n$) sont munis de la topologie induite. La *k-topologie de Zariski* est d'autant plus fine que k est plus grand. Il est clair que les applications régulières définies sur k sont continues pour la *k-topologie de Zariski*.

Exemple 1.10 – L'application $i_0 : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto 1:x_1:\dots:x_n$ de $\mathbf{A}^n$ dans $\mathbf{P}_n$ est régulière et définie sur $\mathbf{Q}$; elle définit une bijection de $\mathbf{A}^n$ sur le complémentaire U_0 dans $\mathbf{P}_n$ de l'hyperplan H_0 d'équation homogène $x_0 = 0$. La bijection réciproque est l'application

$$x_0:x_1:\dots:x_n \mapsto (x_1/x_0, x_2/x_0, \dots, x_n/x_0)$$

de $\mathbf{P}_n - H_0$ sur $\mathbf{A}^n$. Ainsi $\mathbf{A}^n$ s'identifie à une partie $\mathbf{Q}$ -ouverte de $\mathbf{P}_n$; lorsque l'on fait cette identification, les points de H_0 sont considérés comme des « points à l'infini » de $\mathbf{A}^n$. Si X est un sous-ensemble algé-

brique de $\mathbf{A}^n$ défini par un système d'équations S , l'adhérence $\bar{X}$ de $i_0(X)$ dans $\mathbf{P}_n$ pour la K -topologie de Zariski est l'ensemble algébrique défini par le système d'équations homogènes $\bar{S} = \{ \bar{F} \mid F \in S \}$ où, pour tout polynôme $F \in K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ de degré d , on pose $\bar{F}(X_0, X_1, \dots, X_n) = X_0^d F\left(\frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\right)$; on dit que $\bar{X}$ est la complétion projective de X et $X = \bar{X} \cap (\mathbf{P}_n - H_0)$ est ouvert dans $\bar{X}$. Lorsqu'un polynôme F est homogène, le polynôme $\bar{F}$ lui est identique; si donc X est un cône de sommet O , défini par un système d'équations homogènes S , $\bar{X}$ est défini par le même système d'équations, où x_0 n'intervient pas. Le système S , où $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sont les coordonnées homogènes dans H_0 , définit la partie à l'infini de $\bar{X}$ ou *base* du cône X .

Bien entendu, on peut tout aussi bien considérer les injections régulières $i_j: (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_0: \dots : x_{j-1}: 1: x_{j+1}: \dots : x_n$ de $\mathbf{A}^n$ dans $\mathbf{P}_n$ ($1 \leq j \leq n$); chacune d'elles identifie $\mathbf{A}^n$ au complémentaire U_j d'un hyperplan H_j d'équation homogène $x_j = 0$, la bijection réciproque de $\mathbf{P}_n - H_j$ sur $\mathbf{A}^n$ étant $x_0: x_1: \dots : x_n \mapsto (x_0/x_j, \dots, x_{j-1}/x_j, x_{j+1}/x_j, \dots, x_n/x_j)$. L'espace projectif $\mathbf{P}_n$ est donc la réunion de $n+1$ $\mathbf{Q}$ -ouverts, tous en correspondance bijective avec $\mathbf{A}^n$, c'est-à-dire munis d'un système de coordonnées affines. Dans l'ouvert $U_i \cap U_j$ ($0 \leq i < j \leq n$), le changement de coordonnées affines s'exprime par les formules $z_p = y_p/y_j$ pour $0 \leq p \leq i$ et $j+1 \leq p \leq n$, $z_{i+1} = 1/y_j$ et $z_p = y_{p-1}/y_j$ pour $i+2 \leq p \leq j$, si on note $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ les coordonnées affines de U_i et $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ celles de U_j . Un ensemble algébrique projectif X est de même la réunion d'un nombre fini d'ensembles algébriques affines, tous ouverts dans X .

Exemple 1.11 – L'application $u: t \mapsto (t, t^2)$ de l'exemple 1.3 se prolonge en une application régulière $\bar{u}: t_0:t_1 \mapsto t_0^2:t_0t_1:t_1^2$ de la droite projective $\mathbf{P}_1$ dans le plan projectif $\mathbf{P}_2$; cette application définit un isomorphisme de $\mathbf{P}_1$ sur la complétée projective $\bar{X}$ de la parabole X définie dans l'exemple 1.3; l'équation homogène de $\bar{X}$ s'écrit $x_1^2 = x_0x_2$. L'application réciproque est définie par la formule $t_0:t_1 = x_0:x_1 = x_1:x_2$. Notons qu'au point à l'infini $0:0:1$ de la parabole, il faut utiliser $t_0:t_1 = x_1:x_2$ puisque $x_0 = x_1 = 0$; l'expression d'une application régulière en fonction des coordonnées homogènes n'est donc pas partout la même.

L'application $t \mapsto (t, t^q)$ se prolonge en $t_0:t_1 \mapsto t_0^q:t_0^{q-1}t_1:t_1^q$; c'est une bijection de $\mathbf{P}_1$ sur la courbe $\bar{X}$ d'équation $x_0^{q-1}x_2 = x_1^q$, mais ce n'est pas un isomorphisme pour $q \geq 3$. La bijection réciproque v est définie par $v(x_0:x_1:x_2) = x_0:x_1$ si $x_0:x_1:x_2 \neq 0:0:1$ et $v(0:0:1) = 0:1$; on peut démontrer que

$\bar{X}$ n'est pas isomorphe à $\mathbf{P}_1$ à cause du fait que $0:0:1$ est un point singulier de $\bar{X}$.

Rappelons qu'un espace topologique est dit *irréductible* s'il est non vide et qu'il ne peut pas être écrit comme réunion de deux sous-ensembles propres fermés non vides ; il revient au même de dire que tout ouvert non vide de cet espace (non vide) est partout dense. Un espace réduit à un point est irréductible ; l'adhérence d'une partie irréductible d'un espace topologique est irréductible. Toute partie irréductible d'un espace topologique X est contenue dans une partie irréductible maximale ; les parties irréductibles maximales de X sont appelées ses *composantes irréductibles* ; elles sont fermées et X en est la réunion.

On dit qu'un sous-ensemble algébrique X de $\mathbf{A}^n$ (resp. $\mathbf{P}_n$) défini sur k est *irréductible sur k* lorsqu'il est irréductible pour la k -topologie de Zariski. Si X et Y sont deux sous-ensembles algébriques de $\mathbf{A}^n$ (resp. $\mathbf{P}_n$) définis sur un même sous-corps k de K , on a

$$\mathbf{I}_k(X \cup Y) = \mathbf{I}_k(X) \cap \mathbf{I}_k(Y) ;$$

il en résulte que, pour qu'un sous-ensemble algébrique X de $\mathbf{A}^n$ (resp. $\mathbf{P}_n$) défini sur k soit irréductible sur k , il faut et il suffit que son idéal $\mathbf{I}_k(X)$ soit *premier* dans $k[X_1, X_2, \dots, X_n]$ (resp. $k[X_0, X_1, \dots, X_n]$). En particulier $\mathbf{A}^n$ (resp. $\mathbf{P}_n$) est irréductible pour la K -topologie de Zariski. Si X est irréductible sur un sous-corps k' de K contenant k , il est irréductible sur k , mais la réciproque n'est pas vraie car les composantes k' -irréductibles de X ne sont pas définies sur k en général. Pour qu'un ensemble algébrique affine X , défini sur k , soit irréductible sur k il faut et il suffit que son anneau de fonctions $A_k(X)$ soit *intègre*.

Exemple 1.12 – Considérons un ensemble algébrique X défini par une seule équation $F = 0$ à coefficients dans k ; si F est irréductible, $\mathbf{I}_k(X)$ est l'idéal engendré par F et X est irréductible sur k . Soit maintenant $F = F_1^{m_1} F_2^{m_2} \dots F_r^{m_r}$ la décomposition de F en facteurs irréductibles dans l'anneau (factoriel) des polynômes à coefficients dans k' (sous-corps de K contenant k) ; il est clair que X est réunion des ensembles algébriques $X_1, X_2, \dots, X_r$ irréductibles sur k' , respectivement par les équations $F_1 = 0, F_2 = 0, \dots, F_r = 0$. Les X_j sont les composantes k' -irréductibles de X .

Définition 1.13 – Une variété algébrique définie sur k est un ensemble algébrique défini sur k et irréductible sur K .