Christine Redecker
Wittgensteins Philosophie der Mathematik

l o g o j

Studien zur Logik, Sprachphilosophie und Metaphysik

Herausgegeben von / Edited by

Volker Halbach • Alexander Hieke
Hannes Leitgeb • Holger Sturm

Band 9 / Volume 9

Christine Redecker

Wittgensteins Philosophie der Mathematik

Eine Neubewertung im Ausgang von der Kritik an Cantors Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen

ontos verlag

Frankfurt I Paris I Ebikon I Lancaster I New Brunswick

Bibliographic information published by Die Deutsche Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliographie;
detailed bibliographic data is available in the Internet at http://dnb.ddb.de

North and South America by
Transaction Books
Rutgers University
Piscataway, NJ 08854-8042
trans@transactionpub.com

United Kingdom, Ireland, Iceland, Turkey, Malta, Portugal by
Gazelle Books Services Limited
White Cross Mills
Hightown
LANCASTER, LA1 4XS
sales@gazellebooks.co.uk

Livraison pour la France et la Belgique:
Librairie Philosophique J.Vrin
6, place de la Sorbonne ; F-75005 PARIS
Tel. +33 (0)1 43 54 03 47 ; Fax +33 (0)1 43 54 48 18
www.vrin.fr

©2006 ontos verlag
P.O. Box 15 41, D-63133 Heusenstamm
www.ontosverlag.com

ISBN 10: 3-938793-31-7
ISBN 13: 978-3-938793-31-2

No part of this book may be reproduced, stored in retrieval systems or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, microfilming, recording or otherwise without written permission from the Publisher, with the exception of any material supplied specifically for the purpose of being entered and executed on a computer system, for exclusive use of the purchaser of the work

Printed on acid-free paper
ISO-Norm 970-6
FSC-certified (Forest Stewardship Council)
This hardcover binding meets the International Library standard

Printed in Germany
by buch bücher **dd ag**

Danksagung

Die vorliegende Abhandlung basiert auf meiner im April 2004 von der Philosophischen Fakultät der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster angenommenen Dissertationsschrift *Wittgensteins Kritik an Cantors Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen.*

Mein Dank gilt allen denen, die mich während meiner Dissertation und ihrer Überarbeitung für die Publikation unterstützt haben.

An erster Stelle möchte ich meiner Doktormutter Rosemarie Rheinwald danken. Sie hat mich wissenschaftliche Genauigkeit und Liebe zum Detail gelehrt. Ihr scharfer analytischer Blick und ihre stets hilfreichen und aufmunternden Kommentare waren elementar für das Gelingen dieser Arbeit. Danken möchte ich ihr auch für das Vertrauen, das sie mir während meiner Zeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin entgegengebracht hat.

Besonderen Dank schulde ich Eike v. Savigny, ohne den ich diese Arbeit nie begonnen hätte. Vom ersten Semester an hat er mein Interesse an Wittgenstein geweckt und gefördert und mir Vertrauen in meine philosophischen Fähigkeiten geschenkt. Auch die vorliegende Arbeit hat er mit konstruktiver Kritik bereichert.

Oliver Scholz danke ich für seine ausführlichen Kommentare und hilfreichen Verbesserungsvorschläge vor allem in der Endphase der Dissertation. Die wissenschaftlichen Diskussionen mit ihm haben wesentlich zur Verbesserung und Verfeinerung der hier dargelegten Ideen beigetragen.

Diese Arbeit hat von dem inspirierenden wissenschaftlichen Austausch am Philosophischen Seminar in Münster sehr profitiert. Dafür und für ihre permanente Unterstützungsbereitschaft möchte ich meinen ehemaligen Kollegen danken. Vor allem danke ich Christian Suhm und Sebastian Schmoranzer für weitreichende fachliche Diskussionen genauso wie für ihre freundschaftlichen Hilfestellungen.

Mein tief empfundener Dank gilt schließlich Tobias Wiesenthal, der nicht nur jede Fassung der Arbeit, von den allerersten Anfängen bis zur letzten Überarbeitung, begleitet, korrigiert und mit gesundem Menschenverstand hinterfragt hat, sondern auch so manche Krise geduldig ertragen und liebevoll abgewandt hat. Ihm ist diese Arbeit gewidmet.

Münster, im August 2006

Für Tobias

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **7**

Teil I: Wittgensteins Kritik an Cantors Diagonalbeweis in BGM II, 1-22 **15**

1 Mathematische Grundlagen **15**
1.1 Abzählbarkeit 15
1.2 Reelle Zahlen 18
1.3 Cantors Diagonalbeweis 24

2 Die Diagonalzahl **31**
2.1 Die Diagonalreihe als reelle Zahl 31
2.1.1 Mathematische Umgebungen (§§ 1-3) 32
2.1.2 Methode und Resultat (§§ 3-6) 37
2.1.3 Nicht alles, was 'Zahl' heisst, ist eine Zahl (§§ 7-8) . 40
2.2 Ein möglicher Einwand 43
2.2.1 Ein Beispiel 44
2.2.2 Entgegnung 45
2.3 Die Relevanz der Argumentation 47

3 Der Diagonalbeweis **51**
3.1 BGM II, 9 51
3.1.1 Das Wittgensteinsche Bild 51
3.1.2 Der Kern des Argumentes: ein Beispiel 55
3.1.3 Das 'Immer'-Prinzip 57
3.1.4 Protest 58
3.2 Das Diagonalverfahren als Paradoxie 61
3.2.1 Die Grenzwert-Paradoxie 62
3.2.2 Super-Aufgaben und Unendlichkeitsmaschinen . . . 69
3.2.3 Der Schritt vom Endlichen ins Unendliche 75

3.3 Das Diagonalverfahren als Begriffsbestimmung (§§ 10-15) . 87
3.3.1 Andeutungen und Abbildungen (§ 11) 88
3.3.2 Was folgt aus dem 'Beweis'? (§§ 10, 14) 92
3.3.3 Die Berechtigung der Bilder (§§ 11, 15) 96
3.3.4 Der Nutzen des Diagonalargumentes (§§ 12-13) . . . 98
3.4 Das Diagonalargument als Paradoxie 100
3.4.1 Die Struktur von Diagonalargumenten 101
3.4.2 Gute und schlechte Diagonalargumente 103
3.4.3 Das Gegenbeispiel: die Paradoxie von Richard . . . 106
3.4.4 Das Diagonaldilemma 109

4 Abzählbarkeit 117
4.1 Der Begriff der Abzählbarkeit 118
4.2 Ordinal- und Kardinalzahlen 126
4.3 Der Diagonalbeweis als Begriffsbestimmung (§§ 16-21) . . . 129
4.4 Mächtigkeiten (§ 22) 136

Teil II: Wittgensteins Kritik im Kontext seiner Philosophie der Mathematik 147

5 Reelle Zahlen 147
5.1 Drei Argumente gegen die klassische Definition reeller Zahlen 148
5.1.1 Extension und Intension 149
5.1.2 Die Unvollständigkeit der rationalen Zahlen 155
5.1.3 Das Kriterium der Vergleichbarkeit 160
5.1.4 Der Blick ins Unendliche 166
5.2 Reelle Zahlen als Gesetze 171
5.2.1 Wittgensteins Grundannahmen 171
5.2.2 Das Erbe des Tractatus: Die operationale Sicht . . 180
5.2.3 Reelle Zahlen in den PB 186
5.2.4 Von den PB zur PG 193
5.2.5 Reelle Zahlen in der PG 200
5.2.6 Reelle Zahlen in den BGM 213
5.3 Reelle Zahlen in BGM II, 1-22 218
5.3.1 Interpretationen 219
5.3.2 Ein erneuter Blick in den Text 226

6 Konstruktivismus **237**
6.1 Versionen des Konstruktivismus 238
6.2 Ontologischer und semantischer Platonismus 245
6.2.1 Das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten 248
6.2.2 Wittgensteins Anti-Platonismus 259
6.3 Intuitionismus versus Finitismus 263
6.3.1 Das Unendliche 263
6.3.2 Reelle Zahlen 267
6.4 Wittgensteins Konstruktivismus 270
6.4.1 Strikter Finitismus 270
6.4.2 Anschauung versus Verifikation 276

7 Konventionalismus **281**
7.1 Konventionalismus: Dummetts Sicht 281
7.2 Mathematische Sätze als Konventionen 292
7.2.1 Lewis' Konventionenbegriff 292
7.2.2 Wittgensteins Konventionenbegriff 300
7.3 Konventionalismus versus Verifikationismus 305
7.3.1 Die Grenzen des Verifikationismus 305
7.3.2 Theorie und Praxis 311

8 Revisionismus **319**
8.1 Nicht-revisionistische Interpretationen 320
8.2 Wittgensteins Cantor-Kritik 326
8.3 Eine revisionistische Re-Interpretation 342

Literaturverzeichnis **351**

Einleitung

Ausgehend von Wittgensteins Kritik an Cantors Diagonalbeweis und seiner Einschätzung reeller Zahlen wird in der vorliegenden Arbeit Wittgensteins Philosophie der Mathematik einer Neubewertung zugeführt. Es wird dargelegt, dass seine Einwände gegen den Diagonalbeweis weder so unbegründet sind, wie ihm seine Gegner vorwerfen, noch so diplomatisch, wie seinen Verteidigern lieb wäre. Vielmehr illustrieren sie die konstruktivistischen, konventionalistischen und revisionistischen Züge seiner Philosophie der Mathematik.

Wittgenstein hat sich sein Leben lang immer wieder mit Fragen der Mathematik auseinandergesetzt. So sind insbesondere die Notizbücher, die zwischen 1929 und 1934 entstanden sind und in Teilen unter den Titeln *Philosophische Bemerkungen* (PB) und *Philosophische Grammatik* (PG) postum veröffentlicht wurden, deutlich von philosophischen Überlegungen zur Mathematik gekennzeichnet. Aber auch die Manuskriptbände der Jahre 1937 bis 1944, die nach seinem Tod in Auszügen unter dem Titel *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* (BGM) herausgegeben wurden, zeigen Wittgensteins intensives und unaufhörliches Interesse an Grundfragen der Mathematik.

Obwohl Wittgenstein sein ursprüngliches Projekt aufgibt, die *Philosophischen Untersuchungen* um einen zweiten Teil zur Philosophie der Mathematik zu ergänzen, sind seine Überlegungen zur Mathematik – so fragmentarisch sie auch erscheinen mögen – von einer erstaunlichen Kohärenz und philosophischen Tiefe gekennzeichnet. Dennoch wurde ihnen lange Zeit wenig Beachtung geschenkt. Einerseits überwog die Einschätzung, dass Wittgensteins Analysen uninformiert oder fehlerhaft seien[1], so dass es im Sinne einer wohlwollenden Interpretation seines Gesamtwerkes besser sei, ihnen keine Beachtung zu schenken. Andererseits wurde es als

[1] vgl. Kreisel 1959: 136; Bernays 1959: 7f.; Shwayder 1969: 67; Dummett 1959: 333.

Manko angesehen, dass Wittgensteins Untersuchung sich in großen Teilen auf elementare Rechnungen und basale mathematische Operationen bezieht, so dass es als schwierig eingestuft wurde, seine Ergebnisse im Hinblick auf die Mathematik als akademische Disziplin auszuwerten[2].

In den letzten zwei Jahrzehnten wurde in mehreren Monographien und zahlreichen Artikeln der Versuch unternommen, aus Wittgensteins Notizen zur Mathematik eine kohärente philosophische Position abzuleiten. Zunehmend werden nun auch die fruchtbaren Beziehungen zwischen Wittgensteins Philosophie der Mathematik und seiner Sprachphilosophie ausgelotet, die die Bedeutung seiner mathematischen Überlegungen für die Entwicklung seiner philosophischen Gedanken aufzeigen.

Als problematisch werden aber nach wie vor Wittgensteins Bemerkungen zur höheren Mathematik betrachtet. Neben seiner Kritik an Gödels Unvollständigkeitssatz gehört vor allem seine Kritik an Cantors Diagonalbeweis und die damit verbundene Ablehnung transfiniter Zahlen zu einem Bereich, der von vielen Interpretationen entweder ausgespart wird, oder aber mit Vorbehalten im Hinblick auf Wittgensteins Verständnis der zu Grunde liegenden mathematischen Überlegungen betrachtet wird.

In der Tat hat Cantors Satz der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen die moderne Mathematik so entscheidend geprägt, dass er heute zum gesicherten Bestand an Lehrsätzen gehört. Jeder Versuch, ihn in Frage zu stellen, muss daher fehlgeleitet erscheinen. Dabei darf man allerdings nicht vergessen, dass die Gültigkeit des Arguments zu Lebzeiten Cantors noch in Fachkreisen angezweifelt wurde[3]. Erst mit der Anerkennung des Diagonalbeweises hat sich auch der Umgang mit kritischen Stimmen gewandelt. Während Fraenkel (1935) in seiner Verteidigung des Cantorschen Diagonalverfahrens skeptische Zweifel an der Gültigkeit des Beweises noch ernst nahm, werden heutzutage Kritiker des Diagonalbeweises als „cranks“ (Dudley 1992: 40ff.) abgetan[4].

In dieser Arbeit wird dargelegt, dass sich hinter Wittgensteins Bemerkungen zum Diagonalbeweis tiefgründige Einsichten in die Struktur mathematischer Beweise und das Wesen reeller Zahlen verbergen, die Rückschlüsse auf seine Philosophie der Mathematik im Ganzen erlauben.

---

[2] vgl. Bernays 1959: 11; Kreisel 1959: 135; Dummett 1959: 333; Putnam 2001: 187.

[3] vgl. Dauben 1979: 66ff..

[4] vgl. auch Hodges 1998: 1.

Im **ersten Teil** der Arbeit werden Wittgensteins Bemerkungen zum Cantorschen Diagonalverfahren in BGM II, §§1-22 unvoreingenommen untersucht. Ziel ist nicht, Wittgensteins Position zu kritisieren oder zu verteidigen, sondern Wittgensteins Argumente gegen den Diagonalbeweis durch eine genaue Analyse des Textes ans Licht zu bringen und, wenn möglich, aus mathematischer Sicht zu stützen. Die Rekonstruktion des Gedankenganges wird zeigen, dass Wittgenstein mit fundierten Argumenten die These verteidigt, der Diagonalbeweis beweise nicht, dass die reellen Zahlen überabzählbar sind.

Die Interpretation konzentriert sich auf die Abschnitte 1-22 des zweiten Teils der BGM, da diese – anders als die Abschnitte 23-62 – als zusammenhängender Text in Wittgensteins Manuskripten erscheinen[5].

Die Manuskriptüberschrift „[Ansätze]“ weist auf den fragmentarischen Charakter der Ausführungen hin, der durch die Stellung im Manuskript zwischen überarbeiteten Bemerkungen zur Philosophie der Mathematik (BGM I) und drei nur in kleineren Formulierungen abweichenden Entwürfen des Vorworts zu den *Philosophischen Untersuchungen* noch betont wird. Wie die Interpretation zeigen wird, sind die Abschnitte dennoch erstaunlich tiefgründig, präzise und kohärent. Allerdings ist der Zusammenhang der Bemerkungen nicht immer auf den ersten Blick erkennbar. So wie es wohl jedem geht, der versucht, sich auf die flüchtigen Notizen und Gedankenstützen eines anderen einen Reim zu machen, ist es auch hier notwendig, mit etwas Phantasie zu Werke zu gehen, um Querverbindungen zu ziehen und das in Worte zu fassen, was für Wittgenstein zwischen den Zeilen gestanden haben könnte.

Die Kapitel 2-4 werden darlegen, dass Wittgenstein zufolge der Diagonalbeweis in dreifacher Hinsicht kein Beweis ist:

These 1 Der Diagonalbeweis beweist nicht, dass die Diagonalzahl eine reelle Zahl ist.

These 2 Der Diagonalbeweis beweist nicht, dass die Diagonalzahl von allen reellen Zahlen der betrachteten Aufzählung verschieden ist.

[5] BGM II umfasst Notizen aus den Manuskriptbänden MS 117 (§§1-22) und MS 121 (§§23-62), die unmittelbar vor dem 27. Juni 1938 bzw. zwischen dem 30. Mai 1938 und dem 3. Januar 1939 entstanden. Während die Auszüge aus MS 121 zwar in chronologischer Reihenfolge, aber unter Auslassung größerer und kleinerer Abschnitte – nicht immer sinnerhaltend – übernommen wurden, finden sich die Abschnitte 1-22 als zusammenhängender Text in MS 117 wieder.

These 3 Der Diagonalbeweis beweist nicht, dass die reellen Zahlen nicht abzählbar sind.

Anknüpfend an These 3 richtet Wittgenstein seine Kritik in BGM II, §§1-22 über den Diagonalbeweis hinaus auch gegen die Theorie transfiniter Kardinalzahlen:

These 4 Der Begriff der Abzählbarkeit definiert keine Größenrelation auf unendlichen Mengen.

Die erste These wird mich in Kapitel 2, die zweite in Kapitel 3 und die dritte und vierte These in Kapitel 4 beschäftigen. Da Wittgensteins Argumentation den Begriff der Abzählbarkeit und die Definition der reellen Zahlen ebenso voraussetzt wie die Kenntnis des Diagonalbeweises, sollen diese Begriffe zunächst in Kapitel 1 erläuternd skizziert werden.

Im **zweiten Teil** der Arbeit sollen die Erkenntnisse des ersten Teils im Hinblick auf Wittgensteins Philosophie der Mathematik ausgewertet werden. Kapitel 5 stellt in dieser Hinsicht den Zusammenhang der Bemerkungen zu Wittgensteins Auffassung reeller Zahlen her. Angesichts Wittgensteins ausführlicher und tiefsinniger Auseinandersetzung mit dem Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen ist es ein wenig verwunderlich, dass sich in den Manuskripten, die um oder nach 1938 entstanden sind, keine weiteren Bemerkungen zu reellen Zahlen finden. Eine Ausnahme bilden einzelne und verstreute Bemerkungen in den 1942 bis 1944 entstandenen Manuskripten MS 126 und 127, die in Ausschnitten als BGM V veröffentlicht sind. Diese Bemerkungen werfen Licht auf Wittgensteins These, dass Mathematik eine Rechentechnik ist und als solche eng mit der alltäglichen menschlichen Praxis verknüpft ist. Über Wittgensteins Auffassung reeller Zahlen verraten diese Bemerkungen dagegen nicht viel.

Ganz anders sieht es mit den Schriften zur Mathematik aus, die Wittgenstein in den Jahren 1929 bis 1933 verfasst hat. Die Manuskripte dieser Jahre zeugen von einem tiefen Interesse an reellen Zahlen und weisen umfassende Ansätze zu einer Theorie irrationaler Zahlen auf. In Kapitel 5 möchte ich diese Theorie entwickeln und untersuchen, ob und inwiefern Wittgensteins Auffassung reeller Zahlen, wie er sie in den Jahren 1929-1933 entwickelt, in die Argumentation von BGM II, 1-22 einfließt.

Die letzten drei Kapitel werten Wittgensteins Kritik am Diagonalbeweis im Hinblick auf konstruktivistische (Kap. 6), konventionalistische (Kap. 7) und revisionistische (Kap. 8) Züge aus.

So werde ich in Kapitel 6 argumentieren, dass Wittgensteins Umgang mit dem Unendlichen und seine damit verbundene Auffassung reeller Zahlen deutlich konstruktivistische Züge aufweisen. Es wird sich zeigen, dass seine Position aber weder dem Intuitionismus noch dem Finitismus zuzuordnen ist, da sie sich von beiden Strömungen wesentlich durch den Stellenwert der menschlichen Praxis unterscheidet. Mathematische Begriffsbildungen gehen Wittgenstein zufolge in zweifacher Hinsicht auf die schöpferische Tätigkeit des Menschen zurück. Erstens – und dies vereint Wittgensteins Auffassung mit den gängigen konstruktivistischen Theorien – existieren mathematische Objekte nicht unabhängig vom Menschen, sondern werden durch die mathematische Begriffsbildung erst erschaffen. Zweitens geht Wittgenstein – im Gegensatz zu den verbreiteten konstruktivistischen Ansätzen – davon aus, dass die Tatsache, dass diese Objekte als mathematische Objekte zu bezeichnen sind, allein darauf zurückzuführen ist, dass die Welt, in der wir leben, es erforderlich macht, zu rechnen und entsprechende Regeln aufzustellen und anzuwenden.

Dieser zweite Aspekt, die Bedeutung der menschlichen Praxis, verweist auf die konventionalistischen Züge von Wittgensteins Philosophie der Mathematik, die ich in Kapitel 7 genauer analysiere. Hier wird sich zeigen, wie Wittgenstein Verifikationismus und Konventionalismus aneinander bindet. Dass mathematische Sätze Konventionen sind, bedeutet insofern, dass die Unhinterfragbarkeit mathematischer Sätze an den Gebrauch entsprechender praktischer Regeln gebunden ist. Dabei kommt der Praxis eine Doppelrolle zu. Erstens bestimmt sie, welche Beweise und Sätze anerkannt werden und zweitens wird der bewiesene Satz erst dadurch, dass er anerkannt wird, inhaltlich als mathematischer Satz bestimmt. Mithin schöpft ein Beweis wie Cantors Diagonalbeweis seine Rechtfertigung nicht aus den Begriffen, mit denen er operiert, sondern aus der Übernahme dieser Begriffe in unsere Praxis. Entsprechend ist Wittgensteins Kritik als ein Appell an die mathematische Praxis zu verstehen, diesen Begriffsbestimmungen die Anerkennung zu verweigern.

Wittgensteins Appell, bestimmten mathematischen Beweisen – wie dem Cantorschen Diagonalbeweis – die Anerkennung zu versagen, veranschaulicht das revisionistische Potenzial seiner Bemerkungen zur Mathematik, das in Kapitel 8 erörtert werden soll. Ich werde dafür argumentieren, dass Wittgenstein seine Aufgabe als Philosoph darin sieht, mathematische Begriffsbildungen im Hinblick auf ihre Wohldefiniertheit zu

überprüfen und fehlerhafte Begriffe zurückzuweisen oder zu korrigieren. Auf diese Weise greift er als Philosoph kontrollierend in die Entwicklung und Übernahme mathematischer Begriffsbildungen ein.

Teil I

Wittgensteins Kritik an Cantors Diagonalbeweis in BGM II, 1-22

Kapitel 1

Mathematische Grundlagen

In den ersten 22 Abschnitten des zweiten Teils der *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* (BGM) nimmt Wittgenstein den Cantorschen Diagonalbeweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen kritisch unter die Lupe. Da Wittgensteins Argumentation die Kenntnis der Begriffe „reelle Zahl“ sowie „Abzählbarkeit“ voraussetzt, werde ich diese Schlüsselbegriffe in den ersten beiden Abschnitten dieses Kapitels erläutern.

Der dritte Abschnitt ist dem Cantorschen Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen mittels des Diagonalverfahrens gewidmet. Ziel dieses Abschnittes ist, innerhalb des Beweises das abstrakte Beweisprinzip von den notwendigen spezifischen Zusatzannahmen für reelle Zahlen zu trennen und so die mathematischen Voraussetzungen für das Verständnis der Wittgensteinschen Überlegungen in BGM II zu schaffen. Dazu werde ich das Diagonalverfahren anhand von Cantors allgemeinem Diagonalbeweis von 1891 nachzeichnen und aufzeigen, inwiefern der Beweis modifiziert werden muss, um auf die reellen Zahlen übertragen werden zu können.

1.1 Abzählbarkeit

Eine (unendliche) Menge heißt *abzählbar* oder *abzählbar unendlich*,[1] wenn

[1] Der Sprachgebrauch ist hier nicht einheitlich. In manchen Lehrbüchern wird das Adjektiv „abzählbar“ zur Kennzeichnung endlicher und unendlicher Mengen verwandt (Kuratowski/Mostowski 1976: 169; Forster 1992: 52; Reinhardt/Soeder 1994: 35; Amann/Escher 1998: 51; Holdgrün 1998: 103f; Aumann/Haupt 1974: 66; Blatter 1974: 51; Truss 1997: 35). Mitunter wird aber auch zwischen „endlichen“, „abzählbaren“ (Fraenkel 1959: 21, Dieudonné 1975: 27, Mangold/Knopp 1974: 507, Heuser 1994: 138, Königsber-

sie die *Mächtigkeit (Kardinalzahl)*[2] $\aleph_0$ der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen[3] hat. Zwei Mengen A und B haben dieselbe Mächtigkeit, wenn sie *eineindeutig (bijektiv)* aufeinander abgebildet werden können, d.h. wenn jedem Element der Menge A ein Element der Menge B zugeordnet werden kann, ohne dass in einer der beiden Mengen Elemente übrig bleiben, oder einem Element der einen mehrere Elemente der anderen zugeordnet werden.[4] Entsprechend ist eine unendliche Menge *unabzählbar*[5] oder

ger 1992: 16) bzw. „abzählbar-unendlichen“ (Ebbinghaus 1991: 370, Oberschelp 1972: 152) und „überabzählbaren“ Mengen unterschieden und damit der Fall endlicher abzählbarer Mengen ausgeschlossen. In der englischsprachigen Literatur wird zumeist „denumerable“ zur Kennzeichnung unendlicher Mengen und „countable“ für endliche und unendliche Mengen verwandt (Lipschutz 1964: 135, Zuckermann 1974: 149). Da es im Rahmen dieser Arbeit nicht notwendig ist, auf den Status endlicher Mengen einzugehen, werde ich sowohl „abzählbar“ als auch „abzählbar unendlich“ ausschließlich zur Kennzeichnung unendlicher Mengen verwenden.

[2] Cantor verwendet die Begriffe ‘Mächtigkeit’ und ‘Kardinalzahl’ austauschbar. Voraussetzung dafür, dass nach Cantor einer Menge eine Kardinalzahl zugeordnet werden kann, ist lediglich, dass sie „aus wohlunterschiedenen, begriffflich getrennten Elementen $m, m', ...$ besteht und insofern bestimmt und abgegrenzt ist“(Cantor 1888: 387). Demgegenüber wird heute zumeist begrifflich zwischen den Mächtigkeiten beliebiger Mengen und Kardinalzahlen als Mächtigkeiten *wohlgeordneter* Mengen unterschieden (vgl. Bachmann 1955: 14). Ich werde mich (wie z. B auch Halmos (1976: 123) und Quine (1973: 151)) im Folgenden dem Cantorschen Gebrauch anschließen und nicht zwischen den Begriffen unterscheiden.

[3] Im Rahmen dieser Arbeit soll auch die Null zu den natürlichen Zahlen gehören, d.h. $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Da aber insbesondere Cantor die Zahl Null nicht zu den natürlichen Zahlen zählt, wird es sich in Einzelfällen, um Missverständnisse zu vermeiden, als hilfreich erweisen, ersatzweise die Menge der positiven natürlichen Zahlen zu betrachten, die ich mit $\mathbb{N}^+$ bezeichnen möchte. Für die Argumentation ist dies nicht ausschlaggebend: Alle Aussagen, die in dieser Arbeit über $\mathbb{N}$ gemacht werden, treffen auch auf $\mathbb{N}^+$ zu und umgekehrt – mit Ausnahme der Aussage, dass 0 zu $\mathbb{N}$ gehört.

[4] Diese Definition geht auf Cantor zurück (Cantor 1882: 151f.) und findet sich so auch in den meisten modernen Lehrbüchern (Holdgrün 1998: 103f; Aumann/Haupt 1974: 66; Ebbinghaus 1991: 371, Reinhardt/Soeder 1994: 35). In der zeitgenössischen Literatur wird teilweise auf den Mächtigkeitsbegriff verzichtet und direkt auf die Existenz einer bijektiven bzw. surjektiven Abbildung $f : \mathbb{N} \to A$ abgestellt (Forster 1992: 52, Königsberger 1992: 16, Zuckermann 1974: 142, Oberschelp 1972: 152). Oftmals liegt der Definition noch der Begriff der *Gleichmächtigkeit (Äquivalenz oder Äquipotenz)* zu Grunde, nicht aber der der *Kardinalzahl* (Dieudonné 1975: 27, Heuser 1994: 138, Amann/Escher 1998: 51, Lipschutz 1964: 134f.). Neben Definitionen, die für die Abzählbarkeit einer Menge M auf die Existenz einer bijektiven Abbildung auf $\mathbb{N}$ abstellen, gibt es auch Ansätze, die auf die Möglichkeit der Umordnung von M zu einer Zahlenfolge abheben (Mangoldt/Knopp 1974: 507, Perron 1960: 175).

[5] In der deutschsprachigen Literatur ist der Begriff „unabzählbar“ ungebräuchlich.

überabzählbar, wenn es keine solche bijektive Abbildung auf die natürlichen Zahlen gibt.

Die Menge der ganzen Zahlen kann man beispielsweise bijektiv auf die Menge der natürlichen Zahlen abbilden, indem man 0 auf 0, 1 auf 1, 2 auf 3, 3 auf 5 usw. (d.h. jede positive Zahl $z \in \mathbb{Z}$ auf $2z - 1$) abbildet und -1 auf 2, -2 auf 4, -3 auf 6 (d.h. jede negative Zahl $z \in \mathbb{Z}$ auf $-2z$),[6] als falte man den Zahlenstrahl leicht verschoben bei 0 zusammen:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
\mathbb{N} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & \dots \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
\mathbb{Z} & 0 & 1 & \dots & 2 & \dots & 3 & \dots & 4 & \dots & 5 & \dots & 6 & \dots & 7 & \dots \\
 & \ddots & \dots & -1 & \dots & -2 & \dots & -3 & \dots & -4 & \dots & -5 & \dots & -6 & \dots & \dots
\end{array}$$

Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ lässt sich ebenfalls eineindeutig auf die Menge der natürlichen Zahlen abbilden. Dazu wird jede rationale Zahl in einem quadratisch unendlichen Schema angeordnet[7]:

Man spricht stattdessen üblicherweise von „nicht abzählbar“ (vgl. Königsberger 1992: 17, Holdgrün 1998: 109) oder „überabzählbar“ (vgl. Amann/Escher 1998: 51, Forster 1992: 52) und definiert genauer eine Menge als nicht abzählbar bzw. überabzählbar, wenn sie weder endlich noch abzählbar unendlich ist. Da Wittgenstein aber „unabzählbar“ (vielleicht als Übersetzung des englischen „uncountable“) als Synonym für „nicht abzählbar“ verwendet, schließe ich mich hier diesem Sprachgebrauch an.

[6] vgl. Holdgrün 1998: 105. Da bijektive Abbildungen sich dadurch auszeichnen, dass eine eindeutig bestimmte Umkehrabbildung existiert, die wieder bijektiv ist, kann man genauso gut auch die inverse Abbildung $f^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ betrachten (vgl. Königsberger 1992: 16).

[7] vgl. Reinhardt/Soeder 1994: 34f. Viele Lehrbücher führen den entsprechenden Beweis zunächst nur für die positiven reellen Zahlen (vgl. Königsberger 1992: 17; Heuser 1994: 138) und folgen damit Cantors Beweis von 1872 (Meschkowski 1967: 26f.). Die Erweiterung von $\mathbb{Q}^+$ auf $\mathbb{Q}$ erfolgt durch die Abbildung der negativen rationalen Zahlen auf die negativen ganzen Zahlen, so dass man insgesamt eine bijektive Abbildung von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{Z}$ erhält. Die zugeordneten ganzen Zahlen werden in einem zweiten Schritt bijektiv auf die natürlichen Zahlen abgebildet (s. o.).

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & & & & & & & & & & & & \\
\downarrow & & & & & & & & & & & & \\
1 & & -1 & \rightarrow & 2 & & -2 & \rightarrow & 3 & & -3 & \rightarrow & 4 \quad ... \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
\frac{1}{2} & & -\frac{1}{2} & & (\frac{2}{2}) & & (-\frac{2}{2}) & & \frac{3}{2} & & -\frac{3}{2} & & ... \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{1}{3} & & -\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & -\frac{2}{3} & & (\frac{3}{3}) & & ... & & \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
\frac{1}{4} & & -\frac{1}{4} & & (\frac{2}{4}) & & (-\frac{2}{4}) & & ... & & & & \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & \\
\frac{1}{5} & & -\frac{1}{5} & & \frac{2}{5} & & ... & & & & & & \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & & & \\
\frac{1}{6} & & -\frac{1}{6} & & ... & & & & & & & & \\
 & \swarrow & & & & & & & & & & & \\
\frac{1}{7} & & ... & & & & & & & & & & \\
\downarrow & & & & & & & & & & & & \\
usw. & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Die durch die Pfeile angedeutete Abbildungsvorschrift ordnet jeder rationalen Zahl eine natürliche Zahl zu, wobei Zahlen, die doppelt vorkommen (so wie $\frac{2}{2}$ und $\frac{3}{3}$) übersprungen werden.[8] Die Zuordnung sieht dann folgendermaßen aus:

$$
\begin{array}{lcccccccccccccccc}
\mathbb{Q}: & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & -2 & 3 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{5} & ... \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & ...
\end{array}
$$

1.2 Reelle Zahlen

Da in $\mathbb{Q}$ die vier Grundrechenarten unbeschränkt durchführbar sind, gibt die algebraische Struktur keinen Anlass zur Erweiterung der rationalen Zahlen zu den *reellen Zahlen* (Reinhardt/Soeder 1994: 59). 'Unvoll-

[8] Da die Pfeile das Gitter diagonal durchkreuzen, wird diese Abbildungsvorschrift manchmal verwirrenderweise *Cantorsches* (Oberschelp 1972: 152) oder auch *Cauchysches* (Heuser 1994: 138) *„Diagonalverfahren"* (Königsberger 1992: 17) genannt. Im Rahmen dieser Arbeit möchte ich den Begriff „Diagonalverfahren" ausschließlich zur Kennzeichnung des Verfahrens verwenden, das dem Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen zu Grunde liegt und mit diesem Argument nichts zu tun hat.

ständig'[9] erscheint die Menge der rationalen Zahlen aber angesichts der geometrischen Konstruierbarkeit von Strecken, deren Länge kein rationales Vielfaches der Einheitsstrecke ist, wie z. B. $\sqrt{2}$.

Dass das Verhältnis zweier geometrisch konstruierbarer Längen nicht immer rational ist, war bereits den Pythagoräern im 5. Jhd. v. Chr. bekannt (Ebbinghaus 1991: 28). So sehr die Entdeckung irrationaler Zahlenverhältnisse die pythagoräische Schule in eine Krise stürzte, so gut lernten nachfolgende Generationen von Mathematikern, mit diesen *inkommensurablen* Größen[10] umzugehen. Bereits Eudoxos (408-355 v. Chr.) formulierte in seiner Proportionentheorie einen Gleichheitsbegriff für kommensurable und inkommensurable Verhältnisse,[11] der das Rechnen mit irrationalen Größenverhältnissen ermöglichte und stellte mit der Exhaustionsmethode eine wichtige Beweismethode für die Gleichheit von Verhältnissen zur Verfügung.[12]

Allerdings liegt diesen mathematischen Begriffen wie auch der Methode der Intervallschachtelung, die sich spätestens seit Archimedes zur Approximation irrationaler Größen mittels rationaler Näherungswerte etablierte (vgl. Archimedes, S. 74), ein intuitives Verständnis inkommensurabler Größen zu Grunde, das im 19. Jhd. als Basis für die Analysis als un-

[9] Die Unvollständigkeit der rationalen Zahlen stellt sich in der modernen Terminologie einerseits als ordnungsstrukturelle, andererseits als topologische dar. Ordnungsvollständig ist eine Menge, wenn jede nichtleere beschränkte Teilmenge ein Supremum und ein Infimum besitzt (Dedekindsche Stetigkeitseigenschaft) (Amann/Escher 1998: 99); topologisch vollständig ist ein metrischer Raum, wenn jede Fundamentalfolge konvergiert (Reinhardt/Soeder 1994: 61).

[10] Nach Euklid (Buch X, Def 1 (2)) sind „**inkommensurabel** solche [Größen], für die es kein gemeinsames Maß gibt". Der Begriff der „Größe" geht auf Eudoxos zurück und bezieht sich auf Entitäten, die sich stetig verändern, wie z. B. Winkel, Streckenstücke, Flächeninhalte und Zeit. Im Gegensatz zu „Zahlen" kommt „Größen" in der antiken Mathematik aber keine quantitative Bedeutung zu (vgl. Kline (1) 1990: 48f.).

[11] Euklid V, Def. 5: „Man sagt, dass Größen **in demselben Verhältnis stehen**, die erste zur zweiten wie die dritte zur vierten, wenn bei beliebiger Vervielfältigung die Gleichvielfachen der ersten und dritten den Gleichvielfachen der zweiten und vierten gegenüber, paarweise entsprechend genommen, entweder zugleich größer oder zugleich gleich oder zugleich kleiner sind".

[12] vgl. Euklid XII, Archimedes, S. 74. Grundlage dieser Methode der Approximation geometrischer Größen durch unendliche Prozesse ist das *Exhaustionslemma*, Euklid X, § 1 (L. 1): „Nimmt man bei Vorliegen zweier ungleicher (gleichartiger) Größen von der größeren ein Stück größer als die Hälfte weg und vom Rest ein Stück größer als die Hälfte und wiederholt dies immer, dann muss einmal eine Größe übrig bleiben, die kleiner als die kleinere Ausgangsgröße ist."

zureichend angesehen wurde. Im Zuge der strengen mathematischen Begründung der Begriffe und Methoden der Analysis durch Cauchy, Weierstraß u.a. (vgl. hierzu Kline (3) 1990: Kap. 40) erschien es notwendig, auch den als grundlegend vorausgesetzten Begriff der reellen Zahl explizit zu definieren. In Parallele zu den drei verschiedenen antiken Ansätzen (Proportionentheorie, Exhaustionsmethode und Intervallschachtelung) entstehen nun drei verschiedene Definitionen reeller Zahlen, auf deren Grundlage drei Versionen des *Vollständigkeitsaxioms* der reellen Zahlen formuliert werden können: Dedekindschnitte[13], Fundamentalfolgen und Intervallschachtelungen[14].

Die drei verschiedenen Formulierungen des Vollständigkeitsaxioms sind mathematisch äquivalent (vgl. Ebbinghaus 1991: 47-51), d.h. eine reelle Zahl kann als Dedekindschnitt, Fundamentalfolge oder Intervallschachtelung aufgefasst werden und andererseits stellt jeder Dedekindschnitt, jede Fundamentalfolge und jede Intervallschachtelung eine reelle Zahl dar. Wittgenstein unterzieht jede dieser Definitionen der Kritik.[15] Im Rahmen der Argumentation in BGM II ist vor allem die Cantorsche Definition der reellen Zahlen als Fundamentalfolgen bedeutsam. Sie soll hier daher im Vordergrund stehen.

Cantor definiert die reellen Zahlen als Äquivalenzklassen rationaler Fol-

[13] Dedekind leitet die reellen Zahlen als Menge der Schnitte rationaler Zahlen her. Ein Schnitt ist eine Partition der rationalen Zahlen in zwei Mengen A und B, wobei für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ gilt $a < b$ (vgl. Holdgrün 1998:17). Bereits Eudoxos (Euklid V, Def 5 (s. o. FN 11)) führte die Gleichheit zweier Größen a und b auf die Teilung der rationalen Zahlen in zwei Mengen, $A = \{m, n \in \mathbb{N} | \ \frac{m}{n} < \frac{a}{b}\}$ und $B = \{m, n \in \mathbb{N} | \ \frac{m}{n} < \frac{a}{b}\}$ zurück (vgl. Kline (3) 1990: 982). Eudoxos' Definition setzt allerdings die zu vergleichenden Größen als gegeben voraus. Dedekind geht den umgekehrten Weg und fordert unter Rückgriff auf das Eudoxische Kriterium der Gleichheit, dass jeder Schnitt eine reelle Zahl definiere, bzw. genauer: Für jeden Dedekind-Schnitt $(A; B)$ gibt es eine Schnittzahl $s \in \mathbb{R}$ mit $a \leq s$ und $s \leq b$ für alle $a \in A$ und alle $b \in B$.

[14] Die Definition der reellen Zahlen mit Hilfe von Intervallschachtelungen geht auf Weierstraß zurück. Eine Intervallschachtelung ist eine Folge $([a_n, b_n])$ abgeschlossener Intervalle in $\mathbb{Q}$, bei der jedes Intervall im vorhergehenden enthalten ist und die Intervallänge beliebig klein wird (Reinhardt/Soeder 1994: 63), so dass es höchstens eine rationale Zahl gibt, die allen Intervallen der Schachtelung angehört (Mangoldt/Knopp 1974: 173). Das Vollständigkeitsaxiom bestimmt nun: Für jede Intervallschachtelung gibt es genau eine reelle Zahl, die allen Intervallen angehört.

[15] Dedekindschnitte: BGM V, 29-40; PG II 41 (S. 472), PB XV 173 (S. 211); Intervallschachtelungen: PG II 43 (S. 483-485); PB VX, 179 (S. 218-220); XVIII, 191 (S. 237), 197f (S. 241-243).

gen. Eine reelle Zahl ist

> „zunächst [...] eine durch ein Gesetz gegebene unendliche Reihe von rationalen Zahlen
>
> $$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \tag{1}$$
>
> [$\cdots$], welche die Beschaffenheit hat, daß die Differenz $a_{n+m} - a_n$ mit wachsendem n unendlich klein wird, was auch die positive ganze Zahl m sei. [...] Diese Beschaffenheit der Reihe (1) drücke ich in den Worten aus: '*Die Reihe (1) hat eine bestimmte Grenze b.*'" *(Cantor 1872: 93f.).*

Eine „Reihe" (heute würde man sagen *„Folge"*)[16]. die diese Bedingung erfüllt, nennt Cantor später „*Fundamentalreihe*" (Cantor 1883: 186).[17]

Cantor (1883: 187) hält es für den „Kardinalpunkt" seiner Herleitung, dass er nicht wie viele seiner Vorgänger[18] den „logischen Fehler" begangen habe, die Existenz des Grenzwertes, d.h. eines Punktes der von allen bis auf endlich viele Werte der Folge beliebig wenig abweicht (vgl. Forster 1992: 19), vorauszusetzen, sondern

> „daß durch unsere vorangegangene Definition der Begriff b mit solchen Eigenschaften und Beziehungen zu den rationalen Zahlen bedacht worden ist, daß daraus mit logischer Evidenz der Schluß gezogen werden kann: $\lim_{\nu=\infty} a_\nu$ existiert und ist gleich b" (Cantor 1883: 187).

Die „vorangegangene Definition" basiert auf einer Erweiterung der Anordnungsrelationen ($<, >, =$) und Elementaroperationen ($+, -, \cdot, \div$) der rationalen Zahlen auf Fundamentalfolgen. So legt Cantor fest, dass zwei Fundamentalfolgen $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ und $a'_0, a'_1, ..., a'_n, ...$ als „*gleich*" gelten sollen, wenn „$a_n - a'_n$ unendlich klein mit wachsendem n" wird und als *größer* (bzw. *kleiner*) betrachtet werden, wenn „$a_n - a'_n$ [...] von einem gewissen n an stets größer (bzw. kleiner) als eine positive (rationale) Größe ε

[16] Da auch Wittgenstein den Begriff „Reihe" verwendet, werde ich die Begriffe „Reihe" und „Folge" austauschbar zur Bezeichnung von Folgen verwenden. Abweichungen sind ausdrücklich gekennzeichnet, wie z. B. in Kapitel 2. Zum heutigen Sprachgebrauch s. S. 22.

[17] Da der Cantorschen Definition das von Cauchy formulierte Konvergenzkriterium zu Grunde liegt, werden Fundamentalfolgen oft auch *Cauchy-Folgen* genannt.

[18] Gemeint ist hier wohl vor allem Cauchy, der zeigte, dass jede Folge, die einen Grenzpunkt hat, eine Fundamentalfolge ist. Dass jede Fundamentalfolge auch einen Grenzpunkt hat, hielt er für intuitiv einleuchtend (vgl. Kline (3) 1990: 963, Ebbinghaus 1991: 34).

[bleibt]“ (Cantor 1872: 93).[19] Eine reelle Zahl ist die Äquivalenzklasse aller Fundamentalfolgen, die in dieser Beziehung der Gleichheit zueinander stehen (vgl. Ebbinghaus 1991: 40).

Vor dem Hintergrund dieser Definitionen kann Cantor beweisen, dass die durch die Folge (a_ν) bestimmte reelle Zahl b Grenzpunkt von (a_ν) ist und dass jede Folge reeller Zahlen (b_ν), die das Cauchysche Konvergenzkriterium erfüllt, eine (und nur eine) reelle Zahl als Grenzpunkt hat (Cantor 1883: 187).
Formuliert man die Cantorsche Herleitung der reellen Zahlen als Axiom für die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, so wird diese Beobachtung zu der Forderung, der Begriff b der Fundamentalfolge solle mit solchen Eigenschaften und Beziehungen zu den rationalen Zahlen bedacht sein, dass er Grenzwert einer Folge (a_ν) ist. Oder einfacher: In $\mathbb{R}$ konvergiert jede Fundamentalfolge.

Anders als der Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen mittels Intervallschachtelungen[20] geht der Diagonalbeweis nicht direkt von reellen Zahlen als Fundamentalfolgen aus, sondern macht sich die Möglichkeit der Darstellung reeller Zahlen als Dezimal- oder Dualbrüche oder – allgemeiner – als Brüche zur Basis b ($b \in \mathbb{N}, b \geq 2$) zunutze.

Grundlage für diese Auffassung reeller Zahlen ist der mathematische Begriff der *Reihe*, der anders als in Cantors und Wittgensteins Sprachgebrauch nicht mit dem der *Folge* identisch ist. Ist eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben, so nennt man die Folge der Partialsummen

$$(\sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}} = a_0, \quad a_0 + a_1, \quad a_0 + a_1 + a_2, \quad \ldots$$

eine *Reihe*. Jede Reihe ist also eine Folge, aber nicht jede Folge notwendigerweise auch eine Reihe. Man bezeichnet obige Reihe auch mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$,

[19] In ähnlicher Weise werden auch die Elementaroperationen auf die rationalen Operationen der entsprechenden Folgeglieder zurückgeführt: „Sind (a_ν) und (a'_ν) zwei *Fundamentalreihen*, durch welche die Zahlen b und b' determiniert seien, so zeigt sich, dass auch $(a_\nu \pm a'_\nu)$ und $(a_\nu \cdot a'_\nu)$ *Fundamentalreihen* sind, die also drei neue Zahlen bestimmen, welche mir als Definitionen für die Summe und Differenz $b \pm b'$ und für das Produkt $b \cdot b'$ dienen.

Ist zudem b von Null verschieden [...], so beweist man, dass auch $(\frac{a'_\nu}{a_\nu})$ eine *Fundamentalreihe* ist, deren zugehörige Zahl die Definition für den Quotienten $(\frac{b'}{b})$ liefert.“ (Cantor 1883: 187)

[20] Auch dieser Beweis geht auf Cantor zurück (1874: 117f; 1879: 142-145), vgl. Fußnote 23; eine moderne Version findet sich z. B. in Dieudonné 1975: 34f..

also:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = (\sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}} = a_0, \quad a_0 + a_1, \quad a_0 + a_1 + a_2, \quad \ldots$$

Konvergiert die Folge der Partialsummen, so wird ihr Grenzwert ebenfalls mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet (vgl. Forster 1992: 24; Reinhardt/Soeder 1994: 279). Hier wird also wie im Falle der Cantorschen Herleitung der reellen Zahlen als Fundamentalfolgen der Grenzwert der Reihe mit der Reihe selbst identifiziert.

Ein positiver b-adischer Bruch[21] ist eine Reihe der Gestalt

$$\sum_{n=-k}^{\infty} a_n b^{-n}$$

mit $k \geq 0$ und $a_n \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq a_n < b$ (vgl. Forster 1992: 29)[22].

Beispielsweise kann man die rationale Zahl $\frac{1000}{3}$ als „10-adischen" Bruch, d. h. als Dezimalbruch auffassen:

$$\frac{1000}{3} = 333,333333... = 333,\overline{3} = \sum_{i=-2}^{\infty} 3 \cdot 10^{-i}.$$

Dabei steht $\sum_{i=-2}^{\infty} 3 \cdot 10^{-i}$ genaugenommen für die Folge

$$(\sum_{i=-2}^{n} 3 \cdot 10^{-i})_{n\in\mathbb{N}} = 333;\ 333,3;\ 333,33;\ 333,333;\ \ldots\ .$$

Unter diesem Blickwinkel wird deutlich, dass die uns geläufige Darstellung reeller Zahlen als endliche oder unendliche Dezimalbrüche nur eine abkürzende Schreibweise für die entsprechende Reihe ist.

Von einem beliebigen positiven b-adischen Bruch

$$r = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n b^{-n} \quad \text{mit} \quad k \geq 0 \quad \text{und} \quad a_n \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad 0 \leq a_n < b$$

[21] Ich betrachte hier der Einfachheit halber nur positive b-adische Brüche. Offensichtlich ist für $k \geq 0$ und $a_n \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq a_n < b$ $-\sum_{n=-k}^{\infty} a_n b^{-n}$ ein negativer b-adischer Bruch, so dass alle negativen b-adischen Brüche auf positive b-adische Brüche zurückgeführt werden können.

[22] Die Variable k begrenzt die positiven Exponenten der Potenzen von b. Z. B. ist $100000 = \sum_{n=-5}^{\infty} a_n 10^{-n}$, wobei $a{-5} = 1$ ist und für $n \in \mathbb{N} \cup \{-4, -3, -2, -1\}$ gilt: $a_n = 0$.

kann man nun – ohne die Basis b oder die Werte der Koeffizienten a_n zu kennen – zeigen, dass r eine reelle Zahl definiert. Nach der Definition b-adischer Brüche ist r nichts anderes als die Folge der endlichen Summen $(\sum_{n=-k}^{m} a_n b^{-n})_{m\in\mathbb{N}}$. Der Abstand d zweier Folgeglieder $x_i = \sum_{n=-k}^{i} a_n b^{-n}$ und $x_j = \sum_{n=-k}^{j} a_n b^{-n}$ ist für $i < j$ – unabhängig von der Wahl der Koeffizienten a_n –

$$d = \sum_{n=i+1}^{j} a_n b^{-n} \leq b^{-i}$$

(vgl. Forster 1992: 29). Damit ist r eine Fundamentalfolge. Mithin stellt jeder b-adische Bruch eine reelle Zahl dar.

1.3 Cantors Diagonalbeweis

Den Beweis, dass die Menge der reellen Zahlen im Gegensatz zur Menge der rationalen Zahlen nicht abzählbar ist, führt Cantor gleich zweimal, 1874[23] und 1891. Während Cantors erster Beweis die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen mit Hilfe von Intervallschachtelungen direkt auf das Vollständigkeitsaxiom zurückführt, sieht Cantor den großen Vorteil des zweiten Beweises darin, dass er nicht auf die reellen Zahlen beschränkt ist, sondern den Nachweis der Überabzählbarkeit einer Vielzahl von Mengen ermöglicht. So bemerkt er 1891 mit Bezug auf seinen früheren Beweis (1891: 278):

> „Es läßt sich aber von jenem Satze ein viel einfacherer Beweis liefern, der unabhängig von der Betrachtung der Irrationalzahlen ist.“

[23] Cantor (1874) zeigt:

> „Wenn eine nach irgendeinem Gesetze gegebene unendliche Reihe voneinander verschiedener reeller Zahlgrößen
>
> $$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu, \ldots \tag{4}$$
>
> vorliegt, so lässt sich in jedem Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ eine Zahl η (und folglich unendlich viele solcher Zahlen) bestimmen, welche in der Reihe (4) nicht vorkommt“ (Cantor 1874: 117).

Die Annahme, die Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen könne durch Bildung einer Folge $(\omega_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}^+}$ bijektiv auf die Menge der natürlichen Zahlen abgebildet werden, wird ad absurdum geführt, indem eine reelle Zahl konstruiert wird, die nicht in der Folge auftreten kann. Dazu wird zu einem beliebigen vorgegebenen offenen Intervall $(\alpha \ldots \beta)$, $\alpha < \beta$ eine In-

Aufgrund seiner Allgemeinheit wird der Diagonalbeweis zum Ausgangspunkt und Grundstein der Cantorschen Lehre transfiniter Kardinalzahlen (vgl. 1892: 279).

Ich werde zunächst den Diagonalbeweis für die reellen Zahlen skizzieren und dann auf das ihm zu Grunde liegende allgemeine Beweisprinzip, wie es von Cantor 1891 vorgestellt wurde, eingehen. Gegenstand des Diagonalbeweises sind nicht die Partialsummen, sondern die Koeffizientenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ b-adischer Brüche im offenen Intervall $(0,1)$. Jeder reellen Zahl zwischen Null und Eins kann man eine Koeffizientenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \{0,1,\ldots b-1\}$ zuordnen. Im Fall $b=2$ erhält man auf diese Weise für jede reelle Zahl im Intervall $(0,1)$ als Koeffizientenfolge eine Folge von Nullen und Einsen, im Fall $b=10$ eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zahlen a_n mit

---

tervallschachtelung mit Intervallgrenzen aus der Zahlenfolge $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_\nu, \ldots$ konstruiert. Die Grenzen des ersten Intervalls $(\alpha^1 \ldots \beta^1)$ werden von den ersten Zahlen α^1 und β^1 $(\alpha^1 < \beta^1)$ der Folge $(\omega_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}^+}$, die im Intervall $(\alpha \ldots \beta)$ liegen, gebildet. Analog werden die Grenzen des nächsten Intervalls $(\alpha^2 \ldots \beta^2)$ und aller weiteren durch die nächsten zwei Folgeglieder aus $(\omega_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}^+}$ gebildet, die in $(\alpha^1 \ldots \beta^1)$ bzw. in dem zuletzt gebildeten Intervall der Intervallfolge liegen.

Cantor zieht nun zwei Fälle in Erwägung: „*Entweder* die Anzahl der so gebildeten Intervalle ist endlich [...] *Oder* die Anzahl der so gebildeten Intervalle ist unendlich groß.“ (1874: 117). Im ersten Fall gibt es ein letztes Intervall $(\alpha^\nu \ldots \beta^\nu)$, in dem höchstens noch eine Zahl ω_p aus $(\omega_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}^+}$ liegt. Da die reellen Zahlen aber dicht sind, d. h. zwischen je zwei reellen Zahlen a und b eine dritte (z. B. $\frac{a+b}{2}$) existiert, gibt es eine reelle Zahl in diesem letzten Intervall, die nicht in der Folge $(\omega_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}^+}$ vorkommt (denn sonst wäre $(\alpha^\nu \ldots \beta^\nu)$ nicht das letzte Intervall der Intervallschachtelung). Im zweiten Fall gilt: „Da die Zahlen $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^\nu, \ldots$ ihrer Größe nach fortwährend wachsen, dabei jedoch im Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ eingeschlossen sind, so haben sie nach einem bekannten Fundamentalsatze der Größenlehre eine Grenze [...]. Ein gleiches gilt für die Zahlen $\beta^1, \beta^2, \beta^3, \ldots, \beta^\nu, \ldots$, welche fortwährend abnehmen und dabei ebenfalls im Intervall $(\alpha \ldots \beta)$ liegen.“ (Cantor 1879: 144f; Cantors Notation habe ich der meinen angeglichen). Für die Grenzwerte $\alpha^\infty = \lim_{\nu\to\infty} \alpha^\nu$ und $\beta^\infty = \lim_{\nu\to\infty} \beta^\nu$ gilt: $\alpha^\infty \leq \beta^\infty$. Ist $\alpha^\infty < \beta^\infty$, so gibt es (da $\mathbb{R}$ dicht ist) im Innern des Intervalls $(\alpha^\infty \ldots \beta^\infty)$ eine reelle Zahl η, die nicht von $(\omega_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}^+}$ erfasst wird (denn sonst wäre sie Intervallgrenze und als solche kleiner als α^∞ oder größer als β^∞).

Ist $\alpha^\infty = \beta^\infty$, so ist $\eta = \alpha^\infty = \beta^\infty$ eine reelle Zahl, die nicht in der Folge $(\omega_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}^+}$ enthalten sein kann, denn „wäre die Zahl η in unserer Reihe enthalten, so hätte man $\eta = \omega_p$, wo p ein bestimmter Index ist; dies ist aber nicht möglich, denn ω_p liegt *nicht* im Innern des Intervalls $(\alpha^\infty \ldots \beta^\infty)$, während die Zahl η ihrer Definition nach im Innern des Intervalls liegt“ (Cantor 1874: 117).

Damit ist bewiesen, dass keine Folge von reellen Zahlen *alle* reellen Zahlen umfassen kann, dass es also keine bijektive Abbildung der reellen auf die natürlichen Zahlen gibt. Folglich sind die reellen Zahlen überabzählbar.

$0 \leq a_n \leq 9$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Endliche b-adische Brüche kann man in unendliche verwandeln, indem man 0 als Koeffizient für alle nachfolgenden Koeffizienten setzt. So ergibt sich z. B. für den Dezimalbruch $0,125$ die Koeffizientenfolge $1, 2, 5, 0, 0, 0 \ldots$.

Um zu zeigen, dass die reellen Zahlen nicht abzählbar sind, führt der Diagonalbeweis die Annahme, es gebe eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to (0,1) \subset \mathbb{R}$ *ad absurdum*, indem er eine reelle Zahl konstruiert, die nicht Funktionswert von f ist. Zu diesem Zweck betrachtet man die Aufzählung[24] der Koeffizientenfolgen der Funktionswerte von f:

$$
\begin{array}{lcccccccc}
f(0): & \mathbf{a_{0,0}} & a_{0,1} & a_{0,2} & a_{0,3} & \ldots & a_{0,\mu} & \ldots \\
f(1): & a_{1,0} & \mathbf{a_{1,1}} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,\mu} & \ldots \\
f(2): & a_{2,0} & a_{2,1} & \mathbf{a_{2,2}} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,\mu} & \ldots \\
f(3): & a_{3,0} & a_{3,1} & a_{3,2} & \mathbf{a_{3,3}} & \ldots & a_{3,\mu} & \ldots \\
\ldots\ldots & & & & & & & \\
f(\mu): & a_{\mu,0} & a_{\mu,1} & a_{\mu,2} & a_{\mu,3} & \ldots & \mathbf{a_{\mu,\mu}} & \ldots \\
\ldots\ldots & & & & & & &
\end{array}
$$

Im Fall von Dualbrüchen sind alle $a_{i,j}$ mit $i, j \in \mathbb{N}$ entweder Null oder Eins, im Fall von Dezimalbrüchen gilt entsprechend $a_{i,j} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Der Diagonalbeweis beruht nun auf der Betrachtung der Folge $(a_{i,i})_{i \in \mathbb{N}}$ des i-ten Koeffizienten der i-ten reellen Zahl der Aufzählung, d. h. der Folge der Koeffizienten, die auf der Diagonalen liegen. Zu dieser Folge bildet man eine Folge $(d_i)_{i \in \mathbb{N}}$, die die Bedingung erfüllt, dass $d_i \neq a_{i,i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dies kann z. B dadurch erreicht werden, dass jede 1 durch eine Null ersetzt wird und jeder andere Koeffizient durch die 1. Da die auf diese Weise manipulierten Koeffizienten auf der (durch Fettdruck angedeuteten) Diagonalen des obigen Schemas liegen, nennt man die Folge $(d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *Diagonalfolge*.

Fasst man die Folge $(d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ als Koeffizientenfolge eines b-adischen Bruchs im Intervall $(0,1)$ auf, so erhält man die sog. *Diagonalzahl* $d = \sum_{n=1}^{\infty} d_n b^{-n}$. d ist ein b-adischer Bruch und damit eine reelle Zahl. Der Diagonalbeweis zeigt nun, dass die Koeffizientenfolge der Diagonalzahl

[24] Essler (1964: 27) unterscheidet zwischen *abzählbaren* und *aufzählbaren* Mengen, wobei eine Menge M schon dann *aufzählbar* ist, wenn es eine surjektive Funktion $f : \mathbb{N} \to M$ gibt. Im Rahmen dieser Arbeit soll unter der Aufzählung f einer Menge R dagegen eine *bijektive* Funktion $f : \mathbb{N} \to R$ verstanden werden. Existiert zu einer Menge R eine Aufzählung f, so ist R abzählbar; ist R abzählbar, so existiert eine Aufzählung f.

$(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nicht selbst als z. B. k-tes Element der Aufzählung auftreten kann, denn dann würde sie die Diagonale im Koeffizienten d_k kreuzen. Also müsste für die Stelle $a_{k,k}$ des Rasters gelten $a_{k,k} = d_k$. Nun ist $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aber so definiert, dass für alle Koeffizienten d_n gilt: $d_n \neq a_{n,n}$. Folglich ist auch $d_k \neq a_{k,k}$. Dies ist ein Widerspruch. Somit wird $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nicht von der Aufzählung erfasst.

Nun möchte man die Erkenntnisse über die Koeffizientenfolge der Diagonalzahl auf die Diagonalzahl übertragen und argumentieren, dass, da $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nicht in der Aufzählung auftreten kann, d kein Funktionswert von f sein kann. Mithin ist f nicht surjektiv und folglich auch nicht bijektiv. Die Annahme, die natürlichen Zahlen könnten bijektiv auf die reellen Zahlen abgebildet werden, muss daher verworfen werden. Das bedeutet, dass die reellen Zahlen nicht abzählbar sind.

Diese Argumentation steht aber unter einem Vorbehalt, der deutlich wird, wenn man das dem Diagonalbeweis zu Grunde liegende allgemeine Beweisprinzip, das ich „Diagonalverfahren“ nennen werde, von der spezifischen Anwendung auf die Menge der reellen Zahlen trennt. Den soeben für die Koeffizientenfolgen b-adischer Brüche skizzierten Beweis formuliert Cantor 1891 allgemein für Folgen $E = (x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}^+}$, wobei $x_\nu \in \{w, m\}$. Dabei sollen m und w „irgend zwei einander ausschließende Charaktere“(Cantor 1891: 278) darstellen. Die Gesamtheit aller Folgen E, deren Koordinaten entweder m oder w sind, nennt Cantor M. Zum Beweis, dass die Menge M nicht abzählbar ist, betrachtet Cantor eine unendliche Folge $(E_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}^+}$ von Elementen in M und definiert eine Reihe $(b_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}^+}$, derart, „dass b_ν auch nur gleich m oder w und von $a_{\nu,\nu}$ *verschieden* sei.“ (Cantor 1891: 279). Er argumentiert nun:

> „Betrachten wir alsdann das Element
>
> $$E_0 = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$$
>
> von M, so sieht man ohne weiteres, daß die Gleichung
>
> $$E_0 = E_\mu$$
>
> für keinen positiven ganzzahligen Wert von μ erfüllt sein kann, da sonst für das betreffende μ und für alle ganzzahligen Werte von ν
>
> $$b_\nu = a_{\mu,\nu}$$
>
> also auch im besondern
>
> $$b_\mu = a_{\mu,\mu}$$

wäre, was durch Definition von b_ν ausgeschlossen ist. Aus diesem Satze folgt unmittelbar, daß die Gesamtheit aller Elemente von M sich nicht in die Reihenform $E_1, E_2, \ldots, E_\nu, \ldots$ bringen lässt, da wir sonst vor dem Widerspruch stehen würden, daß ein Ding E_0 sowohl Element von M, wie auch nicht Element von M wäre.“ (Cantor 1891: 279).

Setzt man $\{m, w\} = \{0, 1\}$ so erhält man offensichtlich eine Interpretation des Beweises für die Dualbruchdarstellung reeller Zahlen im Intervall $M = (0, 1)$. Das Diagonalverfahren liefert dann als Folge E_0 die Koeffizientenfolge eines Dualbruchs, der von jedem Dualbruch $E_\mu \in (E_1, E_2, \ldots, E_\mu, \ldots)$ in mindestens einer Koordinate verschieden ist. Der anfangs skizzierte Beweis stellt sich somit tatsächlich als eine Anwendung des Cantorschen Diagonalverfahrens dar.

Dennoch ist die Schlussfolgerung, die Menge M sei nicht abzählbar, nur dann gerechtfertigt, wenn die Elemente der Menge M durch die Folgen E_μ eindeutig charakterisiert sind. Demgegenüber hat nicht jede reelle Zahl eine eindeutige Darstellung als unendlicher b-adischer Bruch. So lässt sich jede reelle Zahl, die sich durch einen b-adischen Bruch darstellen lässt, dessen Koeffizientenfolge nach endlich vielen Folgegliedern konstant $b-1$ ist, auch als Null-periodischer (d.h. endlicher) Bruch auffassen. Für Dezimalbrüche ist z. B. $0,0\overline{9} = 0,1 = 0,1000\ldots$, und für Dualbrüche ist $0,0\overline{1} = 0,011111\ldots = 0,1 = 0,1000\ldots$. D. h., Folgen, die sich in unendlich vielen Koordinaten unterscheiden, können dennoch dieselbe Zahl repräsentieren. Damit kann aus der Ungleichheit der Koeffizientenfolgen $E_\mu = (a_{\mu,n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit der Diagonalfolge E_0 nicht auf die Ungleichheit der entsprechenden b-adischen Brüche geschlossen werden.

Der Cantorsche Diagonalbeweis kann daher nur dann auf reelle Zahlen übertragen werden, wenn sichergestellt werden kann, dass die reelle Zahl, deren Koeffizientenfolge die Diagonalfolge E_0 ist, nicht durch eine andere Koeffizientenfolge dargestellt werden kann. Da Dualbrüche aus den zwei Ziffern 0 und 1 zusammengesetzt sind, bestimmt *jede* Koeffizientenfolge, die ab einem bestimmten Punkt $n_0 \in \mathbb{N}$ konstant den Wert 0 annimmt, eine reelle Zahl, die auch durch eine ab $n_0 + 1$ konstante Folge auf 1 repräsentiert werden kann – und umgekehrt. Nun kann der Fall, dass die Diagonalfolge konstant wird, nicht ausgeschlossen werden. Folglich kann für Dualbrüche nicht sichergestellt werden, dass die durch die Diagonalfolge repräsentierte Zahl nicht in anderer Gestalt in der Aufzählung auftritt.

Für b-adische Brüche mit $b > 3$ lässt sich dieses Problem allerdings umgehen, da hier nicht jede konstante Koeffizientenfolge uneindeutig ist. Für die Dezimalbruchdarstellung der reellen Zahlen sind beispielsweise nur konstante Folgen mit Perioden auf 0 und 9 problematisch; alle periodischen Brüche auf $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ stellen eine bestimmte reelle Zahl eindeutig dar. So gilt es nur noch zu vermeiden, dass in der Diagonalfolge die Ziffern 0 und 9 auftauchen. Bestimmt man beispielsweise die Diagonalfolge $d_\infty = (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für die Dezimalbruchdarstellung reeller Zahlen mit den Koeffizientenfolgen $E_\mu = (a_{\mu,n})_{n\in\mathbb{N}}$ wobei $a_{\mu,n} \in \{0, 1, 2, ...9\}$ für alle $\mu, n \in \mathbb{N}$ folgendermaßen:

$$d_n = \begin{cases} 5 & \text{falls } a_{n,n} \neq 5 \\ 4 & \text{falls } a_{n,n} = 5 \end{cases}$$

so kann es zwar passieren, dass die Diagonalfolge einen Dezimalbruch, der 4- oder 5-periodisch ist, generiert, nicht aber, dass die durch diesen Dezimalbruch charakterisierte reelle Zahl unter einer anderen Dezimalbruchdarstellung in der Aufzählung auftritt. Für 4- oder 5-periodische Dezimalbrüche gibt es nur diese eine Darstellung als Dezimalbruch. In diesem Fall folgt aus der Verschiedenheit der Diagonalfolge $d_\infty = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von jeder Koeffizientenfolge der Aufzählung E_μ ($\mu \in \mathbb{N}$) bereits, dass die reelle Zahl d, die durch die Koeffizientenfolge d_∞ repräsentiert wird, nicht in der betrachteten Aufzählung reeller Zahlen vorkommt.

Mit diesem Trick kann für jede Aufzählung reeller Zahlen im Intervall $(0, 1)$ eine reelle Zahl konstruiert werden, die nicht in der Liste der Werte auftaucht. D. h. für jede Abbildung $f : \mathbb{N} \to (0, 1) \subset \mathbb{R}$ der natürlichen in die reellen Zahlen zwischen Null und Eins lässt sich mit diesem Verfahren eine reelle Zahl $d \in (0, 1)$ finden, für die es kein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $f(n) = d$. Folglich ist keine Abbildung der natürlichen auf die reellen Zahlen im Intervall $(0, 1)$ – und damit erst recht keine Abbildung der natürlichen Zahlen auf die Menge *aller* reellen Zahlen – bijektiv. Folglich sind die reellen Zahlen nicht abzählbar.

Wittgenstein unterzieht in BGM II, 1-22 die Argumentation des Diagonalbeweises in viererlei Hinsicht der Kritik. Zunächst (§§ 1-8) untersucht er die Annahme, die Diagonalfolge d_∞ definiere einen b-adischen Bruch und damit eine reelle Zahl (s. Kap. 2). Sodann wendet er sich in §§ 9-11 dem abstrakten Diagonalverfahren zu und untersucht, inwiefern die Folgerung berechtigt ist, die Diagonalzahl sei von allen Elementen der

Aufzählung f verschieden (s. Kap. 3). Die Frage, inwiefern der Diagonalbeweis tatsächlich ein *Beweis* ist, schließt sich in §§ 12-15 unmittelbar an und wird hier ebenfalls in Kapitel 3 untersucht. Schließlich kritisiert Wittgenstein in §§16-21 die Bestimmtheit des Begriffs der Abzählbarkeit und wendet sich in §22 gegen die Annahme, das Diagonalverfahren zeige, dass es unendliche Mengen unterschiedlicher Mächtigkeiten gibt (s. Kap. 4).

Kapitel 2

Die Diagonalzahl

In BGM II versucht Wittgenstein die Behauptung in Frage zu stellen, Cantors Diagonalargument beweise die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen. Die Abschnitte 1-8 dienen in diesem Zusammenhang der Verteidigung der These, die Diagonalmethode erzeuge keine reelle Zahl. Da Cantors Beweis der Überabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen auf der Annahme basiert, das Diagonalverfahren generiere eine reelle Zahl, macht diese These, sofern sie zutrifft, Cantors Beweis der Überabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen hinfällig.

Ich werde in diesem Kapitel zunächst Wittgensteins Argumentation in BGM II, 1-8 nachzeichnen und aufzeigen, inwiefern seine Überlegungen die These stützen, das Diagonalverfahren erzeuge keine reelle Zahl (2.1). Anschließend möchte ich anhand eines Beispiels deutlich machen, dass Wittgenstein diese allgemeine These deutlich einschränken muss, wenn er rationalen Zahlen den Status als Zahl nicht absprechen will (2.2). Schließlich möchte ich zeigen, dass Wittgenstein dennoch zurecht darauf hinweist, dass die Diagonalzahl nicht als Zahl aus dem Diagonalverfahren hervorgeht (2.3). Ob die durch das Diagonalverfahren erzeugte Reihe von Zahlen eine mathematische Entität darstellt, hängt nämlich nicht vom Diagonalverfahren, sondern vom jeweiligen Axiomensystem ab.

2.1 Die Diagonalreihe als reelle Zahl

Grundlage der Argumentation in BGM II, 1-8 ist die Prämisse, in der Mathematik sei die Bedeutung eines Wortausdrucks durch die Rechnung, aus der er hervorgeht, bestimmt (BGM II, 7). In den ersten drei Abschnitten deutet Wittgenstein an, dass es keine Rechnung außerhalb des Diagonal-

verfahrens gibt, die der Diagonalzahl Bedeutung verleihen könnte (2.1.1). In den Abschnitten 4-8 weist er dann nach, dass aus dem Diagonalverfahren nicht hervorgeht, dass die Diagonalreihe eine reelle Zahl ist (2.1.2). Damit handelt es sich Wittgenstein zufolge bei der Diagonal'zahl' nicht um eine reelle Zahl.

2.1.1 Mathematische Umgebungen (§§ 1-3)

Die Notizen des MS 117 aus dem Jahr 1938, die als BGM II, 1-22 veröffentlicht sind, beginnen mit der Betrachtung einer Abbildung der natürlichen Zahlen in die Quadratwurzeln, wobei jede natürliche Zahl ihrer Quadratwurzel zugeordnet wird: $f : n \mapsto \sqrt{n}$. Wittgensteins Ausführungen richten sich damit zunächst nicht direkt gegen den Diagonalbeweis, sondern beziehen sich auf diesen ganz anderen (und bewusst abwegigen) Fall der Anwendung der Methode, die dem Diagonalbeweis zu Grunde liegt. Weder will Wittgenstein sich über das Diagonalverfahren lustig machen, noch missversteht er die Prämissen des Diagonalbeweises, indem er hier eine Teilmenge der reellen Zahlen betrachtet. Vielmehr möchte er die Methode, die dem Diagonalbeweis zu Grunde liegt, ernst nehmen als ein mathematisches Verfahren, das auf verschiedene Zahlenmengen anwendbar ist. Der Einschub „– sagen wir –“ macht deutlich, dass es sich bei der Aufzählung aller Quadratzahlen nur um ein Beispiel handelt, das helfen soll zu verstehen, welche Argumente sich hinter dem Diagonalverfahren verbergen. Letztlich möchte Wittgenstein die Frage beantworten:

> „In wiefern beweist die Diagonalmethode, daß es eine Zahl gibt, die – sagen wir – keine Quadratwurzel ist?“ (§ 1)

Um diese Frage zu beantworten, inwiefern das Diagonalverfahren zeigt, dass es eine von allen Zahlen einer abzählbar unendlichen Menge verschiedene Zahl gibt, nimmt Wittgenstein sich erst einmal das Ziel des Diagonalbeweises vor, eine Zahl zu generieren, die von allen Werten einer bestimmten Zahlenmenge verschieden ist. Wittgenstein zufolge gibt die Diagonalmethode damit vor, eine bestimmte mathematische Aufgabe zu lösen, für die es in vielen anderen Fällen eine Lösung gibt, nämlich die Aufgabe: „Zeige mir eine Zahl, die von allen diesen verschieden ist“ (BGM II, 3). Vergleicht man jetzt aber die üblichen Lösungen solcher Aufgaben mit der Lösungsmethode des Diagonalverfahrens, so stellt man fest, dass

die üblichen Lösungen alle nach einem bestimmten Schema vorgehen, dem das Diagonalverfahren nur vorgeblich folgt:

> *Aufgabe*: Finde ein x, das eine bestimmte mathematische Form (hier: $\sqrt{n}$) nicht hat.
>
> *Lösung*: Wähle eine Zahl x (z. B. $x = \sqrt[3]{2}$ oder $x = \sqrt{2} - 1$...) und führe die Annahme, x habe diese Form (hier: x^2 sei eine natürliche Zahl) zum Widerspruch.

In Wittgensteins Beispielaufgabe (§ 1) lässt sich dieses Lösungsschema für $x = \sqrt[3]{2}$ und $x = \sqrt{2} - 1$ als Lösungen der Aufgabe, eine Zahl anzugeben, die nicht Wurzel einer natürlichen Zahl n ist, leicht verifizieren. Zu diesem Zweck nimmt man an, es gebe eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass $x^2 = n$ und führt diese Annahme durch einfaches Umformen der Gleichung zum Widerspruch.[1]

Die Antwort der Diagonalmethode scheint dieselbe Form zu haben: nimm die vorgegebene Zahl und addiere oder subtrahiere eine andere Zahl. Das wäre ganz in Übereinstimmung mit dem obigen Schema. So kann man nach dem Schema auch unendliche Dezimalbrüche addieren, z. B. $\sqrt{2}+0,0101010101010101010....$. Dies könnte der erste spontane Lösungsversuch der Aufgabe „Nenne mir eine Zahl, die mit $\sqrt{2}$ an jeder zweiten Dezimalstelle übereinstimmt!“ (BGM II, 2) sein. Das wäre eine richtig schöne Lösung, denn einerseits könnte man einen ganz neuen unendlichen Dezimalbruch generieren, nämlich: $1,414213562...+0,010101010... = 1,424314572...$, andererseits hätte man eine einfache algebraische Darstellung dieses Ungetüms, nämlich $\sqrt{2}+1/99$, und diese kann man dann ganz einfach für Widerspruchsbeweise o. ä. nach dem obigen Muster weiterverwenden.

Leider liefert diese Zahl aber keine Lösung der ursprünglichen Aufgabe. Das Muster in der Dezimalzahlentwicklung hält nur an, solange in der Dezimalzahlentwicklung von $\sqrt{2}$ die Ziffer 9 nicht vorkommt – so wie das Subtrahieren von $0,01010101010$ oder auch $0,10101010101$ als Lösungsversuch an der Ziffer 0 in der Dezimalzahlentwicklung von $\sqrt{2}$ scheitert.

[1] Im Fall $x = \sqrt[3]{2}$ folgt aus $(\sqrt[3]{2})^2 = n$, dass $4 = n^3$. Da aber $1^3 < 4 < 2^3$, gibt es kein $n \in N$ mit $n^3 = 4$. Also ist $\sqrt[3]{2}$ keine Quadratwurzel. Im Fall $x = \sqrt{2} - 1$ erhält man mit $(\sqrt{2} - 1)^2 = n$ die Gleichung $2 - 2\sqrt{2} + 1 = n$, die sich umformen lässt zu $\sqrt{2} = 1/2(3 - n)$. Da für $n \in \mathbb{N}$ auf der rechten Seite der Gleichung eine rationale Zahl steht, müsste auch $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl sein. Da $\sqrt{2}$ irrational ist, ist dies ein Widerspruch und die Annahme, $\sqrt{2} - 1$ sei Quadratwurzel einer natürlichen Zahl, muss verworfen werden.

Die Aufgabe, auf die die Diagonalmethode antwortet, ist mit dem alten Schema genauso wenig zu lösen wie die Aufgabe der Dreiteilung des Winkels mit Hilfe der Verfahren der euklidischen Geometrie, die beispielsweise die 2^n-Teilung des Winkels bewältigen.

Die Lösung, die dem Verfahren der Diagonalmethode entsprechen würde, wäre: „Es ist die Zahl, die man nach der Regel erhält: entwickle $\sqrt{2}$ und addiere 1 oder -1 zu jeder zweiten Dezimalstelle“ (§ 2), wobei die Ziffer 0 durch die Addition, die 9 durch die Subraktion von 1 verändert wird und alle anderen Ziffern beliebig durch $+1$ oder -1 modifiziert werden können. Wittgensteins Ansicht nach ist die ursprüngliche Aufgabe durch diese Antwort nicht „befriedigt“ (§ 2). Zwar kann auch diese Antwort als Addition einer Zahl aufgefasst werden, nur handelt es sich in diesem Fall um eine Zahl, die nur über ihre unendliche Dezimalzahlentwicklung gegeben ist. Diese aber hängt ebenso wie die Dezimalzahlentwicklung der Lösung direkt von der Dezimalzahlentwicklung von $\sqrt{2}$ ab.

Nun ist fraglich, inwiefern dies einen Unterschied darstelllen soll. So könnte man einwenden, da jede reelle Zahl als unendlicher Dezimalbruch aufgefasst werden könne, generiere das Verfahren der Addition bzw. Subtraktion der Ziffer 1 – in Abhängigkeit der Dezimalzahlentwicklung von $\sqrt{2}$ – einen unendlichen Dezimalbruch, d. h. eine reelle Zahl.

Darauf kann man viel erwidern, z. B.: „Aber was ist hier Methode des Kalkulierens und was Resultat?“ (§ 3) – und während man noch spricht, weiß man schon, was der nächste Einwand des Gegners sein wird: „Du wirst sagen, sie seien *eins*, denn es hat nun Sinn zu sagen: die Zahl D ist größer als ... und kleiner als ...; man kann sie quadrieren etc. etc.“ (§ 3). So kann man sich ewig weiter streiten und beide Parteien wissen wie ausweglos der Streit ist, denn Wittgenstein wird sich nicht davon abbringen lassen, dass Gebilde, die sich nicht auf einen endlichen mathematischen Ausdruck zurückführen lassen, keine Gegenstände der Mathematik sind und der Gegner wird sich weiterhin auf die Axiome und Regeln der reellen Zahlen berufen.

Diesem Streit weicht Wittgenstein in BGM II, 3 aus, indem er die Fragestellung korrigiert und sich damit auf ein Problem zurückzieht, das außerhalb jeder Theorie der reellen Zahlen steht:

> „Ist die Frage nicht eigentlich: Wozu kann man diese Zahl *brauchen*? Ja, das klingt sonderbar. – Aber es heißt eben in welcher mathematischen Umgebung steht sie.“ (§ 3)