Timm Lampert

Klassische Logik

Einführung mit interaktiven Übungen

ontos verlag

Frankfurt ▪ London

Inhaltsverzeichnis

VORWORT

Internetbegleitung

Dieses Buch bildet die Textgrundlage für einen internetbegleiteten Einführungskurs in die klassische Logik. Dieser Kurs wurde im Rahmen des Schweizer Förderprogrammes *Virtueller Campus Schweiz*, im Projekt VILOLA („virtuell logic laboratory“) konzipiert.[1]

Der Kurs ist in 12 Lektionen eingeteilt, die den Stoff der Aussagen- und erweiterten Quantorenlogik beinhalten. Zu jeder Lektion finden sich im Internet zahlreiche *interaktive Übungen*, durch die der Stoff der einzelnen Lektionen sich angeeignet und angewendet werden kann. Die Einstiegsseite für die Kursmaterialien findet sich unter folgendem link:

- Http://www.philoscience.unibe.ch/logik.html

Um die Übungen zu absolvieren, muss man sich unter seinem Namen anmelden. Auf einer Indexseite zu den Übungen werden dann die erreichten Prozentpunkte sowie die Mindestanforderungen der einzelnen Übungen aufgeführt, so dass man jederzeit eine Übersicht über den eigenen Leistungsstand erhält. Die Übungen sind so konzipiert, dass die klausurrelevanten Übungsaufgaben durch Generieren immer neuer Aufgabenstellungen so oft geübt werden können, bis man sie beherrscht. In diesem Buch wird im Anschluss an die Abschnitte, die Voraussetzung für die jeweiligen Übungen sind, mit „Übung:“ und dem folgenden Namen der Übung auf die jeweiligen Übungseinheiten verwiesen. Um diese Übungen zu absolvieren, muss man die jeweilige Übung im Internet aktivieren.

Der Kurs ist konzipiert als ein einsemestriger Logikkurs für Studierende der Philosophie und der Wissenschaftstheorie und Wissenschaftsgeschichte, in dem wöchentlich die Textgrundlage einer Lektion sowie die dazugehörigen Übungen besprochen werden. Hierbei wird von einem durchschnittlichen Arbeitsaufwand von 10 Wochenstunden ausgegangen. Der Kurs kann aber auch anhand dieses Buches sowie der interaktiven Übungseinheiten im *Selbststudium* studiert werden.

Am Ende der 6. und der 12. Lektion findet jeweils eine automatisch ausgewertete *Klausur* statt, deren Bestehen Bedingung für die erfolgreiche Teilnahme an dem Kurs ist. In Form von automatisierten *Probeklausuren* kann man sich auf die Klausuren vorbereiten, und den Leistungsstand prüfen.

---

[1]Nähere Informationen hierüber finden sich im Internet unter http://www.virtualcampus.ch und http://www.vilola.unibe.ch.

Zusätzlich zu den interaktiven Übungen und den Probeklausuren werden *tools* zur Prüfung der Wohlgeformtheit von Formeln, des Erstellens von Wahrheitswerttabellen, der Berechnung der Wahrheitswerte von Q-Interpretationen und der Konstruktion von Ableitungsschemata angeboten.

Es ist bei der Auswahl und der Darstellung des Inhaltes dieses Logikkurses darauf geachtet worden, dass die Automatisierung der Übungen und die Ermöglichung eines Selbststudiums nicht zu einer Trivialisierung des Lernstoffes führt. Buch und Übungen sind vielmehr so konzipiert, dass sie einerseits eine Einführung in die Logik bieten, in der durch die Übungen der Erwerb der Grundkenntnisse sowie der wesentlichen Techniken der klassischen Logik (Formalisierungen, Argumentrekonstruktionen, Anwendung von Entscheidungsverfahren, Ableitungen) unterstützt und durch die Klausuren abgefragt wird. Darüber hinaus bietet dieses Buch andererseits Ausführungen, die über eine Einführung in die Logik hinausgehen. Diese betreffen sowohl Fragen der Anwendung der Logik, insbesondere detaillierte Ausführungen zur Formalisierung und Argumentrekonstruktion, als auch Fragen der Metalogik. Hierdurch soll ein vertieftes Verständnis der Grenzen und der Möglichkeiten der klassischen Logik vermittelt werden, und fortgeschrittenen Studierenden oder Studierenden mit einem vermehrten Interesse an der Logik ein angemessenes Lehrangebot gegeben werden. Ausführungen, die deutlich über den klausurrelevanten Stoff hinausgehen, sind als *Zusatzbemerkungen*, *Exkurse* und *Ausblicke* gekennzeichnet. Ausserdem betreffen die LEKTIONEN 6 und 12 unmittelbar vor den Klausuren ausschliesslich Fragen der Metalogik, die in der Ausführlichkeit, in der sie behandelt werden, über eine Einführung in die Logik hinausgehen und nicht in den Klausuren geprüft werden. Studienanfänger haben hier die Möglichkeit, sich vornehmlich auf die Klausur vorzubereiten und den Inhalt von LEKTION 6 und 12 zu übergehen.

LITERATUREMPFEHLUNG

Standardeinführungen in die Logik sind:

- E. J. Lemmon, *Beginning Logic*, 9. Auflage, Indianapolis 1998.
- W. V. O. Quine, *Grundzüge der Logik*, 8. Auflage, Frankfurt 1993.
- H. D. Ebbinghaus, J. Flum, W. Thomas, *Einführung in die mathematische Logik*, 3. Auflage, Mannheim 1992.

Lemmons Buch bietet die klassische Einführung in den in LEKTION 4 und 10 dargestellten Logikkalkül. Quines Buch stellt einen eher philosophischen Zugang zur Logik dar und enthält viele Hinweise zur Formalisierung. Demgegenüber bietet das Buch von Ebbinghaus, Flum und Thomas eine mathematische Einführung in die Logik, in der Definitionen technischer gefasst sind, und einige metamathematische Lehrsätze besprochen werden. Die in diesem Buch gegebene Einführung versucht, die verschiedenen Schwerpunkte dieser drei Bücher zu vereinbaren. Eine Hilfe dabei war mir das Skript zum Logikkurs von Ali Behboud:

- Ali Behboud, *Einführung in die Logik*, Studien aus dem Philosophischen Seminar 28, Hamburg 1994.[2]

Ali Behboud sei Dank dafür, dass er mir sein Skript zur Verfügung gestellt hat, und meine Fragen stets kenntnisreich beantwortete.

Auf weitere Bücher zum Zweck der Vertiefung einzelner Themen wird an den entsprechenden Stellen im Text hingewiesen.

Danksagungen

Daniel Engler hat die tools, die Übungsaufgaben und die Klausuren programmiert, und die technische Betreuung des Kurses übernommen. Ihm sei Dank für die gute Zusammenarbeit. Michael Baumgartner, Theo Burri, Yvonne Lampert und Stefan Peer haben den Text Korrektur gelesen. Sie haben durch ihre Sorgfalt und kritischen Einwände zu einigen Verbesserungen beigetragen. Auch den TeilnehmerInnen am Logikkurs im Sommersemester 2002 an der Universität Bern sei Dank für Korrekturhinweise im Text und den Übungen. Marco Manni, Stefan Peer und Theo Burri danke ich für die Auseinandersetzung mit und kundige Kritik an früheren Versionen von Lektion 12. Michael Baumgartner sei gedankt für gemeinsame Diskussionen über die Grundlagen der Logik, die die Lektionen 6, 11 und 12 betrafen.

Zur überarbeiteten 2. Auflage

Neben kleineren Korrekturen und Ergänzungen wurde insbesondere das 12. Kapitel grundlegend überarbeitet.

[2] Eine stark überarbeitete Fassung dieses Skriptes soll demnächst in der Wissenschaftlichen Buchgesellschaft Darmstadt erscheinen.

Teil A

Einführung

LEKTION 1

KLASSISCHE LOGIK

Gegenstand des Einführungskurses in die Logik ist die *erweiterte Quantorenlogik 1. Stufe*. Diese wird hier als *klassische Logik* bezeichnet. Hiermit ist keine Stilbezeichnung oder ein Epochenbegriff gemeint, sondern ein Logiksystem, das sich durch seine formale Sprache und bestimmte Beweisverfahren auszeichnet, und Grundlage, Ausgangspunkt oder Gegenstand der Kritik der modernen Logiksysteme bildet.

Ziel dieser ersten Lektion ist es, die *klassische Logik* zu kennzeichnen und von anderen Teilgebieten der Logik abzugrenzen, sowie sie in den weiteren Zusammenhang der Rekonstruktion wissenschaftlicher Argumente zu stellen. In den fortlaufenden Lektionen werden dann die formale Sprache der klassischen Logik sowie die in ihr verwendeten Beweisverfahren dargestellt. Die in dieser Lektion verwendeten Begriffe werden dadurch konkretisiert. Es empfiehlt sich, die erste Lektion am Ende des Kurses zu rekapitulieren, um ein besseres Verständnis der erworbenen Kenntnisse zu gewinnen.

Dieser Logikkurs ist konzipiert für alle Studierenden, die einen *Einführungskurs Logik* im Rahmen eines Philosophiestudiums oder im Rahmen eines Studiums der Wissenschaftstheorie und Wissenschaftsgeschichte besuchen. Einige sind bisweilen irritiert, warum sie genötigt werden, sich mit Formalismen und mathematischen Beweismethoden auseinanderzusetzen. Andere haben das Gefühl, im Logikkurs unumstössliche Ergebnisse präsentiert zu bekommen und unhinterfragbare Techniken zu erwerben, denen gegenüber philosophische Probleme unauflösbar oder hinfällig erscheinen. Beiden Haltungen soll hier vorgebeugt werden, indem die klassische Logik in einen grösseren Zusammenhang eingeordnet wird. Wenn hierbei einiges programmatisch formuliert ist, dann erfüllt dies den Zweck, die Auseinandersetzung mit der Logik nicht als notwendiges Übel oder als vergnüglichen Selbstzweck anzusehen, sondern als einen Einstieg in ein Gebiet wohldefinierter Fragen, Probleme und Methoden, deren Kenntnis wesentlich für die Philosophie und Wissenschaftstheorie ist.

1 LOGIK

Wissenschaftliche *Aussagen* werden vornehmlich mittels der Umgangssprache formuliert. Die Logik stellt Mittel bereit, um diese Aussagen unter philosophischen und wissenschaftstheoretischen Gesichtspunkten zu analysieren. In dem folgenden Text[1] formuliert Isaac Newton mittels der englischen Sprache Aussagen, die ein Experiment beschreiben bzw. Schlussfolgerungen aus diesem ziehen:

> (1) The gradual removal of these suspitions, at length led me to the *Experimentum Crucis*, which was this: (2) I took two boards, and placed one of them close behind the Prisme at the window, so that the light might pass through a small hole, made in it for the purpose, and fall on the other board, which I placed at about 12 feet distance, having first made a small hole in it also, for some of that incident light pass through. (3) Then I placed another Prisme behind this second board, so that the light, trajected through both the boards, might pass through it also, and be again refracted before it arrived at the wall. (4) This done, I took the first Prisme in my hand, and turned it to and fro slowly about its Axis, so much as to make the several parts of the Image, cast on the second board, successivly pass through the hole in it, that I might observe to what places on the wall the second Prisme would refract them. (5) And I saw by the variation of those places, that the light, tending to that end of the Image, towards which the refraction of the first Prisme was made, did in the second Prisme suffer a Refraction considerably greater then the light tending to the other end. (6a) And so the true cause of the length of that Image was detected to be no other, then that Light consists of Rays differently refrangible, (6b) which, without any respect to a difference in their incidence, were, according to their degrees of refrangibility, transmitted towards divers parts of the wall.

Die Sätze (2) - (5) treffen Aussagen, die einen Experimentaufbau (2,3), eine experimentelle Tätigkeit (4) und eine experimentelle Beobachtung (5) beschreiben; Satz (6) formuliert die experimentelle Schlussfolgerung in Form einer Aussage.

Auch Bilder, Modelle, Gleichungen oder Computersimulationen können Aussagen treffen. Die Abbildung von Newtons *Experimentum Crucis* kann z.B. an die Stelle seiner Experimentbeschreibung (Sätze (2) bis (5)) treten (vgl. Abbildung 1.1).

Im Folgenden wird vornehmlich auf die *umgangssprachliche Formulierung* wissenschaftlicher Aussagen Bezug genommen.

Die Logik beschäftigt sich nicht mit der Frage, ob Aussagen, die möglicherweise wahr sind, *tatsächlich* wahr sind, oder, ob sie für wahr zu halten oder akzeptabel sind, da sie stimmig, zweckmässig oder einfach sind. Sie bemisst nicht *inhaltliche Eigenschaften* von Aussagen bzw. Typen oder *inhaltliche Relationen* zwischen Aussagen oder Typen, sondern die *formalen Eigenschaften* von Aussagen oder Typen

[1] Aus: Newton (1672), S. 3079. Den einzelnen Sätzen sind Nummerierungen hinzugefügt worden, um auf sie referieren zu können.

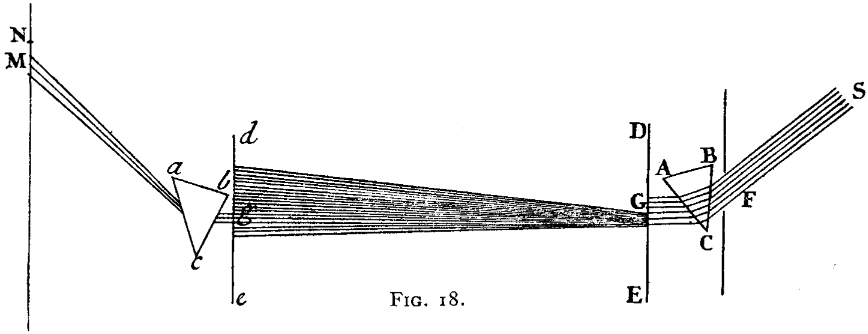

Abbildung 1.1: Newtons Experimentum Crucis, aus: Newton (1952), S. 47

bzw. *formale Relationen* zwischen Aussagen oder Typen.[2] Während Untersuchungsgegenstand einer *empirischen Wissenschaft* z.B. – wie im Falle des angegebenen Zitats von Newton – die Frage ist, ob Sonnenlicht tatsächlich heterogen ist, ist Untersuchungsgegenstand der *Logik* z.B. die Frage, unter welchen Bedingungen – ganz unabhängig vom spezifischen Inhalt von Aussagen – eine Aussage aus anderen Aussagen folgt. Die Logik lässt sich dann *anwenden* auf die Frage, ob z.B. die von Newton gezogene Schlussfolgerung, dass das Sonnenlicht heterogen ist, aus den Aussagen seiner Experimentbeschreibung – gegebenenfalls unter Voraussetzung bestimmter Interpretationsannahmen – folgt, oder ob hierfür zusätzliche Annahmen nötig sind.[3] Der *empirische Wissenschaftler* fragt, ob das Experiment adäquat beschrieben und durchgeführt wurde, und ob etwaige theoretische Annahmen, die Newtons Schlussfolgerung zugrunde liegen, zutreffend oder akzeptabel sind. Der *Logiker* fragt ganz generell, unter welchen Voraussetzungen Schlussfolgerungen gezogen werden können; der *Philosoph und Wissenschaftstheoretiker* wendet die

[2]Unter die hier gemeinten Typen fallen Individuen (Gegenstände), Eigenschaften, Relationen, Klassen, Komplexe, Zahlen oder Ereignistypen. Typen unterscheiden sich von Aussagen dadurch, dass man von ihnen nicht sagen kann, dass sie zutreffen bzw. nicht zutreffen. Bei der Formulierung wissenschaftlicher Aussagen wird auf Typen Bezug genommen, aber der sprachliche Ausdruck, der auf Typen Bezug nimmt, formuliert keine wissenschaftliche Aussage. Die Bezugnahme auf Typen erfolgt hier nur, um die Untersuchung formaler Eigenschaften und Relationen nicht von vorneherein zu sehr einzugrenzen.

[3]Newtons eigener Anspruch ist es, seine Schlussfolgerungen aus Experimenten ohne Voraussetzung von *Hypothesen* zu ziehen. Um diesen viel diskutierten methodologischen Anspruch zu bemessen, muss man erläutern, was Newton unter Hypothesen versteht, unter Anwendung logischer Mittel Newtons experimentellen Beweise rekonstruieren, und überprüfen, ob in den Beweisen Hypothesen im Sinne Newtons vorausgesetzt sind .

Logik an, um spezifische wissenschaftliche Argumente auf ihre Schlüssigkeit zu überprüfen.

Die Logik und ihre Anwendung sind aber nicht eingeschränkt auf die Untersuchung der *Schlüssigkeit von Argumenten* – dies ist nur ein Beispiel der Untersuchung einer bestimmten formalen Relation. Beispiele formaler Eigenschaften sind die *logische Wahrheit* und die *logische Falschheit*: Der Satz „Es regnet oder es regnet nicht" formuliert eine Aussage, die logisch wahr ist, d.i. eine Aussage, die wahr ist, *was immer auch der Fall sein mag*. Der Satz „Es regnet und es regnet nicht" formuliert eine logisch falsche Aussage, d.h. eine Aussage, die falsch ist, *was immer auch der Fall sein mag*. Die Logik untersucht, wodurch sich logisch wahre und logisch falsche Aussagen identifizieren lassen, und wie sich beweisen lässt, dass Aussagen logisch wahr bzw. logisch falsch sind.

Andere typische Beispiele formaler Eigenschaften oder Relationen fallen in das Gebiet der Mathematik: Dass eine Zahl ein Nachfolger einer anderen ist, ist ebenso eine Aussage über eine formale Relation, wie die, dass ein arithmetischer Ausdruck mit einem anderen identisch ist. *Formale Eigenschaften und Relationen* seien hier dadurch von inhaltlichen Eigenschaften und Relationen unterschieden, dass für den Nachweis ihres Bestehens und Nichtbestehens *logische oder mathematische Beweisverfahren* definiert werden können. Die Anwendung einer logischen Notation – d.i. eines festgelegten Systems an Regeln zur Manipulation der Formeln einer Formelsprache – und nicht experimentelle Ergebnisse, empirische Messungen, oder die Übereinstimmung mit Naturgesetzten, wissenschaftlichen Hypothesen oder Modellen entscheidet, ob eine bestimmte formale Eigenschaft oder Relation besteht oder nicht besteht. Auf eine weitergehende Erläuterung formaler Eigenschaften und Relationen unabhängig von logischen (oder mathematischen) Beweisverfahren muss hier verzichtet werden (vgl. Abschnitt 2, S. 18ff.).

Um formale Eigenschaften von Aussagen bzw. Typen und formale Relationen zwischen Aussagen bzw. Typen zu untersuchen, wird in der Logik erstens eine *formale Sprache* eingeführt, die nur noch formale Eigenschaften bzw. Relationen zum Ausdruck bringt, und zweitens werden *Verfahren* definiert, mittels derer *entschieden* werden kann, ob die Ausdrücke der formalen Sprache – *Formeln* genannt – eine fragliche formale Eigenschaft besitzen bzw. ob zwischen diesen eine fragliche formale Beziehung besteht oder nicht. Will man untersuchen, ob Aussagen oder Typen bestimmte formale Eigenschaften besitzen bzw. zwischen ihnen bestimmte formale Relationen bestehen, ist in der *Formalisierung* dem umgangssprachlichen Ausdruck eine Formel der formalisierten Sprache zuzuordnen, und anschliessend in der *logischen Beweisführung* das definierte Entscheidungsverfahren auf den formalisierten Ausdruck anzuwenden. Durch die logische Beweisführung wird

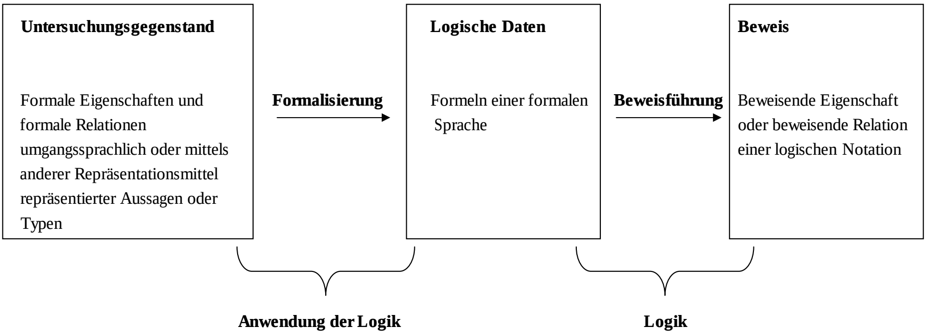

Abbildung 1.2: Schema zur Aufgabe der Logik

das Bestehen der zu untersuchenden formalen Eigenschaft bzw. der formalen Relation anhand einer Eigenschaft bzw. einer Relation einer zum Zwecke der Beweisführung entwickelten *logischen Notation* entschieden. Die *Formalisierung* gehört nicht zur Logik, sondern zur *Anwendung der Logik*, während die *logische Beweisführung* Gegenstand der Logik ist (vgl. Abbildung 1.2).

Während in der empirischen Wissenschaft das Bestehen einer inhaltlichen Eigenschaft (z.B. Raumtemperatur) durch eine empirische Messung überprüft werden kann, durch die die zu untersuchende Eigenschaft (Raumtemperatur) anhand eines empirischen Datums (Ausdehnung der Quecksilbersäule) mittels einer numerischen Skala (Skala des Thermometers) bestimmt wird, wird in der Logik das Bestehen einer formalen Eigenschaft (z.B. logische Wahrheit) oder formalen Beziehung (z.B. logische Schlüssigkeit) durch einen *logischen Beweis* überprüft, durch den die fragliche Eigenschaft einer Aussage anhand einer der Aussage zugeordneten logischen Formel (Ausdruck einer formalisierten Sprache) mittels einer logischen Notation (z.B. Wahrheitswerttabellen, Ableitungen) überprüft wird.

Erläuterung 1.1
Unter der *Formalisierung* versteht man die Zuordnung einer Formel einer formalen Sprache zu umgangssprachlich oder andersartig repräsentierten Aussagen oder Typen.

In der formalen Sprache werden nur Ausdrücke verwendet, die für die Bestimmung fraglicher formaler Eigenschaften und Relationen nötig sind.

Erläuterung 1.2
Unter einer *logischen Beweisführung* versteht man die Zuordnung eines logischen Beweises zu einer Formel einer formalen Sprache.

Im logischen Beweis wird das Bestehen oder Nichtbestehen fraglicher formaler Eigenschaften und Relationen anhand äusserer Eigenschaften oder Relationen unter Anwendung einer logischen Notation entschieden. Eine *logische Notation* besteht aus einem System festgelegter Regeln zur Manipulation von Zeichen zum Zwecke des Erzeugens von Ausdrücken, anhand von deren Eigenschaften bzw. Relationen entschieden werden kann, ob eine fragliche formale Eigenschaft oder Relation besteht oder nicht besteht.

Erläuterung 1.3
Die *Logik* ist eine Disziplin, in der formale Sprachen sowie Beweisverfahren formaler Eigenschaften und Relationen definiert werden.

Ein wichtiger *Zweck der Formalisierung* besteht darin, ein besseres Verständnis umgangssprachlich oder andersartig repräsentierter Aussagen zu ermöglichen, indem man ihren missverständlichen Ausdruck, dessen Form die formalen Eigenschaften der Aussagen bzw. Typen und die formalen Beziehungen zwischen ihnen nicht eindeutig und nur unvollständig wiedergibt, einem unmissverständlichen, eindeutigen und vollständigen formalen Ausdruck zuordnet. Eine formale Sprache kann hierdurch als Mittel der Interpretation eingesetzt werden, deren Funktion es ist, zu einem besseren Textverständnis zu verhelfen, indem man einen missverständlichen, mehrdeutigen und nicht vollständig expliziten durch einen unmissverständlichen, eindeutigen, vollständig expliziten Ausdruck ersetzt. Ein einfaches Beispiel: Mit welchen der folgenden Ausdrücke behauptet ein Autor dasselbe und mit welchen etwas Unterschiedliches: „Nicht alle Metalle leiten gut", „Einige Metalle leiten nicht gut", „Einiges, was nicht gut leitet, ist ein Metall", „Nicht alles, was ein Metall ist, leitet gut", „Nicht alles ist ein Metall und leitet gut", „Einiges ist ein Metall, aber leitet nicht gut", „Wenn etwas ein Metall ist, dann ist es kein guter Leiter"?[4] Die jeweilige Zuordnung zu den entsprechenden logischen Formeln und die Berücksichtigung der formalen Beziehungen dieser Formeln zueinander kann diese Frage auf eine eindeutige Weise beantworten. Die jeweilige Formalisierung mag von strittigen Interpretationsannahmen abhängen,

[4]Zur Beantwortung dieser Frage siehe Übung *Äquivalente Formalisierungen* zu LEKTION 10.

aber in jedem Fall bringt die gegebene Antwort unter Bezugnahme auf eine Formalisierung die gewählte Interpretation unmissverständlich zum Ausdruck.

Ein wichtiger *Zweck der logischen Beweisführung* besteht darin, das Urteil über das Bestehen oder Nichtbestehen formaler Eigenschaften und Relationen nicht von logischen Intuitionen, sondern von exakten logischen Beweisen abhängig zu machen. Eine bekannte Paradoxie des Zenon, von der Aristoteles berichtet[5], lautet: „Das Langsamste wird im Lauf niemals vom Schnellsten eingeholt werden; erst einmal muss doch das Verfolgende dahin kommen, von wo aus das Fliehende losgezogen war, mit der Folge, dass das Langsamste immer ein bisschen Vorsprung haben muss." Die These, für die argumentiert wird, erscheint paradox: Denn dass das Langsamste niemals vom Schnellsten eingeholt wird, widerspricht der Erfahrung. Andererseits ist die Prämisse, durch die die These gestützt wird, kaum zu bestreiten: Ein Verfolger muss den Punkt, von dem der Verfolgte gestartet ist, erreichen, bevor er den Verfolgten überholt. Was ist verkehrt an dem Argument, wenn denn etwas verkehrt ist? Handelt es sich um einen Fehlschluss, oder liegt der Fehler nicht in der Schlussfolgerung, sondern in den Annahmen, oder darin, dass die Argumentation unterschiedliche Interpretationen und damit unterschiedliche Formalisierungen zulässt, deren mangelnde Unterscheidung das Paradox bedingen? Um bei dem Verständnis und der Beurteilung der Schlüssigkeit des Argumentes nicht in widersprüchlichen Intuitionen gefangen zu bleiben, bedarf es der Mittel der logischen bzw. mathematischen Formalisierung und Beweisführung.

Die genannten Zwecke der Formalisierung und der logischen Beweisführung sind wichtige, aber keine immanenten Zwecke der Logik, sondern nur Möglichkeiten, die Logik für andere Zwecke zu gebrauchen. Der der Logik *immanente Zweck* ist demgegenüber ein grundlagentheoretischer: Die Logik ermöglicht es, die Ausdrucksmöglichkeiten formalisierbarer Aussagensysteme bzw. Systeme von Typen vollständig zu erfassen und die Möglichkeiten und Grenzen der Beweisführung innerhalb dieser zu bestimmen. Eine wichtige grundlagentheoretische Frage ist z.B. die, ob sich für jede beliebige Aussage, die in der formalen Sprache der Logik von Russells und Whiteheads *Principia Mathematica* formalisierbar ist, beweisen lässt, ob diese die formale Eigenschaft der Allgemeingültigkeit besitzt oder nicht. Die Formulierung dieser Frage setzt die Definition einer bestimmten formalen Sprache und Möglichkeiten der Beweisführung innerhalb dieser voraus. Die Logik bietet die Voraussetzung, um Fragen der Möglichkeiten und Grenzen der wissenschaftlichen Theoriebildung auf eine exakte Weise zu behandeln.

Auf Grund der genannten externen sowie internen Zwecke der Logik bildet diese ein unverzichtbares Werkzeug für die philosophische Analyse wissenschaft-

---

[5] Aristoteles (1988), S. 93 (*Physik* Buch VI, Kapitel 9).

licher Texte und andersartiger, in der Wissenschaft verwendeter Ausdrucksformen sowie der Bestimmung der Möglichkeiten und Grenzen wissenschaftlicher Beweisführungen. Beispielsweise sind typische wissenschaftstheoretische Fragen, welche Beweismittel Euklid in seinen geometrischen Beweisführungen verwendet, oder welche Beweismittel Newton seinen sogenannten „experimentellen Beweisen“ zugrunde legt. Um diese Fragen beantworten zu können, bedarf es der formalen Rekonstruktion ihrer Beweisführungen.

2 Klassische Logik

Im vorangegangenen Abschnitt ist auf eine Erläuterung der Begriffe ‚Aussage‘ , ‚formale Eigenschaft / formale Relation‘, ‚formale Sprache‘ und ‚logischer Beweis‘ verzichtet worden.[6] Die allgemeine Definition dieser Begriffe wirft mehr philosophische Fragen auf, als sich im Rahmen einer Einführung in die *klassische Logik* beantworten lassen. Andererseits sollte nicht implizit das Verständnis der klassischen Logik bei der Erläuterung dieser Begriffe vorausgesetzt werden. So ist es z.B. keineswegs trivial, *Aussagen* von vorneherein dadurch zu kennzeichnen, dass sie dasjenige sind, was wahr oder falsch ist. Denn hierdurch hat man sich entweder auf die philosophisch nicht unumstrittene Position festgelegt, dass z.B. Naturgesetze oder mathematische Gleichungen sinnvollerweise als wahr oder falsch zu bezeichnen sind (was z.B. der sog. konventionalistische Standpunkt ablehnt), oder darauf, dass gesetzesartige oder mathematische Aussagen nur unter dem Vorbehalt einer realistischen (und damit nicht konventionalistischen) Interpretation den Mitteln der Logik zugänglich sind. Ebensowenig ist es unumstritten, ob die Relation der Verursachung eine *formale Relation* ist, deren Beweisführung unter gegebenen Annahmen nach dem oben dargelegten Verständnis mit den Mitteln der Logik untersucht werden kann. Schliesslich gibt es eine Fülle unterschiedlicher Sprachen, die als „*formale Sprachen*“ bezeichnet werden. Beispielsweise auch eine Sprache, in der Beziehungen zwischen Aussagen mit sogenannten epistemischen Operatoren wie „A weiss, dass . . . “, „A glaubt, dass . . . “ einer formalen Behandlung unterzogen werden. Die entsprechende Logik bezeichnet man als epistemische Logik. Ebenso gibt es eine Sprache, in der Beziehungen zwischen Aussagen mit sogenannten modalen Operation wie „Es ist möglich, dass . . . “, „Es ist notwendig, dass . . . “ einer formalen Behandlung unterzogen werden. Die entsprechende Logik bezeichnet man als Modallogik. Diese Sprachen erweitern die formale Sprache der klassischen Logik um weitere konstante Ausdrücke für die jeweiligen Operationen. Eine formale Sprache zeichnet die Verwendung von

[6] Auf Typen wird im Weiteren nicht mehr Bezug genommen, da Typen für die Kennzeichnung der klassischen Logik irrelevant sind.

Zeichen (sogenannten „Variablen") aus, die *keine* konstante Bedeutung haben. Hier stellt sich die strittige Frage, welche Ausdrücke alle noch sinnvollerweise als „logische Konstanten" aufzufassen sind, die neben Variablen Bestandteile formaler Sprache sind, und ab wann eine Kunstsprache nicht mehr eine formale Sprache im Sinne der Logik zu nennen ist. Schliesslich ist auch das Verständnis dessen, was ein *logischer Beweis* ist, nicht unumstritten: Gibt es z.B. innerhalb der Logik sogenannte „inhaltliche Beweise", in denen auf die Bedeutung umgangssprachlicher Ausdrücke Bezug genommen wird?

Während von einem philosophischen Standpunkt aus beurteilt eine Explikation dessen, was unter Aussagen, formalen Eigenschaften bzw. Relationen, formalen Sprachen und logischen Beweisen zu verstehen ist, nicht ohne weitere Erörterungen gegeben werden kann, können diese Begriffe im Rahmen der klassischen Logik weitgehend unumstritten präzisiert werden. Im Folgenden soll die klassische Logik durch den präzisen Sinn, den diese Begriffe innerhalb der klassischenn Logik erhalten, gekennzeichnet und von anderen Teilgebieten der Logik abgegrenzt werden.

Aussagen im Sinne der klassischen Logik sind „Träger der Wahrheit und der Falschheit", d.h. dasjenige , dem sinnvollerweise zugeschrieben werden kann, wahr bzw. falsch zu sein. Durch diese Voraussetzung unterscheidet sich die klassische Logik von der *dialogischen Logik*, die nicht die Wahrheit oder Falschheit, sondern nur die Begründbarkeit der Aussagen voraussetzt, und Schlussregeln für den Gewinn argumentativer Dialoge definiert.

Welchen ontologischen Status Aussagen als „Träger der Wahrheit und der Falschheit" haben und durch welches Kriterium Aussagen zu identifizieren bzw. zu unterscheiden sind, sind philosophische Fragen, die für das philosophische Verständnis der Logik sowie deren Anwendung relevant sind; ihre Beantwortung fällt allerdings nicht in das Gebiet der Logik. Wesentlich für die Logik dagegen ist es, dass im Rahmen der klassischen Logik Aussagen wahr bzw. falsch, aber nichts Drittes sind. Hierin unterscheidet sie sich von sogenannten *mehrwertigen Logiken*. Die Voraussetzung, dass die Aussagen, deren formale Eigenschaften und Relationen im Rahmen der klassischen Logik untersucht werden, nur wahr oder falsch, aber weder Beides noch etwas Drittes sind, nennt man das *Bivalenzprinzip* bzw. das *Zweiwertigkeitsprinzip*.

Dieses Prinzip ist nicht trivial. Man kann nicht als selbstverständlich voraussetzen, dass nichts, was sinnvollerweise als wahr oder falsch bezeichnet werden kann, unter Umständen weder das Eine noch das Andere ist: So ist z.B. fraglich, ob die sogenannte „Goldbachsche Vermutung", die besagt, dass jede ganze Zahl, die grösser als 2 ist, die Summe zweier Primzahlen ist, entweder wahr oder falsch, aber nichts Drittes ist. Dies ist eine Aussage über unendlich viele Werte, in diesem Fall die natürlichen Zahlen. Hier gibt es zwei Interpretationsmöglichkeiten: Die eine versteht Aussagen über unendlich viele Werte ganz analog zu Aussagen über endlich viele Zahlen (z.B. den ganzen Zahlen zwischen 2 und 1000), nur dass der Bereich, auf den Bezug genommen wird, ins Unendliche ausgedehnt wird. Nach dieser Auffassung erfüllt eine Aussage, die über alle Werte eines unendlichen Wertebereiches etwas aussagt, das Bivalenzprinzip: Die Aussage ist wahr, wenn sie auf alle Werte zutrifft, und falsch, wenn es mindestens ein Wert gibt, auf den sie nicht zutrifft. Dies gilt ganz unabhängig davon, ob ein Beweis angegeben werden kann, der das Eine oder das Andere beweist. Diese naheliegende und natürliche Interpretation, die sogenannte *extensionale* Auffassung des Unendlichen – auch „aktuale" Auffassung genannt –, hat zu Problemen in der Mathematik, insbesondere zur Formulierung von Antinomien[7], geführt. Um diese zu vermeiden, hat man von Aussagen über das Unendliche gefordert, die Bezugnahme auf unendlich viele Werte, ohne die Möglichkeit, diese nach einem angebbaren Verfahren (z.B. nach einer mathematischen Funktion) konstruieren zu können, auszuschliessen. Nach dieser sogenannten *intensionalen* Auffassung des Unendlichen – auch *potentielle* Auffassung genannt – , ist die Goldbachsche Vermutung wahr, wenn eine allgemeine Funktion angegeben werden kann, durch die sämtliche ganzen Zahlen grösser 2 als Summe zweier Primzahlen berechnet werden können, und sie ist falsch, wenn eine ganze Zahl grösser 2 angegeben werden kann, die nicht die Summe zweier Primzahlen ist. Beides ist allerdings beim gegenwärtigen Stand der Mathematik nicht der Fall. Und solange dies so ist, kann nach der intensionalen Auffassung des Unendlichen nicht ausgeschlossen werden, dass die Goldbachsche Vermutung keinen definitiven Wahrheitswert hat. Die Vermeidung von Antinomien in der Mathematik durch eine intensionale Auffassung des Unendlichen war ein wesentliches Motiv der Entwicklung *konstruktiver Logiken*[8], die das Bivalenzprinzip und die aus ihnen folgenden logischen Schlussregeln nicht voraussetzen. Der Vorteil der Vermeidung von Antinomien wurde hierbei um den Preis erkauft,

[7] Antinomien sind Widersprüche, die sich aus der Konfrontation von Annahmen ergeben, die man für gültig erachtet. Ein Beispiel: Die Elemente der Reihe $2,4,6,8,\ldots$ lassen sich den natürlichen Zahlen $1,2,3,4,\ldots$ eineindeutig zuordnen (Annahme 1a). Zwei Mengen, deren Elemente sich eineindeutig zuordnen lassen, enthalten gleich viele Elemente (Annahme 1b). Die beiden Reihen enthalten folglich gleich viele Elemente (Konklusion 1). Andererseits: Die Reihe $2,4,6,8,\ldots$ übergeht alle ungeraden, natürlichen Zahlen (Annahme 2). Diese Reihe enthält also weniger Elemente als die Reihe der natürlichen Zahlen (Konklusion 2). Konklusion 1 und Konklusion 2 bilden einen Widerspruch, die Annahmen 1a, 1b und 2 sind aber *prima facie* gültig.

[8] Andere, verwandte Bezeichnungen sind die der *intuitionistischen*, der *effektiven* und der *operativen Logik*. Auch die *dialogische Logik* setzt nicht das Bivalenzprinzip voraus, und kann zu den *konstruktiven Logiken* gezählt werden.

Beweise, die gemäss der klassischen Mathematik gültig sind und einen wichtigen Teil der Mathematik bilden, in Frage stellen zu müssen, und nach alternativen, konstruktiven Beweisen zu suchen.

Man kann auch bezüglich bestimmter Aussagen der Quantenphysik das Bivalenzprinzip in Frage stellen: Ist daran festzuhalten, dass die Aussage, ein Photon habe den oberen Spalt bei einem Doppelspaltexperiment passiert, entweder wahr oder falsch, aber nichts Drittes ist, angesichts der Tatsache, dass man die Wege der Photone im Experiment nicht eindeutig bestimmen kann, sondern nur die Verteilung der Photonen hinter dem Doppelspalt? Diese und andere Besonderheiten quantenphysikalischer Aussagen haben zur Entwicklung einer *Quantenlogik* geführt. Andere Aussagen, für die das Bivalenzprinzip fraglich ist, sind vage Aussagen, z.B. die Aussage, dass ein Fleck an der Wand rötlich erscheint, oder dass er kreisförmig ist. Ist für alle möglichen Farbtöne und für alle möglichen geometrischen Formen des Fleckes eindeutig festgelegt, ob sie noch unter den gemeinten Farbton bzw. die gemeinte geometrische Form fallen bzw. nicht fallen; oder gibt es hier typischerweise einen Bereich, in dem nicht klar bestimmt ist, ob die Aussagen wahr oder falsch sind? Auch Aussagen über Wahrscheinlichkeiten geben Anlass zum Zweifel an der allgemeinen Gültigkeit des Bivalenzprinzips: Die Aussage, dass Flugzeuge nicht abstürzen, muss man nicht einfachhin als falsch bezeichnen, sondern man kann sie auch bis zu einem gewissen Grade als wahr bezeichnen. Dementsprechend gibt es eine *Wahrscheinlichkeitslogik*, die die Werte ‚wahr' und ‚falsch' durch Wahrscheinlichkeitswerte zwischen 0 und 1 ersetzt. Die *fuzzy logic* schliesslich lässt neben „vollständig wahr" und „vollständig falsch" noch weitere Werte zu, die nicht unbedingt auf einer Skala zwischen 0 und 1 liegen müssen. Auch Sätze wie „Sherlock Holmes ist König von England" oder „Der gegenwärtige König von Frankreich ist kahlköpfig" haben Anlass zum Zweifel an der allgemeinen Gültigkeit des Bivalenzprinzips gegeben: Da „Sherlock Holmes" sowie „der gegenwärtige König von Frankreich" keine existierenden Gegenstände benennen, meint man, sie seien nicht wie etwa die Aussage, dass Helmut Kohl König von England ist, einfachhin falsch.[9]

Alle die genannten Einwände gegen das Bivalenzprinzip bestreiten nur die Anwendbarkeit dieses Prinzips auf beliebige Aussagen, aber keineswegs seine Gültigkeit unter gewissen Einschränkungen. Entsprechend wird die klassische Logik auch nicht einfachhin abgelehnt, sondern ihr Anwendungsbereich eingeschränkt

[9] Die sogenannte *free logic* ist eine Logik, die anders als die klassische Logik nicht voraussetzt, dass Gegenstände existieren, und die Formalisierungen leerer Bezeichnungen ohne Anwendung weiterer Analyseverfahren zulässt. Aber nur eine bestimmte Form der *free logic*, die sogenannte *neuter free logic*, interpretiert Aussagen mit leeren Bezeichnungen so, dass diese weder wahr noch falsch sind. Nur diese Form der *free logic* setzt nicht das Bivalenzprinzip voraus.

und ihre Regeln zum Zwecke einer erweiterten Anwendung variiert. Inwieweit dies tatsächlich nötig ist und zu erwünschten Resultaten führt, ist kontrovers.

Gewöhnlich wird das, was man als *klassische Logik* bezeichnet, durch das Bivalenzprinzip von anderen Logiken, insbesondere konstruktiven Logiken, unterschieden. Es gibt allerdings noch andere Prinzipien, die der klassischen Logik zugrunde liegen, und durch die sie hier von anderen Logiken unterschieden werden soll.

Neben dem Bivalenzprinzip setzt die klassische Logik das *Prinzip der logischen Unabhängigkeit* elementarer Aussagen voraus. Elementare Aussagen sind Teilaussagen komplexerer Aussagen, die für sich wahr oder falsch sein können und die nicht weiter in Teilaussagen analysiert werden.[10] Der Satz „Newton drehte das erste Prisma und er sah einen blauen Fleck an der Wand" formuliert z.B. eine Aussage, die man in zwei Teilaussagen zerlegen kann: 1) dass Newton das erste Prisma drehte, 2) dass er einen blauen Fleck an der Wand sah. Das Prinzip der logischen Unabhängigkeit der Elementaraussagen besagt, dass aus der Wahrheit oder Falschheit einer Elementaraussage nicht auf die Wahrheit oder Falschheit einer anderen Elementaraussage geschlossen werden kann. Die beiden genannten Teilaussagen sind logisch voneinander unabhängig, da 1) und 2) wahr, 1) wahr und 2) falsch, 1) falsch und 2) wahr sowie 1) und 2) falsch sein können. Die *logische* Unabhängigkeit der Teilaussagen ist dabei zu unterscheiden von einer etwaigen *kausalen* Abhängigkeit. Das Drehen des ersten Prismas ist zwar unter bestimmten Umständen kausal relevant für das Sehen des blauen Fleckes an der Wand, aber es ist immer noch möglich, das Prisma zu drehen, und keinen blauen Fleck an der Wand zu sehen (sondern einen roten, oder gar keinen); ebenso ist es möglich, einen blauen Fleck an der Wand zu sehen, ohne das Prisma zu drehen (z.B. durch Einschalten eines blauen Filters).

Auch das Prinzip der logischen Unabhängigkeit ist nicht trivial. Die Wahrheit der Aussage, dass es zu einer bestimmten Zeit in einem bestimmten Raum 20 Grad Celsius warm ist, schliesst die Wahrheit der Aussage, dass es zu derselben Zeit an demselben Ort 19 Grad Celsius ist, aus. Denn *allein* aus der Wahrheit der einen Aussage folgt die Falschheit der anderen. Es kann sich demzufolge nicht um logisch voneinander unabhängige Elementaraussagen handeln. Ebenso schliesst die Wahrheit der Aussage, dass der mittlere Brechungswinkel des roten Lichtes in Newtons Experiment 35 Grad beträgt, die Wahrheit der Aussage, dass dieser 45 Grad beträgt, aus. Es besteht kein unumstrittenes Analyseverfahren, durch das die

---

[10] Zum Problem der Identifikation solcher Teilaussagen siehe LEKTION 3, S. 80. Es wird hier nicht vorausgesetzt, dass es ein eindeutiges Analyseverfahren gibt, das komplexe Aussagen in Elementaraussagen analysiert.

Wahrheit oder Falschheit von Aussagen mit Gradangaben auf die Wahrheit oder Falschheit logisch voneinander unabhängiger Elementaraussagen zurückgeführt werden kann. Schliesst man ein solches Verfahren aus, stellt sich die Aufgabe, eine Logik zu entwickeln, in der Aussagen über Gradangaben formalisiert und als Elementaraussagen behandelt werden, und Beweisverfahren für das Bestehen bzw. Nichtbestehen formale Eigenschaften dieser Aussagen bzw. formaler Beziehungen zwischen ihnen zu entwickeln, ohne das Prinzip der logischen Unabhängigkeit vorauszusetzen.

Als ein weiteres Prinzip setzt die klassische Logik das *Extensionalitätsprinzip* voraus. Dies besagt, dass die Wahrheit oder Falscheit einer Aussage eine Funktion der Wahrheit oder Falscheit der in ihr enthaltenen Teilaussagen ist. Die Wahrheit bzw. Falschheit der mit dem Satz formulierten Aussage „Es regnet und die Strasse wird nass“ hängt demnach allein von der Wahrheit bzw. Falscheit der Teilaussage, dass es regnet, und der Wahrheit bzw. Falschheit der Teilaussage, dass die Strasse nass wird, ab. Aus der Wahrheit bzw. Falschheit der Teilaussagen folgt die Wahrheit oder Falschheit der komplexen Aussage.

Auch das Extensionalitätsprinzip ist nicht trivial, und es gibt eine Fülle von sogenannten *intensionalen Logiksystemen*, die es nicht voraussetzen. Die Aussage, dass Ödipus seine Mutter liebte, und die Aussage, dass Ödipus Iokaste liebte, sind z.B. beide wahr, da Ödipus’ Mutter identisch mit Iokaste ist. Die Aussage, dass Ödipus *weiss*, dass er seine Mutter liebte, ist hingegen falsch, während die Aussage, dass Ödipus *weiss*, dass er Iokaste liebte, wahr ist. Diese beiden Aussagen enthalten als Teilaussagen jeweils Aussagen, die auf Grund desselben Umstandes wahr sind, und sie ergänzen die Teilaussagen jeweils auf dieselbe Weise durch den Zusatz „Ödipus weiss, dass“, dennoch ist die eine resultierende Aussage falsch und die andere wahr. Folglich können die resultierenden Aussagen nicht allein von der Wahrheit oder Falscheit der in ihnen enthaltenen Teilaussagen abhängen. Geht man davon aus, dass gleichwohl derartige Aussagen mittels einer Logik, die das Extensionalitätsprinzip voraussetzt, zu formalisieren sind, dann muss man voraussetzen, dass es ein Analyseverfahren gibt, durch das die Wahrheit oder Falschheit von Aussagen der Form „A weiss, dass p“ auf die Wahrheit und Falschheit elementarer Aussagen $q, r \ldots$ zurückgeführt wird. Demgegenüber unterstellt die sogenannte *epistemische Logik* kein derartiges Analyseverfahren, und setzt nicht das Extensionalitätsprinzip voraus: Sie versucht, derartigen Aussagen und ihren formalen Beziehungen untereinander durch Erweiterung der formalen Sprache der klassischen Logik um sogenannte epistemische Operatoren und Einführung weiterer Schlussregeln, die für die Formeln dieser Sprache gelten, gerecht zu werden. Andere intensionale Logiksysteme sind die *Modallogik*, die *deontische Logik* und die *temporale Logik*. Die *Modallogik* berücksichtigt Aussagen mit sogenannten Modaloperatoren wie „es ist notwendig, dass" und „es ist möglich, dass". Die Aussagen, dass die Anzahl der Weltwunder 7 ist, ist wahr, ebenso ist die Aussage wahr, dass 7 = 7. Die Aussage, dass es notwendig ist, dass die Anzahl der Weltwunder 7 ist, ist hingegen falsch; während die Aussage, dass es notwendig ist, dass 7 = 7 ist, wahr ist. Die *deontische Logik*, auch *normative Logik* genannt, berücksichtigt auch sogenannte deontische Operatoren, wie „es ist geboten, dass", „es ist verboten, dass", „es ist erlaubt, dass". Die *temporale Logik* schliesslich berücksichtigt Operatoren wie „es *war* der Fall, dass", „es *wird* der Fall sein, dass". Auch die sogenannte *Logik des ‚Entailment'*, die *Relevanzlogik* und die *Logik der strikten Implikation* gehören zu den intensionalen Logiken. Auf sie wird weiter unten eingegangen (siehe S. 32).

Die drei genannten Prinzipien – das Bivalenzprinzip, das Prinzip der logischen Unabhängigkeit und das Extensionalitätsprinzip – werden auch „semantische Prinzipien" genannt. Ihre Voraussetzung und die mit ihnen aufgeworfenen Fragen betreffen die *Anwendbarkeit* der klassischen Logik: Welche Aussagen und Aussagensysteme meint man mit ihr formalisieren zu können? Die Beantwortung dieser Frage fällt nicht in das Gebiet der *formalen Logik*, sondern in das der Philosophie. Aus diesem Grunde werden die genannten alternativen Logiken auch *philosophische Logiken* genannt. Die Anwendung der klassischen Logik zum Zwecke der Formalisierung umgangssprachlicher Aussagen wird in den LEKTIONEN 3, 9 und 11 thematisiert.

Vom philosophischen Standpunkt aus ist man an der Frage der Leistungsfähigkeit eines logischen Systems zum Zwecke der Formalisierung von Aussagensystemen interessiert. In dieser Hinsicht bemisst man die Formalisierung an dem Kriterium der *Reichhaltigkeit*, d.i. dem Mass der mit einer bestimmten formalen Sprache formalisierbaren Aussagen. Das Urteil hierüber ist, wie an den Beispielen deutlich wurde, stark von vorausgesetzten Analyseverfahren für Aussagen abhängig. Es kann von der extremen, von Ludwig Wittgenstein im *Tractatus Logico-Philosophicus* eingenommenen Position, nach der sämtliche Aussagen unter Voraussetzung bestimmter Analyseverfahren mittels der klassischen Logik formalisierbar sind, bis hin zur anderen extremen Position, nach der die klassische Logik für die Zwecke der Formalisierung wissenschaftlicher Aussagen praktisch bedeutungslos ist, reichen. In jedem Fall ist die klassische Logik der Ausgangspunkt für die Fragen der Anwendung logischer Mittel zum Zwecke der Formalisierung und Rekonstruktion wissenschaftlicher Beweise.

Erläuterung 1.4
Die drei semantischen Prinzipien der klassischen Aussagenlogik sind das *Bivalenzprinzip*, das *Prinzip der logischen Unabhängigkeit* und das *Extensionalitätsprinzip*.

- Das *Bivalenzprinzip* besagt, dass Aussagen entweder wahr oder falsch und nicht beides sind.
- Das *Prinzip der logischen Unabhängigkeit* besagt, dass von der Wahrheit oder Falschheit einer Elementaraussage nicht auf die Wahrheit oder Falschheit einer anderen Elementaraussage geschlossen werden kann.
- Das *Extensionalitätsprinzip* besagt, dass die Wahrheit oder Falschheit der Aussagen von nichts anderem als der Wahrheit oder Falschheit der in ihnen enthaltenen Teilaussagen abhängt.

Nur formale Eigenschaften und Relationen von Aussagensystemen, die diesen Prinzipien gehorchen, können mittels der klassischen Logik untersucht werden.

Unter den genannten Voraussetzungen lassen sich die Aussagen, deren formale Eigenschaften und Relationen in der klassischen Logik untersucht werden können, als *bivalente* Aussagen – Aussagen, die dadurch gekennzeichnet sind, entweder wahr oder falsch, aber nicht beides und nichts Drittes zu sein –, deren Wahrheit und Falschheit ausschliesslich von der Wahrheit oder Falschheit *logisch voneinander unabhängiger Elementaraussagen* abhängt, charakterisieren. Und die zu untersuchenden formalen Eigenschaften und Relationen lassen sich einschränken auf *wahrheitsfunktionale* Eigenschaften und Relationen. Wahrheitsfunktionale Eigenschaften von Aussagen bzw. wahrheitsfunktionale Relationen zwischen Aussagen ergeben sich auf Grund der Abhängigkeit der Wahrheit oder Falschheit der Aussagen von der Wahrheit oder Falschheit der Elementaraussagen. Hier nehmen die Eigenschaft der *logischen Wahrheit* und der *logischen Falschheit*, sowie die Relation der *logischen Folgerung* eine vorrangige Stellung ein: *Logisch wahr* ist eine Aussage genau dann, wenn sie für alle möglichen Fälle der Wahrheit und Falschheit der Elemantaraussagen wahr ist; *logisch falsch* ist sie genau dann, wenn sie für alle möglichen Fälle der Wahrheit und Falschheit der Elemantaraussagen falsch ist. Eine Aussage B folgt logisch aus einer anderen A genau dann, wenn es unmöglich ist, dass A wahr und B falsch ist. Diese vorläufigen Definitionen, die noch von den Modalausdrücken „möglich“ bzw. „unmöglich“ Gebrauch machen, können im Rahmen der Ausführungen zur klassischen Logik durch andere Definitionen ersetzt werden, die zugleich als Kriterien dienen können, um festzustellen, ob eine Aussage logisch wahr oder falsch ist bzw. ob eine Aussage aus einer anderen folgt.

Erläuterung 1.5
Die durch die klassische Logik formalisierbaren *Aussagen* sind *bivalent* und Wahrheitsfunktionen *logisch voneinander unabhängiger* Elementaraussagen.

Erläuterung 1.6
Die durch die klassische Logik zu untersuchenden *formalen Eigenschaften* und *formalen Relationen* sind *wahrheitsfunktionale* Eigenschaften und Relationen. Unter diesen nehmen die *logische Wahrheit*, die *logische Falschheit* und die *logische Folgerung* eine vorrangige Stellung ein.

Die formale Sprache und die Beweisverfahren der klassischen Logik lassen sich demgegenüber ganz unabhängig von der Bezugnahme auf die Wahrheit und Falschheit von Aussagen definieren. Im Unterschied zur *Semantik* der klassischen Logik und den ihr zugrundeliegenden Prinzipien, betreffen die formale Sprache und die Beweisverfahren der klassischen Logik ihre *Syntax*.

Erläuterung 1.7
Unter *Semantik* versteht man allgemein die Lehre von der *Bedeutung* der Zeichen. Unter der *Semantik der klassischen Logik* ist die Lehre von der *Interpretation* der formalen Sprache der klassischen Logik zu verstehen.

Erläuterung 1.8
Unter *Syntax* versteht man allgemein die Lehre von der korrekten Bildung und Umformung von Zeichen. Unter der *Syntax der klassischen Logik* ist die Lehre der Bildung und Umformung der *Formeln* der formalen Sprache der klassischen Logik zu verstehen.

Die formale Sprache der klassischen Logik ist die Sprache der Quantorenlogik mit Identität. Diese beinhaltet als einen Teil die Sprache der Quantorenlogik, die wiederum als einen Teil die Sprache der Aussagenlogik umfasst. Diese formalen Sprachen werden in LEKTION 2, 8 und 11 definiert.

Die Beweise der klassischen Logik bestehen in *Ableitungen*. Dies sind endliche Folgen von Formeln, die nach festgelegten Regeln gebildet werden.

Zusatzbemerkung 1.1: Die Regeln, nach denen Ableitungen herzustellen sind, bilden eine logische Notation. Die Eigenschaft einer Ableitung, die die formale Relation der logischen Folgerung beweist, besteht darin, dass die abzuleitende Formel in der letzten Zeile der Ableitung steht, deren Annahmenliste allein die Zeilennummern der Formeln enthält, aus denen die Formel folgt. Die Beweisführung der logischen Folgerung einer Formel aus anderen besteht in der Zuordnung dieser Formel zu einer Ableitung mit dieser Eigenschaft.

Andere Beweisverfahren, die zumeist in Abhängigkeit zur Semantik der klassischen Logik verstanden werden, sind Berechnungen der Wahrheitswerte von sogenannten „Interpretationen" der Formeln. Ein Beispiel hierfür sind die *Wahrheitswerttabellen* in der Aussagenlogik.

Zusatzbemerkung 1.2: Die beweisende Eigenschaft der *Allgemeingültigkeit*[11] einer aussagenlogischen Formel besteht bei den Wahrheitswerttabellen darin, dass in der Spalte des sogenannten Hauptjunktors immer „W" steht; die beweisende Eigenschaft der *Unerfüllbarkeit* einer aussagenlogischen Formel besteht bei den Wahrheitswerttabellen darin, dass in der Spalte des Hauptjunktors immer „F" steht.

Diese Beweisverfahren der Konstruktion von Ableitungen und Wahrheitswerttabellen und allgemein der Berechnung von Interpretationen sowie ihr Verhältnis zueinander werden in den LEKTIONEN 2, 4-6, 8 und 10-11 dargestellt.

Zusatzbemerkung 1.3: Mittels Ableitungen lässt sich beweisen, dass eine Formel aus anderen Formeln folgt; es lässt sich allerdings nicht in jedem Fall beweisen, dass sie aus anderen Formeln nicht folgt. Mittels Wahrheitswerttabellen lässt sich zwar jede beliebige wahrheitsfunktionale Eigenschaft oder Relation – aber nur innerhalb der Aussagenlogik – beweisen. Ein analoges Verfahren für die Berechnung der Wahrheitswerte von Interpretationen *beliebiger* Formeln der Quantorenlogik gibt es nicht, vielmehr bleiben derartige Verfahren auf bestimmte Formelklassen beschränkt.

Durch die formale Sprache und durch ihre Schlussregeln ist die klassische Logik eindeutig zu kennzeichnen und von allen anderen Logiken abzugrenzen. Sie unterscheidet sich hierdurch nicht nur von den genannten Logiken, sondern auch von der *mehrstufigen Quantorenlogik* sowie der *Klassenlogik*, die für die Formalisierung

[11] Zur Definition der Allgemeingültigkeit siehe *Lektion 2*, S. 55.

von Aussagen über Eigenschaften, Relationen oder Klassen die formale Sprache der Quantorenlogik der 1. Stufe erweitern.

> **Erläuterung 1.9**
> Die formale Sprache der klassischen Logik ist die Sprache der *Quantorenlogik erster Stufe mit Identität*. Die Beweisverfahren bestehen vornehmlich in *Ableitungen*, für die bestimmte Ableitungsregeln gelten, sowie in Berechnungen der Wahrheitswerte von *Interpretationen*, z.B. den Wahrheitswerttabellen.
> Durch ihre *formale Sprache* sowie ihre *Schlussregeln* ist die klassische Logik gegenüber allen anderen Logiken eindeutig zu kennzeichnen.

Während sich hinsichtlich der Formalisierung die Frage stellt, welcher Umfang an Aussagen mittels einer formalen Sprache formalisierbar ist, stellt sich hinsichtlich der Beweisverfahren für die Formeln einer formalen Sprache die Frage, ob die Beweisverfahren für jede beliebige Formel der formalen Sprache entscheiden können, ob die zu untersuchenden formalen Eigenschaften und Relationen bestehen oder nicht bestehen. Für die klassische Logik stellt sich die Frage, ob die wahrheitsfunktionalen Eigenschaften jeder beliebigen Formel der formalen Sprache der erweiterten Quantorenlogik mittels der für sie entwickelten Beweisverfahren bestimmt werden können. Beweisverfahren, die sowohl leisten zu entscheiden, ob eine fragliche Eigenschaft besteht, als auch zu entscheiden, ob sie *nicht* besteht, nennt man auch *Entscheidungsverfahren*. Während die Formalisierung an dem Kriterium der Reichhaltigkeit gemessen werden kann, können die Beweisverfahren eines Logiksystems anhand des Kriteriums der *Entscheidbarkeit* gemessen werden. Meistens wird hinsichtlich der klassischen Logik dieses Kriterium auf die Frage bezogen, ob für jede beliebige Formel entschieden werden kann, ob sie die (formale) Eigenschaft der *Allgemeingültigkeit* besitzt. Nennt man die klassische Logik unentscheidbar, dann ist damit gemeint, dass es kein Verfahren gibt und darüber hinaus aus prinzipiellen Gründen auch kein Verfahren entwickelt werden kann, das für jede beliebige Formel der Sprache der erweiterten Quantorenlogik Q_{+I} entscheiden kann, ob diese allgemeingültig ist oder nicht. Eine fundamentale Aussage der sogenannten *Metalogik*, die die Beweisverfahren der Logik mit mathematischen Methoden untersucht, besagt, dass die klassische Logik – genauer: die Eigenschaft der Allgemeingültigkeit von Formeln der quantorenlogischen Sprache Q – unentscheidbar ist. Was für die klassische Logik gilt, gilt auch für jedes reichhaltigere System. Demnach sind den Möglichkeiten des

Beweisens formaler Eigenschaften und Relationen unabhängig von Anwendungsfragen der Logik immanente Grenzen gesetzt. Demgegenüber lässt sich zeigen, dass die Allgemeingültigkeit und darüber hinaus jede beliebige Wahrheitsfunktion der Formeln der formalen Sprache der Aussagenlogik J, die eine Teilsprache der quantorenlogischen Sprache Q ist, entscheidbar ist. Diese und weitere Ergebnisse der Metalogik werden im Zusammenhang mit der Erläuterung der Beweisverfahren in den LEKTIONEN 6, 8 und 12 thematisiert.

Erläuterung 1.10
Die Formalisierung wird gemessen am Kriterium der *Reichhaltigkeit*; die Beweisverfahren am Kriterium der *Entscheidbarkeit*.
Die *Reichhaltigkeit* bemisst den Umfang an Aussagen, die eine formale Sprache zu formalisieren erlaubt.
Die *Entscheidbarkeit* bemisst, ob das Bestehen *und* Nichtbestehen einer formalen Eigenschaft (insbesondere die der Allgemeingültigkeit) von beliebigen Formeln bzw. einer formalen Relation zwischen beliebigen Formeln bewiesen werden kann.

Die allgemeine Aufgabe der Logik lässt sich unter Voraussetzung der vorangegangenen Ausführungen wie folgt formulieren:

AUFGABE DER LOGIK:
Definiere eine *formale Sprache*, die es erlaubt, unter Voraussetzung definierter Analyseverfahren *sämtliche* wissenschaftlichen Aussagen zu formalisieren. Definiere ferner *Entscheidungsverfahren*, mit denen sich für *sämtliche* formale Eigenschaften und Relationen feststellen lässt, ob diese für beliebige Aussagen (oder Typen) bestehen oder nicht.

Diese Aufgabe ist bislang nicht erfüllt: Erstens gibt es keinen umfassenden Kanon an klar definierten Analyseverfahren und kein Entscheidungsverfahren für Formeln der Quantorenlogik sowie alle reichhaltigeren formalen Sprachen; zweitens gibt es prinzipielle Bedenken, sowohl was die Möglichkeit eindeutiger Definitionen von Analyseverfahren als auch die Möglichkeit der Definition eines Entscheidungsverfahrens für die Formeln der Quantorenlogik (und anderer Logiken) betrifft. Aus diesem Grunde gibt man sich meistens damit zufrieden, diese Aufgabe nur für Teilgebiete und unter einschränkenden Bedingungen zu erfüllen.

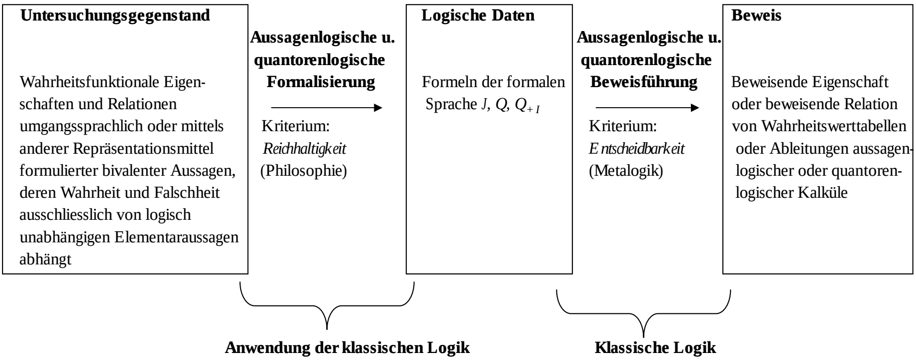

Abbildung 1.3: Schema zur Aufgabe der klassischen Logik

Die klassische Logik lässt sich als ein Teilgebiet der Logik charakterisieren, das die Aufgaben der Logik für eine bestimmte Art von Aussagen und für eine bestimmte Art formaler Eigenschaften und Relationen mit den sie kennzeichnenden Mitteln (formale Sprache und Beweisverfahren) zu erfüllen versucht. Inwieweit sie damit die gestellte Aufgabe der Logik erfüllt, bemisst sich anhand des Kriteriums der Reichhaltigkeit für die Formalisierung und anhand des Kriteriums der Entscheidbarkeit für die Beweisverfahren. Ersteres hängt zusammen mit Fragen der Analyse von Aussagen und fällt in das Gebiet der Philosophie, Letzteres setzt die Verwendung mathematischer Methoden voraus und fällt in das Gebiet der Metalogik (vgl. Abbildung 1.3).

3 Argumentrekonstruktion

Eine wichtige Anwendung findet die Logik bei der Bewertung der logischen Schlüssigkeit von *Argumenten*. Ein Argument besteht aus *Prämissen* (im Grenzfall aus nur einer Prämisse) und einer *Konklusion*. In einem logisch schlüssigen Argument folgt die Konklusion aus den Prämissen. In einem unschlüssigen Argument ist dies nicht der Fall. Ob eine Konklusion aus Prämissen folgt, bestimmt sich relativ zu *Schlussregeln*, die in der Logik für die Formalisierungen der Prämissen und Konklusionen definiert werden. In der Wissenschaft werden typischerweise Argumente produziert, in denen *Thesen* dadurch begründet werden, dass sie als Konklusionen aus Annahmen als den Prämissen gefolgert werden. Die Prämissen können begründet oder unbegründet, wahr oder falsch, mehr oder weniger überzeugend sein: Die Logik untersucht allein, ob aus gegebenen Prämissen die aus ihnen gezogenen Konklusionen im Sinne der Logik gefolgert werden können. Sie beurteilt nicht den Wert von Argumenten, sondern nur ihre *logische Schlüssigkeit*.

Um dies tun zu können, müssen die Argumente *rekonstruiert* werden. Unter einer *Argumentrekonstruktion* versteht man die *Formalisierung* eines gegebenen Argumentes in zwei Schritten: Die umgangssprachlich oder mittels anderer Repräsentationsmittel formulierten Argumente müssen erstens *standardisiert*, und zweitens *schematisiert* werden. Unter der *Standardisierung* versteht man die Zuordnung einer standardisierten, umgangssprachlichen Form zu einem umgangssprachlich oder mit andersartigen Repräsentationsmitteln formulierten Argument. Unter der *Schematisierung* versteht man die Zuordnung einer logischen Formel zu einem standardisierten Ausdruck. Anhand des Resultats der Schematisierung – der logischen Formel – kann dann mittels logischer Beweisverfahren die logische Schlüssigkeit des Argumentes überprüft werden. Im Unterschied zur Schematisierung verwendet die Standardisierung umgangssprachliche Ausdrücke, deren Bedeutung als bekannt vorausgesetzt wird. Im Unterschied zu *umgangssprachlichen Formulierungen* eines Argumentes, in denen dasselbe Argument auf viele unterschiedliche Weisen zum Ausdruck gebracht werden kann und dieselben Ausdrücke in unterschiedlichen argumentativen Zusammenhängen unterschiedliche Bedeutung haben können, wird die *standardisierte Form* nach einem einheitlichen Schema und unter Gebrauch eines festen, begrenzten Vokabulars gebildet.

Erläuterung 1.11
Unter der *Standardisierung* versteht man die Zuordnung einer standardisierten umgangssprachlichen Form zu einem umgangssprachlich oder andersartig formulierten Argument. In der standardisierten Form werden die Argumente unter Verwendung eines festen, begrenzten Vokabulars auf ein einheitliches Schema gebracht. Die standardisierte Form eines Arguments wird in der *Schematisierung* einer Formel einer formalen Sprache zugeordnet.

Erläuterung 1.12
Unter einer *Argumentrekonstruktion* versteht man die Standardisierung und Schematisierung eines umgangssprachlich oder mit andersartigen Repräsentationsmitteln formulierten Arguments.
Die Argumentrekonstruktion ermöglicht die Prüfung der logischen Schlüssigkeit des Argumentes.

Die Mittel der klassischen Logik erlauben die Rekonstruktion einer bestimmten Art von Argumenten sowie die Prüfung ihrer logischen Schlüssigkeit relativ zu den Schlussregeln der klassischen Logik. Die Prämissen und die Konklusion dieser Argumente sind bivalente Aussagen, die Wahrheitsfunktionen logisch unabhängiger Elementaraussagen sind. Schlüssig im Sinne der klassischen Logik werden Argumente genannt, wenn die Schlussregeln der klassischen Logik es erlauben, aus dem formalisierten Ausdruck der Prämissen zu dem der Konklusion überzugehen. Dies ist gleichbedeutend damit, dass die Konklusion aus den Prämissen folgt, d.h. es ist unmöglich (ausgeschlossen) im Sinne der klassischen Logik, dass die Prämissen wahr, und die Konklusion falsch ist.

Dieser Begriff der logischen Schlüssigkeit ist nicht trivial, und führt sogar zu Konsequenzen, die als „paradox" bezeichnet werden. Man spricht in diesem Zusammenhang vom „Paradox der formalen Implikation".[12] Denn nach dem Begriff der logischen Schlüssigkeit im Sinne der klassischen Logik ist ein Argument auch dann schlüssig, wenn die Prämissen logisch falsch sind: „Es regnet und es regnet nicht, also: Mama backt heute Berner Rösti" ist demnach Ausdruck eines schlüssigen Arguments. Dies erscheint in gewisser Hinsicht paradox, da bei der Bewertung von Argumenten intuitiv vorausgesetzt wird, dass die Prämissen in irgendeinem Sinn *relevant* für die Konklusion sein müssen. Eben dies ist nicht gegebenen, wenn die Prämissen logisch falsch sind. Eine Logik, die diesem Aspekt von Argumenten gerecht werden will, ist die *Relevanzlogik*. Im Unterschied zur klassischen Logik erlauben ihre Schlussregeln u.a. nicht den Übergang von logisch falschen Prämissen zu beliebigen Konklusionen. Eine weitere Konsequenz des Begriffes der logischen Schlüssigkeit der klassischen Logik, die denselben Punkt der Irrelevanz der Prämissen für die Konklusionen betrifft, besteht darin, dass die Prämissen eines schlüssigen Argumentes um beliebige weitere Prämissen ergänzt werden können, ohne dass dies die Schlüssigkeit des Arguments berührt: „Es regnet und es regnet nicht und Mama backt heute nicht Berner Rösti, also: Mama backt heute Berner Rösti" ist ein schlüssiges Argument im Sinne der klassischen Logik. Das logische Gesetz, das erlaubt, beliebige Prämissen zu einem schlüssigen Argument hinzuzufügen, nennt man das Gesetz der Monotonie. Eine Logik, in der dieses Gesetz keine ableitbare Schlussregel bildet, nennt man *nicht-monotone Logik*.

Ein mit dem Paradox der formalen Implikation eng zusammenhängendes Paradox ist das „Paradox der materialen Implikation".[13] Gemäss der klassischen

[12]Siehe zum Begriff der formalen Implikation LEKTION 3, S. 90.
[13]Siehe zum Begriff der materialen Implikation, LEKTION 3, S. 90.

Logik ist die im folgenden Wenn/Dann Satz ausgedrückte Aussage[14] „Wenn Bern die Hauptstadt der USA ist, dann ist meine Grossmutter Weltmeisterin im Dreiradfahren“ unter der Voraussetzung, dass man sie keiner weiteren Analyse unterzieht, wahr, da der Wenn-Teil der Aussage falsch ist. Aber auch hier gibt es zwischen dem Wenn-Teil und dem Dann-Teil keinen relevanten Zusammenhang. Eine Logik, die die Falschheit des Wenn-Teiles nicht als hinreichende Bedingung der Wahrheit einer Wenn/Dann Aussage erachtet, und einen stärkeren Zusammenhang zwischen dem Wenn-Teil einer Aussage und ihrem Dann-Teil verlangt, ist die sogenannte *Logik der strikten Implikation*. *Relevanzlogik* bzw. *nicht-monotone Logik* und die *Logik der strikten Implikation* werden auch zusammengefasst unter dem Titel der *Logik des ‚Entailment‘*.

Inwieweit derartige alternative Logiken nötig sind, hängt ab von der Formalisierung und den hierbei verwendeten Analyseverfahren umgangssprachlicher Aussagen, in denen offensichtlich relevante Zusammenhänge behauptet werden. Ein typischer Fall sind Kausalzusammenhänge: „Wenn der Blitz einschlägt, dann wird es brennen“. Unterstellt man keine weiteren Analyseverfahren, dann ist die mit diesem Satz gemachte Aussage von derselben Form wie die des Satzes „Wenn Bern die Hauptstadt der USA ist, dann ist meine Grossmutter Weltmeisterin im Dreiradfahren“. Relativ zu dieser Formalisierung, die von keinen weiteren Analyseverfahren Gebrauch macht, werden die Sätze derselben Formel der klassischen Logik zugeordnet, und man ist offensichtlich nicht in der Lage Wenn/Dann Aussagen mit relevanten Zusammenhängen von solchen ohne relevante Zusammenhänge formal zu unterscheiden. Macht man hingegen von weiteren Analyseverfahren Gebrauch, die davon ausgehen, dass der Satz „Wenn der Blitz einschlägt, dann wird es brennen“ im Unterschied zu „Wenn Bern die Hauptstadt der USA ist, dann ist meine Grossmutter Weltmeisterin im Dreiradfahren“ eine Kausalaussage ausdrückt, deren Formalisierung von Mitteln einer Analyse von Kausalaussagen Gebrauch macht, und geht man weiterhin davon aus, dass diese Analyse mit den Mitteln der formalen Sprache der klassischen Logik zu leisten ist, dann lassen sich unter dieser Voraussetzung den beiden Sätzen ganz unterschiedliche Formeln zuordnen. Es ist hier nicht der Platz, diese Fragen zu erörtern, sondern nur auf die Abhängigkeit der Beurteilung alternativer Logiken von Analyseverfahren für Aussagen aufmerksam zu machen. Eine Einführung in die Analyse von

[14]Genaugenommen ist in diesem Zusammenhang von der Subjunktion bzw. Implikation und der Definition des Junktors „→“ auszugehen. Da an dieser Stelle jedoch nicht die Definition der formalen Sprache der Aussagenlogik vorausgesetzt werden soll, muss die weniger scharfe Charakterisierung durch Bezugnahme auf Wenn/Dann Aussagen im Text vorgezogen werden.

Kausalaussagen sowie ihrer formalen Behandlung gibt der VILOLA-Grundkurs KAUSALES SCHLIESSEN.[15]

Unabhängig von den genannten Paradoxen gibt es eine Fülle von Argumenten, die man nicht von vorneherein als unschlüssig bezeichnen muss, obwohl sie nicht die Bedingung erfüllen, dass es ausgeschlossen ist, dass die Prämissen wahr und die Konklusion falsch ist: „Hans' Streptokokkeninfektion wird mit Penicillin behandelt. Die Behandlung einer Streptokokkeninfektion führt mit hoher Wahrscheinlichkeit zur Genesung. Also folgt mit hoher Wahrscheinlichkeit: Hans wird wieder gesund." Diese Schlussfolgerung schliesst nicht den möglichen (wenn auch unwahrscheinlichen) Fall aus, dass Hans trotz der Penicillinbehandlung nicht gesund wird. Die Schlüssigkeit ist in diesem Fall keine *deduktive*, sondern nur eine *induktive*, und das entsprechende Argument kein *deduktives Argument*, sondern ein *induktives Argument*. Die Logik, die sich mit den Regeln des *induktiven Schliessens* befasst, nennt man die *induktive Logik*. Die klassische Logik hingegen findet nur Anwendung auf *deduktive Argumente* und die von ihr untersuchte Schlüssigkeit ist die *deduktive Schlüssigkeit*.

Erläuterung 1.13
Die klassische Logik ist ein Mittel, die *logische Schlüssigkeit* von Argumenten zu prüfen. Die Prämissen und Konklusionen der von ihr untersuchten Argumente sind bivalente Aussagen, die Wahrheitsfunktionen logisch unabhängiger Elementaraussagen sind.
Die von ihr untersuchte logische Schlüssigkeit ist die *deduktive Schlüssigkeit*, nach der es logisch ausgeschlossen ist, dass die Prämissen wahr und die Konklusion falsch ist. Dieser Begriff beinhaltet nicht, dass die Prämissen und die Konklusion in irgendeinem relevanten Zusammenhang stehen.

Machen Sie im Anschluss an die Lektüre die Übung zur ersten Lektion, um Ihr Verständnis zu prüfen und anzuwenden:[16]

ÜBUNG: KLASSISCHE LOGIK

[15] Siehe unter http://www.philoscience.unibe.ch/kausalitaet.html.
[16] Der Zugang zu den interaktiven Übungseinheiten wird im VORWORT auf S. 5 erläutert.

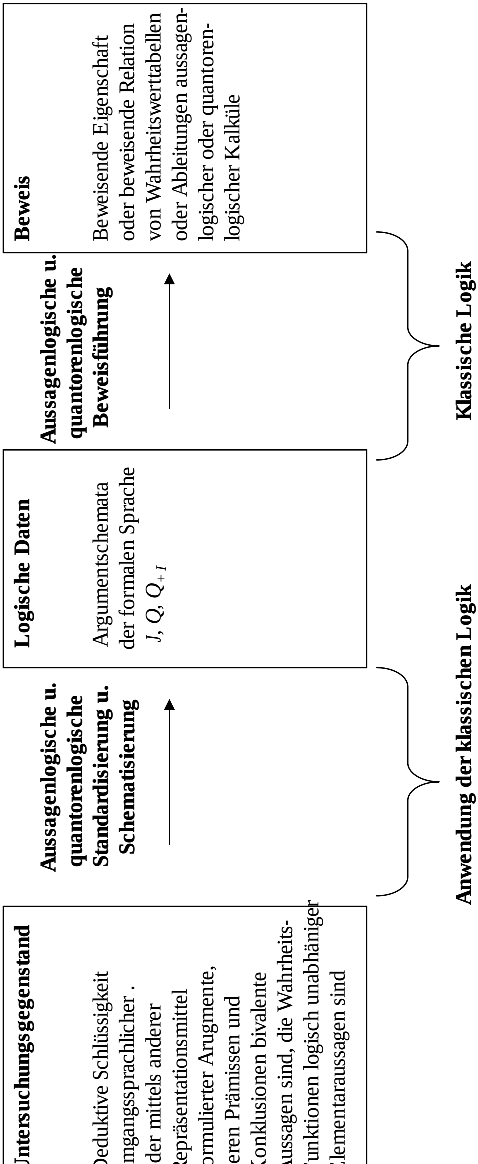

Abbildung 1.4: Schema zur Aufgabe der Argumentrekonstruktion

Teil B

Aussagenlogik

LEKTION 2

WAHRHEITSWERTTABELLEN

LEKTIONEN 2 bis 6 behandeln die *klassische Aussagenlogik*, auch *klassische Junktorenlogik* genannt. Sie bildet einen *Teil* der klassischen Logik. In dieser zweiten Lektion wird die *formale Sprache* der Aussagenlogik definiert und ihre *Interpretation* erläutert. Auf dieser Basis können dann die *Wahrheitswerttabellen* als ein *Entscheidungsverfahren* für wahrheitsfunktionale Eigenschaften und Relationen innerhalb der klassischen Aussagenlogik eingeführt werden.

1 DEFINITION VON J

Für die Definition einer formalen Sprache muss erstens ein *Alphabet* und zweitens die Zusammensetzung *wohlgeformter Formeln* aus diesem Alphabet definiert werden. Dies soll im Folgenden für die formale Sprache der Aussagenlogik (J) geschehen.

1.1 DEFINITION DES ALPHABETS VON J

Die Definition des Alphabets von J definiert, aus welchen Zeichen die (wohlgeformten) Formeln von J zusammengesetzt werden.

Erläuterung 2.1
Das *Alphabet* von J besteht auf folgenden Zeichen:

SATZBUCHSTABEN: ‘P’, ‘Q’, ‘R’, ‘S’, ‘T’, ‘U’, ‘P_1’, ‘P_2’, ‘P_3’, $\ldots$;

LOGISCHE ZEICHEN: ‘$\neg$’, ‘&’, ‘$\vee$’, ‘$\rightarrow$’, ‘$\leftrightarrow$’;

HILFSZEICHEN: ‘(’, ‘)’.

Diese Definition ist eine *ostensive* Definition: Sie definiert die Zeichen des Alphabets von J nicht dadurch, dass sie diese beschreibt, sondern dadurch, dass diese genannt (zitiert) werden. Man beachte, dass die Zeichen des Alphabets von J zwischen einfachen Anführungsstrichen stehen.[1] Die Anführungszeichen, das

[1] Der Übersicht halber werden zum Zwecke der Anführung von Zeichen der *Objekt*sprache einfache (und nicht zweifache), englische (und nicht deutsche) Anführungszeichen verwendet. Demgegenüber werden bei der Anführung von Ausdrücken der Umgangssprache zweifache, deut-

Komma, das Semikolon, der Punkt und die drei Pünktchen sind ebenso wie die in der Definition verwendeten deutschen Wörter nicht Teil des Alphabets von J, sondern nur Teil der Sprache, mittels derer das Alphabet von J definiert wird. Die Sprache, mittels derer eine formale Sprache definiert wird und Aussagen über diese formuliert werden, nennt man *Metasprache*, während die formale Sprache, die das Objekt der Untersuchung bildet, *Objektsprache* genannt wird. Metasprache und Objektsprache sind stets zu unterscheiden.

Die drei Pünktchen in der Angabe der Satzbuchstaben bedeuten, dass alle weiteren Satzbuchstaben durch Anwendung der Regel zu bilden sind, nach der der Index von 'P' jeweils um 1 zu erhöhen ist.[2] Durch diesen Teil der Definition besitzt das Alphabet von J unendlich viele Zeichen.[3]

Die Definition enthält willkürliche Elemente, und die Lehrbücher der klassischen Logik variieren in der jeweils verwendeten formalen Sprache der Aussagenlogik in einigen, unwesentlichen Punkten. Es ist willkürlich, welche Zeichen und – innerhalb gewisser Grenzen – wieviele Zeichen man wählt: Als Satzbuchstaben werden nicht immer grosse, sondern auch kleine Buchstaben verwendet. Die Verwendung von Indices hat den theoretischen Zweck, die Sprache J nicht auf die Verwendung einer bestimmten Anzahl an Satzbuchstaben festzulegen. Man kann ebenso gut Striche wie Zahlen zur Indizierung verwenden. Strenggenommen ist die Verwendung nicht-indizierter Satzbuchstaben überflüssig. Sie ist allerdings üblich und praktisch. Auch bei der Verwendung der logischen Zeichen gibt es unterschiedliche Standards:

	Alternativen
'$\neg$'	'-', '$\sim$',
'&'	'$\wedge$', '.'
'$\vee$'	'v'
'$\rightarrow$'	'$\supset$', '->'
'$\leftrightarrow$'	'$\equiv$', '<->'

Anstelle des Zeichens '$\neg$' wird auch ein über die Satzbuchstaben geschriebener Balken '$^{-}$' verwendet (also statt '$\neg P$' schreibt man '$\bar{P}$'), und anstelle der

sche Anführungszeichen verwendet. Des Weiteren werden zur Anführung von *Begriffen* einfache, deutsche Anführungszeichen verwendet.

[2]Man könnte auf die drei Pünktchen in der Definition verzichten, indem man die Satzbuchstaben wie die wohlgeformten Formeln induktiv definiert. Da dies umständlicher ist, wird hierauf verzichtet.

[3]Genaugenommen handelt es sich um *abzählbar* unendlich viele Zeichen. Eine Menge ist *abzählbar* genau dann, wenn sie auf die Menge der natürlichen Zahlen abgebildet werden kann.

Verknüpfung zweier Satzbuchstaben durch das Zeichen '&' werden auch die Satzbuchstaben schlicht direkt hintereinander geschrieben (also statt '$P \,\&\, Q$' schreibt man 'PQ').

Auch die Anzahl der verwendeten logischen Zeichen ist nicht festgelegt, was darin begründet liegt, dass man einige durch andere definieren kann (vgl. LEKTION 5, S. 145). Strenggenommen würde die Verwendung nur eines logischen Zeichens – des sogenannten „Shefferstriches“ (siehe S. 48) – ausreichen, um eine formale Sprache der klassischen Aussagenlogik zu definieren, die mit der hier definierten hinsichtlich ihrer Semantik und Syntax gleichwertig ist. Dies wäre aber unpraktisch. Die hier gewählte Form ist gängig. Oft verzichtet man auf das logische Zeichen '↔'; es wäre aber auch möglich, weitere logische Zeichen einzuführen. Die logischen Zeichen der Aussagenlogik bzw. Junktorenlogik nennt man auch *Junktoren*. Bei den Hilfszeichen werden des öfteren andere Klammertypen verwendet (z.B. '{', '}', '[', ']'). Dies dient der Übersichtlichkeit bei mehrfachen Klammersetzungen in Formeln. Des Weiteren werden noch zusätzliche Hilfszeichen (',', '∴') eingeführt, um Argumentschemata zu kennzeichnen (s. hierzu LEKTION 3, Abschnitt 3, S. 87).

1.2 DEFINITION DER WOHLGEFORMTEN FORMELN VON J

Die Definition der wohlgeformten Formeln von J legt fest, welche Zeichenketten[4] zur Sprache J gehören.

Die folgende Definition ist zwar durch den Gebrauch der Umgangssprache als Metasprache etwas umständlich, verzichtet dafür aber auf die Einführung weiterer Hilfsmittel, deren Verwendung Probleme aufwirft.

[4]Eine Zeichenkette in dem hier gemeinten Sinn kann auch aus nur einem Buchstaben bestehen.