

De Gruyter Studium

Ulrich Krause
Tim Neseemann

Differenzgleichungen und diskrete dynamische Systeme

Eine Einführung in Theorie und Anwendungen

2. Auflage

De Gruyter

Mathematics Subject Classification 2010: 39-01, 39A10, 39A20, 39A30, 39A60, 39B12, 15B48, 37N25, 37N40, 65Q10.

ISBN 978-3-11-025038-1

e-ISBN 978-3-11-025039-8

Library of Congress Cataloging-in-Publication Data

A CIP catalog record for this book has been applied for at the Library of Congress.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

© 2012 Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin/Boston

Satz: Da-TeX Gerd Blumenstein, Leipzig, www.da-tex.de

Druck und Bindung: Hubert & Co. GmbH & Co. KG, Göttingen

∞ Printed on acid-free paper

Printed in Germany

www.degruyter.com

Vorwort zur ersten Auflage

Dieses Buch befasst sich mit der mathematischen Analyse von dynamischen Prozessen, deren zeitliche Entwicklung nicht kontinuierlich fließend, sondern in diskreten Zeitschritten modelliert wird. In den Naturwissenschaften, den Ingenieurwissenschaften und den Wirtschaftswissenschaften wird häufig bei der Untersuchung dynamischer Vorgänge zunächst ein Modell in diskreter Zeit formuliert, also eine Differenzgleichung oder ein (zeit-)diskretes dynamisches System. Anschließend wird dann gewöhnlich durch einen Grenzübergang, bei dem die Länge eines Zeitschritts gegen Null strebt, das diskrete Modell in eine oder mehrere Differentialgleichungen verwandelt. Dieses Vorgehen, das besonders in der Physik sehr erfolgreich ist mit Ausstrahlungen bis hin in die Sozialwissenschaften, hat den großen Vorteil, dass sich dabei das hochentwickelte mathematische Instrumentarium der Differentialgleichungen und differenzierbaren dynamischen Systeme anzapfen lässt. Ein Nachteil liegt jedoch darin, dass für eine numerische Auswertung des Modells zum Zwecke der empirischen Überprüfung, das kontinuierliche Modell wieder in ein diskretes Modell zurückverwandelt werden muss. Das scheint nicht nur ein Umweg zu sein, insbesondere angesichts eines zunehmenden Einsatzes von Computern, sondern birgt auch zusätzliche Probleme, da es trotz gewisser Analogien keine systematischen Übersetzungsregeln zwischen Differentialgleichungen und Differenzgleichungen gibt, vor allem nicht, wenn nichtlineare Vorgänge im Spiel sind. Auch aus diesem Grund bildet sich mehr und mehr eine Tendenz heraus, das erstellte diskrete Modell direkt mit Methoden der Differenzgleichungen und diskreten dynamischen Systeme zu untersuchen; dieses Vorgehen ist etwa in der Biologie und der Ökonomie seit jeher gebräuchlicher als z. B. in der Physik. Dieses direkte Vorgehen zahlt sich aber nur aus, wenn das Instrumentarium im Bereich der Differenzgleichungen und diskreten dynamischen Systeme hinreichend gut entwickelt ist.

Obwohl die Theorie der Differenzgleichungen auf eine lange Tradition zurückblicken kann, ist sie doch erst in neuerer Zeit aus einer Art Dornröschenschlaf erwacht und zu einer aufgeweckten mathematischen Disziplin geworden. Inzwischen gibt es eine Reihe guter Monographien und Textbücher über Differenzgleichungen, vor allem im Englisch-sprachigen Raum, und vor vier Jahren erschien der erste Band einer Zeitschrift, die sich ganz der Theorie und den Anwendungen von Differenzgleichungen widmet. Die Theorie diskreter dynamischer Systeme ist noch relativ jung; die Literatur in diesem Bereich ist aber in den letzten Jahren explosionsartig angewachsen, nicht zuletzt aufgrund eines starken Interesses an Phänomenen der sogenannten chaotischen Dynamik.

Das vorliegende Buch ist aus einsemestrigen Vorlesungen und regelmäßigen Seminaren hervorgegangen, die einer von uns (U. K.) seit 1993 an der Universität Bremen abgehalten hat. Das Buch wendet sich an alle diejenigen, die sich, aus welchem Blickwinkel auch immer, für grundlegende Aussagen im Bereich der Differenzgleichungen und diskreten dynamischen Systeme interessieren. Ein besonderes Anliegen des vorliegenden Buches ist es, diesen sowohl interessanten als auch nützlichen Bereich in einer möglichst knappen Form nicht nur Studentinnen und Studenten der Mathematik, sondern auch solchen der Natur-, Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften zugänglich zu machen. Das Buch setzt einige Kenntnisse in Analysis und linearer Algebra voraus, wobei gewisse Hilfsmittel, wie etwa die Jordansche Normalform für Matrizen, an geeigneter Stelle in Form von Exkursen in Erinnerung gerufen werden. Vorkenntnisse in Differenzgleichungen, diskreten dynamischen Systemen oder Differentialgleichungen sind nicht erforderlich. Bei der mathematischen Darstellung haben wir Wert auf präzise Definitionen und exakte Begründungen gelegt, da unklare Formulierungen und Argumente bekanntermaßen gerade den Anfänger verunsichern können. Viele Beispiele, graphische Darstellungen, Anwendungen und Aufgaben sollen dazu dienen, die Theorie zu illustrieren, zu motivieren und zu üben. Da der Computer ein sehr sinnvolles Hilfsmittel im Bereich von Differenzgleichungen und diskreten dynamischen Systemen darstellt, enthält das Buch auch Aufgaben, für die kleinere Programme zu schreiben sind. Außerdem hat einer von uns (T. N.) fünf kurze Computerprogramme in der Programmiersprache Turbo-Pascal geschrieben, mit denen der Leser selbst auf seinem PC Graphiken erzeugen kann, wie sie für dieses Buch erstellt wurden. Dies ist als ein zusätzliches Angebot zur Selbstübung gedacht; das Buch ist jedoch nicht so angelegt, dass ein PC und die Arbeit daran für ein Verständnis erforderlich wären.

Damit das Buch nicht zu umfangreich wird, haben wir bei der Auswahl der Themen auf einige Bereiche verzichten müssen, die ebenfalls interessant und wichtig sind, wie z. B. Oszillationstheorie, Numerik, Variationskalkül und partielle Differenzgleichungen. Behandelt werden in diesem Buch die folgenden Themen.

Kapitel 1 führt anhand von einfachen Beispielen aus ganz verschiedenen Disziplinen an die Begriffe einer Differenzgleichung und eines diskreten dynamischen Systems heran und thematisiert deren gegenseitiges Verhältnis.

Kapitel 2 enthält einen sehr knappen Abriss des Kalküls in diskreter Zeit – der analog zur gewöhnlichen kontinuierlichen Analysis, aber dennoch von ihr verschieden ist – und die für das praktische Lösen wichtige Methode der erzeugenden Funktion.

Kapitel 3 ist das erste Kapitel, in dem systematisch eine Theorie entfaltet wird, und zwar die der linearen diskreten dynamischen Systeme und Differenzgleichungen. Hier sind es insbesondere die linearen Systeme mit konstanten Koeffizienten, für die eine abgerundete Theorie existiert. Diese Theorie ist sehr nützlich für Anwendungen und mag von denjenigen Lesern, die die Jordansche Normalform aus der linearen

Algebra kennen, selbst als eine willkommene Anwendung der Normalform angesehen werden.

Kapitel 4 befasst sich mit den verschiedenen Stabilitätseigenschaften linearer Differenzgleichungen, wofür ebenfalls eine abgerundete Theorie zur Verfügung steht, die in Kapitel 4 aber im wesentlichen nur für den wichtigen Fall konstanter Koeffizienten behandelt wird.

Mit Kapitel 5 beginnt das weite und entwicklungssträchtige Feld der nichtlinearen Systeme. Anschließend an die Diskussion einer Reihe von Beispielen werden zwei wichtige Methoden zur Untersuchung der Stabilität behandelt: Die Prüfung auf lokale Stabilität, indem das nichtlineare System durch ein lineares System angenähert wird und die Methode der Liapunov-Funktionen, die auch eine Prüfung auf globale Stabilität erlaubt. Das Kapitel gibt weiterhin einen kleinen Überblick über chaotische Phänomene und ihre fraktalen Attraktoren. Angesichts der umfangreichen diesbezüglichen Literatur, haben wir hier auf eine detaillierte Beweisführung verzichtet und stattdessen die, im Vergleich zu den linearen Systemen, neuartigen Phänomene und ihre Simulation auf dem Computer in den Vordergrund gestellt. Insbesondere kommen hier die bereits erwähnten Computerprogramme zum Einsatz. Auch den Lesern ohne Programmierkenntnisse wird das Nachvollziehen der dargestellten Algorithmen beim Verständnis der Graphiken helfen.

In Kapitel 6 werden nichtlineare Systeme aus einem anderen, gewissermaßen anti-chaotischen Blickwinkel betrachtet. Einige nichtlineare Systeme erweisen sich nämlich unter Hinzunahme von Positivitätseigenschaften als sehr stabil. Als ein Grenzfall ergeben sich nebenbei zentrale Aussagen der sogenannten Perron-Frobenius Theorie positiver Matrizen. Die erhaltenen Resultate über konkave Systeme werden sodann angewandt zum Nachweis der (relativen) Stabilität zweier nichtlinearer und mehrdimensionaler Modelle, wobei das erste Modell der biologischen Populationsdynamik und das zweite Modell der ökonomischen Preisdynamik entstammt. Die Themen dieses Kapitels werden hier zum erstenmal in Buchform behandelt.

Schließlich nehmen wir die Gelegenheit wahr, um uns an dieser Stelle für die vielen regen und nützlichen Diskussionen zu bedanken, die wir im Laufe der Jahre mit Teilnehmerinnen und Teilnehmern der Vorlesungen und Seminare über Differenzgleichungen und diskrete dynamische Systeme geführt haben.

Bremen, Februar 1999

Ulrich Krause
Tim Neseemann

Vorwort zur zweiten Auflage

Für die vorliegende zweite Auflage haben wir einige Druckfehler der ersten Auflage korrigiert, sowie einige Literaturangaben hinzugefügt. Das gilt für die allgemeinen Referenzen im Literaturverzeichnis wie auch für die speziellen Hinweise im Text zu den jeweiligen Inhalten.

Neu, und erstmalig in Buchform, sind der Abschnitt 6.8 „Systematisches Risiko auf Finanzmärkten — ein nichtlineares Modell“ und der Abschnitt 6.4 „Ein Fixpunktsatz für konkave Abbildungen“ mit den mathematischen Grundlagen für Abschnitt 6.8.

Neu sind weiterhin die Programme und diesbezüglichen Grafiken, die nicht mehr in Pascal, sondern jetzt in Matlab erstellt sind. Dafür danken wir ganz besonders Herrn Dr. Jan Lorenz.

Dank schulden wir auch einigen aufmerksamen Lesern für Kommentare und nützliche Hinweise zur ersten Auflage des Buches.

Bei Frau Friederike Dittberner vom Verlag de Gruyter möchten wir uns für ihre freundliche Betreuung der vorliegenden Auflage bedanken.

Frau Birgit Feddersen von der Universität Bremen danken wir, dass sie das Schreiben der neuen und revidierten Teile des Textes übernommen hat.

Bremen, September 2011

Ulrich Krause
Tim Neseemann

Inhaltsverzeichnis

Vorwort zur ersten Auflage	v
Vorwort zur zweiten Auflage	viii
Abbildungsverzeichnis	xi
1 Einführung: Beispiele und Grundbegriffe	1
1.1 Diskrete dynamische Systeme	1
1.2 Differenzgleichungen	10
1.3 Zum Verhältnis von diskreten dynamischen Systemen und Differenzgleichungen	14
2 Differenzenkalkül	18
2.1 Differenzenoperator und Summenoperator	18
2.2 Diskreter Satz von Rolle und Diskreter Mittelwertsatz	26
2.3 Erzeugende Funktion und Z-Transformation	32
3 Lineare diskrete dynamische Systeme und Differenzgleichungen	42
3.1 Lineare Unabhängigkeit	42
3.2 Fundamentalmatrizen und Green-Matrix	47
3.3 Differenzgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten	59
4 Stabilitätstheorie linearer Systeme und Differenzgleichungen	108
4.1 Stabilitätsbegriffe	108
4.2 Stabilität linearer Systeme	117
5 Nichtlineare diskrete dynamische Systeme und Differenzgleichungen	138
5.1 Nichtlineare Differenzgleichungen	139
5.2 Stabilitätskriterien durch lineare Approximation	156
5.3 Liapunovs direkte Methode	164
5.4 Chaos und Fraktale	175
6 Positive diskrete dynamische Systeme	202
6.1 Konkave Systeme	203
6.2 Hilberts projektive Metrik	208
6.3 Eine konkave Version des Satzes von Perron	210
6.4 Ein Fixpunktsatz für konkave Abbildungen	220

6.5	Positive Lösungen konkaver Differenzgleichungen	225
6.6	Ein nichtlineares Leslie-Modell der Populationsdynamik	228
6.7	Ein nichtlineares Modell interdependenter Preissetzung	231
6.8	Systematisches Risiko auf Finanzmärkten – ein nichtlineares Modell .	235
	Literaturverzeichnis	249
	Index	251

Abbildungsverzeichnis

1.1	Zustandsraum M und Zustände $x_n \in M$ eines diskreten dynamischen Systems	1
1.2	Graphische Iteration von $Tx = ax + b$	3
1.3	Graphische Iteration von $Tx = a\sqrt{x} + b$	4
1.4	Graphische Iteration von $Tx = 4x(1 - x)$	5
2.1	Knoten einer Abbildung $x : t \mapsto x(t)$	27
3.1	Preisverlauf im Cobweb-Modell	92
4.1	Eine stabile Lösung	109
4.2	Eine attraktive Lösung	110
4.3	Stabile und instabile Gleichgewichte von $x(t + 1) = \sqrt{x(t)}$	111
4.4	Stabile und instabile Gleichgewichte von $x(t + 1) = \frac{1}{9}x(t)^3$	112
4.5	Zusammenhang der Stabilitätsbegriffe	113
4.6	Eine stabile, aber nicht gleichmäßig stabile Lösung	115
4.7	Eine gleichmäßig asymptotisch stabile, aber nicht global attraktive Lösung	116
4.8	Stabiler und instabiler Unterraum eines zweidimensionalen Systems . . .	131
4.9	Stabiler und instabiler Unterraum eines dreidimensionalen Systems . . .	133
5.1	Stabiles Gleichgewicht von $u(t + 1) = \cos u(t)$	140
5.2	Stabile und instabile Nulllösung mit $f'(0) = 1$	142
5.3	Stabile und instabile Gleichgewichte von $u(t + 1) = u(t) + \sin u(t)$. . .	142
5.4	Beispiele für Populationsmodelle	147
5.5	Ein global stabiles Populationsmodell	149
5.6	Ein nicht global stabiles Populationsmodell	149
5.7	Zwei instabile Lösungen von $u(t + 1) = 3.5u(t)(1 - u(t))$	151
5.8	Zwei instabile Lösungen von $u(t + 1) = 4u(t)(1 - u(t))$	151
5.9	Zwei instabile Lösungen von $u(t + 1) = 2u(t) \bmod 1$	152
5.10	Die Zelt-Abbildung für $a = \frac{1}{2}$ und $a = 2$	153
5.11	Skizze zum Beweis von Lemma 5.9	166
5.12	Graphische Iteration von $u(t + 1) = 4u(t)(1 - u(t))$	179
5.13	Die zweite Iterierte der Logistischen Gleichung	180
5.14	Bifurkationsdiagramm der Logistischen Gleichung	181
5.15	Numerisch berechnete Liapunov-Exponenten der Logistischen Gleichung	184
5.16	Der Hénon-Attraktor	189
5.17	Vergrößerter Ausschnitt des Hénon-Attraktors	190

5.18	Ein Ausschnitt der Julia-Menge \mathbb{J}	192
5.19	Ein Ausschnitt der Mandelbrot-Menge \mathbb{M}	193
5.20	Veranschaulichung der Box-Dimension	195
5.21	Konstruktion der Cantor-Menge K	196
5.22	Konstruktion des Sierpiński-Dreiecks S	196
6.1	Stabilitätsverhalten im Konsensmodell	203
6.2	Eine konkave Abbildung	205

Kapitel 1

Einführung: Beispiele und Grundbegriffe

1.1 Diskrete dynamische Systeme

Ein *diskretes dynamisches System* ist ein Paar (M, T) , wobei M eine nichtleere Menge ist und $T : M \rightarrow M$ eine Selbstabbildung von M . Die Menge M , die gewöhnlich noch zusätzliche Strukturen trägt, wird auch als *Zustandsraum* bezeichnet und die Abbildung T , die die Bewegung von einem Zustand zu dem nachfolgenden Zustand beschreibt, als *Bewegungsgesetz* des zugrundeliegenden dynamischen Vorgangs. Ist $x_0 \in M$ der *Anfangszustand*, so ist $x_1 = Tx_0$ der Zustand zum Zeitpunkt 1, $x_2 = Tx_1$ der Zustand zum Zeitpunkt 2 usw. Ist x_n der Zustand des Systems zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, so wird die Dynamik des Systems beschrieben durch $x_{n+1} = Tx_n$. Es ist $x_n = T^n x_0$, wobei $T^n = T \circ \dots \circ T$ (n -mal) die *n -te Iterierte der Abbildung T* ist. Der Ausdruck ‚diskret‘ bezieht sich darauf, dass die Zeit nur in Form von diskreten Zeitpunkten (mitunter: Perioden) $0, 1, 2, \dots$ eine Rolle spielt. (Zusätzliche Komplikationen für die Theorie ergeben sich, falls man, wie etwa bei zellulären Automaten, auch einen diskreten Zustandsraum M erlaubt.) Von zentraler Bedeutung für die Untersuchung von diskreten dynamischen Systemen sind *Gleichgewichte* (Ruhepunkte) des Systems bzw. *Fixpunkte* der Abbildung T , d. h. Zustände $x^* \in M$, für die $Tx^* = x^*$ gilt. Interessant ist nun die Frage, ob ein solcher Fixpunkt überhaupt existiert. Wenn ja, ist er eindeutig bestimmt? Wenn nein, was lässt sich über die Menge der Fixpunkte sagen?

Weitere zentrale Fragen betreffen die Stabilität des Systems, insbesondere das *asymptotische Verhalten* bzw. das *Langzeitverhalten* des Systems, d. h., wie verhält

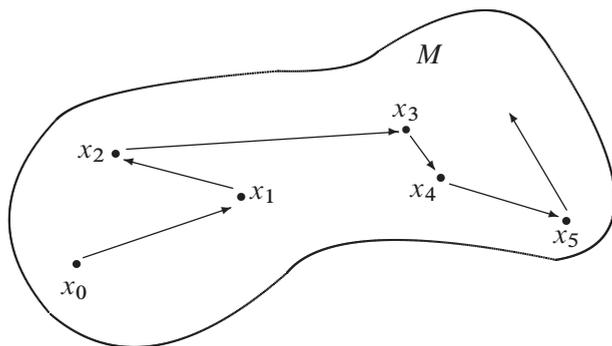


Abbildung 1.1 Zustandsraum M und Zustände $x_n \in M$ eines diskreten dynamischen Systems.

sich der Zustand $x_n = T^n x_0$ für $n \rightarrow \infty$? Für welche Anfangszustände strebt x_n für $n \rightarrow \infty$ gegen ein Gleichgewicht? Obwohl die Definition eines diskreten dynamischen Systems recht simpel ist, ist es oft extrem schwierig, in vielen Fällen bis heute sogar unmöglich, die obigen Fragen zufriedenstellend zu beantworten. Das betrifft insbesondere nichtlineare diskrete dynamische Systeme.

Trägt der Zustandsraum M eine lineare Struktur (d. h. M ist ein Vektorraum) und ist T eine (affin-)lineare Abbildung, so spricht man von einem linearen System. Ist T nicht linear, so kann es, selbst in anscheinend einfachen Systemen, sehr schwierig werden, analytische Aussagen über das Verhalten der Iterierten T^n für $n \rightarrow \infty$ zu machen. Das ist allerdings nicht notwendigerweise so, denn es gibt auch viele Formen von Nichtlinearität, die sich analytisch gut behandeln lassen. (Siehe die Beispiele weiter unten.)

In der eingangs gegebenen Definition eines diskreten dynamischen Systems verändert sich das Bewegungsgesetz selbst nicht im Laufe der Zeit. Ist das Bewegungsgesetz zeitabhängig, etwa aufgrund äußerer Einflüsse, so spricht man von einem *nichtautonomen diskreten dynamischen System* und versteht darunter eine nichtleere Menge M zusammen mit einer Folge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Selbstabbildungen $T_n : M \rightarrow M$, wobei T_n das Bewegungsgesetz zum Zeitpunkt n darstellt. Für ein nichtautonomes System ist $x_{n+1} = T_n x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. In der eingangs gegebenen Definition eines diskreten dynamischen Systems ist $T_n = T$ für alle n und man spricht in diesem Fall auch von einem *autonomen diskreten dynamischen System*.

Zu diskreten dynamischen Systemen siehe insbesondere die im Literaturverzeichnis angeführten Referenzen [4, 7, 12, 15, 16, 17, 21, 22, 25, 27, 31, 33, 37, 40].

Beispiele. 1. Eindimensionale Systeme

(a) Lineare Systeme: Betrachte die affin lineare Abbildung $Tx = ax + b$ auf $M = \mathbb{R}$. Durch graphische Iteration kann man prüfen, ob die Folge x_0, Tx_0, T^2x_0, \dots gegen den Fixpunkt x^* konvergiert (vgl. Abbildung 1.2). Analytisch erhält man für die n -te Iterierte von T die Formel

$$T^n x = \begin{cases} a^n \left(x - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}, & a \neq 1, \\ x + nb, & a = 1. \end{cases}$$

Beweis. Für $a = 1$ ist die Behauptung trivial. Für $a \neq 1$ führen wir eine vollständige Induktion über n durch.

$n = 1$:

$$\left(x - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a} = ax + \frac{b-ab}{1-a} = ax + b.$$

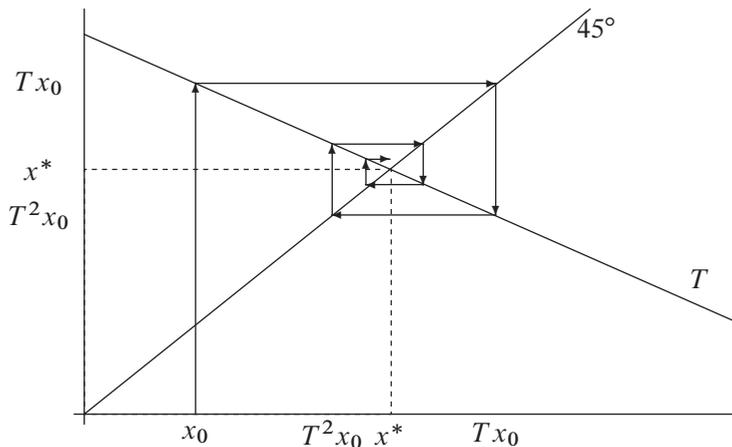


Abbildung 1.2 Graphische Iteration von $Tx = ax + b$.

$n \rightarrow n + 1$:

$$\begin{aligned}
 T^{n+1}x &= T(T^n x) = a \left(a^n \left(x - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a} \right) + b \\
 &= a^{n+1} \left(x - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{ab}{1-a} + \frac{b(1-a)}{1-a} \\
 &= a^{n+1} \left(x - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Als Fixpunkt der Abbildung T , d. h. Schnittpunkt mit der 45° -Linie, ergibt sich für $a \neq 1$

$$Tx^* = x^* \iff x^* = \frac{b}{1-a};$$

ist $a = 1$ und $b \neq 0$, so existiert kein Fixpunkt; ist $a = 1$ und $b = 0$, so sind alle Punkte von \mathbb{R} Fixpunkte. Das Langzeitverhalten dieses diskreten dynamischen Systems lässt sich nun unmittelbar aus obiger Formel für $T^n x$ ermitteln. Ist $|a| < 1$, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x = \frac{b}{1-a}$ (vgl. Abbildung 1.2). Ist $a = -1$, so fluktuieren die Iterierten $T^n x$ um den Fixpunkt $\frac{b}{2}$, ohne zu konvergieren (falls $x \neq \frac{b}{2}$). Ist $a = 1$ und $b = 0$, so sind die Iterierten $T^n x$ konstant gleich x . Ist $a = 1$ und $b \neq 0$, so strebt $T^n x$ gegen $+\infty$ oder $-\infty$, je nachdem, ob $b > 0$ oder $b < 0$ ist. Ist $a > 1$, so strebt $T^n x$ für $x > x^*$ gegen $+\infty$ und für $x < x^*$ gegen $-\infty$.

(b) Nichtlineare Systeme: Wir betrachten das nichtlineare System $Tx = a\sqrt{x} + b$ mit $a, b > 0$ auf $M = \mathbb{R}_+$. Die graphische Iteration liefert auch hier eine Konvergenz der Folge x_0, Tx_0, T^2x_0, \dots gegen den Fixpunkt x^* (vgl. Abbildung 1.3). Den Fixpunkt

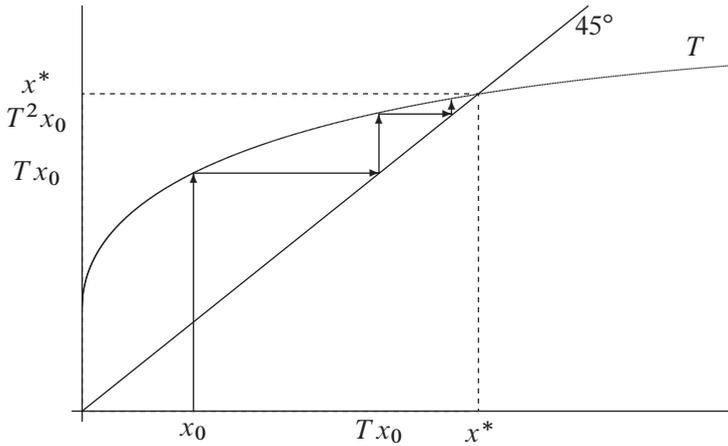


Abbildung 1.3 Graphische Iteration von $Tx = a\sqrt{x} + b$.

x^* erhält man sofort durch Lösen der quadratischen Gleichung $(x - b)^2 - a^2x = 0$. Es ist

$$x^* = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^2.$$

Obwohl die graphische Iteration eine Konvergenz der Iterierten $T^n x$ gegen den eindeutigen Fixpunkt x^* nahelegt, ist die Situation analytisch nicht so einfach wie in Beispiel 1 (a), da sich für $T^n x$ kein einfach auszuwertender geschlossener Ausdruck ergibt. Zur Beurteilung des Langzeitverhaltens kann man jedoch folgendermaßen vorgehen: Man verifiziert sofort, dass $x \leq Tx$ äquivalent ist mit $x \leq x^*$. Ist daher $x_0 \leq x^*$, so folgt $x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x^*$. Da die Folge der Iterierten $x_n = T^n x$ monoton wächst und beschränkt ist, muss sie gegen einen Wert \bar{x} konvergieren. Da T stetig ist, so folgt $T\bar{x} = \bar{x}$ und daher $\bar{x} = x^*$. Also gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x = x^*$ für $x \leq x^*$. Auf analoge Weise verifiziert man die Gültigkeit der Konvergenzaussage auch für $x \geq x^*$.

(c) Nichtlineare Systeme: Die Abbildung T sei jetzt durch $Tx = 4x(1 - x)$ auf $M = [0, 1]$ gegeben. Die graphische Iteration liefert in diesem Fall offensichtlich keine Konvergenz der Iterierten $T^n x$ (vgl. Abbildung 1.4). Man kann sofort prüfen, dass 0 und $\frac{3}{4}$ die Fixpunkte von T sind. Im Unterschied zu 1 (a) und (b) ist jedoch weder ein einfacher Ausdruck für $T^n x$ noch eine einfache Konvergenzbetrachtung möglich. In der Tat zeigt eine genaue Analyse, dass sich die Iterierten stark irregulär verhalten, wofür sich der Ausdruck *chaotisch* eingebürgert hat. (Hier sei auf die entsprechende Literatur verwiesen, z. B. auf [31, 33].)

Die graphischen Iterationen können in *MATLAB* mit Hilfe des Programms COBWEB, das am Ende dieses Kapitels abgedruckt ist, auch am eigenen Computer reproduziert werden.

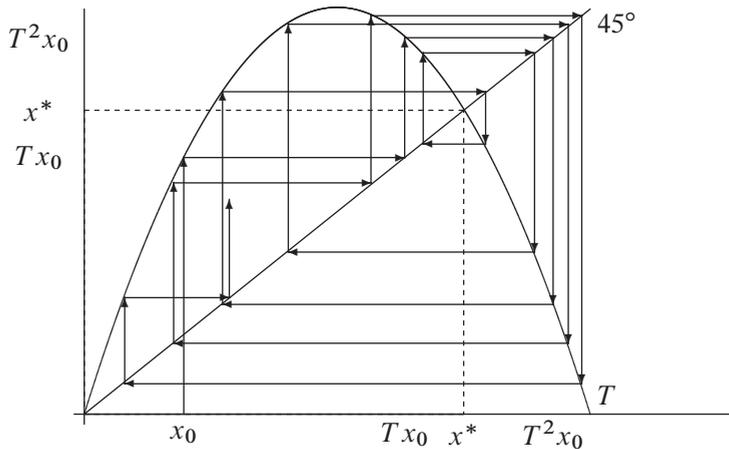


Abbildung 1.4 Graphische Iteration von $Tx = 4x(1 - x)$.

2. Anwendung: Wachstum einer Population

Sei P_n die Anzahl der Individuen einer Population zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Ist die Wachstumsrate der Population konstant g , d. h. ist

$$\frac{P_{n+1} - P_n}{P_n} = g$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $P_{n+1} = wP_n$ mit $w = 1 + g$ und mit $Tx = wx$ auf $M = \mathbb{R}_+$ ergibt sich ein lineares diskretes dynamisches System, wie es unter 1 (a) diskutiert wurde. Aus biologischer Sicht ist es jedoch sinnvoll, den sogenannten Populationsdruck zu berücksichtigen, demzufolge die Wachstumsrate g bzw. der Wachstumsfaktor w nicht konstant bleibt, sondern sich mit dem Anwachsen der Population verringert. Dieser Populationsdruck lässt sich auf verschiedene Weise modellieren. Die folgenden Ansätze führen beide auf nichtlineare Systeme, die jedoch ein grundverschiedenes Langzeitverhalten aufweisen. Im folgenden sei $P_{n+1} = w_n P_n$ die Populationsentwicklung mit variablem Wachstumsfaktor w_n .

(a) Sei $w_n = a(1 - \frac{P_n}{P}) \geq 0$, wobei P die maximale Populationsgröße mit $P \geq P_n$ für alle n und $a > 0$ eine populationsspezifische Konstante ist. Dann ist

$$P_{n+1} = aP_n \left(1 - \frac{P_n}{P}\right)$$

und mit $x_n = \frac{P_n}{P}$ gilt

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n).$$

Für $a \leq 4$, $M = [0, 1]$ und $Tx = ax(1 - x)$ – die sogenannte *logistische Funktion* – ergibt sich ein diskretes dynamisches System wie unter 1 (c), das für gewisse Werte des Parameters a chaotisches Verhalten aufweist, z. B. für $a = 4$.

(b) Sei $w_n = \frac{P}{b+P_n}$, wobei wieder P die maximale Populationsgröße und $b > 0$ eine Konstante ist. Dann ist

$$P_{n+1} = P_n \cdot \frac{P}{b + P_n}$$

und mit $x_n = \frac{P_n}{P}$, $c = \frac{b}{P}$

$$x_{n+1} = x_n \cdot \frac{1}{c + x_n}.$$

Für $M = \mathbb{R}_+$, $Tx = \frac{x}{x+c}$ ergibt sich ein diskretes dynamisches System, das ein konvergentes Langzeitverhalten wie in Beispiel 1 (b) aufweist.

3. Zweidimensionale Systeme: Ein Lernmodell

Sei $M = \mathbb{R}^2$ und $Tx = Ax$, wobei $x = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ und $A = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$ mit $0 \leq p, q \leq 1$. Es gilt also $T^n x = A^n x$, d. h. man interessiert sich für die Potenzen der Matrix A . Der Spezialfall $p = 0$, $0 < q < 1$ wird auch *Estes' Lernmodell* genannt. Um A^n zu berechnen, kann man die Matrix $B = A - E_2 = \begin{bmatrix} -p & p \\ q & -q \end{bmatrix}$ betrachten, wobei E_2 die 2×2 -Einheitsmatrix ist. Für diese Matrix gilt

$$B^2 = \begin{bmatrix} p^2 + pq & -p^2 - pq \\ -q^2 - pq & q^2 + pq \end{bmatrix} = -(p+q) \begin{bmatrix} -p & p \\ q & -q \end{bmatrix} = -(p+q)B.$$

Daraus folgt durch Wiederholung $B^i = (-1)^{i-1}(p+q)^{i-1}B$ für jedes $i \geq 1$. Damit gilt für $p+q > 0$

$$\begin{aligned} A^n &= (E_2 + B)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} B^i = E_2 + \left(\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-1)^{i-1} (p+q)^{i-1} \right) \cdot B \\ &= E_2 + \frac{-1}{p+q} ((1-(p+q))^n - 1) \cdot B \\ &= E_2 - \frac{(1-(p+q))^n - 1}{p+q} \cdot B. \end{aligned}$$

Falls $p = q = 0$, dann gilt $A = E_2$. Für den Spezialfall $p = q = 1$ gilt

$$A^n = \begin{cases} E_2 & \text{falls } n \text{ gerade;} \\ B + E_2 (= A) & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Für das Langzeitverhalten gilt in diesem Fall, dass der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n x_0$ genau dann existiert, wenn $x_0 = [r, r]^T$ mit $r \in \mathbb{R}$ ist. Für das Langzeitverhalten der Iterierten im Fall $0 < p+q < 2$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = E_2 + \frac{1}{p+q} \cdot B = \frac{1}{p+q} \cdot \begin{bmatrix} q & p \\ q & p \end{bmatrix}.$$

Für Estes' Lernmodell erhält man damit $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Dieses sehr einfache Lernmodell beschreibt das Lernen eines Sachverhaltes unter den Annahmen, dass dieser mit Wahrscheinlichkeit q gelernt wird und, wenn einmal gelernt, nicht mehr vergessen wird (siehe auch [25]).

4. Anwendung: Konsensfindung einer Expertenrunde

Mehrere Experten sollen eine Größe schätzen, z. B. die Weltbevölkerung im Jahr 2000. Da sie unterschiedliche Methoden anwenden, werden die Experten im allgemeinen zu unterschiedlichen Schätzungen gelangen. Wenn das Expertengremium eine gemeinsame Schätzung abgeben soll, z. B. gegenüber der UNESCO, stellt sich die Frage, wie die Experten einen Konsens erreichen können. Nach Kenntnis der Schätzungen der anderen Experten wird ein Experte eventuell sein Ergebnis revidieren, je nachdem, welches Gewicht er den anderen Experten zumisst. Die gegenseitige Mitteilung der revidierten Schätzungen stellt eine neue Information für die Experten dar und könnte zu erneuten Revisionen führen. Auf diese Weise ergibt sich möglicherweise ein fortgesetzter Revisionsprozess und es stellt sich die Frage, ob dieser Prozess zu einer gemeinsamen Schätzung, einem Konsens, führt.

Sei m die Anzahl der Experten und sei x_i die Schätzung des Experten i zu einem gewissen Zeitpunkt, $1 \leq i \leq m$. Sei $a_{ij} \geq 0$ das Gewicht, das der Experte i dem Experten j zumisst. Es ist dann $\sum_{j=1}^m a_{ij} = 1$ für alle $1 \leq i \leq m$. Bezeichnet x'_i die Schätzung des Experten i zum nächsten Zeitpunkt, so ist

$$x'_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{im}x_m.$$

Bezeichnet x den Spaltenvektor aus den x_i , x' den Spaltenvektor aus den x'_i und A die Matrix der Gewichte a_{ij} , so können wir kurz schreiben $x' = Ax$. Mit anderen Worten, dieser Konsensfindungsprozess führt auf ein diskretes dynamisches System mit $M = \mathbb{R}_+^m := \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_i \geq 0, 1 \leq i \leq m\}$ und $T : M \rightarrow M$ gegeben durch Matrixmultiplikation $Tx = Ax$. Dieses Modell stellt eine Verallgemeinerung des Modells von Beispiel 3 dar, wobei jetzt noch der Zustandsraum sinnvollerweise auf nichtnegative Vektoren beschränkt ist. Estes' Lernmodell entspricht der Situation zweier Experten, wo der erste Experte sich selbst das Gewicht 1 und dem anderen Experten kein Gewicht zumisst, und wo der zweite Experte sich selbst das Gewicht $1 - q$ und dem anderen Experten das Gewicht q gibt. Aus dem entsprechenden Ergebnis von Beispiel 3 folgt, dass sich in diesem Fall die Anfangsschätzung des ersten Experten schließlich als Konsens durchsetzt. Es lässt sich allgemein zeigen, dass unter gewissen Bedingungen an die Gewichte, der Konsensfindungsprozess tatsächlich auf einen Konsens zusteuert.

Realistischer als die Annahme unveränderlicher Gewichte a_{ij} ist es, zu berücksichtigen, dass die Gewichte von den jeweiligen Schätzungen abhängen könnten wie in der folgenden Situation. Nehmen wir an, dass ein Experte i nur solchen Experten ein positives Gewicht gibt, deren Schätzungen von seiner eigenen Schätzung um

nicht mehr als eine gewisse positive Vertrauensschranke ε_i abweichen. Es ist dann $I(i, x) = \{1 \leq j \leq m \mid |x_i - x_j| \leq \varepsilon_i\}$ die Menge der Experten, die Experte i bei einem Schätzungsprofil (x_1, x_2, \dots, x_m) berücksichtigt. Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass alle diese Experten mit gleichem Gewicht von i berücksichtigt werden, so erhalten wir für die Gewichte

$$a_{ij}(x) = \begin{cases} \frac{1}{|I(i,x)|} & \text{für } j \in I(i, x), \\ 0 & \text{für } j \notin I(i, x). \end{cases}$$

Dabei bezeichnet $|I|$ die Anzahl der Elemente in einer endlichen Menge I . Wir erhalten so für Konsensfindung mit Vertrauensschranken das diskrete dynamische System

$$x(n+1) = Tx(n) \quad \text{mit } T : \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}_+^m, \quad (Tx)_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}(x)x_j,$$

wobei $x(n)$ den Vektor der Expertenschätzungen zum Zeitpunkt n bezeichnet. Es ist nicht leicht, das asymptotische Verhalten dieses mehrdimensionalen und nichtlinearen Systems zu beurteilen (vgl. Aufgabe 5).

5. Anwendung: Gleichgewichtiges Wachstum einer Volkswirtschaft

Für eine Volkswirtschaft lässt sich die Güterproduktion als Transformation von Inputs in Outputs auffassen. Indiziere $\{1, 2, \dots, n\}$ die Menge der betrachteten Güter, sei $x = (x_1, \dots, x_n)$ ein Inputvektor, der durch die Produktion in den Outputvektor $y = (y_1, \dots, y_n)$ mit $y = Tx$ transformiert wird. Dabei bezeichnet x_i den Input von Gut i und y_i den durch den Produktionsprozess erzielten Output von Gut i . In diesem *economic sausage grinder*-Modell wird die Güterproduktion beschrieben durch ein diskretes dynamisches System $M = \mathbb{R}_+^n$ und $T : M \rightarrow M$. Sei zunächst T linear, d. h. $Tx = A \cdot x$ mit einer Matrix A , deren Elemente a_{ij} nichtnegativ sind. In diesem System, das schon bei der Konsensbildung in Beispiel 4 eine Rolle spielte, ist eine Konvergenz der Iterierten im allgemeinen nicht zu erwarten. Unter gewissen Voraussetzungen (z. B. $a_{ij} > 0$ für alle i, j) ergibt sich jedoch eine Konvergenz gegen einen gleichgewichtigen Wachstumspfad: Es existiert ein Inputvektor x^* , für den alle Güter mit der gleichen Rate g wachsen, d. h.

$$\frac{y_i^* - x_i^*}{x_i^*} = g$$

für $i = 1, \dots, n$ und $y^* = Tx^*$. Dies ist äquivalent mit dem Eigenwertproblem

$$Tx^* = \lambda x^*, \quad \lambda = 1 + g.$$

Im Falle eines Nullwachstums, d. h. für $g = 0$, ist x^* ein Fixpunkt. Eine genauere Analyse des Langzeitverhaltens ergibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda^n} T^n x = c(x)x^*$$

für alle $x \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$, wobei $c(x)$ eine von x abhängige positive Zahl ist. Sei beispielsweise $n = 2$ und

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Der positive Eigenwert λ ist eindeutig bestimmt als $\lambda = 5$ und $x^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ist eindeutig bis auf einen positiven skalaren Faktor. In der Formel für das Langzeitverhalten ist $c(x) = x_1 + x_2$.

Aus ökonomischen Gründen ist ein lineares Modell jedoch nur begrenzt sinnvoll. Während im linearen Modell $\partial y_i / \partial x_j = a_{ij}$ ist und daher ein zusätzlicher Input einer Einheit des Gutes j stets einen zusätzlichen Output von a_{ij} Einheiten des Gutes i liefert, ist es oft realistischer anzunehmen, dass $\partial y_i / \partial x_j$ mit wachsendem Input kleiner wird (sogenannte abnehmende Skalenerträge). In der Theorie sogenannter *positiver diskreter dynamischer Systeme* wird gezeigt, dass auch für solche nichtlinearen Transformationen das oben diskutierte Langzeitverhalten noch gültig sein kann (vgl. Kapitel 6).

6. Diskreter Zustandsraum: Das $(3x + 1)$ -Problem aus der Zahlentheorie

Sei $M = \mathbb{N} \setminus \{0\} := \{1, 2, 3, \dots\}$ und

$$Tx = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & x \text{ gerade,} \\ \frac{1}{2}(3x + 1), & x \text{ ungerade,} \end{cases} \quad x \in M.$$

In diesem diskreten dynamischen System ist neben der Zeit auch der Zustandsraum diskret. Die interessierende Frage für dieses Systems lautet, wie sich $T^n x$ für $n \rightarrow \infty$ verhält? Für den Startpunkt $x_0 = 1$ erhält man die Folge $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 2, \dots$, d. h. einen Zyklus $\{1, 2\}$. Für den Startwert $x_0 = 7$ erhält man die Folge $x_1 = 11, x_2 = 17, x_3 = 26, x_4 = 13, x_5 = 20, x_6 = 10, x_7 = 5, x_8 = 8, x_9 = 4, x_{10} = 2, x_{11} = 1, \dots$, d. h. auch hier ergibt sich der Zyklus $\{1, 2\}$. Die Vermutung bei Untersuchung weiterer Anfangswerte ist, dass zu jedem $x_0 \in M$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $T^n x_0 = 1$, d. h. das diskrete dynamische System konvergiert gegen den Zyklus $\{1, 2\}$ in endlicher Zeit für jeden Startpunkt x_0 . Diese Vermutung ist bis heute weder bewiesen noch widerlegt. \diamond

Referenzen

- Zum biologischen Hintergrund des Populationsmodells in Beispiel 2 siehe Pielou, E.C.: *An Introduction to Mathematical Ecology*. Wiley Interscience, New York, 1969.
- Zur Konsensbildung von Experten (Beispiel 4) siehe für die lineare Situation Chatterjee, S., Seneta, E.: *Toward consensus: Some convergence theorems on repeated*

averaging. J. Appl. Prob. 14 (1977), S. 89–97; für die nichtlineare Situation siehe Krause, U.: *A discrete nonlinear and non-autonomous model of consensus formation*. In Elaydi, S. et.al. (Hrsg.): *Proceedings of the 4th International Conference on Difference Equations and Applications, August 27–31, 1998, Poznan, Polen*.

Für eine ausführliche Darstellung, einschließlich Computersimulationen, siehe Hegselmann, R., Krause, U.: *Opinion dynamics under bounded confidence: models, analysis, and simulations*. J. Artificial Societies and Social Simulation 5(3) (2002), <http://jasss.soc.surrey.ac.uk/5/3/2.html>.

- Zum wirtschaftlichen Hintergrund des Wachstumsmodells in Beispiel 5 siehe Nishikido, H.: *Convex Structures and Economic Theory*. Academic Press, New York, 1968.
- Zum $3x + 1$ -Problem aus der Zahlentheorie (Beispiel 6) siehe Lagarias, J.C.: *The $3x + 1$ problem and its generalizations*. Amer. Math. Monthly 92 (1985), S. 3–21.
- Eine Einführung in die Problematik mathematischer Modellierung findet der Leser in [21].

1.2 Differenzgleichungen

Im folgenden bezeichne \mathbb{K} den Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen oder den Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen. Es sei wieder $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Unter einer *Differenzgleichung* versteht man eine Gleichung der Gestalt

$$f(t, x(t), x(t+1), \dots, x(t+n)) = 0 \quad (1.1)$$

gültig für alle $t \in \mathbb{N}$.

Dabei ist für eine feste Teilmenge $D \subset \mathbb{K}$ f eine Abbildung $f : \mathbb{N} \times D^{n+1} \rightarrow \mathbb{K}$ und $t \mapsto x(t)$ eine Abbildung von \mathbb{N} in D . Eine Differenzgleichung (1.1) heißt *autonom*, falls t nicht explizit als Argument enthalten ist. Die Zahl n heißt *Ordnung* (*Grad*) von (1.1). Der Operator $\Delta : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, definiert durch

$$\Delta x(t) := x(t+1) - x(t),$$

heißt *Differenzen-(Vorwärts-)Operator* mit den Iterierten

$$\Delta^0 x(t) := x(t), \quad \Delta^m x(t) := \Delta(\Delta^{m-1} x(t)), \quad m > 1.$$

Beispielsweise gilt $\Delta^2 x(t) = \Delta(\Delta x(t)) = \Delta(x(t+1) - x(t)) = x(t+2) - 2x(t+1) + x(t)$. Damit hat man für (1.1) eine Darstellung

$$g(t, x(t), \Delta x(t), \dots, \Delta^n x(t)) = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{N}, \quad (1.2)$$

und damit eine formale Ähnlichkeit mit Differentialgleichungen

$$g(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Falls (1.1) bzw. (1.2) sich nach $x(t+n)$ bzw. $\Delta^n x(t)$ auflösen lässt, erhält man folgende *Normalgestalt* einer Differenzgleichung

$$x(t+n) = \tilde{f}(t, x(t), \dots, x(t+n-1))$$

mit $\tilde{f} : \mathbb{N} \times D^n \rightarrow D$ bzw.

$$\Delta^n x(t) = \tilde{g}(t, x(t), \dots, \Delta^{n-1}x(t))$$

Eine Abbildung $t \mapsto x(t)$, die (1.1) erfüllt, heißt eine *Lösung* von (1.1). Zu Differenzgleichungen siehe insbesondere die im Literaturverzeichnis angeführten Referenzen [1, 10, 13, 14, 19, 20, 23, 29, 32, 39].

Beispiele. 1. Ein diskretes dynamisches System (M, T)

Für $x_{n+1} = Tx_n$, $n \in \mathbb{N}$, schreibt man auch $x(t+1) = Tx(t)$, $t \in \mathbb{N}$. Damit liefert (M, T) für $M \subset \mathbb{R}$ eine Differenzgleichung erster Ordnung, denn es gilt

$$Tx(t) - x(t+1) = 0$$

für alle $t \in \mathbb{N}$ und f ist gegeben durch $f : \mathbb{N} \times M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(t, x_1, x_2) = Tx_1 - x_2$. Die Form (1.2) erhält man aus

$$0 = Tx(t) - x(t+1) = Tx(t) - x(t) - \Delta x(t),$$

wobei $g(t, x_1, x_2) = Tx_1 - x_1 - x_2$. Beide Fälle lassen sich in Normalgestalt bringen mit $\tilde{f}(t, x) = Tx$ bzw. $\tilde{g}(t, x) = Tx - x$ für $x \in M$. Damit sind alle eindimensionalen Beispiele aus Abschnitt 1.1 auch Beispiele für Differenzgleichungen!

2. Fibonacci-Zahlen

Sei $x(t+2) = x(t+1) + x(t)$ für $t \in \mathbb{N}$ eine Differenzgleichung zweiter Ordnung in Normalgestalt. Wir wollen die Lösungen $x : t \mapsto x(t)$ dieser Differenzgleichung ermitteln. Als Ansatz setzen wir $x(t) = a^t$ mit $a \neq 0$ (der Fall $a = 0$ ist trivial). Dann gilt $a^{t+2} = a^{t+1} + a^t$ für alle $t \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn $a^2 = a + 1$. Daraus folgt $a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Also gibt es zwei Lösungen a_1^t und a_2^t . Mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ist dann

$$x(t) = c_1 a_1^t + c_2 a_2^t$$

jedenfalls eine Lösung. Dass hiermit bereits alle Lösungen gefunden sind, wird in Kapitel 2 gezeigt. Die Koeffizienten c_1, c_2 lassen sich vermöge von Anfangswerten bestimmen. Sei beispielsweise $x(0) = x(1) = 1$. Daraus folgt für die Konstanten c_1 und c_2

$$\begin{aligned} x(0) = 1 &= c_1 + c_2 \quad \text{und} \\ x(1) = 1 &= c_1 a_1 + c_2 a_2 \end{aligned}$$

und daraus wegen $a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$c_1 = \frac{a_2 - 1}{a_2 - a_1} = \frac{-\sqrt{5} - 1}{-2\sqrt{5}} \quad \text{und}$$

$$c_2 = \frac{a_1 - 1}{a_1 - a_2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}.$$

Somit erhält man die eindeutige Lösung

$$x(t) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^t + \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^t$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{t+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{t+1} \right),$$

wobei $x(t)$ stets eine natürliche Zahl ist! Die Zahlen $x(t) \in \mathbb{N}$, also $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$, sind die berühmten *Fibonacci-Zahlen*; die Formel für $x(t)$ heißt *Binetsche Formel*.

3. Rekursive Folgen

Sei $h : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, $k \geq 1$ und $a_0, a_1, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$. Definiere die rekursive Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $u_i := a_i$ für alle $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ und

$$u_{i+k} := h(u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+k-1}) \quad (1.3)$$

für alle $i \geq 0$. Dann ist durch (1.3) eine Differenzengleichung k -ter Ordnung definiert. Der Spezialfall $k = 2$, $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ und $a_0 = a_1 = 1$ liefert die Fibonacci-Zahlen aus Beispiel 2.

4. Gamma-Funktion

Für komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit Realteil $\operatorname{Re} z > 0$ ist die Gamma-Funktion definiert durch

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Für die Gammafunktion gilt

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = -e^{-t} t^z \Big|_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-t} z t^{z-1} dt$$

$$= z \cdot \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z).$$

Also gilt die Rekursion $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$, wobei z nicht unbedingt diskret ist. Die Gammafunktion kann daher für $z = t \in \mathbb{N}$ als eine nichtautonome Differenzgleichung erster Ordnung aufgefasst werden. Es folgt für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\Gamma(n) &= (n - 1)\Gamma(n - 1) = (n - 1)(n - 2)\Gamma(n - 2) = \dots = \\ &= (n - 1)!\Gamma(1) = (n - 1)!,\end{aligned}$$

da $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$.

5. Fibonacci-Zahlen (2)

Die Differenzgleichung zur Erzeugung der Fibonacci-Zahlen aus Beispiel 2 lässt sich als ein diskretes dynamisches System darstellen. Sei also wieder

$$x(t + 2) = x(t + 1) + x(t) \tag{1.4}$$

für alle $t \in \mathbb{N}$ und sei $x(0) = x(1) = 1$. Setze nun $y_1(t) = x(t)$ und $y_2(t) = x(t + 1)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}y_1(t + 1) &= x(t + 1) = y_2(t) \quad \text{und} \\ y_2(t + 1) &= x(t + 2) = x(t + 1) + x(t) = y_1(t) + y_2(t).\end{aligned}$$

Für $y(t) = [y_1(t), y_2(t)]^T$ gilt daher

$$y(t + 1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} y(t)$$

für alle $t \in \mathbb{N}$. Also ist die Differenzgleichung zweiter Ordnung (1.4) dargestellt als ein diskretes dynamisches System mit einem zweidimensionalen Zustandsraum $M = \mathbb{R}^2$ und $Ty = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} y$. Für die Lösung mit den Anfangsbedingungen $x(0) = x(1) = 1$ gilt

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^t y(0) \quad \text{mit } y(0) = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nun gilt für alle $t \geq 2$ die Behauptung

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} u_{t-2} & u_{t-1} \\ u_{t-1} & u_t \end{bmatrix},$$

wobei die u_t für $t \in \mathbb{N}$ die Fibonacci-Zahlen sind. Wir zeigen diese Behauptung durch vollständige Induktion über t . Für $t = 2$ gilt

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 & u_1 \\ u_1 & u_2 \end{bmatrix}.$$

Für $t \rightarrow t + 1$ gilt

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{t+1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{t-2} & u_{t-1} \\ u_{t-1} & u_t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_{t-1} & u_{t-2} + u_{t-1} \\ u_t & u_{t-1} + u_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{t-1} & u_t \\ u_t & u_{t+1} \end{bmatrix}. \quad \diamond \end{aligned}$$

1.3 Zum Verhältnis von diskreten dynamischen Systemen und Differenzgleichungen

Ähnlich wie in Beispiel 5 von Abschnitt 1.2 lässt sich jede Differenzgleichung in Normalgestalt als ein diskretes dynamisches System darstellen. Sei

$$x(t+n) = f(t, x(t), x(t+1), \dots, x(t+n-1))$$

für alle $t \in \mathbb{N}$ mit $f : \mathbb{N} \times D^n \rightarrow D$. Setze

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x(t), \\ y_2(t) &= x(t+1), \\ &\vdots \\ y_{n-1}(t) &= x(t+n-2), \\ y_n(t) &= x(t+n-1). \end{aligned}$$

Die Differenzgleichung lautet dann $y_n(t+1) = f(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$ und die Setzungen sind äquivalent zu

$$\begin{aligned} y_1(t+1) &= y_2(t), \\ y_2(t+1) &= y_3(t), \\ &\vdots \\ y_{n-1}(t+1) &= y_n(t). \end{aligned}$$

Mit $y(t) = [y_1(t), \dots, y_n(t)]^T$ und $T_t : D^n \rightarrow D^n$, $T_t y = [y_2, \dots, y_n, f(t, y)]^T$ für $y = [y_1, \dots, y_n]^T$ ergibt sich das nichtautonome diskrete dynamische System

$$y(t+1) = T_t y(t)$$

mit Zustandsraum $M = D^n \subset \mathbb{K}^n$. Hat die Differenzgleichung die Ordnung n , so ist der Zustandsraum des resultierenden diskreten dynamischen Systems n -dimensional. Ist die gegebene Differenzgleichung autonom, so auch das resultierende diskrete dynamische System. Obiger Sachverhalt lässt sich auch so ausdrücken, dass die

gegebene Differenzgleichung n -ter Ordnung äquivalent ist zu einem System von n Differenzgleichungen erster Ordnung. Ist die gegebene Differenzgleichung linear, so auch das resultierende diskrete dynamische System. Dabei versteht man unter einer (affin) *linearen Differenzgleichung n -ter Ordnung* eine Gleichung der Form

$$\sum_{i=0}^n a_i(t)x(t+i) = b_n(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

Gilt $a_n(t) \neq 0$ für alle t , so ist $x(t+n) = f(t, x(t), \dots, x(t+n-1))$ mit

$$f(t, y) = -\frac{1}{a_n(t)} \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)y_{i+1} + \frac{b_n(t)}{a_n(t)}$$

die Normalgestalt von (1.1). Das resultierende (affin) lineare diskrete dynamische System ist $y(t+1) = A(t)y(t) + b(t)$ für alle $t \in \mathbb{N}$ mit

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0(t)}{a_n(t)} & -\frac{a_1(t)}{a_n(t)} & \cdots & \cdots & -\frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} \end{bmatrix}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b_n(t)}{a_n(t)} \end{bmatrix}.$$

Ist $a_n(t) = 0$ für gewisse t , so ist eine Darstellung als diskretes dynamisches System im allgemeinen nicht möglich, wie z. B. bei $tx(t+2) - x(t) = 0$. Es ist im allgemeinen auch nicht möglich, ein diskretes dynamisches System als eine Differenzgleichung höherer Ordnung darzustellen. Z. B. wird durch

$$\begin{aligned} y_1(t+1) &= y_1(t) + ty_2(t), \\ y_2(t+1) &= (t-1)y_1(t) + y_2(t) \end{aligned}$$

für $t \in \mathbb{N}$ ein nichtautonomes lineares diskretes dynamisches System gegeben, in dem weder $y_1(t)$ noch $y_2(t)$ für alle t eliminierbar ist.

Aufgaben

- Durch $Tx = a\sqrt{x} + b$ mit $a > 0$, $b > 0$ und $x_0 \geq 0$ wird ein nichtlineares System definiert (vgl. Beispiel 1 (b), S. 3).
 - Führen Sie die auf S. 3f skizzierten Überlegungen im Detail durch.
 - Erstellen Sie in *MATLAB* ein Programm zur Berechnung der Iterierten von T . Hinweis: Eine Lösung ist das Programm COBWEB, das am Endes dieses Kapitels abgedruckt ist.