Apollonius de Perge, *Coniques*

Tome 1.1: Livre I

Scientia Graeco-Arabica

herausgegeben von
Marwan Rashed

Volume 1

Apollonius de Perge, *Coniques*

Texte grec et arabe établi, traduit et commenté
sous la direction de Roshdi Rashed

Volume 1/1.1

Walter de Gruyter · Berlin · New York

Tome 1.1: Livre I

Commentaire historique et mathématique, édition et traduction du texte arabe

par

Roshdi Rashed

Walter de Gruyter · Berlin · New York

♾ Gedruckt auf säurefreiem Papier, das die US-ANSI-Norm
über Haltbarkeit erfüllt.

ISBN 978-3-11-019937-6

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Printed in Germany

Umschlaggestaltung: Christopher Schneider, Berlin
Druck und buchbinderische Verarbeitung: Hubert & Co. GmbH & Co. KG, Göttingen

AVANT-PROPOS

Le traité d'Apollonius sur les *Coniques* que nous lisons aujourd'hui a été reconstitué à partir d'une édition partielle, réalisée par Eutocius huit siècles après sa rédaction, et d'une traduction arabe qui remonte au milieu du IXe siècle. On imagine sans peine les problèmes à résoudre et les obstacles à surmonter pour établir un texte considéré à juste titre comme l'un des monuments de la pensée mathématique. Expliquons-nous.

Initialement, Apollonius avait composé son traité en huit livres, dont il rappelle l'ordre et les thèmes dans sa préface. De certains de ces livres, il a d'ailleurs donné plusieurs rédactions. Le premier accident dont l'ouvrage fut victime est la perte définitive du huitième livre. Des sept livres restants, les quatre premiers nous sont parvenus en grec dans une *édition* d'Eutocius, du sixième siècle. La première édition de cette version d'Eutocius a été publiée par Commandino en 1566 à Bologne. Edmund Halley a repris le travail en 1710 ; puis, en 1891, I. L. Heiberg, avec la compétence que l'on sait, a donné la première édition vraiment critique de la version d'Eutocius.

Mais ces quatre premiers livres existent en arabe, dans une traduction de l'ensemble des sept livres. Or cette traduction des quatre premiers livres n'a retenu l'intérêt ni des éditeurs, ni des historiens. Seuls les trois derniers, perdus en grec, furent objet de leurs soins. E. Halley en a donné une traduction latine, rendue depuis dans plusieurs langues européennes. En 1889 Ludwig Nix a publié l'édition des huit premières propositions du cinquième livre, ainsi que la traduction allemande des cinq premières et de la moitié de la sixième. G. J. Toomer a fait paraître en 1990 une édition des trois derniers livres des *Coniques*, ainsi qu'une version anglaise.

Ces travaux, estimables pour la plupart, ainsi que les traductions qui en ont été faites aussi bien que les commentaires des historiens, s'accordent sur un même parti pris, devenu depuis longtemps une opinion commune : on laisse entendre, parfois même on déclare, que l'édition d'Eutocius nous livrerait le texte même d'Apollonius[1]. Corollaire pour ainsi dire de la précédente opinion : la traduction arabe des quatre premiers livres – que l'on n'avait jamais examinée – serait celle de ce même texte d'Eutocius. Quant

[1] Par exemple, Th. Heath écrit : « Seven Books only out of the eight have survived, four in the *original* Greek (souligné par nous), and three in an Arabic translation » (*Apollonius of Perga. Treatise on Conic Sections*, Cambridge, edited in modern notation by Th. L. Heath, Cambridge, 1896 ; repr. 1961, p. lxviii).

aux défauts, aux écarts, aux différences, ils seraient le fait ou bien des traditions manuscrites, ou bien des traducteurs.

Cette opinion commune a engagé bien des conséquences, dont deux nous importent ici : les éditeurs se sont crus dispensés de consulter la traduction arabe lors de l'établissement du texte d'Eutocius[2] ; les traducteurs, prenant ce dernier pour modèle, ont pris la liberté – Ver Eecke par exemple – de modifier la traduction (latine de l'arabe) pour en rendre l'expression et le style conformes au modèle grec disparu, c'est-à-dire à ceux de la version d'Eutocius. Les uns comme les autres, et ce n'est pas la moindre des conséquences, se sont ainsi privés d'une confrontation génératrice de questions relatives au texte, qui leur auraient ouvert des pistes et les auraient rapprochés autant qu'il est possible de l'original d'Apollonius.

Or cette opinion commune ne résiste pas à l'examen. On verra notamment dans les pages suivantes qu'il existe des différences assez remarquables et souvent irréductibles entre l'édition d'Eutocius et la traduction arabe des quatre premiers livres ; que, bien plus, tout semble indiquer qu'elles n'appartiennent pas à la même tradition textuelle des *Coniques*. On verra en particulier que le quatrième livre de la recension d'Eutocius comparé à sa version arabe est défectueux et, en bien des endroits, d'authenticité douteuse[3]. On verra enfin que cette traduction arabe a elle-même circulé sous deux formes et non pas une seule comme on le croyait.

Comment dans de telles conditions un travail partiel ne serait-il pas condamné d'avance ? Seule la mise en œuvre de plusieurs chantiers permettait d'établir le texte le plus sûr possible de l'ensemble, et d'en donner la traduction la plus rigoureuse. Telle est l'intention qui anime cette nouvelle édition des *Coniques*, ainsi que leur nouvelle traduction. Dans les deux cas, qu'il s'agisse du texte grec ou de la version arabe, l'intention principale est de restituer le texte de l'archétype au mieux, et non pas bien entendu celui d'Apollonius. À cela il fallait ajouter les commentaires qu'appelle un tel monument mathématique.

Quant au commentaire mathématique que nous soumettons ici au lecteur, nous l'avons voulu aussi concis et clair que possible. L'unique objectif était d'identifier les résultats auxquels était parvenu Apollonius dans ses *Coniques*, ainsi que les difficultés qui, selon nous, y subsistaient. En suivant pas à pas l'ordre des propositions, nous avons systématiquement transcrit la

[2] Notons toutefois que E. Halley, qui a traduit en latin les livres V, VI et VII des *Coniques* à partir de la traduction arabe (voir p. 226-227), a tenté, grâce à elle, de combler les lacunes de la version d'Eutocius des quatre premiers livres.

[3] Voir R. Rashed, « Arabic Versions and Reediting Apollonius' *Conics* », dans *Study of the History of Mathematics*, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto, Avril 2007, p. 128-137.

démonstration d'Apollonius. Il a parfois fallu, au cours de ce travail d'élucidation, recourir à la langue et aux concepts d'une autre géométrie, ceux de la géométrie algébrique notamment.

Ce mode d'exposition présente certes l'inconvénient de contraindre le lecteur pressé, s'il veut connaître l'évolution de tel ou tel concept – diamètre, diamètre conjugué, tangente, … – à lire les différentes propositions où celui-ci intervient, et leur commentaire. Mais cet inconvénient est selon nous amplement compensé par l'étude systématique du texte ainsi permise, et par la possibilité d'exploiter au mieux les améliorations qu'apporte la nouvelle édition. Ce bénéfice sera patent au moment d'étudier le quatrième livre des *Coniques*, en bien piètre état dans l'édition d'Eutocius (voir plus loin).

Le recours aux termes de la géométrie algébrique risque de déplaire. Il est vrai que la transcription ne laisse planer aucun doute sur le projet d'Apollonius et la *mathesis* élaborée dans les *Coniques*. Il s'agit bien d'une théorie géométrique des sections coniques : point de géométrie algébrique, point de géométrie projective et point de géométrie différentielle. Et pourtant, nous avons pris la liberté de recourir dans nos commentaires à la géométrie algébrique, encourant ainsi, en toute connaissance de cause, un reproche d'anachronisme de la part des gardiens du temple. Il nous faut nous expliquer sur ce parti pris, à première vue paradoxal.

Dire que les *Coniques* sont un livre de géométrie, c'est enfoncer une porte ouverte. Il suffit de jeter un coup d'œil sur ce traité pour y constater l'absence de toute équation d'une courbe plane et, d'ailleurs, du moindre concept algébrique. On vérifiera par exemple, chemin faisant, ce qui est loin d'être une nouveauté, que le concept central de *symptoma* n'est nullement équivalent à celui d'équation. Les éminents mathématiciens et historiens qui ont procédé par une lecture algébrique des *Coniques* n'ignoraient pas – ne pouvaient ignorer – qu'ils avaient affaire à un livre de géométrie. Ainsi Th. Heath, lorsqu'il écrit :

> […] the Greek geometers in general seem to have connected the conic sections with the cone only because it was in their view necessary to give the curves a geometrical definition expressive of their relation to other known geometrical figures, as distinct from an abstract definition as the loci of points satisfying certain conditions. Hence *finding* a particular conic was understood as being synonymous with *localising* it in a cone, and we actually meet with this idea in Apollonius I.52-58, where the problem of « finding » a parabola, an ellipse, and a hyperbola satisfying certain

conditions takes the form of finding a cone of which the required curves are sections[4].

Primauté du cône, rôle de la figure, voilà ce qui révèle le fond géométrique de la démarche d'Apollonius. Mais Th. Heath lui-même opte pour le commentaire algébrique. Par exemple, à propos du *symptoma* de la parabole, il écrit : « [...] the fundamental property proved from the cone for the parabola is that expressed by the Cartesian equation $y^2 = px$, where the axes of coordinates are any diameter (as the axis of x) and the tangent at its extremity (as the axis of y) »[5], donnant de même une interprétation analytique pour les coniques à centre.

Th. Heath savait mieux que quiconque comment Apollonius obtenait ces courbes, c'est-à-dire de manière toute géométrique ; il n'ignorait pas non plus que le mathématicien alexandrin devait avoir les figures sous les yeux pour conduire une démonstration dans la langue de la théorie des proportions, et qu'il y trouvait la source de son inspiration et de ses intuitions. Et cependant, Th. Heath n'a pas hésité à lire les *Coniques* à la lumière de la géométrie algébrique. Plus encore, il a justifié cette lecture par la fameuse doctrine de « l'algèbre géométrique des Grecs », déjà défendue par Zeuthen et Tannery, et selon nous historiquement insoutenable.

Il serait à la fois léger et injuste de voir dans ce double regard le signe d'une inconsistance ou d'une ignorance de la part d'aussi éminents historiens et mathématiciens. Il s'agit plutôt, nous semble-t-il, de l'effet du choix délibéré d'un style d'écriture de l'histoire, par élucidation rétrograde, telle que la pratiquait Bourbaki : partir du présent pour restituer le passé ; et aussi d'un souci didactique : s'adresser aux contemporains dans la langue de leurs mathématiques.

Quoi qu'il en soit, nos raisons de recourir aux moyens de la géométrie algébrique dans nos commentaires sont différentes. Elles relèvent de deux ordres, instrumental et historiographique.

La raison instrumentale est liée à une question générale : comment lire une œuvre mathématique ancienne ? Cette œuvre est le produit d'une rationalité mathématique qui, si elle diffère de la nôtre, est cependant traduisible dans la nôtre. Mais ce n'est pas la seule difficulté. Il arrive souvent que notre information sur l'auteur, ses prédécesseurs, son milieu ou la rédaction de son œuvre, soit pauvre et lacunaire. Il arrive aussi que l'œuvre – comme au reste les *Coniques*, mais aussi les *Arithmétiques* de Diophante ou les *Sphériques* de Ménélaüs, parmi bien d'autres – ait subi des accidents graves

[4] *Treatise on Conic Sections*, éd. Th. Heath, p. xcvii.
[5] *Treatise on Conic Sections*, éd. Th. Heath, p. lxxix.

au cours de sa transmission. Il arrive enfin qu'il faille attendre des siècles, parfois plus d'un millénaire, pour assister à la réactivation de cette œuvre et comme à sa renaissance. La somme de ces vicissitudes, c'est l'histoire d'un livre. Or, cette situation, les exemples en sont légion, fait souvent le lit d'une profusion de conjectures, qui tendent alternativement à paralyser l'historien ou à le transformer en glosateur des gloses de ses collègues. Pour échapper à cette impasse, il convient plutôt de mettre en place, une fois le texte établi de manière aussi rigoureuse que possible, des outils pour en sonder la richesse, en saisir les réseaux structurels sous-jacents, en contrôler les résultats mathématiques et en tester les limites logiques internes. Au surplus, c'est seulement de cette manière qu'est susceptible de se manifester ce qui a fait de cette œuvre une source inépuisable pour les mathématiques ultérieures, lui assurant une actualité plusieurs fois renouvelée au cours des siècles.

Si cependant l'on interroge l'œuvre en demeurant dans la *mathesis* qui est la sienne, on peut sans doute commenter les locutions de l'auteur par d'autres phrases, tirées ou non du texte ; et ce commentaire, s'il est bien mené, c'est-à-dire s'il ne se borne pas à revêtir les vieilles vérités de nouveaux habits spéculatifs ou, pire, à les corriger sur un ton de maître d'école, peut certes éclairer certains aspects de l'œuvre. Il demeure cependant intrinsèquement limité, et risque de paraphraser en mots la transcription mathématique du texte. Pour lire une œuvre mathématique ancienne, il nous a donc semblé nécessaire de solliciter l'aide d'une autre mathématique, à laquelle on emprunte les instruments qui pourront en restituer l'essence. Un modèle construit dans une autre langue mathématique permet en effet d'aller plus loin dans l'intelligence du texte, particulièrement lorsque cette langue est celle d'une mathématique plus puissante, mais qui trouve dans l'œuvre commentée l'une de ses sources historiques. Pour les *Coniques*, c'est la géométrie algébrique élémentaire qui fournit ce modèle.

Bref, si l'usage *instrumental* d'une autre mathématique pour commenter une œuvre ancienne nous a semblé indispensable, c'est surtout en raison de ce rapport diffus d'identité et de différence qui les unit l'une à l'autre. Que l'instrument, le modèle, ne soient pas l'objet, c'est un truisme. Ils ne relèvent tout simplement pas de la même *mathesis*.

L'autre raison, historiographique cette fois, justifiant le recours à la langue de la géométrie algébrique tient au regard porté sur les contextes auxquels on devrait rapporter l'œuvre mathématique ancienne, c'est-à-dire à la détermination exacte de sa position historique. Il y a bien entendu le contexte de l'auteur et de ses prédécesseurs. Mais on songe aussi à celui de ses successeurs créatifs. C'est en effet à leur contact que va le plus nettement se dégager ce que l'œuvre recelait en puissance et que ceux-ci ont actualisé au moment même où ils découvraient de nouvelles disciplines.

Dans le cas des *Coniques*, on observe, à partir du IXe siècle, une extension de certains de leurs chapitres, ainsi que leur application aux domaines les plus divers et leur contribution, essentielle, à la création de la géométrie algébrique élémentaire. Il suffit pour s'en convaincre de lire l'*Algèbre* d'al-Khayyām[6], *Les Équations* de Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī[7], la *Géométrie* de Descartes[8], la *Dissertation Tripartite* de Fermat[9]. Négliger le contexte des successeurs conduit inévitablement à tronquer l'histoire de l'œuvre. Même s'ils transforment son sens, les successeurs permettent en effet à l'historien de voir l'œuvre avec davantage de clarté et de profondeur. Cette préoccupation a été la nôtre ailleurs.

En bref, la tâche de l'interprète des *Coniques* n'est pas de disséquer des interprétations. Il s'agit plutôt – et c'est là que nous a semblé, à nous du moins, résider le véritable défi – à l'aide de tous les moyens philologiques, historiques et mathématiques dont il dispose, de faire progresser la recherche historique plus loin, ou un peu plus loin, que là où l'ont déjà menée ses éminents prédécesseurs (E. Halley, I. H. Heiberg, P. Ver Eecke notamment).

Pour réaliser ce projet, il fallait accomplir les tâches suivantes :

1° L'*editio princeps* des quatre premiers livres de la version arabe des *Coniques*, qui est bien différente de la recension d'Eutocius de ces mêmes livres ;
2° une nouvelle édition des quatre premiers livres de la version d'Eutocius ;
3° une nouvelle édition des trois derniers livres des *Coniques* (V, VI, VII) perdus en grec et conservés seulement dans la traduction arabe ;
4° traduction française rigoureuse de tous ces livres ;
5° commentaires historiques et mathématiques de l'ensemble.

Un tel projet requiert la mobilisation de plusieurs compétences, dont les exigences conjuguées réduisent autant que possible le risque d'erreur.

Dans cette collaboration, Madame Micheline Decorps-Foulquier s'est chargée de l'établissement du texte grec de l'édition d'Eutocius ; la traduction française de ce même texte est l'œuvre de Michel Federspiel. J'ai pour ma part établi et traduit le texte arabe, et rédigé les commentaires mathéma-

[6] R. Rashed et B. Vahabzadeh, *Al-Khayyām mathématicien*, Paris, 1999.

[7] *Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī, Œuvres mathématiques. Algèbre et géométrie au XIIe siècle,* Collection Sciences et philosophie arabes - textes et études, 2 vol., Paris, 1986.

[8] Voir R. Rashed, « La *Géométrie* de Descartes et la distinction entre courbes géométriques et courbes mécaniques », dans J. Biard et R. Rashed (éd.), *Descartes et le Moyen Âge*, Études de philosophie médiévale LXXV, Paris, 1997, p. 1-26.

[9] R. Rashed, « Fermat and Algebraic Geometry », *Historia Scientiarum*, 11.1, 2001, p. 24-47.

tiques et historiques de l'ensemble. J'assume seul la responsabilité de ce travail, ainsi que des erreurs éventuelles. Les figures de tous les textes grecs, arabes, français, à quelques modifications près, ont été tracées par Madame Françoise Rashed que nous remercions tous pour son aide.

Je remercie vivement M. Christian Houzel pour son soutien amical ainsi que pour sa lecture toujours pertinente et les corrections qu'il a apportées au commentaire mathématique.

Madame Aline Auger a dispensé sa rigueur et son efficacité pour préparer le manuscrit à l'édition et composer le glossaire et les index du premier tome.

Sans eux le projet ne pouvait aboutir.

Roshdi RASHED
Bourg-la-Reine, novembre 2007

SOMMAIRE

SIGLA

< > Ces crochets isolent dans le texte arabe ce qui est ajouté pour combler une lacune du manuscrit. Dans la traduction française, ils sont maintenus seulement pour les titres ; ils sont introduits pour isoler un ajout au texte arabe, nécessaire à l'intelligence du texte français.

[ ] Ces crochets sont utilisés seulement dans le texte arabe pour indiquer que le mot ou le passage ainsi isolés doivent être supprimés pour la cohérence du texte.

/ Ce signe indique la fin du folio d'un manuscrit.

Les manuscrits sont désignés par les lettres suivantes :

[A]	[ا]	Istanbul, Süleymaniye, Aya Sofia 2762
[B]	[ب]	Oxford, Bodleian, Marsh 667
[C]	[جـ]	New York, Columbia University, Smith or. 45
[D]	[د]	Meshed 5391
[E]	[ه]	Téhéran, Sepahsalar 556
[F]	[و]	Florence, Laurenziana, or. 38
[G]	[ز]	Alger, BN, 1446
[Gh]	[غ]	Aligarh, Un. Coll. I
[H]	[ح]	Istanbul, Topkapi Saray, Ahmet III, 3455
[K]	[ك]	Oxford, Bodleian, Thurston 1
[Kh]	[خ]	Téhéran, Sepahsalar 557
[L]	[ل]	Leiden, or. 14
[N]	[ن]	Istanbul, Yeni Cami 803
[M]	[م]	Téhéran, Millī 3597
[Ma]	[ما]	Manisa, Genel 1706
[O]	[ع]	Oxford, Bodleian, Thurston 3
[P]	[ف]	Istanbul, Topkapi Saray, Ahmet III, 3463
[R]	[ر]	Rampur 2906
[S]	[س]	Meshed 5619
[Ṣ]	[ص]	Istanbul, Süleymaniye, Aya Sofia 2724
[Q]	[ق]	Istanbul, Askari Müze 3025
[T]	[ت]	Téhéran, Millī Malik 867
[Th]	[ث]	Londres, India Office, 924=Loth 745
[W]	[ض]	Florence, Laurenziana, or. 22
[X]	[ش]	Istanbul, Süleymaniye, Carullah 1507
[Y]	[ي]	Istanbul, Süleymaniye, Aya Sofia 4832
[Z]	[ذ]	Edinburgh, or. 28

Première Partie

CHAPITRE I

LES VERSIONS DES *CONIQUES*

1. INTRODUCTION

Les *Coniques* sont le principal ouvrage rédigé par Apollonius, et l'un des sommets de la géométrie grecque. Référence incontestable en géométrie des coniques jusque tard dans le XVIII^e siècle, ce livre est l'un des monuments de l'histoire des mathématiques. Ignorer les *Coniques*, c'est s'interdire de rien comprendre au développement de la recherche mathématique, notamment à partir du IX^e siècle. C'est en effet à partir de cette époque, et rarement avant, que l'ouvrage d'Apollonius sera lu, commenté, développé, et ce durant quelques siècles. Cet intérêt est à nouveau sensible au XVII^e siècle, mais sous d'autres cieux. Tout se passe comme si, chaque fois que renaît la recherche en mathématiques classiques, on revenait aux *Coniques* d'Apollonius comme aux travaux d'Archimède.

Même si les origines de la théorie des coniques sont loin d'être connues, nous sommes quand même en mesure de savoir qu'elles remontent bien loin avant Apollonius. C'est cependant lui qui non seulement sera le premier à traiter les coniques de manière synthétique, mais inaugurera de nouvelles voies de recherche. Selon les indications que nous avons, dont une partie substantielle nous vient d'Apollonius lui-même dans les différents préambules aux livres des *Coniques*, et notamment au quatrième, l'auteur serait l'héritier de trois traditions au moins. Il aurait d'ailleurs principalement, mais non exclusivement, consacré les quatre premiers livres à faire la synthèse des résultats obtenus par ses prédécesseurs.

Il n'est pas question de retracer ici l'histoire de ces traditions, laquelle a déjà été narrée en détail et avec talent par Zeuthen[1], Heath et Heiberg[2], pour ne citer qu'eux. Nous nous contenterons d'en rappeler l'existence, afin de fixer la place des *Coniques*.

[1] H. G. Zeuthen, *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, Mit einem vortwort und Register von J. E. Hofmann, Copenhague, 1886 ; repr. Hildesheim, 1966.

[2] Th. L. Heath, *Apollonius of Perga. Treatise on Conic Sections*, Cambridge, 1896 ; *Apollonii Pergaei quae graece exstant cum commentariis antiquis, edidit et latine interpretatus est I. L. Heiberg*, 2 vol., Leipzig, 1891, 1893 ; repr. Stuttgart, 1974.

La première des traditions évoquées par les historiens est représentée par Ménechme, le disciple d'Eudoxe. Il s'agit de mathématiciens qui voulaient étudier les problèmes solides à l'aide des sections coniques. Ménechme, selon le témoignage d'Eutocius, a ainsi procédé pour insérer deux moyennes géométriques. Cette recherche a ensuite été poursuivie, comme l'atteste un texte de Dioclès[3].

La seconde tradition, dont on ne souligne pas assez l'importance, est celle de la recherche sur les miroirs ardents et sur les gnomons. On a montré qu'avant Dioclès et dans le milieu de Conon d'Alexandrie – avec Dosithée par exemple – on avait étudié les propriétés anaclastiques de la parabole, abordant ainsi une telle courbe à l'aide du foyer et de la directrice. Cette méthode ne sera pas suivie par Apollonius[4], qui s'intéressera au foyer pour les coniques à centre. D'autre part O. Neugebauer, dans un article célèbre, a pu conjecturer qu'aux origines de la théorie des coniques se trouvait l'étude des gnomons[5].

De la troisième tradition nous sont parvenus les échos de deux livres perdus, l'un d'Aristée l'Ancien, l'autre d'Euclide. Le premier avait composé un livre sur les lieux solides ; le second avait rédigé des *Éléments des coniques*. Le titre du livre perdu d'Aristée exprime la conception qu'il se faisait des sections coniques : ce sont des lieux géométriques. Peut-être est-ce dans ce livre que Pappus avait trouvé – directement ou non – la proposition selon laquelle le lieu des points dont le rapport des distances à un point et à une droite donnés est constant, est une conique. Il est tout aussi vraisemblable que ce livre contenait l'étude des lieux à trois ou à quatre droites, c'est-à-dire les lieux des points dont le rapport du carré de la distance à une première droite, au produit des distances à deux autres droites, est donné : lieu à trois droites, ou bien lieu à quatre droites, celui des points dont les produits des distances à deux droites est dans un rapport donné au produit des distances à deux autres droites. En d'autres termes, soit a_i, $i = 1, 2, 3$, trois droites ; un lieu dit à trois droites est le lieu des points dont les distances d_i des droites a_i vérifient $d_1 d_3 = k d_2^2$; pour quatre droites a_i, $i = 1, 2, 3, 4$, on a

$$d_1 d_3 = k d_2 d_4.$$

[3] Dioclès, *Fī al-marāyā al-muḥriqa*, dans *Les Catoptriciens grecs.* I : *Les miroirs ardents*, édition, traduction et commentaire par R. Rashed, Collection des Universités de France, Paris, 2000.

[4] *Les Coniques d'Apollonius de Perge*, Œuvres traduites pour la première fois du grec en français, avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke, Nouveau tirage Paris, 1959, Livre III.

[5] « Apollonius-Studien », *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, Abteilung B, Band 2, 1933, pp. 215-254.

Ces lieux sont des sections coniques[6]. On sait tout l'intérêt que Descartes portera plus tard à ce problème dans sa *Géométrie*.

Quoi qu'il en soit, c'est d'Archimède que nous viennent les premiers témoignages documentés.

Ses différents travaux, notamment *Sur les conoïdes et les sphéroïdes* et *La Quadrature de la parabole*, montrent que les sections coniques étaient bien connues avant Apollonius. Ce dernier nous apprend d'ailleurs, dans le préambule au quatrième livre, que Conon d'Alexandrie et ses correspondants s'en étaient sérieusement occupés.

Les noms que portaient alors les coniques, et qui semble-t-il les désigneront jusqu'à l'époque d'Apollonius, nous informent sur le procédé de leur construction : section de cône circulaire à angle droit, aigu et obtus désignaient ce qui sera plus tard parabole, ellipse et hyperbole. On obtenait alors ces sections en coupant un tel cône par un plan perpendiculaire à l'une de ses génératrices. Pour fixer les idées, considérons un seul exemple, celui de la section à angle aigu – l'ellipse.

Soit un cône à angle aigu d'axe SL et de génératrice SA. Dans le plan ASL on mène AB perpendiculaire à SA et on considère le plan sécant perpendiculaire au plan ASL suivant AB. D'un point M de la section on mène MT perpendiculaire au plan ASL ; MT est donc perpendiculaire à AB. Par M passe un plan perpendiculaire à SL qui coupe le cône suivant un cercle de diamètre PQ ; le point T est le point d'intersection de AB et de PQ.

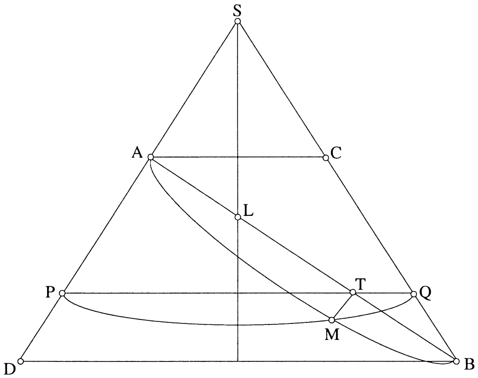


Fig. 1

On a, d'après les propriétés du cercle (*Éléments*, I.35), $MT^2 = TP \cdot TQ$.

On mène AC et BD perpendiculaires à SL ; on a

[6] Cette assertion est démontrée par R. Catesby Taliaferro, *Apollonius of Perga. Conics, Books I-III*, Sante Fe New Mexico, 2000, p. 267-275.

$$\frac{TP}{BD} = \frac{TA}{AB} \quad \text{et} \quad \frac{TQ}{AC} = \frac{TB}{AB},$$

donc

$$(1) \qquad \frac{MT^2}{TA \cdot TB} = \frac{BD \cdot AC}{AB^2}.$$

Or l'axe SL coupe AB en L. Les triangles ASL et ABD sont semblables, car $A\hat{S}L = C\hat{A}B = A\hat{B}D$; on a donc $\frac{BD}{AB} = \frac{SL}{AS}$, et dans le triangle SAL semblable à ALH, on a $\frac{SL}{AS} = \frac{2AL}{AC}$; donc

$$(2) \qquad \frac{BD}{AB} = \frac{2AL}{AC}.$$

De (1) et (2) on a

$$\frac{MT^2}{TA \cdot TB} = \frac{2AL}{AB}$$

et la section étudiée est une section à angle aigu – ellipse – qui a $2AL$ pour côté droit.

C'est sous cette forme, ou sous une autre, équivalente, que l'on avait trouvé les propriétés fondamentales de l'ellipse : le rapport du carré de l'ordonnée au rectangle formé de deux segments sur le diamètre est égal à celui du double du segment jusqu'à l'axe ($2\,AL$) au diamètre.

Dans cette démarche, on remarque d'une part que le lieu des points est ramené à une conique ; et d'autre part que la continuité de celle-ci est bien assurée, puisqu'elle relève de la continuité du cône droit.

L'ouvrage perdu d'Aristée comprenait, semble-t-il, cinq livres. Selon la tradition, Euclide aurait complété le travail en composant à son tour un traité, les *Éléments des coniques*. Nous avons évoqué les travaux de Conon et d'Archimède. Pour montrer le niveau atteint par la recherche sur les coniques, rappelons un résultat obtenu par ce dernier, dit « propriété de la puissance » : deux sécantes menées d'un point A coupant la conique, la première en D et en E, la seconde en F et en G, on a le rapport $\frac{AD \cdot AE}{AF \cdot AG}$, qui ne dépend pas du point A mais seulement des directions des deux sécantes.

Héritier de ces traditions, Apollonius conçoit son ouvrage en huit livres, dont les quatre premiers sont destinés à compléter l'acquis et à systématiser le tout. Les quatre derniers, en revanche, exposent de nouvelles recherches et ouvrent de nouveaux domaines. De ces huit livres, seuls sept nous sont parvenus, le dernier ayant été perdu relativement tôt.

C'est Apollonius lui-même qui, dans la préface aux *Coniques*, trace l'organisation de l'ouvrage en précisant les thèmes qu'il aborde dans chacun des huit livres. Dans le premier, il étudie les sections planes d'un cône à base circulaire, droit ou oblique, et montre que ses sections sont identiques à celles obtenues par ses devanciers. Les anciens noms, naguère liés à l'intersection d'un cône de révolution et d'un plan, nous l'avons dit, n'ont plus lieu d'être, et ne survivront pas. Désormais on ne parlera plus que de parabole, d'ellipse, d'hyperbole, et de « sections opposées » pour désigner les deux branches de l'hyperbole. Ces noms renvoient d'une part au mode de génération des sections planes et ensuite à leur caractérisation par la propriété fondamentale de chacune de ces courbes. Dans la parabole, par exemple, on applique (παραβάλλειν) le carré de l'ordonnée [y] sur le côté droit [a] et on obtient un rectangle de côté [x]. Ainsi, en procédant à cette application, on obtient l'abscisse, et, dans le langage algébrique, on a $y^2 = ax$. Considérons encore l'exemple de l'ellipse, avec pour axe AB et pour ordonnée TM ; le point M est un point courant de la section, et on pose AC le côté droit avec AC perpendiculaire à AB. Soit MT perpendiculaire à AB, on a

$$\frac{MT^2}{TA \cdot TB} = \frac{AC}{AB},$$

d'après ce qui précède.

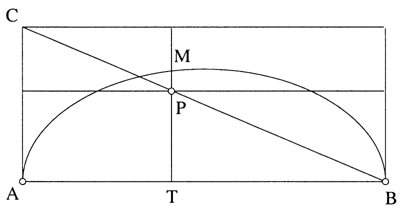


Fig. 2

La diagonale BC coupe MT en P ; les triangles TPB et ACB sont homothétiques, donc $\frac{AC}{AB} = \frac{TP}{TB}$; d'où

$$MT^2 = TP \cdot TA = \text{rectangle } AP = \text{aire rectangle } TC - \text{aire rectangle } PC \text{ ;}$$

c'est-à-dire que l'aire du rectangle *TC* est déficiente (ἔλλειμα) de l'aire du rectangle *PC*.

Il s'agit de la méthode d'application des aires : le carré de l'ordonnée est appliqué sur le côté droit *AC*, avec un défaut, le rectangle *CP*, semblable au rectangle donné de diagonale *CB*.

C'est par un procédé analogue que l'on obtient l'hyperbole, l'application étant cette fois avec un excès (ὑπερβολή) de forme donnée. Notons qu'Apollonius est le premier, à notre connaissance, à avoir considéré les deux branches de l'hyperbole comme une seule courbe, ce qui lui a permis d'établir un parallélisme parfait entre les trois sections coniques et donc d'unifier l'exposé, même s'il réservait le nom d'« hyperbole » à une seule branche pour appeler la courbe entière : les sections opposées[7].

Dans ce livre, Apollonius s'occupe notamment des tangentes aux trois sections coniques et des propriétés des diamètres. C'est à son propos qu'il écrit qu'il comprend le mode de génération des trois sections et des sections opposées, ainsi que leurs propriétés fondamentales, qui font l'objet d'un traitement plus étendu et plus général que sous la plume d'autres[8]. Il ne s'agit donc pas d'une simple reprise des acquis de ses prédécesseurs, comme nous l'avons souligné.

Dans le second livre, Apollonius traite des asymptotes et des diamètres conjugués. Il y considère les hyperboles conjuguées construites dans les angles supplémentaires formés par les asymptotes, l'axe transverse de l'une étant l'axe non transverse de l'autre. Les segments déterminés sur une sécante entre une hyperbole et ses asymptotes sont égaux. En particulier un segment de tangente entre les asymptotes a pour milieu le point de contact.

Les vingt-trois premières propositions de ce livre sont donc consacrées à l'hyperbole, et, en particulier, à la définition et aux propriétés de l'asymptote. Les propositions suivantes étudient pour des sections coniques quelconques des propriétés relatives à deux sécantes ou à deux tangentes, ou à une sécante et à une tangente. Les sept dernières propositions sont des problèmes de construction.

Le troisième livre, selon les termes mêmes de l'auteur, contient un grand nombre de théorèmes admirables, utiles à la construction des lieux solides et aux diorismes, et dont la plupart et les plus beaux sont nouveaux[9]. C'est dans ce livre qu'Apollonius établit des propriétés des coniques

[7] Le mathématicien du Xe siècle, al-Khāzin, explique cette terminologie d'une manière analogue (voir Note complémentaire [9]). Rappelons qu'il y a quelques différences entre le texte grec et le texte arabe.

[8] Voir *infra*, p. 250-252.

[9] Voir *infra*, p. 252.

indépendantes des axes et des diamètres : théorème de la puissance, ainsi que d'autres propriétés qui peuvent être traduites dans une autre mathématique par pôles et polaires, génération d'une conique par deux faisceaux de droites en homographie ; quelques enveloppes de droites : droites joignant deux points sur Ox et Oy vérifiant $xy = c^2$, ou joignant les points homologues de deux divisions semblables. Apollonius étudie également dans ce livre les propriétés focales de l'ellipse et de l'hyperbole, mais non celles de la parabole.

Le quatrième livre représente l'aboutissement de la recherche menée à Alexandrie dans le milieu de Conon. Apollonius y étudie le nombre maximum des points communs à deux coniques. Voici comment lui-même le présente, ainsi qu'on peut le lire dans la traduction arabe (la version grecque aussi bien que le témoignage de Pappus que la version arabe, en ce lieu, soulèvent un problème textuel[10]) :

> Dans le quatrième livre, nous avons montré de combien de manières les sections de cônes se rencontrent les unes les autres, et rencontrent la circonférence du cercle, l'arc de cercle, et bien d'autres choses[11].

Pour les quatre livres qui restent, Apollonius est bref, sinon allusif. Il note cependant leur richesse, si on les compare aux quatre précédents. D'après lui, en effet, les quatre premiers livres, en dépit des nouveautés qu'ils renferment et qu'il ne manque pas de rappeler, sont cependant les moins originaux. Ils sont pour l'essentiel consacrés à une mise au point synthétique et rigoureuse de l'acquis, ainsi qu'à son achèvement. C'est à partir du cinquième livre que commencent les nouvelles recherches. Apollonius y étudie les droites de longueurs *maxima* et *minima* que l'on peut mener d'un point à une conique, aussi bien que les normales à la courbe. Les points singuliers ainsi obtenus forment ce qui plus tard sera reconnu comme développées des trois courbes. Les pieds des normales issues d'un point sont obtenus par l'intersection de la courbe et de l'« hyperbole d'Apollonius ». C'est en discutant le nombre des points communs, c'est-à-dire en faisant appel au quatrième livre, qu'on obtient les enveloppes.

Le sixième livre est pour l'essentiel consacré à l'étude de l'égalité et de la similitude de deux sections coniques, ou de deux portions – arcs ou

[10] Voici la traduction du texte grec : « Le quatrième traite des différentes manières dont les sections de cône se rencontrent entre elles et rencontrent la circonférence de cercle ; il comprend en outre d'autres considérations. Dans tout cela, il y a deux points qui ne se trouvent pas chez mes prédécesseurs, la question du nombre de points où la section de cône ou la circonférence de cercle rencontrent <des sections opposées> ». Cette dernière expression a été ajoutée à titre conjectural par Heiberg (I, p. 4, 17-22). Voir Note complémentaire [1].

[11] Voir *infra*, p. 252 ; ar. p. 253, 11-13.

segments – de sections coniques. Ces arcs ou ces segments peuvent appartenir à une même section ou à deux sections différentes. Apollonius établit, pour chaque type de section conique, la condition nécessaire et suffisante pour que deux sections restent égales, ainsi que celle exigée pour que deux sections soient semblables.

Dans le septième livre, Apollonius établit des relations entre les longueurs des diamètres, des diamètres conjugués et des côtés droits qui leur sont associés. Relations portant souvent sur des sommes, des différences ou des carrés de longueur, c'est-à-dire des relations métriques. Dans son introduction à ce livre, Apollonius affirme que ces propositions ont leur utilité principale dans la discussion de nombreux problèmes et, en particulier, de ceux qui sont résolus et démontrés au huitième livre, lequel n'existe malheureusement plus.

Cette esquisse nous donne un aperçu de l'immensité du terrain balayé, et des hauteurs où dominent les *Coniques*. Rien d'étonnant s'il a fallu attendre deux millénaires avant d'aller plus loin. Nous allons reprendre chacun de ces livres en le commentant avec les détails nécessaires. Mais avant de nous engager dans le premier livre, il nous faut revenir à l'ouvrage lui-même pour discuter de la nature du texte qui est entre nos mains.

2. L'ÉDITION D'EUTOCIUS DES QUATRE PREMIERS LIVRES DES *CONIQUES*

Cette expression que nous utilisons tout au long de cette étude n'a certes pas le sens admis aujourd'hui. Il faut nous interroger sur celui que lui donne Eutocius lui-même dans son *Commentaire* des *Coniques* lorsqu'il écrit :

> Puisqu'il existe plusieurs *éditions* de l'ouvrage, comme Apollonius le dit lui-même dans sa lettre, j'ai pensé qu'il était expédient de les réunir en une seule, en plaçant dans le texte les parties les plus claires parmi ce qui s'offrait à moi, pour la commodité des débutants, et en notant en marge les variantes des démonstrations dans les commentaires ordonnés, comme c'est l'usage[12].

Pour saisir l'intention d'Eutocius dans cet important texte, il faut commencer par entendre le sens de l'expression d'Apollonius : « plusieurs

[12] « Πλειόνων δὲ οὐσῶν ἐκδόσεων, ὡς καὶ αὐτός φησιν ἐν τῇ ἐπιστολῇ, ἄμεινον ἡγησάμην συναγαγεῖν αὐτὰς ἐκ τῶν ἐμπιπτόντων τὰ σαφέστερα παρατιθέμενος ἐν τῷ ῥητῷ διὰ τὴν τῶν εἰσαγομένων εὐμάρειαν, ἔξωθεν δὲ ἐν τοῖς συντεταγμένοις σχολίοις ἐπισημαίνεσθαι τοὺς διαφόρους ὡς εἰκὸς τρόπους τῶν ἀποδείξεων » (éd. Heiberg, II, p. 176, 17-22).

éditions » (πλειόνων δὲ οὐσῶν ἐκδόσεων)[13]. Ce dernier écrit, dans la lettre qui accompagne l'envoi du premier livre à Eudème :

> Comme il se trouve que d'autres personnes de connaissance ont eu communication des premier et deuxième livres avant correction, ne t'étonne pas de tomber sur ces livres dans un état différent[14].

Nous apprenons donc qu'il existait plusieurs exemplaires d'une première rédaction des deux premiers livres, entre les mains des élèves et des amis d'Apollonius, et que la rédaction corrigée et expédiée à Eudème est la première rédaction autorisée[15]. Tel était le procédé pour rendre public un écrit, et le mettre à la disposition de la communauté des savants. Il s'agit d'une rédaction des trois premiers livres, dont deux ont été revus par Eudème, alors que le troisième ne lui est pas parvenu (il était déjà décédé).

Après la mort d'Eudème, c'est à Attale, nous le verrons, qu'Apollonius expédie sa rédaction. Il s'agit là à nouveau d'une rédaction autorisée, des livres IV et suivants, dont Attale devient le destinataire. Mais on a peine à imaginer qu'Apollonius lui ait expédié les livres des *Coniques* à partir du quatrième seulement : sans les trois premiers, les suivants sont en effet inaccessibles. Attale a eu sans aucun doute une rédaction des trois premiers livres, celle déjà adressée à Eudème ou celle-ci, retouchée. Dans ce dernier cas, il existait donc deux rédactions autorisées, en plus d'une rédaction initiale, non autorisée (voir plus loin). Rien ne permet donc dès l'abord à l'éditeur de postuler un archétype textuel unique des trois premiers livres des *Coniques*. Le problème se complique encore lorsque l'on pense que bien des copies de ces rédactions ont pu circuler dans le monde grec, dont certaines transmettaient un texte probablement ici et là retouché. À ce matériau qu'on devine plus qu'on ne le cerne vient s'ajouter la traduction arabe, que sa perfection formelle, qu'on aura maintes fois l'occasion de constater, invite à faire dériver assez mécaniquement – c'est-à-dire sans intervention substantielle de rédacteurs – d'une édition autorisée (voir Commentaire mathématique). Dès l'abord, le texte grec dont nous disposons apparaît moins unitaire et davantage marqué par le travail éditorial et par une livraison tardive (des environs de 1200) d'autre part. Eutocius souligne ainsi qu'il possède « plusieurs éditions de l'ouvrage d'Apollonius », qu'il ne faudrait pas être surpris de retrouver mêlées dans l'archétype grec

[13] Pour un commentaire de ce texte, voir M. Decorps-Foulquier, *Recherches sur les* Coniques *d'Apollonios de Pergé et leurs commentateurs grecs*, Collection Philosophies antiques, Paris, 2000, « Le témoignage d'Eutocius », p. 67-70.

[14] Éd. Heiberg, I, p. 2.

[15] B. A. Van Groningen, « ΕΚΔΟΣΙΣ », *Mnemosyne*, XVI, 1963, p. 1-17. Notons que dans la lettre adressée à Eudème avec le premier livre, Apollonius laisse entendre qu'il s'agit là de la première version corrigée qu'il rend publique.

conservé : le travail d'édition d'Eutocius consistait d'abord à comparer entre eux les exemplaires. En cas de différences, les critères du choix des textes à retenir sont de nature que d'aucuns diraient aujourd'hui « didactique » : le professeur Eutocius opte pour la « clarté » et la « commodité » à l'intention des débutants ; et non pour l'authenticité, comme le fait l'éditeur moderne. Ces critères restent d'ailleurs un peu obscurs, dans la mesure où Eutocius n'indique nulle part comment il les a mis en pratique, pour tous les livres et dans chacun d'eux. L'une des conséquences, et non des moindres, est l'autorisation qu'il s'octroie d'intervenir dans le texte. N'écrit-il pas en effet dans son *Commentaire* du second livre des *Coniques* : « Dans certains manuscrits, j'ai trouvé aussi des propositions que j'ai supprimées comme superflues »[16], sans préciser lesquelles, ni la raison d'une telle option ? Dans son *Commentaire*, il lui arrive toutefois de noter des variantes, des démonstrations alternatives trouvées dans d'autres manuscrits ou conçues par lui, des explications, etc. En bref, lorsque nous parlons de l'« édition » d'Eutocius, c'est tout ce travail de l'auteur que nous avons à l'esprit[17].

2.1. *Le quatrième livre des Coniques*

Les *Conique*s d'Apollonius ont été victimes d'un accident grave : la perte de trois livres – V, VI et VII – après celle du huitième livre, en grec. Heureusement, ces trois livres ont survécu dans une traduction arabe d'un manuscrit grec, qui, lui, comprenait tous les livres à l'exception du huitième, déjà disparu. Nous nommons la version arabe de ce manuscrit M[18]. L'édition d'Eutocius est seulement des quatre premiers livres, dans la langue de l'auteur, et existe dans un manuscrit archétype, *Vaticanus gr.* 206, que nous nommons ici V. La comparaison entre M et V pour les trois premiers livres laisse apparaître des écarts et des différences notables – voir plus loin pour le premier livre – dont nous expliquerons les raisons. Mais ces dissemblances, dont certaines remonteraient aux traditions textuelles grecques sinon aux rédactions d'Apollonius lui-même, alors que d'autres seraient imputables à la méthode d'édition d'Eutocius ou, enfin, à l'acte même de traduire, n'invalident pas la correspondance entre les deux textes.

Or il est de coutume de considérer que l'édition d'Eutocius des quatre premiers livres est d'un seul tenant, et relativement homogène à quelques

[16] Éd. Heiberg, II, p. 294, 23-296, 1.

[17] Cf. M. Decorps-Foulquier, « Eutocius d'Ascalon éditeur du traité des *Coniques* d'Apollonios de Pergé et l'exigence de "clarté" », dans *Sciences exactes et sciences appliquées à Alexandrie*, Saint-Etienne, 1998, p. 87-101.

[18] Nous nous permettrons un abus de langage en parlant de M pour le manuscrit grec traduit et pour la traduction elle-même, lorsqu'il n'y a pas de confusion à craindre.

considérations linguistiques près ; comme si Eutocius avait disposé d'un texte de base constitué de ces quatre livres, à partir duquel il aurait engagé son travail d'éditeur, le livre IV remontant à Apollonius au même titre que les trois premiers. Mais cette doctrine pour ainsi dire commune nous semble assez fragile. L'édition d'Eutocius de ce quatrième livre soulève en effet bien des interrogations, qui se concentrent sur plusieurs anomalies jusqu'ici inaperçues[19]. Avant de nous arrêter rapidement ici à ces anomalies dont nous discutons minutieusement lors de l'édition et de la traduction de ce livre, rappelons succinctement et dans un langage délibérément anachronique l'objet du livre IV et son organisation.

Dans le manuscrit grec, le quatrième livre se compose de 57 propositions, dont les 23 premières portent sur la polaire d'un point *P* par rapport à une section conique, polaire déjà définie dans le troisième livre à partir des points de contact des deux tangentes issues du point *P* extérieur à la section conique. Dans ces propositions, Apollonius montre que cette polaire peut être définie soit à partir d'une tangente et d'une sécante issues de *P*, soit à partir de deux sécantes issues de *P*. Apollonius examine différents cas de figure, qui correspondent aux différentes positions de *P* ainsi qu'à celles de la sécante (ou des deux sécantes) par rapport aux asymptotes, dans le cas de l'hyperbole.

Dans la seconde partie de ce livre – de la proposition 24 à la proposition 57 – Apollonius étudie les positions relatives de deux coniques, ou d'une conique et d'une circonférence de cercle : nombre des points communs, points de contact ou points d'intersection ; autant de questions débattues, selon Apollonius lui-même, dans le milieu de Conon à Alexandrie.

Dans la première partie, Apollonius fait appel aux propositions 30 à 39 du livre III ; dans la seconde, c'est encore aux propositions de ce livre qu'il a recours, et notamment à celles qui portent sur les propriétés des divisions harmoniques.

Le quatrième livre est donc bien à sa place, et fait partie de ces livres des éléments des coniques qu'Apollonius avait clairement désignés dans le prologue aux *Coniques*. Eutocius ne faisait donc que suivre Apollonius lorsqu'il l'incluait dans son édition avec les trois premiers, et aucun doute n'est permis sur son intention, d'ailleurs précisément déclarée dans sa fameuse lettre

[19] Lorsque Christian Ravius a voulu rendre en latin la rédaction d'al-Shīrāzī des *Coniques* (voir p. 239-241), il a souligné la différence entre la rédaction de Richard (1655) à partir de l'édition d'Eutocius et celle d'al-Shīrāzī à partir de la traduction arabe. Voir Chr. Ravius, *Apollonii Pergaei Conicarum Sectionum libri V, VI & VII* in *Graecia deperditi, jam vero ex Arabico Manuscripto ante quadringentos annos elaborato opera subitanea latinitate donati a Cristiano Ravio,* Kiel, 1669, p. 46.

à Anthémius[20]. Deux questions se posent alors tout naturellement lorsqu'on étudie son édition et le quatrième livre : Eutocius voulait-il s'arrêter aux éléments ; ou bien ne pouvait-il, pour une raison quelconque, aller plus loin pour inclure les quatre livres restants, ou tout au moins les livres V à VII ? Ce qui mène à une autre question : quelle connaissance Eutocius avait-il au juste de la rédaction par Apollonius du quatrième livre, et des livres suivants ?

Rappelons d'abord que le quatrième livre ainsi que les suivants sont adressés, dans une rédaction autorisée, à Attale, après le décès d'Eudème à qui étaient adressés les trois premiers. Mais, alors que les trois premiers livres, en totalité ou en partie, ont pu faire l'objet de plus d'une rédaction – nous en discuterons plus loin –, aucun témoignage, que je sache, ne vient suggérer l'existence d'une rédaction des quatre derniers autre que celle expédiée à Attale. On serait donc en droit d'attendre une correspondance parfaite entre V et M pour le quatrième livre, plus rigoureuse encore que pour les trois premiers. Or il n'en est rien. Bien au contraire : les différences entre V et M, plus nombreuses et plus substantielles pour le quatrième livre, ne peuvent en aucun cas être attribuées à des accidents de copie. Procédons à quelques comparaisons, en attendant la discussion exhaustive.

1° V comporte 57 propositions, alors que M n'en contient que 53.

2° Certaines propositions de V sont absentes de M (les propositions V-7, V-21, V-23), alors qu'on trouve dans M des propositions qui ne sont pas dans V (les propositions M-2 et M-34). Les raisons de ces absences, assurément multiples et d'origines diverses, sont hors de notre portée. C'est seulement en éclairant la situation de chacune de ces propositions que nous serons en mesure d'estimer quel degré de confiance on peut leur accorder. La proposition V-7 commence ainsi :

> Les mêmes choses étant posées (c'est-à-dire les hypothèses de la proposition qui précède, V-6, laquelle correspond à la proposition M-4), que le point Δ soit situé dans l'angle adjacent à celui qui est compris sous les asymptotes[21].

Dans V-7 on veut démontrer l'égalité de deux segments. Mais une telle démonstration, on le vérifiera, exige que dans ce cas la sécante soit parallèle à une asymptote. Or cette hypothèse, nécessaire, ne fait pas partie des « mêmes choses … posées », et ne figure pas davantage dans le texte de V-7. Comment attribuer une telle rédaction à Apollonius, ou même à Eutocius ? Selon toute vraisemblance, cette proposition n'appartenait pas à

[20] Voir Heiberg, II, p. 176, 23-186, 21.
[21] *Les Coniques*, trad. Ver Eecke, p. 286.

la tradition textuelle du manuscrit grec traduit en arabe. Appartenait-elle seulement à l'une des versions utilisées par Eutocius pour son édition ?

La proposition V-21 est également absente de M. Pour comprendre la situation qui est la sienne et la mettre dans son contexte, commençons par rappeler la proposition V-20, qui « correspond » à M-19. Le terme « correspondre » risque en effet d'induire en erreur. Si en effet V-20 et M-19 traitent toutes deux de deux sécantes quelconques issues d'un point Δ situé sur l'asymptote, alors que la démonstration de M est rigoureuse, à la façon d'Apollonius, celle de V donne la conclusion sans avancer les justifications requises. La rédaction est celle d'un résumé, et le texte, à cet endroit, est de toute évidence incertain. C'est alors que l'on passe à V-21. Cette fois, au lieu de deux sécantes quelconques issues de Δ, on a une sécante quelconque et une sécante parallèle à la deuxième asymptote. V-21 est donc un cas particulier de V-20, c'est-à-dire de M-19. En d'autres termes, si dans M-19 on a les quatre points de la division harmonique sur chacune des sécantes, dans V-21 on trouve cette division harmonique sur une sécante, alors que sur l'autre on trouve trois points dont l'un est le milieu du segment qui joint les deux autres. Que peut-on dire d'un cas particulier lorsque la rédaction du cas général est défectueuse ?

Enfin la proposition V-23, elle aussi absente de M, est bien à sa place dans V et succède tout naturellement à V-22, laquelle correspond à M-17. Cette proposition V-23 aurait donc dû se trouver après M-17. Y a-t-il eu une omission dans la copie grecque – ou dans l'un de ses ancêtres – qui a été traduite en arabe ?

Venons-en à présent aux propositions absentes de V et qui sont dans M. Comme on le verra ci-dessous (point 7) la rédaction de V-1 laisse à désirer et diffère de M-1, laquelle est correcte et cohérente. Dans la proposition M-1, on sépare le cas de l'hyperbole de ceux du cercle, de l'ellipse et de la parabole. La proposition M-2 porte sur la parabole, qui n'est nullement traitée dans le groupe des propositions de V. Il ne s'agit pas seulement de l'omission d'une proposition, mais d'une différence dans la présentation.

La proposition M-34, également absente de V, présente cependant quelque affinité avec V-37 ; mais celle-ci est rédigée d'une manière peu précise : il manque une condition sur la concavité des hyperboles et on ne fait pas intervenir les asymptotes. Le raisonnement n'est pas détaillé, et la conclusion n'est accompagnée d'aucune justification. À la fin de cette rédaction de V-37 on lit : « On démontrera pareillement qu'il en est de même lorsque la ligne $AB\Gamma$ est tangente à la section opposée »[22]. À la suite de cette phrase vient la proposition V-38, laquelle n'est pas mieux rédigée que la proposition V-37. Or la proposition M-34 se place entre ces deux

[22] *Les Coniques*, trad. Ver Eecke, p. 308.

dernières, et porte sans aucune équivoque possible sur cette dernière phrase lancée sans aucune apparence de raison à la fin de V-37. Tout semble donc indiquer que dans V le contexte de ces propositions est issu d'un résumé d'une rédaction plus rigoureuse.

En conclusion, s'il est possible que V-32 ait été omise de la tradition textuelle du manuscrit grec ou de l'un de ses ancêtres qui a servi de base à la traduction arabe, il est pour le moins très vraisemblable que les propositions M-2 et M-34 ont disparu de V à un moment ou à un autre de l'histoire des textes. Mais, et c'est là le plus important, cette dernière perte désigne des contextes où le texte grec reproduit dans V aurait été à ce point remanié que, tel qu'il se présente aujourd'hui, on ne puisse l'attribuer à Apollonius.

3° L'ordre des propositions est différent, à tel point qu'on est parfois surpris. Exemple :

M :	15	16	17	18	19	20
V :	17	19	22	18	20	24

On vérifie que c'est l'ordre de M qui est logique.

4° Les figures et leurs lettres diffèrent pour un certain nombre de propositions.

5° Bien plus grave, il arrive que les démonstrations soient simplement absentes de V (par exemple dans les propositions 2, 3, 10, 11, 16, 19, ...) mais jamais de M ; ce qui ne correspond nullement aux normes démonstratives d'Apollonius.

6° Certaines démonstrations sont fausses dans V (exemple : 43, 47) ; jamais dans M.

La proposition V-43, c'est-à-dire M-39, est une illustration significative de la situation du livre IV que nous sommes en train de décrire, d'autant plus que, dans son *Commentaire*, Eutocius en donne une démonstration alternative. Lisons d'abord l'énoncé de V-43 :

> Lorsqu'une hyperbole coupe respectivement des sections opposées en deux points, tout en ayant sa convexité en sens contraire de chacune d'elles, sa section opposée ne rencontrera aucune de ces sections opposées[23].

Dans V-43 la démonstration de cette proposition se fait par réduction à l'absurde et comporte une erreur déjà remarquée par Commandino au XVI^{e} siècle[24]. Il ne serait guère vraisemblable que telle erreur de raisonnement, à

[23] *Les Coniques*, trad. Ver Eecke, p. 312.
[24] *Ibid.*, p. 312, n. 3.

ce point élémentaire, fût le fait d'Apollonius – on vérifiera qu'en effet il n'en est rien.

Quoi qu'il en soit, nous trouvons dans M-39 non seulement une démonstration directe et sans faille, mais aussi la variante transmise par Eutocius. Pour les besoins de la comparaison, nous reprenons ici ces démonstrations.

La proposition est la suivante : Soit $(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ deux sections opposées ; si une hyperbole $\mathscr{H}$ coupe $\mathscr{H}_1$ en A et B et coupe $\mathscr{H}_2$ en Δ et E, alors l'hyperbole $\mathscr{H}'$ opposée à $\mathscr{H}$ ne coupe ni $\mathscr{H}_1$ ni $\mathscr{H}_2$.

Dans M-39 la démonstration est déduite de M-37 et fait appel à II.33. Dans II.33 on montre que la droite AB coupe les asymptotes de $\mathscr{H}$: elle coupe HX en N et HY en Π ; cette droite AB passe donc dans les angles XHY, XHY', YHX', et elle n'entre pas dans l'angle $X'HY'$; elle ne coupe donc pas $\mathscr{H}'$.

L'énoncé de M-37 est le suivant : Soit $(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ deux sections opposées ; si une hyperbole $\mathscr{H}$ coupe $\mathscr{H}_1$ en A et B et si les convexités de $\mathscr{H}$ et de $\mathscr{H}_1$ sont de sens différent, alors l'hyperbole $\mathscr{H}'$ opposée à $\mathscr{H}$ ne rencontre pas $\mathscr{H}_2$.

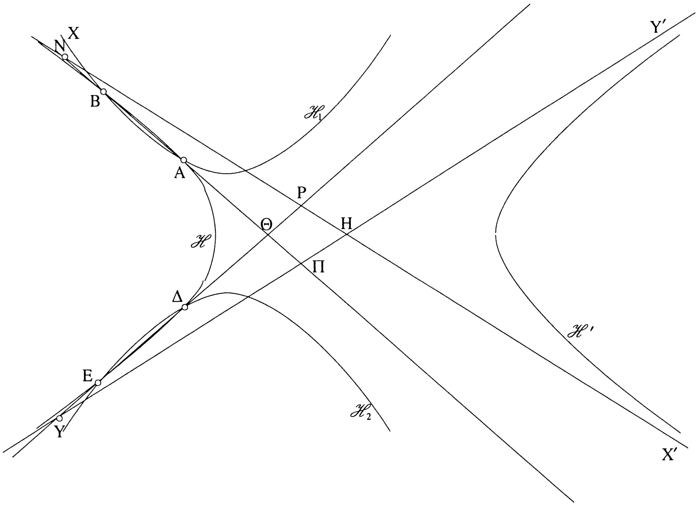


Fig. 3

En effet, d'après II.33, la droite AB qui coupe $\mathscr{H}$ ne coupe pas son opposée $\mathscr{H}'$; de même, puisque la droite AB coupe $\mathscr{H}_1$, elle ne coupe pas son opposée $\mathscr{H}_2$; les sections $\mathscr{H}'$ et $\mathscr{H}_2$ sont de part et d'autre de AB.

Venons-en à la proposition V-43 ou M-39. La droite AB passe entre $\mathscr{H}'$ et $\mathscr{H}_2$ et de même la droite ΔE passe entre les sections $\mathscr{H}'$ et $\mathscr{H}_1$, d'où la conclusion : $\mathscr{H}'$ ne coupe ni $\mathscr{H}_1$, ni $\mathscr{H}_2$.

La démonstration alternative d'Eutocius est très proche de celle de M-37, c'est-à-dire V-41. Reprenons cette démonstration.

Soit Θ le point d'intersection des droites AB et ΔE. Ce point Θ est dans l'angle XHY formé par les asymptotes de la section $\mathscr{H}$. La droite $AB\Theta$ coupe la section $\mathscr{H}_1$ aux points A et B, et ne coupe donc pas $\mathscr{H}_2$ (ici, sans le dire explicitement, Eutocius utilise le résultat de II.33). D'autre part, elle coupe la demi-droite $[HY)$ au point Π ; elle se trouve donc entre $\mathscr{H}_2$ et l'asymptote XX'. De même, la droite $E\Delta\Theta$ qui coupe $\mathscr{H}_2$ aux points E et Δ ne coupe pas $\mathscr{H}_1$; elle se trouve entre $\mathscr{H}_1$ et l'asymptote YY'.

Ainsi nous avons : dans M une démonstration correcte, déduite selon l'ordre logique d'une proposition précédente du même groupe, c'est-à-dire V-41 ; dans V une démonstration fausse, témoin de la corruption manifeste du texte ; et, enfin, une variante conservée par Eutocius, proche, précisément, de cette V-41 et de même style. Autant de raisons de conclure à la présence de deux traditions textuelles différentes de ce même livre IV.

7° Il arrive que les énoncés de certaines propositions telles qu'ils figurent dans le texte de V soient imprécis et fautifs, si on les prend à la lettre. Considérons, entre bien d'autres exemples, la première proposition :

> Si l'on prend un point à l'extérieur d'une section de cône ou d'une circonférence de cercle ; si de ce point deux droites atteignent la section, l'une tangente, l'autre coupant en deux points [...][25].

Cet énoncé est faux si l'on ne précise pas qu'il ne peut s'agir que d'une parabole, d'une ellipse ou d'une circonférence de cercle, et non pas d'une « section de cône » en général ; sauf à préciser la condition que ce point doit être dans l'angle formé par les asymptotes. L'une des conséquences, et non des moindres, de cette imprécision est la différence marquée entre le début du livre IV dans V et son début dans M. Or dans M l'énoncé est parfaitement correct. On trouve dans la proposition V-9 un autre exemple de ce type.

8° Il y a dans M et dans V certaines propositions identiques :

M :	41	42	43	44	45	46	47	48	50	52
V :	45	46	48	49	50	51	52	53	54	56

9° Il y a dans V et dans M un autre groupe de propositions presque identiques, dont les différences ne sont pas importantes ; par exemple :

[25] Éd. Heiberg, II, p. 4, 22-25.

M :	28	29	30
V :	33	34	35

10° Il y a un groupe d'une vingtaine de propositions peu différentes, alors que celles qui restent diffèrent notablement dans les deux versions.

11° Il arrive souvent que l'on ait dans V une démonstration abrégée ; c'est ce qu'on observe dans les propositions 4, 5, 8 et 20, entre bien d'autres. Ce qui est contraire à la rédaction d'Apollonius, non seulement dans les autres livres des *Coniques*, mais bien aussi dans ce même quatrième livre pour le groupe de propositions identiques (45 à 54 de V) et le groupe de propositions presque identiques (33 à 35 de V).

Cette comparaison entre M et V, dont nous venons de donner quelques éléments seulement, permet d'établir les faits suivants :

1° Alors que M est unitaire, homogène et intégralement rédigé dans le style géométrique d'Apollonius, il en va différemment de V pour plusieurs parties (à l'exception du groupe 45-56 notamment) où se dessinent les traits d'une rédaction abrégée, et moins rigoureuse.

2° V est scindée par un véritable clivage, qui passe au niveau des propositions 44/45. Le dernier groupe correspond parfaitement aux propositions de M. S'il arrive qu'avant la proposition 44 un groupe de V corresponde à un groupe de M, ce n'est cependant pas la règle. Ce clivage est totalement absent de M.

Ces faits sont aisément vérifiables : ne serait-il pas arbitraire, sinon absurde, de rendre Apollonius responsable de ce clivage et de cette rédaction un peu lâche ? Pourquoi se serait-il mis à rédiger différemment, moins bien, à changer de notation, à abréger sa version, à commettre des erreurs, tout cela dans une rédaction qu'il voulait autorisée ? Il serait tout aussi injuste d'en faire endosser la responsabilité à Eutocius. Pourquoi aurait-il, après les trois premiers livres, changé de style de présentation et changé de qualité d'édition ? Il est plus raisonnable d'en chercher la raison ailleurs ; recherche qui, dans l'état actuel de nos connaissances ne peut aboutir qu'à des conclusions conjecturales, même si les conjectures n'ont pas toutes la même valeur de vraisemblance. Mais commençons par noter quelques faits troublants.

1° Dans sa *Collection*, Pappus a rédigé des lemmes à tous les livres des *Coniques*, excepté le quatrième. S'agit-il d'une décision délibérée, d'un oubli, ou plutôt d'une méconnaissance de ce livre ?

2° Eutocius lui-même, dans son *Commentaire* des *Coniques*, ne réserve au quatrième livre que la portion congrue. Il suffit de compter les pages qui lui sont consacrées dans l'édition de Heiberg de ce *Commentaire*[26] : trois pages et demie, alors que les trois premiers livres occupent successivement soixante, douze et vingt pages.

3° Dans ces trois pages et demie, Eutocius donne deux variantes à une proposition du premier groupe, avant la ligne de clivage : la proposition 24 ; et deux variantes à l'endroit de cette ligne et un peu après 43 et 51. Les deux variantes de 24 correspondent à 20 de M. La première porte sur une conclusion de celle-ci, et la seconde est cette même démonstration de la proposition dans M. Les variantes de 43 et 51 sont simplement des démonstrations alternatives.

Ces anomalies, entre bien d'autres, nous conduisent à ajouter un troisième fait aux deux que nous venons d'établir : tel qu'il se présente dans V, le quatrième livre n'est pas d'un seul tenant ; c'est un texte gravement contaminé, un composé de deux sources : le premier texte, avant la ligne de clivage, est sérieusement retouché ; le second, après cette ligne, est une rédaction d'Apollonius, avec les légers aléas de copie et d'édition.

Ce sont là des faits. Le reste ne peut qu'être conjectural. Il est vraisemblable qu'un commentateur (avant Pappus ?) a tenté d'abréger la première partie du texte, tout en copiant çà et là l'une ou l'autre proposition. Mais cela n'importe guère. Ce qu'il faut savoir, c'est où s'est produite cette rupture textuelle. Tout indique qu'elle a eu lieu après le troisième livre, et non pas, comme l'enseigne la doctrine commune, après le quatrième livre. Eutocius entendait reconstituer une édition des éléments des coniques, et donc des quatre premiers livres. Il disposait certainement des trois premiers livres dans la rédaction adressée à Eudème. Pour le livre IV, il a eu recours à une copie – composée par lui-même ou par l'un de ses prédécesseurs – d'une partie provenant d'une tradition différente à partir d'une édition plus ou moins abrégée, et d'un texte d'Apollonius (la dernière partie). Ce qui est certain en revanche, c'est qu'Eutocius n'avait pas pour texte de base, lors de son édition du quatrième livre, la totalité de la rédaction adressée par Apollonius à Attale, mais cette version sérieusement contaminée.

[26] Éd. Heiberg, II, p. 354-361.

Si donc Eutocius n'avait de la rédaction propre d'Apollonius que les trois premiers livres, adressés à Eudème, son peu de familiarité avec les livres V, VI et VII serait encore plus compréhensible. C'est précisément ce que nous allons discuter.

2.2. *Les livres V à VII des Coniques*

Pourquoi Eutocius s'était-il arrêté au quatrième livre, alors qu'il savait pertinemment qu'aux dires d'Apollonius lui-même ce sont les trois derniers qui sont les plus nouveaux – sans parler du huitième, perdu depuis l'Antiquité ? Sans doute, nous l'avons souligné, voulait-il éditer les livres consacrés aux « éléments de la théorie des coniques ». Mais cette raison ne semble pas être la seule. Nous venons de voir quelle connaissance il avait du quatrième livre et nous avons conjecturé l'existence d'une rupture après le troisième livre. Nul doute qu'Eutocius connaissait l'existence de ces quatre derniers livres (V à VIII), tout au moins par l'introduction même d'Apollonius. C'est en effet ce qu'il laisse entendre lorsqu'il écrit à Anthémius de Tralles :

> Si tu désires que je fasse un exposé des suivants (cinq, six et sept) sur le même modèle, je le ferai, avec l'aide de Dieu[27].

Si l'on en croit Eutocius, il s'agirait donc seulement d'un choix délibéré, celui du « professeur » désireux de se limiter aux éléments des coniques ; mais quelle que soit la raison d'un tel choix, la question demeure entière : quelle connaissance Eutocius avait-il au juste des derniers livres ? A-t-il vraiment connu, comme il le laisse entendre, le huitième livre, dont on croit savoir qu'il était déjà perdu depuis longtemps ? On peut franchement en douter.

Chose étrange : la seule référence précise d'Eutocius à l'un de ces livres se trouve dans un texte connu de son *Commentaire* de *L'Équilibre des figures planes* d'Archimède. Il écrit : « Au livre VI des *Coniques*, Apollonius a défini comme segments semblables [...] »[28] ; suit la définition. On a cru pouvoir affirmer qu'Eutocius citait Apollonius directement. Rappelons ce passage et comparons-le à celui d'Apollonius, dans la traduction de Thābit ibn Qurra.

[27] Éd. Heiberg, II, p. 356, 1-5.

[28] Archimède, *Commentaires d'Eutocius et Fragments*, texte établi et traduit par Charles Mugler, Paris, 1972, t. IV, p. 178, 8-10.

Eutocius, Commentaire à la prop. II.3 de *L'Équilibre des figures planes* d'Archimède (éd. Mugler, p. 178, 8-14)

Τὰ ὅμοια τμήματα τῶν τοῦ κώνου τομῶν ᾿Απολλώνιος ὡρίσατο ἐν τῷ ἕκτῳ βιβλίῳ τῶν Κωνικῶν, ἐν οἷς ἀχθεισῶν ἐν ἑκάστῳ παραλλήλων τῇ βάσει ἴσων τὸ πλῆθος αἱ παράλληλοι καὶ αἱ βάσεις πρὸς τὰς ἀποτεμνομένας ἀπὸ τῶν διαμέτρων πρὸς ταῖς κορυφαῖς ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις εἰσὶ καὶ αἱ ἀποτεμνόμεναι πρὸς τὰς ἀποτεμνομένας.

[Au livre VI des *Coniques* Apollonius a défini comme] segments semblables des sections coniques les segments tels que, si on mène des parallèles à la base, en même nombre dans chacun, les parallèles et les bases ont aux segments découpés des diamètres du côté des sommets les mêmes rapports qu'ont les segments découpés aux segments découpés, et il a montré que toutes les paraboles sont semblables.

Livre VI (traduction arabe)
(Istanbul, Aya Sofia 2762, fol. 238r)

والقطع التي يقال إنها متشابهة هي التي تحيط قواعدها مع أقطارها بزوايا متساوية؛ وقد تخرج في كل واحد منها خطوط موازية لقاعدته* متساوية العدد، وتكون نسبها ونسبة القاعدة إلى ما تفصل من القطر، مما يلي رأس القطع في كل واحد من القطع، نسبًا متساوية؛ وكذلك نسبة ما ينفصل من أقطار بعضها إلى ما ينفصل من أقطار الأخر.

* لقاعدته: لقاعدتها.

Les sections dites semblables sont celles dont les bases entourent avec leurs diamètres des angles égaux ; et il est possible de mener dans chacune d'elles des droites parallèles à sa base en nombre égal telles que leurs rapports ainsi que le rapport de la base à ce qu'elles séparent du diamètre, du côté du sommet dans chacune des sections, soient des rapports égaux ; et il en est de même du rapport de ce qui se sépare du diamètre de l'une à ce qui se sépare du diamètre de l'autre.

Il est clair que les deux textes diffèrent, avec en particulier l'absence de la condition sur l'égalité des angles, qui ne pouvait échapper à Eutocius lui-même s'il avait étudié avec soin le sixième livre. Sans doute avait-il une connaissance globale et cursive de certaines définitions et résultats contenus dans ce livre, mais, semble-t-il, sans plus. Ainsi rappelle-t-il que toutes les paraboles sont semblables entre elles (proposition VI.11 des *Coniques*) ; que si on mène des perpendiculaires à l'axe d'une parabole ou d'une hyperbole, les segments découpés de part et d'autre de l'axe par deux perpendiculaires quelconques de la même section ne seront pas semblables aux premiers (proposition VI.19 des *Coniques*). Mais cette connaissance demeure implicite : Eutocius ne cite pas Apollonius. Rien cependant ne dénote de sa part la moindre familiarité avec le contenu mathématique de ce livre – bon indice que la connaissance de la seconde partie de l'œuvre d'Apollonius, infiniment plus difficile que la première, était déjà éteinte, ou du moins, en voie d'extinction dans la sphère grecque.

Cette impression ne fait que se confirmer avec le cinquième et le septième livre. Rien ne suggère en effet qu'Eutocius les ait vraiment travaillés.

Dans son *Commentaire* des *Coniques*, il est, au mieux, allusif. Ainsi, lorsqu'il commente la préface d'Apollonius aux *Coniques*, il écrit à propos du cinquième livre qu'il « comprend l'étude des *minima* et des *maxima* »[29] ; comme exemple, il donne celui du cercle selon Euclide, qui ne reflète pas, loin s'en faut, la richesse et la nouveauté de ce cinquième livre d'Apollonius, et notamment l'étude qu'on y trouve des droites *extrema*, des normales aux sections coniques, de leur existence et de leur nombre. Eutocius affirme en revanche que « ce sont les mêmes recherches (que celles d'Euclide) qu'Apollonius mène dans le livre V sur les sections du cône »[30], ce qui confine au ridicule. Quant aux autres livres, il leur consacre en tout et pour tout cette phrase :

> Enfin, le dessein des livres VI, VII, VIII est clairement exposé par Apollonius lui-même[31].

À partir de tels propos, vagues et allusifs, nous ne pouvons même pas avoir la certitude qu'Eutocius connaissait de première main les trois derniers livres des *Coniques* – V, VI et VII. Et l'on peut dire que, si tant est qu'il les eût de quelque manière que ce soit entre les mains (nous en doutons), Eutocius n'avait pas étudié ces livres – ce que suggère son allusion au cinquième. La connaissance qu'Eutocius avait des différents livres des *Coniques* apparaît donc variable et d'origine hétérogène ; pour les trois premiers, son texte de base est la rédaction qu'Apollonius avait adressée à Eudème ; le texte du quatrième est pour une bonne partie contaminé ; quant aux livres suivants, rien ne vient confirmer qu'il les connût vraiment.

2.3. *Les numéros des propositions et l'ordre de succession*

Reste enfin la question de l'ordre des propositions et de leur numérotation dans l'édition d'Eutocius. S'agit-il de la numérotation, authentique, donnée par Apollonius, ou avait-elle subi, tout au moins par endroits, quelques modifications lors de la rédaction par Eutocius des quatre premiers livres ? Soulevée par Heiberg, cette question a ensuite été reprise par les chercheurs[32]. Heiberg se montre franchement sceptique, et n'accorde guère de confiance à la numérotation transmise par la tradition manuscrite de l'édition d'Eutocius. Voici ce qu'il écrit à propos de V :

> Dans les numéros des propositions, il ne faut avoir absolument aucune confiance en nos manuscrits ; car dans la division des propositions, ils varient grandement (cf., au sujet du manuscrit p, plus haut, sur I p. 276, 22 ;

[29] Éd. Heiberg, II, p. 186, 12-13.
[30] Éd. Heiberg, II, p. 186, 13-14.
[31] Éd. Heiberg, II, p. 186, 19-21.
[32] M. Decorps-Foulquier, *Recherches*, p. 99 *sqq*.

286, 25 ; 298, 27 ; 308, 19, ailleurs), et dans V il n'y a presque aucun numéro inscrit par la première main. C'est pourquoi il n'est pas étonnant que certaines propositions soient citées avec d'autres numéros que ceux par lesquels elles sont maintenant désignées, et par Eutocius lui-même dans son commentaire à Archimède (v. Neue Jahrbücher für Philologie, Suppl. XI, p. 362) et par le scholiaste florentin d'Archimède (III p. 374, 12 ; 375, 3). Eutocius lui-même dans le premier livre atteste la division de son édition, II p. 284,1 sq. ; mais je ne saurais croire qu'Apollonius lui-même ait disjoint I, 52-53, 54-55, 56-58 [...][33].

L'éminent érudit soulève dans ce paragraphe, ainsi que dans l'article auquel il renvoie et dans son édition d'Archimède, deux questions sur la numérotation qu'il faut bien distinguer : la numérotation dans la tradition manuscrite de l'édition d'Eutocius ; la véritable numérotation donnée par Eutocius et sa relation avec celle d'Apollonius. Sur la première question, la tradition arabe pourra aider à trancher, comme on le verra plus loin. Pour répondre à la deuxième question, qui importe davantage ici, Heiberg présente l'argument suivant : dans son *Commentaire* au traité *De la sphère et du cylindre* d'Archimède, Eutocius cite sous les numéros I.20 ; I.27 ; I.34 ; II.8 ce qu'Eutocius note dans son édition des *Coniques* I.21 ; I.26 ; I.35 ; II.12 ; c'est-à-dire avec un écart d'une unité pour le premier livre (mais sans que celui-ci soit uniforme) et de quatre unités pour le second. Cette différence de numérotation est confirmée par d'autres sources : le scholiaste florentin donne I.20 au lieu de I.21 dans l'édition d'Eutocius. On observe la même chose chez Serenus. Bien plus, une tradition vient massivement confirmer ce décalage entre deux types de numérotation, l'un, ancien, utilisé par Eutocius dans son commentaire d'Archimède ainsi que par le scholiaste et par Serenus ; et un autre qu'on rencontre dans V (l'archétype existant de l'édition d'Eutocius, des environs de 1200).

Le premier type est un sérieux indice de l'existence d'un texte d'Apollonius dans lequel un certain nombre de propositions sont différemment numérotées si on le compare à l'édition d'Eutocius telle qu'elle nous est parvenue dans le manuscrit V. C'est, semble-t-il, ce décalage qui a incité Heiberg à mettre en question, de manière peut-être un peu expéditive, la numérotation de l'édition d'Eutocius. Or l'archétype de la tradition manuscrite arabe, antérieure de quelques siècles, comme nous le verrons, à la tradition grecque, n'autorise pas pareille conclusion. Il ne reste donc qu'une conclusion et une alternative. La conclusion porte sur l'existence d'une tradition pré-eutocienne du texte d'Apollonius, consultée par Serenus, le scholiaste et Eutocius ; quant à l'alternative, c'est la suivante : ou bien Eutocius s'est servi d'autres versions des *Coniques* qui comportaient cette

[33] Éd. Heiberg, II, p. LXVII-LXVIII.

numérotation qui est celle de son édition des quatre livres, ou bien celle-ci lui revient en personne.

3. LA TRADUCTION ARABE DES SEPT LIVRES DES *CONIQUES*

3.1. *Une histoire « officielle » de la traduction*

Ce sont ceux-là mêmes qui ont œuvré à sa réalisation qui nous offrent la principale source de l'histoire de la traduction arabe des *Coniques*. Il s'agit des trois frères Muḥammad, Aḥmad et al-Ḥasan qui en ont dirigé les étapes successives. Connus aussi bien en arabe qu'en latin sous le nom des Banū Mūsā (fils de Mūsā), ils se sont mis à la recherche des manuscrits des *Coniques*, ont recruté des traducteurs et ont eux-mêmes révisé la traduction[34]. De plus, ils ont rédigé un fascicule, en guise d'introduction à la traduction, pour relater cette histoire avant de proposer neuf lemmes nécessaires aux démonstrations d'Apollonius[35]. Cette histoire pour ainsi dire « officielle » de la traduction, a été signée des trois frères – telle était leur habitude – mais le rédacteur en fut Aḥmad, leur cadet, alors que le benjamin, al-Ḥasan, n'était plus : voilà, esquissé, le récit que l'on répète inlassablement lorsqu'on parle de la traduction arabe des *Coniques* ; et les historiens modernes n'ont rien ajouté à ce que les biobibliographes du Xᵉ siècle savaient déjà. Certaines questions ont cependant été laissées dans l'ombre ; entre autres celle, importante, du nombre des traductions. Y en eut-il une ou plusieurs, et quel est le rôle de chacun des trois frères ? La réponse n'est pas aisée.

Commençons par rappeler ce récit des Banū Mūsā, dont certains éléments n'ont pas reçu toute l'attention qu'ils méritaient, avant d'examiner d'un peu plus près la question du nombre et de l'ordre des traductions.

Un fait est connu de tous, rappelé par les anciens historiens comme par les anciens biobibliographes : les Banū Mūsā, notamment l'aîné et doyen de la famille, Muḥammad, ont participé activement à la collecte des manuscrits grecs en sciences et en philosophie. C'est ainsi que Muḥammad a pris part aux missions envoyées dans l'empire byzantin pour rapporter de tels manuscrits, soit en personne, soit en finançant lui-même les expéditions[36]. Or c'est vraisemblablement au cours de l'une de ces missions qu'ils ont d'abord trouvé le manuscrit grec des sept livres des *Coniques*, c'est-à-dire un

[34] R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IXᵉ au XIᵉ siècle,* vol. I : *Fondateurs et commentateurs* : *Banū Mūsā, Thābit ibn Qurra, Ibn Sinān, al-Khāzin, al-Qūhī, Ibn al-Samḥ, Ibn Hūd*, Londres, 1996.

[35] Voir Appendice I.

[36] Voir R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales,* vol. I, chap. I.

manuscrit de l'ensemble du traité à l'exception du huitième livre – ce n'est que plus tard qu'Aḥmad récupérera à Damas une copie de l'édition d'Eutocius des quatre premiers livres de l'ouvrage d'Apollonius. À ce propos ils écrivent :

> Entre les huit livres composés par Apollonius sur les coniques, sept nous sont parvenus (*wa-qad kāna waqaʿ ilaynā*) tels qu'il les avait composés[37].

Cela se passait à Bagdad au milieu du IXe siècle.

Sur l'origine de ce manuscrit, les Banū Mūsā ne disent rien. Ils affirment en revanche qu'à ce stade ils n'avaient pu ni le comprendre ni le traduire, tant étaient nombreuses les erreurs de copie. Mais les Banū Mūsā ne connaissant pas le grec, ils n'ont pu traduire eux-mêmes un tel ouvrage. Ils ont donc dû recourir à l'un des nombreux hellénistes de Bagdad. Quoi qu'il en soit, cette première tentative n'avait pas abouti, sans doute en raison des nombreuses fautes de copie d'un texte dont tout indique qu'il avait été transcrit avant le sixième siècle[38] ; peut-être faut-il ajouter à cela que les Banū Mūsā n'étaient sans doute pas à l'époque suffisamment familiers de la géométrie des *Coniques*. C'est alors qu'entre en scène le plus doué des trois frères en géométrie, al-Ḥasan, le benjamin.

Voici ce qu'écrit Aḥmad ibn Mūsā à ce propos :

> il fut possible à al-Ḥasan ibn Mūsā, grâce à sa puissance en géométrie et à l'éminence du rang qu'il y tient, d'examiner la science de la section du cylindre coupé par un plan non parallèle à sa base [...][39].

[37] Voir Appendice I, p. 504 ; ar. p. 505, 1-2.

[38] Nul n'ignore que l'activité scientifique se tarit, dans le monde grec, à partir de la fin du VIe siècle. Ce qui est documenté pour les *Seconds Analytiques* d'Aristote, qui passaient pour trop difficiles au point de n'être plus lus, l'est *a fortiori* pour les trois derniers livres des *Coniques* d'Apollonius. Voir L. D. Reynolds et N. G. Wilson, *Scribes and Scholars. A Guide to the Transmission of Greek and Latin Literature*, third edition, Oxford, 1991, p. 54 : « By the latter part of the sixth century the decline of learning and culture was serious. The imperial university at Constantinople, refounded by Theodosius II c. 425, and a new clerical academy under the direction of the patriarchate, were the only major educational institutions in the main part of the empire ; the school at Alexandria continued, but rather in isolation. The exhausted condition of the empire did nothing to encourage learning, and before any recovery could take place matters were made worse by the religious controversy over icon-worship. For some three centuries there is little record of education and the study of the classics [...]. Very few manuscripts of any kind remain from this period, and there is little external evidence about classical studies. The only works of the epoch which desserve mention are those of Choeroboscus, a deacon who may have been a lecturer in grammar at the seminary in Constantinople, and the *Canons* of Theognostus, a lengthy work on orthography from the early ninth century ».

[39] Voir Appendice I, p. 504 ; ar. p. 505, 4-6.

Al-Ḥasan était en effet parvenu à jeter les bases de cette recherche sur les sections du cylindre et sur l'étude du cône cylindrique et de ses sections, engageant ainsi une nouvelle recherche en géométrie des coniques. Ce livre d'al-Ḥasan a eu un grand impact sur le développement de ce chapitre, comme nous l'avons montré ailleurs[40]. Il contenait une étude approfondie de la géométrie des coniques, selon une voie autre que celle d'Apollonius, et a rendu aisées la compréhension et la traduction de l'ouvrage d'Apollonius.

Or c'est précisément au cœur de cette dialectique riche et complexe entre découverte d'une part et traduction d'autre part – sur laquelle nous avons maintes fois attiré l'attention[41] – que se place la traduction des *Coniques* d'Apollonius. Et de fait, la recherche d'al-Ḥasan et la nouvelle orientation qu'il a donnée à la géométrie des coniques, suscitées par la difficulté de rendre en arabe l'ouvrage d'Apollonius, ont précisément rendu possible cette traduction des *Coniques*. Mais une fois surmonté l'obstacle de la géométrie, restait à corriger un texte fautif avant de pouvoir le traduire effectivement. C'est la seconde tâche.

Selon le récit d'Aḥmad, al-Ḥasan meurt et lui-même est nommé directeur de l'administration de la poste à Damas. Il se met alors en quête d'autres manuscrits des *Coniques*, dans l'espoir d'en trouver suffisamment de copies pour parvenir à rectifier le texte des sept livres. C'est dans ce contexte qu'il acquiert une copie de l'édition d'Eutocius des quatre premiers livres d'Apollonius. Cette fois encore, la copie est fautive, mais un peu moins que le manuscrit en sept livres. Aḥmad corrige les erreurs[42]. Qui l'a aidé à comprendre le grec ? Aḥmad lui-même n'en dit mot. S'agirait-il là du début de ses relations avec Hilāl ibn Abī Hilāl al-Ḥimṣī ? Rien ne permet ni de l'affirmer ni de l'infirmer.

De retour à Bagdad, « il est revenu au commentaire du reste des sept livres qui nous étaient parvenus de l'authentique livre d'Apollonius »[43]. La tâche était devenue abordable, grâce aux recherches d'al-Ḥasan, entretemps décédé, mais grâce aussi à l'expérience qu'il avait acquise en étudiant et en corrigeant la copie de l'édition d'Eutocius des quatre premiers livres. Il était dès lors en mesure de comprendre les trois livres suivants, et par le fait

[40] R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales,* vol. I.

[41] Voir R. Rashed, « Problems of the Transmission of Greek Scientific Thought into Arabic : Examples from Mathematics and Optics », *History of Science,* XXVII, 1989, p. 199-209 ; et « Greek into Arabic : Transmission and Translation », dans James E. Montgomery (éd.), *Arabic Theology, Arabic Philosophy. From the Many to the One : Essays in Celebration of Richard M. Frank*, Orientalia Lovaniensia Analecta 152, Leuven - Paris, Peeters, 2006, p. 157-196.

[42] Sur les liens exacts entre cette copie et le manuscrit V, nous ne savons rien de précis, sinon qu'ils ne sont pas identiques.

[43] Voir Appendice I, p. 506 ; ar. p. 507, 1-2.

l'ensemble des *Coniques*. La traduction de l'ouvrage d'Apollonius entre alors dans sa phase finale. Aḥmad, dans son récit, tout comme les traditions bibliographique et manuscrite, attribue la traduction des quatre premiers livres à Hilāl ibn Abī Hilāl al-Ḥimṣī ; toujours selon Aḥmad, c'est Thābit ibn Qurra qui a pris la responsabilité de la traduction des trois derniers livres. Si l'on s'en tient à cette information, on aurait donc une seule traduction, faite en partie par ce dernier et en partie par Thābit ibn Qurra. Telle est la conclusion admise par les historiens.

3.2. *Une traduction ou deux ?*

Mais reste à savoir ce qu'au juste on a traduit. Pour les trois derniers livres – V, VI et VII – aucun doute, c'est le manuscrit en sept livres. Mais qu'en est-il des quatre premiers ? Voici ce qu'Aḥmad, notre seule source, écrit :

> nous avons noté que les quatre premiers sont sortis tels qu'Eutocius les avait corrigés, et les trois suivants tels qu'Apollonius les avait composés[44].

Cette phrase nous dit en toute rigueur que les quatre premiers livres ont été rendus en arabe avec les corrections d'Eutocius, mais n'affirme pas explicitement que c'est l'édition d'Eutocius de ces livres qu'on a traduite. Et pourtant, sans trop s'embarrasser de nuances, on s'est empressé d'affirmer que la traduction que nous avons des quatre premiers livres n'est autre que celle de l'édition d'Eutocius.

Or deux témoignages viennent compliquer l'affaire, mais aussi la débrouiller. Ils ont en commun d'émaner de deux mathématiciens qui connaissaient mieux que quiconque les *Coniques* d'Apollonius. Al-Khāzin tout d'abord, mathématicien du milieu du X^{e} siècle, écrit dans son livre intitulé *Rectification des Coniques* :

> Si nous nous référons par l'un des chiffres <à une proposition> et qu'on n'y trouve pas ce dont on a besoin, que l'on recule dans la traduction de Thābit de deux ou trois propositions, car elle est moindre de ce nombre que les nombres des propositions de la traduction de Isḥāq ibn Ḥunayn et de Hilāl ibn Abī Hilāl[45].

[44] Voir Appendice I, p. 506 ; ar. p. 507, 18-19.
[45] Ms. Alger, BN, 1446, fol. 133^{r} :

وإذا أشرنا إلى شكل من أشكال الكتاب بعدد من الأعداد ثم لم يوجد فيه ما احتيج إليه، فليتقدم في ترجمة ثابت بشكلين أو بثلاثة، فإنها تنقص بهذا القدر من عدد أشكال المقالة عن ترجمة إسحاق بن حنين وهلال بن أبي هلال.

Comme al-Khāzin commente ici le premier livre des *Coniques*, sa formule entraîne les trois points suivants :

1° Il existait une traduction des premiers livres, due à Thābit ibn Qurra. Mais comme Aḥmad lui-même nous dit que celui-ci a traduit les trois derniers livres, ce que tous s'accordent à reconnaître, il faut conclure qu'il y avait au milieu du Xᵉ siècle une traduction de l'ensemble des *Coniques* par Thābit ibn Qurra.

2° Il existait une autre traduction, due à Hilāl ibn Abī Hilāl al-Ḥimṣī et au prestigieux Isḥāq ibn Ḥunayn. Celle-ci ne pouvait être que des quatre premiers livres, puisque ce sont les seuls traduits par Hilāl d'après Aḥmad ibn Mūsā lui-même.

3° Les propositions ont été numérotées différemment suivant les deux traductions.

Un autre éminent mathématicien, d'une génération plus jeune qu'al-Khāzin, al-Sijzī (lui aussi remarquable connaisseur des *Coniques*), vient confirmer quelques éléments du témoignage précédent. Il écrit :

> selon la proposition quatre du second livre des *Coniques* de l'éminent Apollonius, et selon la proposition un de la traduction d'Isḥāq [...][46].

De lui aussi nous apprenons qu'il existait deux traductions, dont l'une de Isḥāq ibn Ḥunayn, et que la numérotation des propositions n'y était pas la même. Plus encore, nous savons que la traduction évoquée en premier est très vraisemblablement celle qui nous est parvenue, dans la mesure où la proposition II.4 que cite al-Sijzī est ainsi numérotée dans la traduction existante.

Ces deux témoignages, sur lesquels nous reviendrons, ne contredisent cependant pas le récit de Aḥmad. Revenons à ce dernier. Nous ignorons quand il a rédigé le préambule, mais savons seulement qu'il l'a écrit à Bagdad, une fois achevée la traduction des sept livres, et après la mort du benjamin al-Ḥasan. Muḥammad, leur aîné, était selon toute vraisemblance encore en vie. Comme Muḥammad meurt en 873, on peut supposer sans trop de risques que la traduction des *Coniques* a eu lieu avant cette date, à

[46] *Sur la construction de l'heptagone*, dans R. Rashed, *Œuvre mathématique d'al-Sijzī*. Volume I : *Géométrie des coniques et théorie des nombres au Xᵉ siècle*, Les Cahiers du Mideo 3, Louvain / Paris, 2004, p. 406 ; ar. p. 407, 19-20 :

[...] على ما في الرابع من الثانية من كتاب أبلونيوس الفاضل في المخروطات وفي الأول من نقل إسحاق [...].

Bagdad. Mais qui a traduit les quatre premiers livres ? C'est là qu'intervient le nom d'Isḥāq ibn Ḥunayn évoqué par nos deux témoins, une fois en même temps que celui de Hilāl et une autre fois indépendamment de lui.

Le fondateur de la fameuse école de traduction de Bagdad, Ḥunayn ibn Isḥāq, meurt lui aussi en 873 ; son fils Isḥāq lui succède à la tête de cette école, qu'il dirige jusqu'à sa mort en 910. Il était donc relativement jeune lorsque Aḥmad, de retour à Bagdad, engage l'achèvement de la traduction des sept livres, et c'est vraisemblablement à lui que Aḥmad fit appel ou bien pour traduire les quatre premiers livres, ou bien pour réviser leur traduction par Hilāl à partir du manuscrit des sept livres, en y intégrant les corrections d'Eutocius. Conjecture selon nous plausible, qui a le mérite de rendre compte des faits connus : l'affirmation d'al-Khāzin qu'il existe une traduction par Hilāl et Isḥāq ; l'affirmation d'al-Sijzī qu'il existe une traduction de Isḥāq.

Mais al-Khāzin attribue à Thābit ibn Qurra une seconde traduction, non seulement des trois derniers livres, mais de l'ensemble des *Coniques*. S'agit-il d'une authentique traduction, ou d'une révision de la traduction des quatre premiers livres faite par Hilāl-Isḥāq ? Même si nous penchons pour l'hypothèse de la révision, nous n'avons aucune raison de démentir al-Khāzin. Disons en revanche que l'information, plus que plausible, rend compte de l'unité lexicale et stylistique de la traduction existante, unité qui ressort de l'étude de ce texte, dont les trois derniers livres sont incontestablement traduits par Thābit. Nous savons d'ailleurs qu'il est arrivé plus d'une fois à Thābit ibn Qurra de réviser des traductions de traités mathématiques grecs, et non des moindres : les *Éléments* d'Euclide et l'*Almageste* de Ptolémée.

Aujourd'hui, faute de documents supplémentaires, nous ne pouvons aller plus loin dans la discussion ; ceux dont nous disposons ne nous offrent en effet aucun moyen direct de vérifier les rares informations glanées. Nous montrerons plus loin que les familles existantes des manuscrits de la traduction remontent toutes au même archétype arabe et que les nombreux commentaires arabes des *Coniques* se réfèrent à cette même traduction. Nous en sommes donc réduits aux voies indirectes, en dépit des dangers qu'elles présentent. Il s'agit, en d'autres termes, de glaner le maximum de références aux *Coniques* dans les travaux des mathématiciens entre le IX^e^ et le XII^e^ siècle, et de tirer le parti le moins maigre possible de certaines données lexicales. Dans un cas comme dans l'autre, on ne saurait cependant prétendre à l'exhaustivité, faute d'éditions critiques véritables de bien de ces travaux. Commençons par dresser un tableau de la numérotation des propositions des *Coniques* chez différents mathématiciens[47]. Notons à ce propos que ce sont surtout, mais pas uniquement, les propositions des deux premiers livres qui sont le plus fréquemment évoquées, en raison de leur usage dans l'étude des problèmes solides et pour la résolution des équations cubiques par l'intersection des coniques.

n° dans les traditions conservées	n° dans texte	Auteurs	Références du traité
I.11	I.12	al-Khayyām	*Traité d'algèbre*, *KM*, p.166
I.11	I.12	Ibn al-Haytham	*Sur un problème numérique solide*, *MI*, III, p. 500
I.11	I.14	Abū al-Jūd	*Sur la construction de l'heptagone*, *MI*, III, p. 700, 706
I.12	I.16	al-Sijzī	*Sur la description des sections coniques*, *S*, p. 262
I.13	I.13	Thābit	*Sur les sections du cylindre*, *MI*, I, p. 600
I.15	I.15	Thābit	*Sur les sections du cylindre*, *MI*, I, p. 578, 600
I.17	I.17	Thābit	*Sur les sections du cylindre*, *MI*, I, p. 548, 556, 604
I.17	I.17	Ibn al-Haytham	*L'Achèvement des Coniques*, *MI*, III, p. 176
I.20	I.19	al-Khayyām	*Traité d'algèbre*, *KM*, p. 234
I.20	I.19	al-Sijzī	*Sur les propriétés de la coupole hyperbolique*, *S*, p. 196
I.20	I.19	Abū al-Jūd	*Sur la construction de l'heptagone*, *MI*, III, p. 700
I.20	I.20	Thābit	*Sur la mesure du cône (parabole)*, *MI*, I, p. 244
I.21	I.20	al-Khayyām	*Traité d'algèbre*, *KM*, p. 166
I.21	I.20	al-Sijzī	*Sur les propriétés de la coupole hyperbolique*, *S*,
I.21	I.20	al-Sijzī	p 200, 202
I.21	I.20	al-Qūhī	*Construction de l'heptagone régulier*, *MI*, III, p. 778 ; *Les deux moyennes*, *GD*, p. 510
I.21	I.21	Thābit	*Sur les sections du cylindre*, *MI*, I, p. 532, 546, 600
I.21	I.21	Ibn al-Haytham	*L'Achèvement des Coniques*, *MI*, III, p. 172
I.27	I.27	Ibn al-Haytham	*L'Achèvement des Coniques*, *MI*, III, p. 258
I.30	I.30	Thābit	*Sur les sections du cylindre*, *MI*, I, p. 606
I.30	I.31	al-Ṣāghānī	*Épître à Aḍud al-Dawla*, *MI*, III, p. 820, 822
I.32	I.33	al-Khayyām	*Traité d'algèbre*, *KM*, p. 152, 168
I.32	I.32	Ibn al-Haytham	*L'Achèvement des Coniques*, *MI*, III, p. 154
I.35	I.35	Ibn al-Haytham	*L'Achèvement des Coniques*, *MI*, III, p. 150
I.36	I.36	Ibn al-Haytham	*L'Achèvement des Coniques*, *MI*, III, p. 172
I.37	I.37	Ibn al-Haytham	*L'Achèvement des Coniques*, *MI*, III, p. 154, 190, 192, 198, 262, 264
I.46	I.46	Thābit	*Sur la mesure du cône (parabole)*, *MI*, I, p. 256 *Sur la mesure des paraboloïdes*, *MI*, I, p. 374
I.46	I.46	Ibn al-Haytham	*L'Achèvement des Coniques*, *MI*, III, p. 256

[47] Les abréviations données ici désignent les livres où sont établis et traduits les traités indiqués.

MI : *Les Mathématiques infinitésimales du* IX^{e} *au* XI^{e} *siècle,* 5 vol., Londres, 1993-2006.

GD : *Geometry and Dioptrics in Classical Islam*, Londres, 2005.

KM : *Al-Khayyām mathématicien*, Paris, 1999.

S : *Œuvre mathématique d'al-Sijzī*. Vol. I: *Géométrie des coniques et théorie des nombres au* X^{e} *siècle*, Les Cahiers du Mideo, 3, Louvain / Paris, 2004.

I.50	I.50	Thābit	*Sur les sections du cylindre*, *MI*, I, p. 602
I.51	I.51	Thābit	*Sur la mesure du cône (parabole) MI*, I, p. 244
I.52 I.52 I.52	I.56 I.56 I.52	al-Khayyām Abū al-Jūd Ibn al-Haytham	*Traité d'algèbre*, *KM*, p. 154 *Sur la construction de l'heptagone*, *MI*, III, p. 696, 702 *Lemme au côté de l'heptagone, MI*, III, p. 446 ; *Sur un problème numérique solide*, *MI*, III, p. 498
I.54 I.54	I.58 I.58	al-Khayyām Abū al-Jūd	*Traité d'algèbre*, *KM*, p. 166 *Sur la construction de l'heptagone*, *MI*, III, p. 696, 702
I.55 I.55	I.59 I.55	al-Khayyām al-Sijzī	*Traité d'algèbre*, *KM*, p. 172; *Division d'un quart de cercle, KM*, p. 240, 256 *Sur la division de l'angle*, *S*, p. 350
II.1	II.1	Abū al-Jūd	*Sur la construction de l'heptagone*, *MI*, III, p. 698, 704
II.4 II.4 II.4 II.4 II.4	II.4 II.4 II.4 (= II.1 trad. Isḥāq) II.4 II.4	Thābit Ibn al-Haytham al-Sijzī al-Khāzin Anonyme	*Construction des deux moyennes, GD*, p. 554 *Lemme au côté de l'heptagone*, *MI*, III, p. 446 ; *Sur un problème numérique solide*, *MI*, III, p. 498 *Sur la construction de l'heptagone*, *MI*, III, p. 746 *Les deux moyennes*, *GD*, p. 588 *Synthèse de l'analyse du lemme de l'heptagone*, *MI*, III, p. 876
II.5	II.5	Thābit	*Sur la mesure des paraboloïdes*, *MI*, I, p. 258, 260, 374
II.7	II.6	al-Qūhī	*Deux moyennes*, *GD*, p. 510
II.8 II.8 II.8	II.6 II.8 II.8	al-Ṣāghānī Thābit Ibn al-Haytham	*Épître à Aḍud al-Dawla*, *MI*, III, p. 820, 822 *Construction des deux moyennes, GD*, p. 560 (en marge du ms.) *L'Achèvement des Coniques*, *MI*, III, p. 180
II.11	II.8	al-Ṣāghānī	*Épître à Aḍud al-Dawla*, *MI*, III, p. 820, 822
II.12 II.12 II.12 II.12 II.12 II.12 II.12 II.12	II.8 II.8 II.8 II.12 II.12 II.12 II.12 II.12	al-Khayyām al-Qūhī Abū al-Jūd Thābit Ibn al-Haytham al-Khāzin [Aḥmad ibn Mūsā] Anonyme	*Traité d'algèbre*, *KM*, p. 174 ; *Division d'un quart de cercle, KM*, p. 240, 258 *Deux moyennes*, *GD*, p. 510 *Sur la construction de l'heptagone*, *MI*, III, p. 698, 704 *Construction des deux moyennes, GD*, p. 556 *L'Achèvement des Coniques*, *MI*, III, p. 446; *Sur un problème numérique solide*, *MI*, III, p. 500 *Les deux moyennes*, *GD*, p. 588 *Trisection*, *GD*, p. 550 *Synthèse de l'analyse du lemme de l'heptagone, MI*, III, p. 878
II.13	II.13	Ibn al-Haytham	*L'Achèvement des Coniques*, *MI*, III, p. 268
II.14	II.14	Ibn al-Haytham	*Lemme au côté de l'heptagone*, *MI*, III, p. 446; *Sur un problème numérique solide*, *MI*, III, p. 500
II.29 II.29	II.29 II.29	Thābit Ibn al-Haytham	*Sur les sections du cylindre*, *MI*, I, p. 604 *L'Achèvement des Coniques*, *MI*, III, p. 204
II.30	II.30	Ibn al-Haytham	*L'Achèvement des Coniques*, *MI*, III, p. 204
II.49	II.60	al-Khayyām	*Traité d'algèbre*, *KM*, p. 208
II.50	II.56	Ibn al-Haytham	*L'Achèvement des Coniques*, *MI*, III, p. 150
II.51	II.51	Ibn al-Haytham	*L'Achèvement des Coniques*, *MI*, III, p. 206
II.57	II.57	Ibn al-Haytham	*L'Achèvement des Coniques*, *MI*, III, p. 196
II.59	II.59	Ibn al-Haytham	*L'Achèvement des Coniques*, *MI*, III, p. 196

III.37	III.37	Ibn al-Haytham	*L'Achèvement des Coniques*, *MI*, III, p. 262
III.52 III.52	III.52 III.52	al-Sijzī Ibn al-Haytham	*Sur la construction du triangle acutangle*, *MI*, IV, p. 826 *L'Achèvement des Coniques*, *MI*, III, p. 224, 226
V.11	V.11	Thābit	*Sur les sections du cylindre*, *MI*, I, p. 576, 582, 584, 590, 604, 606
VI.4	VI.4	Thābit	*Sur les sections du cylindre*, *MI*, I, p. 606, 608
VI.8	VI.8	Thābit	*Sur les sections du cylindre*, *MI*, I, p. 570
VI.12	VI.12	Thābit	*Sur les sections du cylindre*, *MI*, I, p. 544
VII.1	VII.1	Ibn al-Haytham	*L'Achèvement des Coniques*, *MI*, III, p. 256
VII.2	VII.2	Ibn al-Haytham	*L'Achèvement des Coniques*, *MI*, III, p.172, 262, 264
VII.12	VII.12	Ibn al-Haytham	*L'Achèvement des Coniques*, *MI*, III, p. 248, 254
VII.13	VII.13	Ibn al-Haytham	*L'Achèvement des Coniques*, *MI*, III, p. 242, 254
VII.21	VII.21	Ibn al-Haytham	*L'Achèvement des Coniques*, *MI*, III, p. 252
VII.22,23	VII.22,23	Ibn al-Haytham	*L'Achèvement des Coniques*, *MI*, III, p. 246

À la lecture de ce tableau on observe des différences importantes entre les mathématiciens, relatives aux numéros des propositions, et de ce fait un certain désordre qui incite à la prudence. Néanmoins, sur ce fond de différences, on constate un accord pour un certain nombre de propositions. On peut donc dégager les résultats suivants :

1° Thābit ibn Qurra donne dans ses travaux mathématiques les mêmes numéros de propositions que ceux que nous retrouvons dans la traduction existante. Celle-ci serait-elle la traduction qu'al-Khāzin attribue à Thābit ? ou tout au moins la traduction révisée par Thābit ? La coïncidence de la numérotation est un argument fort en faveur d'une réponse positive à cette question. Al-Sijzī, nous l'avons déjà remarqué, se réfère lui aussi à cette traduction lorsqu'il évoque la proposition II.4.

2° Ibn al-Haytham a manifestement connu les deux traductions. Dans *L'Achèvement des Coniques* en effet, c'est-à-dire dans ce livre où il entend restituer le huitième livre perdu, il donne lui aussi les mêmes numéros de propositions que ceux de la traduction existante, qu'il avait lui-même transcrite en 415 H (1024-1025 de l'ère chrétienne). Or Ibn al-Haytham succède d'une génération à al-Sijzī, qui, comme son prédécesseur al-Khāzin, parle de deux traductions. Étant donné la date, la traduction existante est nécessairement l'une des deux ; et ce serait celle de Thābit.

D'autre part, dans un autre mémoire intitulé *Sur un problème solide*, Ibn al-Haytham lui-même évoque la proposition I.12 au lieu de I.11 de la traduction existante. Or dans la traduction – ainsi que dans l'édition d'Eutocius – la proposition I.11 porte sur la propriété fondamentale de la parabole. Noter une telle proposition I.12 ne peut être l'effet d'une inadvertance du mathématicien. De plus, cette numérotation se retrouve à l'identique chez un autre mathématicien qui lui aussi a massivement recouru aux *Coniques* : al-Khayyām. Elle a donc dû être empruntée à l'autre traduction.

3° Les propositions I.20 et I.21, d'usage si fréquent, ont été notées par quatre lecteurs des *Coniques* – Abū al-Jūd, al-Qūhī, al-Sijzī et al-Khayyām – I.19 et I.20 respectivement. Elles sont importantes puisqu'elles portent sur la convexité des coniques. De plus, dans I.21, on trouve une relation pour caractériser les coniques à centre, laquelle avait déjà été utilisée par Archimède. On a d'ailleurs observé que I.21 est apparue chez Eutocius, dans son *Commentaire* au traité *De la sphère et du cylindre* d'Archimède[48], ainsi que chez le scholiaste d'Archimède[49] et chez Serenus, sous le numéro I.20[50]. Autant dire qu'elle était ainsi désignée dans un manuscrit des *Coniques*. Quoi qu'il en soit, l'unanimité des quatre mathématiciens, et non des moindres, laisse supposer qu'une autre traduction que celle existante présentait cette différence de numérotation. On observe par ailleurs que ces mathématiciens aussi bien qu'al-Khāzin appartenaient à la même zone géographique.

4° Abū al-Jūd note I.56 la proposition I.52 de la traduction, avec donc une différence de quatre unités. Al-Khayyām en fait autant et note I.56, I.58, I.59 au lieu de I.52, I.54, I.55. Cet écart constant semble bien renvoyer à la traduction consultée.

On peut faire la même observation pour les propositions I.30 et I.32 de la traduction existante : la première a été notée I.31 par al-Ṣāghānī et la seconde I.33 par al-Khayyām.

5° La proposition II.12 de la traduction existante a été notée II.8 par al-Qūhī, Abū al-Jūd et al-Khayyām. C'est d'ailleurs sous ce dernier numéro qu'Eutocius désigne cette même proposition dans son *Commentaire* au traité *De la sphère et du cylindre* d'Archimède. Cette numérotation était donc celle d'un manuscrit grec du livre.

Avant d'aller plus loin, il nous faut rappeler deux faits aisément vérifiables : les renvois dans la traduction existante entre les propositions évoquées par les numéros à l'intérieur de chaque livre et entre les livres sont exacts ; d'autre part, les renvois des trois derniers livres aux livres précédents sont corrects. Si l'on observe quelques variantes, elles sont sans aucun doute le fait des copistes. Pour fixer les idées, prenons le septième livre. Outre les références aux propositions du livre lui-même, on s'y rapporte aux propositions I.11, I.15, I.16, I.21, I.35, I.38, I.49 ; II.1, II.6, II.20.

[48] Éd. Mugler, p. 109, 16-18.

[49] Éd. Heiberg, III, p. 322, 10-11 et 14. La proposition III.17 d'Apollonius est donnée III.20.

[50] Serenus, *De la section du cylindre*, trad. P. Ver Eecke, Paris, 1969, p. 32 ; voir M. Decorps-Foulquier, *Recherches*, p. 100.

Le précédent tableau, ainsi que les remarques qui viennent d'être faites, montrent bien, par-delà les erreurs qu'ont pu commettre les copistes, et celles des mathématiciens ; par-delà la possibilité qu'ils aient consulté simultanément deux traductions et les emprunts qu'ils se faisaient les uns aux autres, etc., qu'il existe certaines régularités des concordances et des différences avec la traduction existante. Ces régularités confirment globalement les témoignages d'al-Khāzin et d'al-Sijzī, même si les documents disponibles ne permettent pas de vérifier leurs dires dans le détail. Expliquons-nous brièvement :

1° L'ordre des propositions de la traduction existante pour les trois derniers livres – V, VI, VII – est nécessairement celui du manuscrit en sept livres (M). L'ordre des propositions de la traduction des quatre premiers livres diffère en revanche dans cette traduction de celui qui règle la succession des propositions dans la traduction attribuée à Hilāl-Isḥāq ou à Isḥāq. Pour le quatrième livre, nous ne pouvons rien affirmer, car les seuls témoignages que nous connaissions, ceux d'al-Khayyām, ne précisent pas les numéros.

2° Cette différence ne semble pas s'étendre à l'ensemble des deux premiers livres, ni même à la totalité du premier. Al-Khāzin lui-même suppose dans le cas général qu'il y a un écart de deux ou trois propositions pour le premier livre. Selon les documents disponibles, cette différence porte tout au plus sur une douzaine de propositions en tout pour les deux premiers livres.

3° L'ordre des propositions de la traduction existante est consistant : les renvois internes au sein de chacun des sept livres, ainsi que ceux qui existent entre ces derniers, sont exacts, comme on peut le vérifier. Ces renvois peuvent être en partie dus à Apollonius lui-même – en tout cas, ils remontent haut dans l'histoire du texte, comme le suggèrent certaines convergences entre les textes arabe et grec –, et en partie dus à Aḥmad ibn Mūsā, selon son propre aveu[51]. C'est cet ordre qui a été adopté par des mathématiciens comme Thābit ibn Qurra et Ibn al-Haytham, dont la connaissance directe de cette traduction reste encore inégalée, comme il ressort de nombre de leurs travaux.

4° Cet ordre des propositions est le même que celui de l'édition d'Eutocius des livres I et III, avec quelques variantes dans celle du livre II et des différences notables pour le quatrième livre. Ces variantes ne modifient cependant pas l'allure générale.

5° Il reste qu'Eutocius lui-même évoque une autre numérotation de quelques propositions, selon un ordre différent de celui de son édition, dans

[51] Voir plus loin, Appendice I.

son *Commentaire* au traité *De la sphère et du cylindre* d'Archimède[52]. Deux de ces propositions se présentent chez Serenus[53] sous les mêmes numéros marqués par Eutocius. Ce qui indique que ces chiffres ont été empruntés à l'une des éditions d'Apollonius lui-même, ou à l'une des copies transcrites à partir de celle-ci avant le deuxième siècle, en raison des dates de Serenus. Ces mêmes propositions numérotées différemment par Eutocius sont citées avec les mêmes numéros par des mathématiciens du Xe et du XIe siècle, très familiers des *Coniques* : Ibn al-Haytham, Abū al-Jūd, al-Qūhī, al-Sijzī, al-Khayyām entre autres. Il ne peut s'agir d'une simple coïncidence.

6° Ces mathématiciens, comme tous les autres mathématiciens arabes, n'avaient d'autre accès aux *Coniques* que les traductions déjà évoquées par al-Khāzin et par al-Sijzī. Aucun biobibliographe ancien, aucun mathématicien de l'époque, aucun historien, bref aucune source, ne suggère aucune autre voie de transmission des *Coniques*, en totalité ou en partie, ni aucune autre traduction, que celles déjà évoquées. Il semble donc que cette numérotation provient de M avant l'unification et l'harmonisation définitives.

7° La différence d'ordre entre les propositions nous ramène à celle qui existe entre les traductions ainsi qu'à celle qu'on observe chez le même Eutocius entre sa numérotation dans son édition des *Coniques* et celle qu'il applique dans son commentaire du livre d'Archimède.

8° À ces conclusions tirées de la numérotation des propositions vient s'ajouter la question de la survivance de quelques termes chez des mathématiciens qui ont eu accès à l'autre traduction, comme al-Khāzin, al-Sijzī, … ; il s'agit de termes qui ne se trouvent pas dans la traduction éditée par Aḥmad ibn Mūsā, à l'exception de l'un d'eux, mais qui est d'un usage exceptionnel. Ainsi par exemple l'expression *al-shakl al-ṣanawbarī*, « la figure de pomme de pin », pour désigner le cône, *al-makhrūṭ,* que l'on rencontre peu dans la traduction, figure chez al-Khāzin[54]. Des formes telles que *al-khaṭṭ (al-ḍilʿ) al-muntaṣib*, « la droite (le côté) verticale (*latus rectum*) » ; et de même *al-ḍilʿ (al-quṭr) al-māʾil*, « le côté (le diamètre) incliné », sont d'usage courant chez des mathématiciens comme al-Sijzī[55] ; au lieu de *al-ḍilʿ al-qāʾim*, « le côté droit », et de *al-quṭr al-mujānib*, « le diamètre transverse », qui sont celles de la traduction de M. Pour l'axe, rendu dans M par *al-sahm*, al-Sijzī et al-Khāzin font usage du terme *al-*

[52] Il cite respectivement les propositions I.21, I.26, I.35 et II.12 : I.20, I.27, I.34 et II.8 dans le *Commentaire* au traité *De la sphère et du cylindre*.

[53] Il cite I.15 et I.20 dans ses propositions 17 et 18 (Serenus, *De la section du cylindre*, trad. Ver Eecke, p. 29, 31).

[54] *Commentaire du premier livre de l'Almageste*, dans R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle,* vol. I, p. 802 ; ar. p. 803, 17-18.

[55] R. Rashed, *Œuvre mathématique d'al-Sijzī*, I, p. 493.

miḥwar de l'autre traduction. On trouve aussi chez al-Khāzin *al-basīṭ al-ṣanawbarī* « la surface en forme de pomme de pin » au lieu de *al-basīṭ al-makhrūṭī* « la surface conique ». On note la ressemblance entre la terminologie d'al-Khāzin, d'al-Sijzī et de quelques autres, par exemple, et la traduction des *Abrégés des Coniques* évoqués plus bas. De telles survivances chez des mathématiciens qui ont recouru à la traduction de Hilāl-Isḥāq (ou Isḥāq) ont pour le moins valeur d'indice, que viendrait confirmer une étude, encore à faire, de la langue de la géométrie à l'époque. Mais notons d'ores et déjà que ces vestiges appartiennent au lexique de la traduction des *Abrégés des Coniques*.

Ainsi, un mathématicien grec ou byzantin, inconnu, dont le nom a été défiguré en Dtrūms par les copistes, a rédigé un traité sur les miroirs ardents. Ce traité commençait par deux livres où, selon toute vraisemblance, l'auteur étudiait les propriétés de la parabole avant d'examiner le miroir du même nom et le miroir sphérique. Mais un anonyme a substitué à ces deux livres des « Abrégés des *Coniques* », où il ne fait que résumer certaines propositions du premier livre du traité d'Apollonius ; notamment I.1, I.3, I.4, I.6, I.11, I.20, I.33 et I.35. Il s'agit bien d'« Abrégés », c'est-à-dire dans bien des cas de résumés, souvent d'une rédaction plus brève, où l'anonyme n'hésite pas à changer de notation ou à sauter quelques étapes de la démonstration. Mais ce qui nous intéresse ici, c'est son lexique, c'est-à-dire le vocabulaire arabe auquel il fait appel pour rendre le grec.

Lors de notre édition et traduction de ce traité, nous avons conclu que le lexique arabe qui rend le grec est différent de celui de la traduction des *Coniques* éditée par Aḥmad ibn Mūsā, c'est-à-dire celle qui nous est parvenue. Nous avons alors avancé la conjecture suivante : ce lexique « encourage à penser que la traduction du traité de Dtrūms fut indépendante de la traduction des *Coniques* (celle éditée par Aḥmad) et peut-être même un peu antérieure »[56]. Au moment où nous rédigions *Les Catoptriciens grecs*, il ne nous était guère possible de pousser plus loin la conjecture, dans les limites de notre connaissance trop partielle de l'histoire de la traduction arabe des *Coniques*. Historiens et biobibliographes s'accordaient en effet alors pour dire qu'il n'y a qu'une seule traduction arabe des *Coniques*, celle de Hilāl al-Ḥimṣī pour les quatre premiers livres et celle de Thābit ibn Qurra pour les trois derniers. Toujours selon cette opinion communément partagée, les quatre premiers livres dans l'édition d'Eutocius, traduits par Hilāl, auraient été identiques à ceux du manuscrit grec des sept livres à partir de laquelle a été effectuée la traduction éditée par Aḥmad ibn Mūsā.

Devant les différences, importantes, entre la traduction révisée par Aḥmad ibn Mūsā et, surtout, Thābit ibn Qurra – celle qui a survécu – et les *Abrégés*

[56] R. Rashed, *Les Catoptriciens grecs*, p. 159.

des Coniques, et ignorant l'existence de deux traductions des quatre premiers livres des *Conique*s, nous en étions réduits à proposer la conjecture évoquée plus haut. Celle-ci, on le verra, est tout à fait vraisemblable. Mais, d'autre part, le constat de ces différences nous a fait commettre l'erreur de penser que le terme « coniques » présent dans le titre *Les abrégés des coniques* désignait la chose – les sections coniques – et non le livre d'Apollonius. Or c'est bien de ce livre qu'il s'agit, et les *Abrégés* ne sont pas simplement, comme nous le pensions, une rédaction directement inspirée du premier livre des *Coniques*, mais bien un authentique abrégé de celui-ci.

Nous avons souligné que le lexique de la traduction des *Abrégés* coïncidait avec les survivances du lexique de la traduction de Hilāl-Isḥāq, avant la révision d'Aḥmad ibn Mūsā et, sûrement, avant celle de Thābit ibn Qurra. Mais on tire des conclusions encore plus importantes de la comparaison entre trois textes : les *Abrégés*, la traduction révisée et le texte d'Eutocius. Rappelons seulement que le manuscrit de l'édition de ce dernier, traduit en arabe, précède de plusieurs siècles le *Vaticanus gr.* 206.

Prenons l'énoncé de la proposition I.6 des *Coniques*.

Coniques I.6

كل مخروط يقطع بسطح يجوز على سهمه، ثم نخرج من أي موضع كان من دائرة قاعدته عموداً إلى قاعدة المثلث، ونتعلم نقطة على سطح ذلك المخروط على غير ضلع المثلث الحادث من السطح المخرج على سهمه، ثم يخرج من تلك النقطة خطٌ موازٍ للخط الذي أخرج إلى قاعدة ذلك المثلث على زوايا قائمة، فإن الخط المخرج من تلك النقطة يقع على سطح المثلث؛ وإذا أخرج إلى الناحية الأخرى حتى يقع على سطح المخروط، قسمه سطح المثلث بنصفين.

Abrégés des Coniques, 4

إذا قطَع الشكلَ الصنوبريَّ سطحٌ على السهم، وتعلّمت نقطةٌ على بسيط الشكل الصنوبريّ، ولم تكن تلك النقطة على ضلع المثلث الذي يقع على السهم، وأُخرج من تلك النقطة خطٌّ مستقيم موازٍ لخط ما من الخطوط التي تقع في سطح قاعدة الشكل الصنوبريّ وتكون أعمدةً على قاعدة المثلث الذي يجوز على السهم، فإن ذلك الخطَّ يقع على سطح المثلث. وإن أُخرج إلى الناحية الأخرى من بسيط المخروط يقسم ⟨هذا البسيط⟩ هذا الخطَّ بنصفين.

Si un cône est coupé par un plan passant par l'axe, puis si, d'un point quelconque du cercle de sa base, nous menons une perpendiculaire à la base du triangle, si nous marquons un point sur la surface de ce cône, n'appartenant pas au côté du triangle engendré par un plan passant par l'axe, et si on mène ensuite de ce point une droite parallèle à la droite menée suivant des angles droits à la base de ce triangle, alors la droite menée de ce point tombe sur le plan du triangle, et si on la prolonge de l'autre côté jusqu'à ce qu'elle tombe sur la surface du cône, alors le plan du triangle la partage en deux moitiés.

Si un plan coupe un cône suivant l'axe, si on marque un point sur la surface de la figure conique tel que ce point ne soit pas sur le côté du triangle qui tombe sur l'axe et si on mène de ce point une droite parallèle à une droite quelconque parmi celles qui sont situées dans le plan de la base de la figure conique et qui sont perpendiculaires à la base du triangle passant par l'axe, alors cette droite rencontre le plan du triangle. Si on la prolonge jusqu'à l'autre côté de la surface du cône, ce plan partage cette droite en deux moitiés[57].

Édition d'Eutocius (éd. Heiberg, I, p. 20, 9-16 ; trad. Ver Eecke, p. 12)

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας, ὃ μή ἐστιν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθῇ παράλληλος εὐθείᾳ τινί, ἥ ἐστι κάθετος ἀπὸ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου, συμβαλεῖ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς ἐπιφανείας δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ τριγώνου.

Si un cône est coupé par un plan passant par l'axe ; si l'on prend, dans la surface du cône, un point quelconque non situé sur le côté du triangle passant par l'axe ; et si, de ce point, l'on mène une parallèle à une droite menée perpendiculairement de la circonférence du cercle sur la base du triangle, cette parallèle rencontrera le triangle passant par l'axe, et, si elle est prolongée jusqu'à l'autre partie de la surface, elle sera coupée en deux parties égales par le triangle.

On observe aisément les différences non seulement lexicales, mais aussi syntaxiques. On constate également que dans le texte de la traduction de M, une perpendiculaire d'un point du cercle de base à la base du triangle est immédiatement introduite ; tandis que dans les « Abrégés » comme dans l'édition d'Eutocius, ce n'est que plus tard que l'auteur parle d'une telle perpendiculaire, lorsqu'il écrit : « et si on mène de ce point une droite parallèle à *une droite quelconque* parmi celles qui sont situées [...] et qui sont perpendiculaires [...] ». On ne manquera pas de noter que cette dernière formulation est bien plus proche de celle de l'édition d'Eutocius que du texte de M. On peut en effet lire dans la première : « de ce point on

[57] *Abrégés des Coniques*, dans R. Rashed, *Les Catoptriciens grecs*, p. 184 ; ar. p. 184, 4-11.

mène une parallèle à une droite menée perpendiculairement de la circonférence du cercle à la base du triangle […] » ; or cette perpendiculaire n'avait pas été introduite auparavant. Le traducteur non seulement puisait à un lexique différent et respectait une autre syntaxe, mais il partait aussi d'un texte différent, plus proche de l'édition d'Eutocius et de ce que l'on trouve chez al-Khāzin[58] et al-Sijzī.

Prenons un autre exemple, la proposition I.33 des *Coniques*.

Coniques, I.33

كل خط يخرج من أي موضع كان من القطع المكافئ إلى قطره على الترتيب، ثم يخرج ذلك القطر على استقامة إلى خارج القطع، ثم يؤخذ من طرف القطر خط خارج من القطع مساوٍ للخط الذي يكون من موضع مسقط الخط المخرج على القطر إلى طرف القطر، ثم يخرج من ذلك الموضع إلى النقطة الأولى التي خرج منها الخط على الترتيب خط مستقيم، فإنه يقع خارجًا من القطع ومماسًا له.

Si, d'un point quelconque sur une parabole, on mène une droite de manière ordonnée à son diamètre, puis, si on prolonge ce diamètre à l'extérieur de la section et qu'on prend ensuite à partir de l'extrémité du diamètre une droite extérieure à la section, égale à la droite séparée entre le pied de la droite menée au diamètre et l'extrémité du diamètre, et qu'on mène une droite de ce point au premier point par lequel est menée la droite de manière ordonnée, alors elle tombe à l'extérieur de la section et lui est tangente.

Abrégés des Coniques, 8

إذا تعلّمت نقطة في شكل البارابولي وأخرج منها خط مستقيم من خطوط الترتيب إلى القطر، وأخرج القطر من البارابولي حتى يكون ما يُقطع منه خارجًا مساويًا للجزء الذي يقطعه الخط المرتب من القطر مما يلي رأس القطع، فإن الخط الذي يصل فيما بين طرف هذا الخط المخرج وبين النقطة التي تعلمت في قطع الشكل الصنوبريّ يماسّ قطع الشكل الصنوبريّ.

Si on marque un point sur une parabole, si de ce point on mène l'une des droites ordonnées au diamètre et si on prolonge le diamètre de la parabole jusqu'à ce que la partie qui en est séparée à l'extérieur soit égale à la partie que la droite ordonnée sépare du diamètre du côté du sommet de la section, alors la droite qui joint l'extrémité de cette droite prolongée et le point qui a été marqué dans la section du cône, sera tangente à la section du cône[59].

[58] Al-Khāzin cite la définition d'Apollonius de la surface conique dans ces termes. Voir Note complémentaire [3].

[59] *Abrégés des Coniques*, dans R. Rashed, *Les Catoptriciens grecs*, p. 191 ; ar. p. 191, 1-7.

Édition d'Eutocius (éd. Heiberg, I, p. 98, 24-29 ; trad. Ver Eecke p. 60)

Ἐὰν ἐν παραβολῇ ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον καταχθῇ, καὶ τῇ ἀπολαμβανομένῃ ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τεθῇ ἴση επ' εὐθείας ἀπ' ἄκρας αὐτῆς, ἡ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου ἐπὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἐπιζευγνυμένη ἐφάψεται τῆς τομῆς.	Si l'on prend un point sur une parabole ; si, de ce point, l'on abaisse une droite de manière ordonnée sur le diamètre, et si l'on pose une droite égale à celle que cette dernière droite découpe sur le diamètre, dans la direction de celui-ci, et à partir du sommet, la droite de jonction, menée du point ainsi obtenu au point que l'on a pris, sera tangente à la section.

D'un côté donc, on rappelle plus d'une fois et avec insistance que le prolongement du diamètre est à l'extérieur de la parabole, et il en est de même pour la droite prise ; de l'autre côté (les *Abrégés* et Eutocius) on le sous-entend seulement. De plus, alors que dans la traduction arabe existante on entend démontrer que $A\Gamma$ prolongée tombe à l'extérieur de la section et lui est tangente, dans le texte d'Eutocius on entend établir que « $A\Gamma$ tombera à l'extérieur de la section » seulement, l'expression « et lui sera tangente » étant clairement omise. La rédaction des *Abrégés* revient à l'énoncé initial.

Par ailleurs, on lit dans les *Abrégés* et l'édition d'Eutocius : « le point qui a été marqué/pris (*al-nuqṭa allatī ta'allamat* ; τὸ ληφθὲν σημεῖον (Eutocius) », alors que dans la traduction des sept livres, on a : « le premier point par lequel est menée la droite de manière ordonnée (*al-nuqṭa al-ūlā allatī kharaja minhā al-khaṭṭ 'alā al-tartīb*) ».

On pourrait donner bien des exemples qui confirmeraient encore ces liens entre les trois textes. Ainsi, la proposition I.1 des *Coniques* : « Les droites menées du sommet du cône (de la figure conique, *shakl ṣanawbarī*, dans les *Abrégés* ; de la surface conique, τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας dans Eutocius) aux points de sa surface (*basīṭ* dans les *Abrégés*) où qu'ils (les points) soient (absent des *Abrégés* et d'Eutocius) sont également dans sa surface ».

Que conclure de cette confrontation entre les différents témoins ? À l'évidence le texte des *Abrégés* est beaucoup plus proche de celui de l'édition d'Eutocius que de la traduction arabe révisée. En théorie, trois scénarios sont possibles. (1) Si Dtrūms est un auteur antérieur à Eutocius (c'est peu vraisemblable), celui qui a remplacé ses deux premiers livres par les *Abrégés* a pu recourir à une version du texte des *Coniques* dont s'est servi Eutocius ; (2) Que Dtrūms soit antérieur ou postérieur à Eutocius, son adaptateur, s'il est grec, a pu recourir, pour opérer sa substitution, au texte édité par Eutocius – dans le cas (1) comme dans le cas (2) ; cela suppose que le traducteur arabe ait rendu en bloc les *Abrégés* et la rédaction de Dtrūms, et ce dans la même terminologie que celle de Hilāl-Isḥāq ; (3) un érudit arabe a pu utiliser la version d'Eutocius effectuée à Damas et sans doute présente à Bagdad pour substituer le matériau des *Coniques* à la rédaction de Dtrūms. C'est l'hypothèse la plus vraisemblable – étant donné le grand intérêt suscité par ce domaine de recherche au IX^{e} siècle – et la plus économique.

9° Faute de documents supplémentaires et dans l'état actuel de nos connaissances, l'hypothèse la plus plausible pourrait être la suivante.

Phase 1 : Les Banū Mūsā acquièrent un manuscrit grec des sept livres, M. Ce manuscrit est si corrompu que les hellénistes de Bagdad auxquels ils font appel ne parviennent pas à le traduire en bonne et due forme. C'est dans ce contexte de première confrontation avec le texte des *Coniques* qu'al-Ḥasan invente sa théorie relative aux sections du cylindre et engage ainsi une étude approfondie des sections elliptiques. On peut légitimement supposer qu'à ce niveau de recherche les efforts des Banū Mūsā – al-Ḥasan et Aḥmad notamment – pour comprendre le texte de M n'étaient pas entièrement infructueux, même s'ils ne leur permettaient pas encore d'en contrôler une traduction autorisée. Il est même vraisemblable qu'ils disposaient d'une traduction provisoire, dont ils avaient entamé la rectification[60].

Phase 2 : Al-Ḥasan meurt à Bagdad et Aḥmad est nommé à Damas. Il y obtient une copie, fautive elle aussi, de l'édition d'Eutocius des quatre premiers livres. Est-ce dès cette date que son chemin croise celui de l'helléniste syrien Hilāl ibn Abī Hilāl al-Ḥimṣī ? Cela n'est pas dit, même si la proximité géographique de Damas et d'Emèse inviterait à le croire[61]. Toujours est-il que, fort de l'acquis scientifique de son frère, Aḥmad ne

[60] On lit sur la page du titre de la seconde partie du plus ancien manuscrit de la traduction (copié par Ibn al-Haytham en 1024) : « revue [la traduction] par al-Ḥasan et Aḥmad, les deux fils de Mūsā ibn Shākir » (ms. Istanbul, Aya Sofia 2762, fol. 138^{r}). Or cette inscription d'Aḥmad a été rédigée alors qu'al-Ḥasan n'était plus, ce qui signifie que cette rectification avait été effectuée avant le départ de Aḥmad pour Damas. Or, de deux choses l'une : ou bien Aḥmad a ajouté le nom de son frère al-Ḥasan après coup, et dans ce cas on se demande pourquoi il n'aurait pas mentionné le frère aîné Muḥammad, d'autant plus qu'ils avaient l'habitude de signer tous les trois, comme l'atteste leur livre sur *La Mesure des figures* (*Les Mathématiques infinitésimales*, vol. I) ; ou bien il y avait une traduction encore provisoire qu'ils avaient rectifiée autant qu'ils le pouvaient avant la mort d'al-Ḥasan. Celle-ci est précisément la traduction provisoire du manuscrit qui contenait les sept livres des *Coniques*.

[61] Rappelons que l'usage du patronyme dans la tradition arabe peut désigner aussi bien le lieu d'origine familiale que le lieu d'adoption après l'immigration.

ménage pas sa peine, à Damas, pour établir le contenu et le texte arabe lui-même de la version d'Eutocius. Le fruit de ses recherches dans ses bagages, il rentre à Bagdad et reprend le projet initial de traduction du manuscrit de M. Hilāl ibn Abī Hilāl se voit confier, au plus tard à ce moment, la tâche de traduire les quatre premiers livres de M – avec l'aide constante de la version eutocienne[62] – et Thābit ibn Qurra celle, autrement plus difficile, de rendre les trois derniers.

Pour comprendre ce qui s'est passé à ce stade, il faut prendre en compte les faits suivants :

- Il existe un accord qui ne peut être le fruit du hasard entre la tradition pré-eutocienne des *Coniques* et un état textuel connu des mathématiciens arabes du Xe siècle, qui n'est pas celui de la traduction arabe de Thābit ibn Qurra.

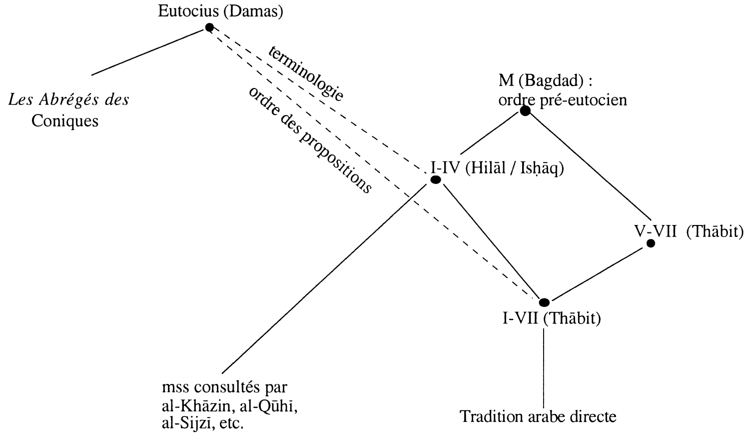
- Deux allusions de ces mathématiciens – l'une d'al-Khāzin, l'autre d'al-Sijzī – invitent à penser que cet état textuel était accessible dans une version effectuée par Hilāl et Isḥāq, ou par Hilāl revu par Isḥāq.

- Aḥmad ibn Mūsā a, de son propre aveu, réalisé un travail d'explicitation des renvois internes implicites des *Coniques* ; dès lors, l'explication la plus probable paraît la suivante : les quatre premiers livres de M sont tout d'abord traduits par Hilāl (aidé ou suivi par Isḥāq). Cette traduction se diffuse immédiatement dans le milieu mathématique bagdadien. C'est elle qui, avant l'unification et l'harmonisation définitives, donne la famille attestée par les citations des mathématiciens du Xe siècle. Sans doute révisée par Thābit ibn Qurra qui adjoint sa traduction des trois derniers livres, elle survit sous cette forme dans la tradition arabe directe. Le travail d'Aḥmad ibn Mūsā a pu intervenir à divers moments de ce processus.

- Il y avait encore la traduction accomplie à Damas de l'édition d'Eutocius. Au cours de leur travail d'harmonisation, Aḥmad et Thābit sont forcés de reconsidérer de très près la numérotation des propositions des sept livres. Ils apportent alors de menus changements à l'ordre de M – qui était encore celui de l'Apollonius pré-eutocien –, en recourant à l'édition d'Eutocius. C'est précisément la version arabe existante dont nous donnons ici l'*editio princeps*.

[62] Ce qui ne veut pas dire qu'il s'agisse d'une traduction du manuscrit d'Eutocius trouvé par Aḥmad à Damas. On verra plus loin, en comparant les lettres d'envoi rédigées par Apollonius telles qu'elles sont reproduites dans V et dans M, que l'édition d'Eutocius dont V est un témoin dépend essentiellement de l'édition adressée par Apollonius à Eudème, alors que le manuscrit en sept livres traduit en arabe remonte à l'édition adressée à Attale, qui est postérieure à la précédente. Cela, entre autres arguments de contenu, suffit à prouver que la traduction arabe conservée des quatre premiers livres n'est pas une version du texte d'Eutocius.

On peut représenter ces relations de dépendance et d'influence par le schéma suivant :



4. LES DEUX VERSIONS DU PREMIER LIVRE DES *CONIQUES*

Des *Coniques* d'Apollonius, nous l'avons vu, il existe deux versions d'origine différente. La première, l'édition communément attribuée à Eutocius des quatre premiers livres, nous est parvenue dans un manuscrit tardif (fin XII^e^-début XIII^e^ siècle) – *Cod. Vaticanus gr.* 206 –, que nous avons noté V, archétype de la tradition manuscrite de l'édition d'Eutocius. C'est le texte que Heiberg a établi et traduit en latin, dont dépend aujourd'hui encore la connaissance de ces quatre premiers livres, et qui est établi et traduit ici. Ces quatre livres, nous l'avons souligné, ne sont pas homogènes, mais se partagent en deux groupes : les trois premiers d'une part, et le quatrième d'autre part.

La deuxième version est une traduction arabe, du milieu du IX^e^ siècle, d'un manuscrit grec regroupant l'ensemble des livres des *Coniques*, c'est-à-dire les sept premiers, le huitième étant perdu depuis déjà longtemps. Cette version, dont nous retraçons l'histoire ailleurs[63], a bénéficié du travail effectué par Eutocius, qui a éclairé les traducteurs et les a aidés à comprendre le manuscrit des sept livres et à le traduire. Un point sur lequel on doit être clair et sans ambiguïté aucune, c'est que la traduction arabe des *Coniques* qui nous est parvenue est celle faite à partir de ce manuscrit de sept livres, même si les corrections apportées par Eutocius aux quatre premiers livres ont été retenues par les traducteurs arabes de ces mêmes

63 Voir *infra*, La tradition manuscrite de la version arabe des *Coniques*.

livres. Il faut renoncer à la thèse selon laquelle ce sont les quatre livres de l'édition d'Eutocius que l'on a rendus en arabe – thèse, soit dit en passant, qu'il aurait été prudent de garder pour soi avant l'édition du texte arabe. Cette traduction est l'œuvre d'hellénistes et de mathématiciens d'une classe supérieure, opérant sous la direction des Banū Mūsā qui ont révisé leur traduction. On a noté M son manuscrit archétype.

Pour approcher au plus près le texte d'Apollonius, la voie la plus directe, et aussi la plus sûre, est celle de V et de M, dans la mesure où ils présentent les écrits d'Apollonius ; les autres témoignages, tel celui de Serenus et de Pappus, par exemple, sont beaucoup moins importants dans cette perspective[64]. Il nous faut donc cerner les différences qui séparent les deux versions – une édition et une traduction dans une autre langue – pour tâcher de mesurer leur impact, et, éventuellement, de cerner leurs origines. Tel est notre programme pour tous les livres des *Coniques*. Ici, nous nous limitons au premier. Mais, avant de l'aborder, il nous faut étudier les textes liminaires transmis dans au moins l'une de nos deux sources, M et l'Eutocius grec. Il s'agit de la préface, transmise sous deux formes profondément différentes en grec et en arabe, des définitions, où les différences sont moindres, et des préliminaires, attestés seulement en arabe.

4.1. *La préface*

Les *Coniques* s'ouvrent sur une préface dans laquelle Apollonius s'explique sur l'ensemble de l'ouvrage, et sur les diverses rédactions qui se sont succédées. Or, si la substance de cette préface est la même pour V et pour M, on observe cependant des différences[65]. Celles-ci sont d'autant plus importantes que chacune des deux versions est consistante, selon sa propre logique.

Dans V, c'est une lettre d'envoi du premier livre à Eudème[66], où Apollonius s'adresse à son ancien ami de Pergame sur un ton vivant et personnel. Il s'inquiète de la santé chancelante d'Eudème, lui donne des nouvelles de la sienne, évoque un souvenir du temps où il demeurait à Pergame, et, enfin, lui parle de son travail et des diverses rédactions qu'il a entreprises[67]. Il achève sa préface sur une dernière touche personnelle.

Ceux qui sont coutumiers des écrits arabes du IXe siècle n'ignorent pas combien littérateurs, historiens et savants étaient friands de ces prologues biographiques. Pourtant, dans M, les paragraphes où Apollonius s'adresse à

[64] Voir *La Collection* de Pappus et *De la section du cylindre* de Serenus.

[65] Une autre version de cette préface a été transmise par Pappus. Voir la comparaison de cette version avec celles de V et de M dans Note complémentaire [1].

[66] On ne sait rien de précis sur cet Eudème, hormis ce qu'Apollonius nous en dit.

[67] Voir éd. Heiberg, I, p. 2 et trad. Ver Eecke, p. 1.

Eudème ont disparu ; au ton vivant et personnel s'est substitué le style général d'un savant qui s'adresse à la communauté mathématique, et nullement à une personne en particulier. Le recours à la seconde personne du singulier, lorsqu'il s'agit d'Eudème, disparaît. Bien qu'aucun historien des mathématiques n'ait jusqu'à présent remarqué, encore moins discuté, la coexistence de ces deux versions, il faut s'interroger sur le sens et les raisons d'une récriture clairement intentionnelle[68].

Afin d'y voir plus clair, examinons ce qu'il en est pour les autres livres des *Coniques*. Au début du second livre, dans V, c'est toujours à Eudème qu'Apollonius adresse sa lettre d'envoi. Le style en est cette fois encore vivant et personnel. Les formules adressées à Eudème (καὶ σεαυτοῦ ἐπιμελοῦ, ἵνα ὑγιαίνῃς) (éd. Heiberg, I, p. 192, 11), qui pourraient à la rigueur passer pour de la simple politesse sans le contexte du premier livre, ne laissent ici aucun doute : Apollonius fait encore une fois allusion à la santé fragile de son correspondant.

Dans M, le silence est encore de mise au début de ce second livre, et aucune mention n'est faite d'Eudème, ni d'une quelconque lettre d'envoi.

À partir du troisième livre, les choses changent dans V, mais non point dans M : cette fois, il n'y a dans V ni référence à Eudème, ni lettre d'envoi. Dans M, il n'y a – comme pour le second livre – ni préface, ni, *a fortiori*, aucune référence à Eudème. Au quatrième livre, la situation est encore différente. Cette fois, Apollonius s'adresse en ces termes à Attale :

> Apollonius à Attale, Salut. C'est tout d'abord à l'intention d'Eudème de Pergame que j'ai rédigé l'exposition des Livres I-III des *Coniques*, dont j'avais ordonné la matière en huit Livres, Ô Attale. Maintenant qu'il est mort, je me suis résolu à rédiger le reste à ton intention, en raison de ton vif désir de prendre connaissance de mes travaux, et je t'envoie pour l'instant le Livre IV[69].

Cette fois, on peut le vérifier, V et M coïncident parfaitement. En outre, pour tous les autres livres des *Coniques*, qui n'existent que dans M, les lettres d'envoi à Attale sont dûment traduites.

Tels sont donc les faits, passés jusqu'ici inaperçus, dont nous disposons. On aura sans doute remarqué :

[68] Ainsi, μὴ θαυμάσῃς, ἐὰν περιπίπτῃς (éd. Heiberg, I, p. 2, 21), « ne t'étonne pas, si tu tombes sur … » est rendu en arabe par *fa-man waqaʿat ilayhi … fa-lā yunkirna dhālik*, « que celui qui tombe sur […], ne l'ignore pas » ; εὐτύχει, « porte-toi bien », à la fin de la préface grecque, est absent de l'arabe. Notons à rebours que dans la version arabe, l'auteur affirme envoyer la version corrigée à « ceux qui demandent à en avoir la connaissance », ce qui supprime implicitement le projet d'un envoi à Eudème.

[69] Ms. Istanbul, Aya Sofia 2762, fol. 138v.

1° L'absence systématique de toute référence à Eudème dans M avant la première lettre à Attale, alors que toutes les lettres adressées à Attale, elles aussi personnelles, sont parfaitement traduites. On nous accordera que ce choix ne peut être ni celui des copistes, ni celui du traducteur. Pourrait-on attribuer la radiation d'Eudème à un éditeur du seul M, ou de ses sources, de l'époque hellénistique ou romaine ? Cette hypothèse n'est pas à exclure, mais demeure selon nous, en l'absence de tout mobile crédible pour ce petit crime textuel, parfaitement gratuite.

2° Dans V, aussi bien au premier qu'au second livre, Apollonius nous apprend qu'Eudème était malade. Il compose cependant le troisième livre à l'intention d'Eudème, comme il le dira à Attale (notons cependant encore une fois que, toujours dans V, pour une raison ou pour une autre, ce livre n'est pas précédé d'une lettre d'envoi à son destinataire). Or dans la lettre qu'il adresse à Attale en lui envoyant le quatrième livre, Apollonius lui dit qu'Eudème n'est plus. Eudème était donc mort entre-temps.

3° Apollonius explique lui-même qu'il a plus d'une fois repris la rédaction des *Coniques*. Huit siècles plus tard, Eutocius souligne le fait et le rapproche de l'état textuel auquel il a accès au moment où il rédige son commentaire.

Ainsi, tout semble s'éclairer grâce à Apollonius lui-même. Dans une rédaction des *Coniques* postérieure à la mort d'Eudème, Apollonius aurait jugé peu délicat de laisser des lettres d'envoi personnelles où il s'inquiétait de la santé de son correspondant, alors que celui-ci n'était plus. Il fallait donc changer le style de la Préface pour l'adapter à la communauté scientifique à laquelle elle s'adressait dorénavant, et supprimer les lettres d'envoi des deux premiers livres. C'est donc bien cette rédaction des *Coniques* postérieure à la mort d'Eudème qui a été transmise par M, alors que pour le début du texte V aurait conservé une rédaction antérieure[70].

4° Nous avons constaté un clivage dans V entre les trois premiers livres et le quatrième. Les trois premiers sont bien dans la rédaction adressée à Eudème, comme nous le verrons.

[70] Restent encore entre les deux versions de la Préface quelques différences, qui peuvent recevoir plusieurs explications. Ainsi, dans V, la recherche d'Euclide sur le lieu de trois ou quatre droites est faite, selon la formule de l'auteur, « de façon malheureuse » (οὐκ εὐτυχῶς). Une telle qualification est absente de M. De même on trouve dans V la séquence τῶν στερεῶν τόπων, qui est elle aussi absente de M, qui donne à la place « des théorèmes ». Pour plus de détails sur ce point, voir l'introduction de notre commentaire du troisième livre et Note complémentaire [1].

5° Reste encore à souligner une différence faite par Apollonius dans sa préface entre les quatre premiers livres et les quatre suivants. Dans l'introduction d'Eutocius, on parle à propos des quatre premiers livres d'« introduction élémentaire » (ἀγωγὴ στοιχειώδης). L'arabe s'éloigne un peu du texte, pour développer la référence latente, évidente pour tout connaisseur de la littérature scientifique grecque, aux *Éléments* d'Euclide, écrivant « l'introduction (*al-madkhal*) et les éléments (*al-uṣūl*) ». Notons que l'appellation *al-Madkhal* était la traduction courante, en arabe, de l'Eἰσαγωγή de Porphyre. C'est évidemment en ce sens qu'Apollonius a qualifié les quatre premiers livres. Quant aux quatre derniers, ils « sont beaucoup plus étendus et beaucoup plus riches ». Dans les quatre premiers, on trouve donc les fondements indispensables à la géométrie des sections coniques et nécessaires à toute recherche future, notamment celle qui opère dans les quatre derniers. Th. Heath est dans le vrai lorsqu'il soutient que l'on trouve dans les quatre premiers « the general theory of conic sections as the indispensable basis for further extensions of the subject »[71].

Toute la question est maintenant de savoir si, et dans quelle mesure, on peut mettre en relation le texte de M et la version définitive, adressée à Attale, des huit livres des *Coniques*. Il n'y a pas, on s'en doute, de réponse toute faite à cette question. Il ne peut s'agir que de vraisemblances glanées au cours du commentaire mathématique de l'ouvrage, et qu'à vrai dire seul l'historien des mathématiques sera en mesure d'apprécier à leur juste valeur. De ce point de vue, même si les inconnues sont trop nombreuses, les textes trop contaminés, pour autoriser une réponse tranchée, il se dégage pourtant de la version arabe une impression d'unité et de rigueur formelle (indépendamment du fait, encore une fois, qu'elle contient encore les sept premiers livres des *Coniques*) qui inciterait à voir au cœur des propositions des trois premiers livres un phénomène identique à celui qui a affecté la préface : une mise à jour, par Apollonius, de textes antérieurement rédigés.

4.2. *Les définitions*

À la suite de la Préface, Apollonius donne un certain nombre de définitions dont il a besoin pour la suite des *Coniques*. Or, s'il y a un domaine où il ne devrait pas y avoir de différences entre une édition et une traduction, c'est bien celui des définitions. Il y en a cependant, dont certaines sont loin d'être négligeables.

Alors que V donne pour titre aux définitions qui suivent la préface « les premières définitions » (῞Οροι πρῶτοι), M ne donne que le titre :

[71] *Treatise on Conic Sections*, p. lxxvi.

« Définitions » (*Ḥudūd*), sans aucun qualificatif. Entre les propositions I.16 et I.17, Apollonius donne quelques définitions supplémentaires, dont en particulier celle du diamètre conjugué. Cette fois encore on lit dans V « définitions secondes » (ὅροι β'), tandis que M ne donne aucun titre.

Cette observation est importante, non seulement pour distinguer les deux traditions, mais aussi pour saisir la cohérence de chacune. Celui qui a qualifié de « secondes » les définitions qui suivent la proposition I.16 ne pouvait en effet que désigner les définitions qui succèdent à la préface de « premières ». Cela peut bien être le fait d'un éditeur.

De telles différences portent sur la forme ; d'autres, plus graves, touchent au fond même. Ainsi, dans M, les ordonnées sont définies comme elles doivent l'être, relativement à un diamètre :

> J'appelle les droites parallèles que nous avons décrites des droites ordonnées relativement à ce diamètre[72].

Un peu plus loin, on lit :

> J'appelle ces droites parallèles les droites ordonnées relativement à ce diamètre droit[73].

C'est dire qu'Apollonius tient à souligner le diamètre et l'ordonnée qui lui est associée. Cette précision est essentielle pour définir rigoureusement l'ordonnée, pour deux raisons au moins : l'infinité du nombre des diamètres, soulignée par Apollonius lui-même dans le dernier tiers du premier livre, et leurs propriétés pour une courbe plane autre que le cercle : les diamètres ne sont plus dans le cas général perpendiculaires aux ordonnées. Il nous paraît inconcevable que cette précision ait pu échapper à Apollonius, ou que celui-ci l'ait admise implicitement dans une rédaction définitive de son texte, tout au moins à l'occasion des définitions ou lorsqu'il y a risque d'ambiguïté. Or cette précision est absente de V, où on lit seulement :

> droite abaissée de manière ordonnée sur le diamètre[74].

D'autre part, dans la définition du diamètre transverse, on lit dans la traduction de M :

> la partie – située entre les deux lignes courbes – de la droite qui coupe en deux moitiés toutes les droites menées dans chacune des deux lignes courbes parallèlement à une droite quelconque[75] ;

[72] Voir *infra*, p. 254 ; ar. p. 255, 16-17.
[73] Voir *infra*, p. 254 ; ar. p. 255, 25-26.
[74] Éd. Heiberg, I, p. 6.
[75] Voir *infra*, p. 254 ; ar. p. 255, 18-21.

alors que dans V la première précision est absente, c'est-à-dire celle qui indique qu'il s'agit d'un segment de droite entre les deux lignes, si bien que la définition se réduit à :

> une droite qui coupe les deux lignes et partage en deux parties égales toutes les droites […][76].

On peut relever d'autres différences entre les deux versions. Prenons pour terminer la définition de la surface conique. Dans V, on lit :

> j'appelle surface conique la surface décrite par la droite (celle dont une extrémité est fixe et l'autre mobile suivant la circonférence d'un cercle) qui est composée de deux surfaces opposées par le sommet (ἥ σύγκειται ἐκ δύο ἐπιφανειῶν)[77].

Dans M en revanche on lit :

> J'appelle chacune des deux surfaces décrites par la droite en rotation […] une surface conique[78].

Or tout indique qu'il s'agit là d'un problème de traduction. Le traducteur arabe a, semble-t-il, déplacé l'objet de la définition, dans la mesure où chacune des deux nappes est définie par Apollonius comme une surface conique. La différence est donc la suivante : alors que dans V la surface conique est composée de deux nappes dont chacune est définie comme surface, dans M on passe directement aux nappes. Il ne faudrait cependant pas trop insister sur cette différence, dans la mesure où Apollonius – il faudra bien l'admettre – semble, ici comme dans bien d'autres endroits, hésiter entre deux conceptions : une ou deux surfaces, et, pour les deux sections opposées, une ou deux courbes.

Ces exemples sont en nombre suffisant pour confirmer que les deux textes des définitions, celui de l'édition et celui de la traduction, relèvent, au delà de l'intervention de l'éditeur et du traducteur, de deux rédactions différentes – à moins de faire endosser tous les manques à l'éditeur, ou, au contraire, de rendre le traducteur responsable de tous les ajouts. Ce double procédé, souvent à l'œuvre dans ce type d'étude, est la pire des méthodes, celle dont nous nous gardons autant que possible.

4.3. *Les préliminaires*

La troisième des sections qui précèdent le premier livre des *Coniques* est intitulée les « Préliminaires » (*al-muqaddamāt*). Cette section, soulignons-le, n'existe que dans M, où elle se trouve à la suite de la préface et des

[76] Éd. Heiberg, I, p. 8 ; trad. Ver Eecke, p. 4.
[77] Éd. Heiberg, I, p. 6, 8 ; trad. Ver Eecke, p. 3.
[78] Voir *infra*, p. 252-254 ; ar. p. 253, 2-255, 1-2.

définitions, et dans la tradition arabo-latine qui en dépend. Cette absence de V des Préliminaires ne pouvait qu'intriguer les éditeurs des *Coniques* et les historiens des mathématiques. Les uns, tel Heiberg, s'en sont tenus à un silence prudent ; d'autres, non sans légèreté, se sont empressés de l'attribuer aux Banū Mūsā eux-mêmes, sans autre raison que la succession des deux textes dans un même manuscrit, séparés cependant par « les définitions » dont la place est attestée également par l'édition d'Eutocius ; d'autres enfin se sont posé le problème, sans toutefois avoir encore connaissance de la traduction de M, mais seulement la traduction latine de Gérard de Crémone des définitions et des préliminaires. On a cru pouvoir soutenir, à partir de celle-ci, que les préliminaires seraient des paraphrases des propositions I.11 à I.14, de la plume d'un anonyme. Ainsi par exemple, Marshall Clagett écrit à propos du premier préliminaire :

> The paraphraser in his introduction attempts as briefly as possible to set out the constructional procedures, for his following definitions of the parabola, hyperbola and ellipse. In a sense, he is merely paraphrasing the conditional clauses of Apollonius' propositions I.11, I.12 and I.13[79].

L'éminent historien est dans le vrai lorsqu'il affirme que le premier préliminaire – ainsi que les autres – est là « to set out the constructional procedures ». Mais il en va tout autrement des propositions I.11 à I.14, dont l'essentiel ne porte pas sur « la construction », mais sur la *caractérisation* des sections coniques, c'est-à-dire sur la démonstration de la propriété fondamentale de chacune d'elles, grâce à laquelle Apollonius étudie les autres propriétés des sections. D'ailleurs, Apollonius lui-même fait clairement cette distinction dans sa présentation du premier livre. N'écrit-il pas que ce livre comprend le mode de « génération des trois sections et des sections opposées, ainsi que les principales propriétés, exposées d'une manière plus développée et plus générale que chez les autres qui ont écrit sur la matière »[80]. Cette différence d'intention et de fonction, mais aussi des textes et de leur place dans le livre, interdisent à coup sûr de parler de « paraphrase ». La question reste donc posée, et nous allons la reprendre brièvement, dans la seule perspective de la discussion qui est la nôtre ici.

Première remarque : les Préliminaires figurent dans toutes les familles de manuscrits de la traduction conservée qui existent et remontent sans le moindre doute à l'archétype de la traduction, c'est-à-dire au manuscrit des

[79] M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, vol. IV, Philadelphie, 1980, p. 8.

[80] « περιέχει δὲ τὸ μὲν πρῶτον τὰς γενέσεις τῶν τριῶν τομῶν καὶ τῶν ἀντικειμένων καὶ τὰ ἐν αὐταῖς ἀρχικὰ συμπτώματα ἐπὶ πλέον καὶ καθόλου μᾶλλον ἐξειργασμένα παρὰ τὰ ὑπὸ τῶν ἄλλων γεγραμμένα » (éd. Heiberg, I, p. 4, 1-5 ; trad. Ver Eecke, p. 2).

Banū Mūsā ou à un de ses descendants directs. Ils sont précédés de cette formule introductive :

> Parmi les préliminaires dont on sait qu'ils aident à comprendre ce que contient ce traité [les *Coniques*], il y a ce que j'expose[81].

On ne manquera pas de remarquer le recours à un « je / nous » d'auteur (qui se reproduit un peu plus bas), lequel ne peut être qu'Apollonius – à moins que les Banū Mūsā aient voulu nous abuser. Mais ces derniers, pour ce qui est des lemmes qu'ils ont jugé nécessaires d'associer à l'œuvre d'Apollonius, ont pris soin de le faire dans leur préambule, en leur propre nom, et non à l'intérieur même du texte des *Coniques*. Quoi de plus naturel dans cette éventualité que de regrouper lemmes et préliminaires, au lieu de commettre un faux et d'attribuer ces derniers à Apollonius ?

Si d'autre part l'histoire manuscrite exclut qu'une telle section soit absente de l'archétype arabe, il ne reste alors que deux hypothèses : ou bien ces Préliminaires sont de la main d'Apollonius en personne ; ou bien ils ont été introduits dans le texte au cours de l'histoire manuscrite grecque. L'intervalle temporel entre l'acquisition par les traducteurs arabes du manuscrit grec des sept livres et le contrôle éditorial des Banū Mūsā étant pour ainsi dire inexistant, il faut donc supposer un accident dans la tradition grecque, qu'il s'agisse d'une confusion entre une éventuelle préface didactique et le texte même des *Coniques*, ou d'une supercherie intentionnelle.

Mais qu'en est-il du contenu ? À la lecture des Définitions, section qui précède immédiatement les Préliminaires, on remarque que nulle référence n'y est faite à aucune courbe conique en particulier, et qu'Apollonius n'en a encore nommé ni défini aucune. Les définitions sont celles des cônes, des surfaces coniques, du sommet, de l'axe, de la base, du diamètre, de l'ordonnée relativement à un diamètre, du diamètre conjugué d'une courbe conique, mais toujours *en général*. Ces définitions permettent à Apollonius d'énoncer et de démontrer les neuf premières propositions I.1-9 ; la proposition I.10 est elle-même pour ainsi dire une définition, puisqu'elle exprime la convexité des sections coniques. Jusqu'ici, Apollonius n'a donc pas encore introduit les objets propres de sa recherche dans les *Coniques*, à savoir les courbes planes. Il s'est seulement donné les moyens de démontrer quelques propriétés générales des sections planes dans les dix premières propositions[82]. Mais il est difficilement concevable qu'un traité tel que le sien n'ait pas commencé par décrire comment *engendrer* ces courbes planes avant de les *caractériser* en I.11 à I.14. Tout mathématicien, depuis Euclide tout au moins, ressent la nécessité d'introduire des « procédures », des « règles »

[81] Voir *infra*, p. 256 ; ar. p. 257, 11.
[82] Voir *infra*, p. 110.

pour construire les « objets » mathématiques dont il s'occupe. Il a donc fallu montrer comment engendrer les sections coniques et ainsi spécifier ces courbes que les définitions ne donnaient qu'en général. Or c'est précisément à la génération de ces courbes planes que sont destinés les Préliminaires. Ceux-ci ont trouvé leur nécessité dans des exigences logiques et didactiques à la fois, auxquelles les exposés des mathématiciens anciens faisaient la part belle. Bien qu'on ne puisse exclure la possibilité d'un texte intercalé à date ancienne, il serait surprenant qu'un mathématicien de la stature d'Apollonius ait négligé cette étape. Et du reste Eutocius, dont les sources manuscrites ne contenaient très probablement pas « les préliminaires », s'est étonné à sa façon de ne pas trouver dans le texte qu'il avait sous les yeux ce que précisément contiennent les Préliminaires : dans son langage aristotélicien, la définition de la *quiddité* de la courbe. Il écrit dans son *Commentaire* :

> Dans la première définition, il (Apollonius) décrit la génération de la surface conique, mais sans donner la définition de son essence (ἀλλ᾽ οὐ τὸν τί ἔστι διορισμὸν παραδέδωκεν)[83].

Bien plus, il consacre lui-même tout le début de son *Commentaire* à expliquer comment engendrer les sections planes, ce qui est l'objet du premier préliminaire. De fait, le premier préliminaire enseigne comment engendrer une section plane en général ; ou encore, qu'il est toujours possible d'obtenir une section plane par l'intersection d'un cône et d'un plan qui ne passe pas par son sommet.

Le deuxième préliminaire explique comment engendrer, non plus une section plane en général, mais chacune des sections planes, et comment les nommer ; dans l'ordre : parabole, hyperbole, ellipse, sections opposées. C'est ici que l'on introduit les objets de l'ensemble des *Coniques*[84]. Cela est indispensable pour pouvoir ensuite caractériser ces courbes, soit par leur *symptoma*, soit par leur excentricité, soit par la propriété foyer ou foyer-directrice. Apollonius les caractérise plus tard, de I.11 à I.14, par le *symptoma*.

Le troisième préliminaire porte sur l'existence d'un point dans l'ellipse, par lequel passent les diamètres. Citons le texte dans sa littéralité :

[83] Éd. Heiberg, II, p. 186, 23-24.

[84] C'est avec les sections opposées que surgit une première difficulté, passée inaperçue des lecteurs modernes mais que, au XIIIe siècle, Ibn Abī Jarrāda avait déjà soulignée (voir Note complémentaire [10]). Dans le texte tel qu'il se présente, on lit : « Entre les deux sections opposées se trouve un point tel que toutes les droites qui (*allatī*)* passent par lui sont des diamètres pour les deux sections opposées » (p. 258).

Or ceci n'est pas tout à fait exact. Il semble qu'en fait il y ait eu un saut du même au même ; il suffit en effet d'ajouter « *taqṭaʿ al-qiṭʿayn wa-allatī* » après *allatī**, et on lira, après « qui » : « coupent les deux sections et qui ».

> Il y a à l'intérieur de l'ellipse un point tel que toutes les droites qui passent par lui soient des diamètres pour elle ; ce point est le centre de la section[85].

Ceci est clair. On poursuit :

> Si on mène du centre de l'ellipse des diamètres, alors, parmi ces diamètres, ceux dont les extrémités aboutissent au pourtour de la section sans le dépasser et sans être en deçà, qu'on les appelle les diamètres transverses de l'ellipse ; celui d'entre eux dont le commencement est à partir d'un point du pourtour de la section et dont l'autre extrémité est en deçà du pourtour de la section ou au delà de lui, qu'on l'appelle diamètre *au sens large*[86].

Le dernier préliminaire est le suivant :

> Quant au diamètre appelé second, il ne se trouvera que dans les sections opposées ; il passe par leur centre et nous allons le décrire à la fin de la proposition seize de ce livre (le premier)[87].

Nous avons déjà commenté l'apparition du « je/nous » d'auteur et nous n'y reviendrons pas. Référence est ici faite à la proposition I.16. Le texte comporte cependant une erreur visible qui n'a pu être commise par Apollonius, et pas davantage par les Banū Mūsā ou Thābit ibn Qurra. D'ailleurs le mathématicien du XIIIe siècle Ibn Abī Jarrāda, qui l'a remarquée, n'en a pas fait grand état, mais a seulement cherché à en trouver l'origine. Elle est selon lui imputable au traducteur en arabe, et il aurait fallu éliminer « ne … que » (*innamā*), qui introduit une restriction ; ou substituer à « se trouve » le mot « montrer », ce qui donnerait comme séquence « on montre » ou « on mentionne ». Une dernière possibilité, qui nous semble plus immédiate, est qu'il y ait eu un saut du même au même, sans qu'il faille changer quoi que ce soit au texte. On lira alors : « … ne se trouve que <dans l'ellipse, l'hyperbole et dans> les deux sections opposées », pour exclure ainsi le cas de la parabole. Le texte serait alors, comme l'entendait l'auteur, en parfait accord avec les définitions introduites à la fin de I.16.

Une fois établis et compris, ces préliminaires placent l'historien devant un choix difficile. Au vu de leur absence dans V, le premier réflexe de l'his-

[85] Voir *infra*, p. 258 ; ar. p. 259, 14-16.

[86] Cette dernière expression, « au sens large », rend le mot arabe *mursalan*, que Gérard de Crémone traduit ainsi : « nominatur diameter absolute ». Il serait donc possible, et c'est ce qu'a pensé Gérard de Crémone, que le terme arabe *mursalan* ait rendu le grec ἁπλῶς. Or, si le mot arabe comporte effectivement ce sens, il a aussi celui de « négligemment ». C'est ce dernier sens que rend la traduction par « au sens large », comme si le texte signifiait « diamètre en gros », et donc pas « précisément ». Ce choix du traducteur arabe semble ainsi souligner l'impropriété du terme « diamètre ». C'est dire que le traducteur comprenait ici, selon nous, *in fine*, le sens du texte.

[87] Voir *infra*, p. 258 ; ar. p. 259, 19-21. Voir aussi Note complémentaire [12].

torien des textes, et le plus sain, est d'en soupçonner l'authenticité. En vertu de la règle d'or de la philologie, voulant qu'un ajout volontaire soit toujours plus probable qu'une suppression volontaire, en vertu également du caractère éminemment instable – codicologiquement et rédactionnellement – des textes liminaires (prologues, introductions, préfaces, etc.), la cause pourrait en effet paraître entendue. Mais dès lors qu'on considère leur importance au moins autant *logique* que didactique ; qu'on garde en mémoire la grande probabilité, attestée par les préfaces de M et de V, qu'Apollonius ait remis plusieurs fois sur le métier son ouvrage ; qu'on songe que c'est un « je / nous » qui par deux fois s'exprime ; on est tenté d'attribuer ces Préliminaires à Apollonius lui-même, dans la version définitive des *Coniques* : parachevant la structure didactique et logique d'une œuvre où les Préliminaires, bien que textuellement absents, fonctionnaient cependant déjà implicitement, Apollonius, dans une dernière rédaction (envoyée à Attale ?), aurait explicité tous les éléments qui demandaient encore à l'être.

4.4. *Les « secondes » définitions*

Nous avons évoqué plus d'une fois les définitions introduites par Apollonius après la proposition I.16 et qui, contrairement à la Préface, aux définitions et, si on admet leur authenticité, aux préliminaires, font bien partie du premier livre des *Coniques*. Il nous faut nous y arrêter ici, avant d'aborder les autres questions relatives au premier livre.

Après la proposition I.16, aussi bien dans le texte grec que dans la traduction arabe, on trouve un passage consacré à de nouvelles définitions. Essentiellement les mêmes dans les deux textes, ces définitions se distinguent cependant par quelques traits formels, c'est-à-dire propres à leur présentation dans les deux traditions. Dans le texte grec, nous l'avons dit, ces définitions sont séparées de I.16 par le titre « Secondes définitions » (ὅροι β′), dont l'équivalent ne figure pas dans la traduction arabe : dans celle-ci en effet les définitions suivent directement la fin de la démonstration. D'autre part, dans le texte grec, ces définitions sont au nombre de trois, alors qu'en arabe il y en a quatre. La première définition en grec réunit les deux premières définitions de l'arabe. Ces différences formelles ne font que confirmer ce que nous savons déjà des traditions textuelles. Reste à savoir quelles sont les raisons qui avaient incité Apollonius à donner ces définitions et à les placer à cet endroit du premier livre. Pour comprendre ces raisons, il nous faut examiner ces définitions une à une.

La première définition est celle du « centre », c'est-à-dire du « point qui est le milieu du diamètre transverse de l'hyperbole et de l'ellipse » ; la notion est à l'évidence importante, puisqu'elle distingue deux sortes de sections coniques.

Revenons donc aux propositions I.15 et I.16. Apollonius introduit un point milieu du premier diamètre. Il part en effet du point Γ milieu du premier diamètre, et considère la droite ordonnée issue de Γ, relative à ce diamètre. Il montre que toute corde parallèle au premier diamètre aura son milieu sur cette droite ordonnée issue de Γ ; celle-ci est donc aussi un diamètre, qu'il appelle « diamètre conjugué ». Ce point Γ, milieu du premier diamètre par hypothèse, est, dans le cas de l'ellipse, milieu du diamètre conjugué. Apollonius semble donc vouloir ici baptiser ce point-milieu, caractéristique, qu'il utilisera ensuite constamment. Ainsi, dans la proposition I.30, il montre que, pour l'ellipse et les deux sections, toute droite passant par Γ et qui coupe la section en deux points Δ et E est telle que Γ est milieu de ΔE. Dans la proposition I.47, il montre plus généralement que toute droite joignant un point de la section (cercle, ellipse ou hyperbole) au milieu du diamètre transverse, est aussi un diamètre.

Tout indique donc que, une fois introduit le point Γ et établie sa propriété évoquée ci-dessus, Apollonius a éprouvé la nécessité de définir la notion de « centre », aussi bien pour rendre compte de ce point et de sa propriété, qu'en prévision de ce qui va suivre. Reste encore à savoir pourquoi il évoque l'hyperbole, alors qu'il n'avait étudié à cet égard que l'ellipse et les deux sections opposées, pour lesquelles d'ailleurs cette notion de « centre » a ce sens précis. Dans le cas de l'hyperbole, il reste que ce « centre » partage le diamètre transverse en deux moitiés, et permet de définir le diamètre conjugué qui ne rencontre pas l'hyperbole et qui sera lui-même diamètre transverse de l'hyperbole conjuguée, étudiée plus loin dans le même livre.

La seconde définition ne fait que baptiser les droites qui passent par ce point-milieu et se partagent en deux moitiés.

La troisième définition reprend celle du centre pour les deux sections opposées. Cette définition, on le comprend, reproduit mot pour mot la première. On lit dans la traduction arabe : « le point qui est le milieu du diamètre transverse des sections opposées »[88]. Aussi peut-on se demander pourquoi Apollonius n'a pas réuni les deux définitions en une seule. On en trouvera, semble-t-il, la raison dans la définition qui suit celle-ci. Tout se passe comme si Apollonius avait voulu reprendre la définition du centre dans le cas des sections opposées en tant que telles, en vue de la définition du diamètre conjugué au premier diamètre pour ces mêmes sections.

En effet, cette quatrième définition diffère quelque peu en grec et en arabe. Dans le texte grec, on lit :

[88] Voir *infra*, p. 328 ; ar. p. 329, 18-19.

> appelons *second diamètre* (δευτέρα διάμετρος) la droite menée par le centre, parallèle à une droite abaissée de manière ordonnée, moyenne proportionnelle des côtés de la figure et coupée en deux parties égales par le centre[89] ;

alors qu'en arabe on lit :

> nous appelons le *diamètre conjugué* mené de ce centre parallèlement aux droites ordonnées entre les deux sections, qui est coupé en deux moitiés par le centre et qui est moyenne proportionnelle entre le diamètre transverse et le côté droit, second diamètre[90].

Dans la définition de la traduction arabe, il s'agit de donner un statut propre au diamètre conjugué par rapport au premier diamètre ; il est le second du premier, alors qu'en grec on définit le second diamètre pour ainsi dire comme tel.

Cette définition du diamètre conjugué comme diamètre second d'un premier diamètre n'est donc en rien redondante avec la définition générale du diamètre donnée au début du livre, c'est-à-dire comme une droite « coupant en deux parties égales les droites parallèles à l'autre (diamètre) dont il est conjugué ». Celle-ci est générale, sans restriction ni spécification ; celle-là s'applique sous la restriction qu'il est second du premier et avec des précisions où intervient le côté droit. En effet, la longueur du diamètre conjugué du premier diamètre de longueur d est la moyenne proportionnelle entre d et son côté droit c ; d'où $d'^2 = cd$. Dans le cas de l'ellipse, on pouvait calculer cette longueur directement d'après la proposition I.13 ; si en effet B est une extrémité du diamètre conjugué, ΓB est l'ordonnée du point B, d'où

$$\frac{d'^2}{4} = GB^2 = \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{2}\left(d - \frac{d}{2}\right) = \frac{cd}{4},$$

d'où $d'^2 = cd$.

4.5. *Les propositions*

Le premier livre des *Coniques* comprend soixante propositions que l'on peut classer en plusieurs groupes. Ces propositions, ainsi que leur classification, ont fait l'objet de notre commentaire mathématique ; ici nous nous intéressons seulement à leur rédaction dans la traduction arabe et dans l'édition d'Eutocius, c'est-à-dire dans M et V, ceci afin de mieux

[89] Éd. Heiberg, I, p. 66, 25-26 ; trad. Ver Eecke, p. 40.
[90] Voir *infra*, p. 328 ; ar. p. 329, 20-22.

comprendre les liens qui les unissent. C'est, nous semble-t-il, la voie la moins aléatoire pour remonter à Apollonius.

Sur le nombre des propositions, M et V s'accordent parfaitement. Quant au contenu de la grande majorité d'entre elles, ils convergent globalement sur le fond, si bien que rien ne vient menacer l'authenticité de leur attribution à Apollonius. Mais les différences commencent à se manifester sitôt qu'on examine la rédaction de M et celle de V. Ces différences sont multiples, d'origines diverses et d'importance inégale. Elles se distribuent selon un spectre qui va de l'omission du copiste à l'absence d'une partie de la démonstration, et sont précieuses pour nous instruire avec encore plus de précision sur la traduction arabe aussi bien que sur la méthode d'édition d'Eutocius.

Une simple comparaison de M et de V montre que, excepté pour quelques rares propositions, il existe entre les deux sources un décalage dans la rédaction. Il arrive fréquemment que des phrases, voire des paragraphes, de M soient absents de V, ce que l'on vérifie sans peine. M se présente ainsi comme plus complet que V. Il est vrai qu'on peut aussi rencontrer des omissions dans M, mais celles-ci sont le plus souvent le résultat de la tradition manuscrite, ou l'effet de la traduction. Par exemple, l'absence de l'énoncé de I.34 et de celui de I.36, tous deux présents dans l'édition d'Eutocius dont disposaient les traducteurs, peut s'expliquer par la tradition manuscrite de M. Or il en va tout autrement des manques dans l'édition d'Eutocius. Un examen attentif montre que, pour des propositions comme I.11, I.12, le texte de M et celui de V sont identiques et le texte de V est complet ; pour I.13 et I.14, le texte de V est presque complet. Eutocius, ou l'une de ses sources, copie donc avec soin les propositions fondamentales, tandis qu'il se permet d'aller un peu plus vite, parfois même d'abréger, lorsqu'il édite d'autres propositions. Mais, même dans ces propositions I.11, I.12, I.13 et I.14, où Apollonius détermine la propriété fondamentale pour chaque conique, il arrive que dans l'édition d'Eutocius il manque des phrases importantes. Ainsi, à la fin de I.13, on lit dans M :

> L'assertion concernant les droites ordonnées pour le cercle est la même assertion que pour l'ellipse, si ce n'est que le côté droit de celui-ci est égal à son diamètre[91].

Rappelons qu'il est de coutume qu'Apollonius groupe les cas de l'ellipse et du cercle.

Pour d'autres propositions, les différences entre M et V sont plus importantes, aussi bien mathématiquement que textuellement. Il est impossible de les recenser toutes ici. Nous en évoquons un certain nombre dans notre

[91] Voir *infra*, p. 314 ; ar. p. 315, 3-4.

commentaire et dans les notes, et nous nous contenterons ici de quelques exemples parmi les plus significatifs.

Proposition I.18

Rappelons que la proposition I.17 est la première d'un groupe de propositions consacrées aux points intérieurs et aux points extérieurs d'une conique, et donc liées à la proposition I.10. L'idée forte d'Apollonius est que les points extérieurs (resp. intérieurs) à une conique sont les points du plan à partir desquels on peut (resp. on ne peut pas) mener des droites tangentes à cette conique. La seconde idée, aussi importante, sous-jacente à la démarche d'Apollonius est qu'une tangente à un point d'une conique est une limite d'une suite de sécantes de cette conique, dont chacune la coupe en deux points.

La proposition I.17 porte sur la tangente au point sommet d'une conique. Dans I.18, qui nous intéresse ici, Apollonius démontre qu'un segment $\Gamma\Delta$ dont tous les points sont intérieurs à une conique, parallèle à une droite AZB, laquelle est une fois tangente à cette conique en un point et une fois sécante en deux points à celle-ci, s'il est prolongé, rencontre la conique en deux points et comprend, en plus, des points extérieurs.

Le contexte est donc limpide, et on attend après I.17 qu'Apollonius s'occupe principalement de la démonstration du cas de la tangente, celui de la sécante étant l'objet d'une démonstration analogue.

À cet égard, on observe entre M et V des différences importantes. L'énoncé de M porte sur la tangente et la démonstration se limite à ce cas. Ce n'est qu'à la fin de la proposition qu'Apollonius considère le cas de la sécante pour affirmer avec raison qu'« on le montre par la même démonstration »[92]. Le texte donne les deux figures correspondant à ces deux cas.

Dans V, en revanche, on ne distingue pas les deux cas – tangente et sécante – mais on considère le cas où « [...] une droite rencontre (συμπίπτουσα) une section du cône [...] »[93], sans préciser si c'est en un point ou en deux points. Sans explication supplémentaire, les deux figures sont cependant là.

Mais les différences ne s'arrêtent ni à l'énoncé, ni à la distinction des cas au cours de la démonstration ; une phrase importante pour la démonstration, présente dans M, manque en effet dans V : « étant donné que la droite EZ prolongée tombe à l'extérieur de la section, comme on l'a montré précédemment (c'est-à-dire dans la proposition précédente) »[94]. Enfin, le

[92] Voir *infra*, p. 334 ; ar. p. 335, 2.
[93] Éd. Heiberg, I, p. 68, 20 ; trad. Ver Eecke, p. 41.
[94] Voir *infra*, p. 332 ; ar. p. 333, 10-11.

paragraphe de conclusion – trois lignes qui traitent le cas de la sécante – présent dans M, est absent de V.

L'unique témoignage textuel relatif à ce problème est indirect, et nous vient d'Eutocius lui-même. Il note dans son *Commentaire*, à propos de la proposition I.28 qui porte sur une question semblable, plus précisément encore sur le cas de la tangente, pour les sections opposées : « même si $\Gamma\Delta$ coupe l'hyperbole, on aura la même propriété exactement comme dans le cas de la proposition 18 »[95]. Il savait donc que I.18 traite aussi bien de la tangente que de la sécante. Entre cette connaissance et son édition telle qu'elle nous est parvenue d'après V, il y a donc un écart, conceptuel aussi bien que textuel, qui pourrait susciter bien des conjectures. Nous retiendrons simplement que M et V fournissent deux versions différentes de cette proposition, et que le traducteur arabe ne rendait pas V, mais le texte du manuscrit en sept livres.

Proposition I.23

Apollonius énonce cette proposition, telle qu'elle se présente dans M, en ces termes :

> Si une droite coupe une ellipse et si elle est entre ses deux diamètres conjugués, alors, si on la prolonge, elle rencontrera les deux diamètres <à l'extérieur de la section>[96].

La droite sécante doit passer entre les diamètres conjugués. Or le terme « conjugués » est absent de V. On ne peut cependant pas faire endosser au copiste de V (*Vaticanus gr.* 206) la responsabilité de cette lacune, car Eutocius lui-même dans son *Commentaire* des *Coniques* la constate et justifie sa restitution[97].

L'expression « à l'extérieur de la section » est présente dans V et absente de l'énoncé de M. Cette absence est sans doute due à un incident de l'histoire du texte arabe, car elle est présente dans l'ecthèse telle qu'elle est donnée dans ce même texte.

Proposition I.30

L'examen de cette proposition corrobore la conclusion précédente. Apollonius l'énonce ainsi :

[95] Éd. Heiberg, II, p. 242, 20-21.
[96] Voir *infra*, p. 342 ; ar. p. 343, 10-12.
[97] Éd. Heiberg, II, p. 234, 12-18.

> Si, du centre d'une ellipse ou de sections opposées, on mène une droite qui tombe sur la section de part et d'autre du centre, alors cette droite est partagée en deux moitiés au centre[98].

Cet énoncé est le même dans M et dans V. Apollonius commence par établir la proposition pour l'ellipse. Le début est presque le même. Il manque simplement à V la relation $\frac{BZ \cdot ZA}{AH \cdot HB} = \frac{Z\Gamma^2}{\Gamma H^2}$, relation qui suit immédiatement, et permet de conclure après une permutation.

On lit ensuite dans V :

> par composition dans l'ellipse et au contraire par conversion dans les sections opposées, le carré de $B\Gamma$ sera au carré de ΓH comme le carré de $A\Gamma$ au carré de ΓZ[99],

et on parvient alors à la conclusion.

Devant cette situation insolite, Eutocius lui-même, dans son *Commentaire*, reprend la démonstration et développe le calcul. Cette fois on ne peut douter que le texte, incomplet, de V, est bien sa propre édition, effectuée à partir des manuscrits qu'il a pu réunir.

Venons-en maintenant à M. Il diffère sensiblement de V : on a cette fois la démonstration complète pour l'ellipse et pour les sections opposées, ainsi que le calcul entièrement développé, et la même conclusion que dans V.

Il serait difficile, voire impossible, d'accuser Apollonius d'une rédaction aussi partielle et défaillante que celle de V. Il n'est pas davantage raisonnable d'accuser le traducteur arabe d'être intervenu pour rectifier un texte défaillant. La solution s'impose : le manuscrit en sept livres, à la base de M, donne la rédaction d'Apollonius de cette proposition.

Proposition I.31

Il manque à V trois lignes de la fin de la démonstration, nécessaires pour justifier la conclusion. Dans son *Commentaire*, Eutocius reconstruit le texte manquant. Le manque est donc bien dans sa propre édition. Dans M, en revanche, ces lignes sont présentes, et le raisonnement est mené sans faille. La traduction arabe n'est pas celle de l'édition d'Eutocius, mais bien du manuscrit en sept livres.

Proposition I.38

La comparaison entre l'édition d'Eutocius et la traduction arabe laisse apparaître des différences importantes et irréductibles[100] ; ces différences

[98] Voir *infra*, p. 360 ; ar. p. 361, 6-8.
[99] Éd. Heiberg, I, p. 92, 9-12 ; trad. Ver Eecke, p. 55-56.
[100] M. Decorps-Foulquier, *Recherches*, p. 112 *sqq.*

portent sur la structure de la proposition elle-même, sur le texte et sur les démonstrations. Nous avons analysé cette proposition et ces différences dans le commentaire mathématique. Il suffit donc ici d'en évoquer quelques-unes. Pour fixer les idées, rappelons brièvement l'énoncé et la démarche d'Apollonius.

Soit une hyperbole, ou une ellipse, ou un cercle, de centre H, de diamètre transverse $AB = a$ et de diamètre conjugué à ce diamètre $\Gamma\Delta = b$. Si la tangente à la conique au point E coupe $\Gamma\Delta$ en Z et si la droite menée de E parallèlement à AB rencontre $\Gamma\Delta$ en Θ, alors

1° $$H\Theta \cdot \Theta Z = H\Gamma^2 = b^2$$

2° $$\frac{\Gamma Z}{Z\Delta} = \frac{\Delta\Theta}{\Theta\Gamma} \text{ pour l'hyperbole et } \frac{\Gamma Z}{Z\Delta} = \frac{\Gamma\Theta}{\Theta\Delta} \text{ pour l'ellipse}$$[101].

La démonstration est menée, dans la traduction de M, en deux temps. Dans la première partie, on établit 1° avant de tirer une relation qui donne le rapport du côté droit au diamètre transverse.

La seconde partie, inséparable de la première, est consacrée à établir 2° en toute rigueur. Elle est dans la suite, lexicale et logique, de la première : elle commence en effet par la séquence

> Maintenons la figure en l'état, *nous disons que le rapport de* ΓΖ *à* ΖΔ *dans l'hyperbole est égal au rapport de* ΔΘ *à* ΘΓ[102].

Le paragraphe suivant est consacré à établir la deuxième relation de 2°, c'est-à-dire pour l'ellipse. Il s'ouvre sur huit lignes, absentes de l'édition d'Eutocius. Il est suivi de la conclusion.

Dans l'édition d'Eutocius, la structure est différente. La première partie est, pour l'essentiel, la même que dans la traduction arabe. Elle est suivie d'un paragraphe de cinq lignes (éd. Heiberg, p. 116, 13-18,) qui commence comme la séquence précédente : « les mêmes choses étant posées », mais d'où la phrase ci-dessus en italique est absente ; à sa place on trouve les cinq lignes, où le cas de l'ellipse n'est pas distingué de celui de l'hyperbole. La conclusion est dans les mêmes termes que dans la traduction arabe.

On voit bien que la structure est différente. Quant au résultat 2° et à sa démonstration dans l'édition d'Eutocius, ils sont inexacts.

Ainsi, dans la traduction arabe, on a une proposition complète, parfaitement établie, dotée d'une structure cohérente, alors que tel n'est pas le cas

[101] Voir commentaire mathématique p. 151 *sqq*.
[102] Voir *infra*, p. 392 ; ar. p. 393, 13-14.

dans l'édition d'Eutocius. De plus, les deux textes de la seconde partie ne coïncident pas, mais diffèrent radicalement.

Or Eutocius, dans son *Commentaire*, écrit :

> Dans certains manuscrits <des *Coniques*>, on trouve cette proposition démontrée dans le seul cas de l'hyperbole ; ici on a une démonstration générale ; en effet, les autres sections offrent les mêmes propriétés. En outre, apparemment, pour Apollonius, c'est non seulement l'hyperbole, mais aussi l'ellipse, qui a un second diamètre, comme nous avons pu l'entendre à diverses reprises dans les propositions précédentes[103].

Si donc on en croit Eutocius, pour s'en tenir aux seuls faits, on peut conclure qu'il existait dans la tradition manuscrite grecque trois rédactions : l'une à laquelle manquait le cas de l'ellipse ; la seconde, celle, fautive, d'Eutocius ; et la troisième, qui est celle de M, dont on peut en outre supposer sans risque qu'Eutocius n'en disposait pas. Encore une fois, on a ici une preuve irréfutable que c'est bien le manuscrit grec en sept livres, à la base de M, qui a été traduit en arabe.

Proposition I.50

La comparaison des deux versions, M et V, de cette proposition, montre immédiatement que le texte de V comporte plusieurs omissions, dont certaines atteignent trois lignes. Il ne peut en aucun cas s'agir d'incidents au cours de la copie de V ou de l'un de ses ancêtres, mais ces lacunes sont bien inhérentes à l'édition elle-même, et donc le fait d'Eutocius ou de la tradition dont il s'est servi. Rappelons la plus significative de toutes.

Au cours de la démonstration de cette proposition, il nous faut, comme on peut aisément le vérifier, établir l'égalité entre les deux triangles $H B \Gamma$ et $\Gamma \Delta E$. Ainsi on lit dans V :

> Et puisqu'il a été démontré que, dans l'hyperbole, le triangle $P N \Gamma$ dépasse le triangle $H B \Gamma$, c'est-à-dire le triangle $\Gamma \Delta E$, du triangle $\Lambda N \Xi$, tandis que dans l'ellipse et dans le cercle, il lui est inférieur [...][104].

Dans M, on a exactement le même texte, si ce n'est cependant que, pour chacun des deux cas, on précise « comme on l'a montré dans la proposition 43 »[105]. Cette phrase est donc répétée deux fois, à deux lignes d'intervalle, et, rappelons-le, elle figure dans toutes les familles de la traduction conservée de M. Elle ne peut donc avoir été ajoutée par l'un ou l'autre des copistes des manuscrits disponibles. A-t-elle pu être ajoutée par le traducteur ou par le réviseur ? Nullement, et en voici la raison.

103 Éd. Heiberg, II, p. 250, 16-22.
104 Éd. Heiberg, I, p. 152, 5-8 ; trad. Ver Eecke, p. 92.
105 Voir *infra*, p. 434 ; ar. p. 435, 8, 9 et 13.

L'égalité dont Apollonius avait besoin dans sa démonstration est parachutée dans V sans la moindre justification, alors que le texte de M renvoie explicitement à la proposition I.43. Toutefois, cette justification ne se trouve pas dans I.43. Mais Eutocius, comme l'a déjà remarqué Ver Eecke[106], savait que la justification manquait dans les sources dont dépend son édition et qu'elle était présente dans d'autres manuscrits des *Coniques* qu'il n'avait pas utilisés pour cette même édition. Dans son *Commentaire* en effet, il reproduit une démonstration alternative de I.43 qui comporte précisément dès le début cette justification[107], qu'il dit avoir trouvée dans « d'autres manuscrits » des *Coniques* d'Apollonius. Or ce témoignage est particulièrement précieux. Il fournit d'abord trois arguments pour attribuer les deux démonstrations à Apollonius : le témoignage d'Eutocius d'une part, l'identité de la démonstration de I.43 dans M et dans V et la survivance dans M du renvoi à la justification qui se trouve dans la démonstration alternative. Il montre d'autre part avec quel scrupule a été menée la traduction de M ainsi que sa révision par Aḥmad ibn Mūsā et, plus tard, par Thābit ibn Qurra, tous éminents mathématiciens, qui ont laissé un renvoi vide sans l'éliminer. Enfin, la présence de ce renvoi dans I.50 de M, alors qu'il est absent de V, est une preuve supplémentaire, si besoin était, que la traduction arabe ne peut être celle de l'édition d'Eutocius et n'a pu être effectuée qu'à partir du manuscrit en sept livres des *Coniques*. Dans celui-ci se trouvait le texte complet de I.50, en plus de ce renvoi à I.43 attesté par Eutocius dans « d'autres manuscrits ». Reste à savoir comment une telle référence peut se trouver dans I.50 du texte arabe, alors qu'elle ne correspond à rien dans I.43, que ce soit dans M ou dans V. Plusieurs conjectures pourraient être avancées. On pourrait par exemple suggérer que la présence de cette justification dans la démonstration alternative aurait été connue, d'une manière ou d'une autre, des traducteurs arabes. Mais une telle conjecture ne résiste pas au premier examen : pourquoi auraient-ils retenu la référence dans I.50 et oublié *la chose* dans I.43 ? Il est plus vraisemblable de supposer qu'Apollonius avait donné dans une version antérieure la démonstration retrouvée par Eutocius dans d'« autres manuscrits » des *Coniques* et reproduite par lui dans son *Commentaire*, avant de lui substituer plus tard la démonstration, assez élégante, que M et V nous ont transmise. Une fois la substitution faite, il aurait oublié d'effacer la référence à la proposition I.43 dans les autres propositions telles que I.50 et II.20. Au courant de cette nouvelle version, Eutocius aurait effacé une référence devenue sans objet. Sans nous perdre dans ces suppositions, nous n'avons qu'une certitude, c'est que la référence

[106] Ver Eecke, p. 92, note 2.
[107] Éd. Heiberg, II, p. 255, 25 *sqq.* ; p. 272, 28.

à I.43 figure dans le manuscrit grec des sept livres, M, et qu'elle ne se trouve pas dans l'édition d'Eutocius. Notons enfin que ce renvoi explicite à I.43 au cours de la démonstration de I.50 et de II.20 est lui-même une preuve irréfutable que la numérotation de certaines propositions, ainsi que certains renvois internes à celles-ci par leurs numéros, sont inscrits dans M et non pas introduits par un quelconque traducteur, comme on le verra plus loin. Cela confirme également que cette numérotation et de tels renvois ne sont pas le seul fait d'Eutocius ou des traditions qu'il a suivies, mais remontent, en partie tout au moins, à Apollonius en personne.

Ces exemples, choisis parmi bien d'autres, suffisent à illustrer les liens entre V et M tels qu'ils nous sont parvenus ; ils laissent entrevoir, avec l'aide du *Commentaire* d'Eutocius, les rapports entre l'*édition* établie par ce dernier du premier livre des *Coniques*, et un manuscrit de la rédaction d'Apollonius que nous ne connaissons que par sa traduction arabe. Ces liens et ces rapports, qui sont ici discutés pour le seul premier livre, on les retrouve identiquement pour les trois livres suivants, comme on le verra. Ils ont au moins le mérite de nous débarrasser d'une légende, selon laquelle la traduction arabe des quatre premiers livres est celle de l'édition d'Eutocius. Les traducteurs arabes rendaient donc bien le manuscrit en sept livres, un œil sur l'édition d'Eutocius pour corriger certaines fautes et améliorer certaines lectures.

4.6. *L'organisation du premier livre des Coniques*

Saisir la structure des *Coniques*, c'est s'assurer de l'ordre des propositions et repérer les implications des unes aux autres. Il faudrait donc commencer par savoir si l'ordre des propositions est celui suivi par Apollonius et si les numéros de ces propositions sont ceux que leur avait donnés Apollonius, au moins en partie, pour ensuite discuter des renvois internes, ainsi que de leur authenticité. Une partie de cette tâche, celle relative aux véritables réseaux, est laissée au commentaire mathématique. Le reste du travail, nous l'ébauchons ici.

L'ordre des propositions de chaque livre est indiqué par leurs numéros. Ceux-ci, à quelques variations près, sont, pour les trois premiers livres, communs à V et à M, tandis que pour le quatrième on relève des différences qui ne sont pas négligeables. Rappelons pour mémoire que le premier livre comporte 60 propositions aussi bien dans V que dans M, et qu'elles sont les mêmes. Le *Commentaire* d'Eutocius vient confirmer cette numérotation : c'est celle qu'il a trouvée ou donnée. Il en est de même pour les 56 propositions du troisième livre. Pour le second livre, la situation diffère quelque peu, alors que pour le quatrième l'écart entre V et M est important. Le second comprend 63 propositions dans M et 53 dans V ; le quatrième comporte 52 propositions dans M et 57 dans V, mais l'ordre de succession interne diffère parfois. Ces écarts n'ont toutefois pas l'importance que suggéreraient les chiffres. Ainsi, pour le second livre, on constate que jusqu'à la proposition 43 il n'y a entre M et V aucune différence, eu égard à l'ordre. Les propositions qui restent se présentent ainsi :

M	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
V	44a	44b	45	46a	46b	47	48	49a	49b	49c	49d	49e
M	56	57	58	59	60	61	62	63				
V	50a	50b	50c	50d	51a	51b	52	53				

Prenons l'exemple de II.50 , d'après V : on veut mener à une section du cône une tangente formant avec l'axe, du côté de la section, un angle égal à un angle donné. Dans M, dans la proposition 56, on traite de la parabole, dans 57 de l'analyse pour l'hyperbole, dans 58, de la synthèse de la précédente analyse, et dans 59, de l'ellipse. V réunit-il ce que M sépare, ou est-ce l'inverse ? Quelle que soit la réponse, cette variation s'opère sur fond d'accord pour les trois premiers livres mais non pas pour le quatrième. En tout cas, la question ne se pose pas pour le premier livre.

Traditions textuelles et témoignage d'Eutocius concordent et ne laissent aucun doute : l'ordre et les numéros, pour les trois premiers livres, sont, pour l'essentiel, les mêmes dans M et dans V, ce qui n'est pas le cas du quatrième livre.

Une confirmation supplémentaire, quoique indirecte, nous vient du huitième livre de la *Collection mathématique* de Pappus. Dans la treizième proposition, il veut trouver une ellipse qui passe par cinq points. Pour montrer qu'une certaine droite est un diamètre de l'ellipse, il procède, comme il l'écrit, « en vertu de la dixième définition »[108]. Expression doublement surprenante : à la fois l'appel à une définition pour établir une propriété, et le chiffre lui-même ; comme si la définition était numérotée. Dans la traduction arabe de ce huitième livre, on lit : « en vertu de ce qui a été démontré dans la vingt-huitième proposition du traité d'Apollonius sur les *Coniques* »[109]. Or c'est précisément la proposition 28 du second livre qui assure la déduction de la propriété.

Un peu plus loin, dans la version arabe, Pappus fait appel à une autre proposition des *Coniques*. Cette fois le copiste, une fois indiquée la

[108] Pappus d'Alexandrie, *La Collection mathématique*, Œuvre traduite pour la première fois du grec en français, avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke, 2 vol., Paris / Bruges, 1933 ; nouveau tirage, Paris, 1982, vol. II, p. 847.

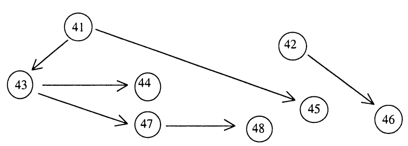
[109] Ms. Istanbul, Topkapi Saray, Ahmet III, 3457, fol. 3^{r}.

référence, a négligé de noter le numéro de la proposition, et le livre. Il s'agit en fait de la proposition 17 du troisième livre. Encore un peu plus loin, toujours dans la version arabe, on a une référence exacte et explicite à la proposition 37 du premier livre[110]. Ces deux dernières références sont absentes du texte grec.

Ce témoignage de Pappus soulève cependant une question : ces références sont-elles de lui, ou ont-elles été ajoutées par le traducteur arabe ? Dans le texte grec, nous avons bien une référence chiffrée à une définition, ce qui atteste tout au moins l'existence de telles références à l'époque de Pappus. Mais dans le texte arabe, nous avons trois références chiffrées aux propositions. Ce qui nous importe ici, c'est que ces références sont exactes, et correspondent à ce que nous avons dans M et dans V.

Les renvois internes et chiffrés – c'est-à-dire qu'ils précisent le numéro de la proposition par son nombre, ou par l'adverbe « précédemment » (en général lorsqu'il s'agit de la proposition qui précède directement) – posent un tout autre problème. Sont-ils le fait d'Apollonius, ou ont-ils été interpolés au cours de la tradition textuelle ? Les éditeurs et traducteurs du XIXe siècle, et encore ceux d'aujourd'hui, sont friands de ce genre de question et, pour ce problème particulier des renvois, tranchent souvent de manière exclusive. Leur attitude est plutôt l'effet d'un parti pris qu'on s'efforce ensuite de justifier, selon lequel les anciens livres de mathématiques ne comportent pas de renvois internes. Un tel présupposé, nous l'avons montré, est irrecevable dans le cas des *Arithmétiques* de Diophante[111]. Il ne semble pas mieux tenir pour les *Coniques* d'Apollonius. Commençons par rappeler quelques faits.

1° Dans V, il existe (pour le premier livre qui nous occupe ici) onze renvois internes qui engagent le tiers du livre environ. Quatre d'entre eux se trouvent avant la fin de la démonstration ; sept sont à la fin de celle-ci, et tous en sont partie intégrante. Ces renvois se partagent en deux groupes que l'on peut ainsi figurer :



11	49	12	50	13
↓	↓	↓	↓	↓
52	53	54	55	56

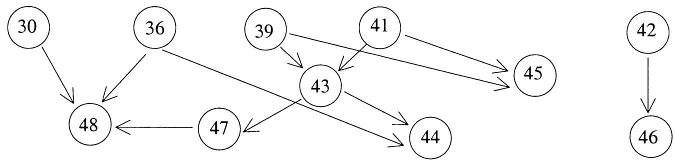
[110] *Ibid.*, fol. 13^{r}-13^{v}.

[111] *Diophante : Les Arithmétiques*, texte établi et traduit par R. Rashed, t. III et IV, Collection des Universités de France, Paris, 1984.

Il s'agit à l'évidence d'un nombre suffisamment important de renvois pour qu'on écarte l'hypothèse d'une interpolation. Ils ne suffisent cependant pas à la reconstruction de la structure logique du premier livre. Dans une telle situation, deux questions se posent. Tout d'abord, ces renvois attestés dans V se retrouvent-ils dans M ? La seconde question, propre à M, regarde ses renvois propres.

2° Commençons par reprendre les deux précédents schémas pour les comparer à ceux de la traduction de M.

On trouve



On constate la présence des mêmes renvois que dans V, et on vérifie qu'ils occupent les mêmes lieux ; on observe en outre que le réseau est complété par l'intervention de 30, 36 et 39. Le deuxième réseau peut être ainsi figuré :

$$\begin{tikzcd}
11 \arrow[d] & 33 \arrow[d] & 49 \arrow[dl] & 12 \arrow[d] & 50 \arrow[d] & 13 \arrow[d] \\
52 & 53 & & 54 & 55 & 56
\end{tikzcd}$$

Cette fois la situation est identique, à l'intervention près de la proposition 33.

Résumons : les renvois notés dans V sont tous dans M et aux mêmes endroits. Dans la traduction de M il y a des renvois supplémentaires pour ces deux groupes. Dans M les renvois ne se bornent pas à quelques propositions seulement, mais concernent toutes les propositions et tous les livres.

Cette coïncidence exceptionnelle entre V et M relativement aux renvois offre, semble-t-il, un argument décisif pour contredire la thèse de l'interpolation. Reste à expliquer l'intervention des renvois supplémentaires dans M.

3° Dans le célèbre préambule rédigé par les Banū Mūsā pour introduire la traduction arabe des *Coniques*, on lit :

> Il (Aḥmad ibn Mūsā) a innové (*aḥdatha*) pour l'ouvrage (les *Coniques*) une chose extrêmement utile pour en faciliter la compréhension à celui qui voudrait le lire, ce que ni Apollonius dans sa composition, ni Eutocius dans

sa correction, n'avait fait ; cela en cherchant tout (*kull*) lemme (*muqaddama*) dont on a besoin pour démontrer quelqu'une des propositions, qu'il a mentionné à la place où on en a besoin et dont il a indiqué la place dans le traité[112].

On pourrait conclure hâtivement que ni Apollonius, ni Eutocius, n'ont fait aucun renvoi interne, et que c'est Aḥmad qui les a tous notés. En fait il n'en est rien. Ce que dit Aḥmad en toute rigueur, c'est qu'il a cherché *toutes* les propositions qui servent de lemmes dans la démonstration de l'une ou l'autre proposition. Autrement dit, qu'il a complété les renvois pour ainsi rendre la démonstration compréhensible à un éventuel lecteur. La séquence principale du texte est en effet précisément « tout préliminaire » (*kull muqaddama*).

Dans ces conditions s'éclairent à la fois la coïncidence entre M et V et l'évocation des propositions supplémentaires dans M. Ainsi, pour les deux groupes précédents, il est très vraisemblable que la présence de 30, 36, 39 dans l'un et de 33 dans l'autre étaient le fait d'Aḥmad.

Il semble donc qu'Aḥmad ibn Mūsā a complété les références internes qu'il avait trouvées dans M et dans la copie qu'il avait obtenue de l'édition d'Eutocius. Les renvois rencontrés ne sont donc pas tous interpolés, sans pourtant être tous authentiques, c'est-à-dire dus à Apollonius. Celui-ci aurait établi des renvois pour certains groupes de propositions, repris par Eutocius et par le traducteur arabe, renvois qu'au cours de la révision des Banū Mūsā Aḥmad aurait complétés et systématisés, dans la version structurellement harmonisée de la traduction de M.

Pour finir, rappelons l'une des conclusions de l'étude précédente : si l'édition d'Eutocius nous livre la langue d'Apollonius, à travers le filtre d'Eutocius certes, la traduction arabe transmet plus complètement et plus rigoureusement le contenu mathématique. Mais lorsque édition et traduction coïncident parfaitement, le doute n'est plus permis, nous sommes en présence des mots et des choses d'Apollonius. Lire les *Coniques* d'Apollonius, c'est donc lire l'édition *et* la traduction.

[112] Voir Appendice I, p. 506 ; ar. p. 507, 7-11.

CHAPITRE II

CONIQUES, LIVRE I : COMMENTAIRES

Le premier livre des *Coniques* commence comme il se doit par les définitions, suivies, dans la version arabe, des préliminaires. À la fin de la seizième proposition, on trouve « les secondes définitions » qui viennent compléter cet ensemble. Ce livre est composé de soixante propositions.

Apollonius commence par se donner un cercle et un point fixe, non situé dans le plan de ce cercle, et définit la génération d'une *surface conique* à partir de ce point appelé *sommet* A et de ce cercle, cercle de base de centre O. Cette surface conique est composée de deux nappes – deux surfaces opposées et illimitées. La droite AO est appelée *axe* de la section conique. Euclide, lui, avait défini la surface conique comme celle d'un cône de révolution engendré par la rotation d'un triangle rectangle autour de l'un des deux côtés de l'angle droit[1]. On retrouvera les deux définitions chez les mathématiciens tardifs.

Ce n'est qu'après la définition de la surface conique, en donnant le procédé de sa génération, qu'Apollonius définit le cône droit, le cône oblique, les sections coniques, le diamètre d'une conique, ou de deux courbes situées dans le même plan, le sommet, l'ordonnée relative au diamètre, les diamètres conjugués, l'axe d'une courbe plane, les axes conjugués.

Il aborde ensuite l'étude des sections planes en commençant par deux cas particuliers. Le premier – proposition I.3 – est celui d'un plan passant par le sommet du cône ; il montre que la section plane est un triangle dans le

[1] Voici le célèbre texte d'Eutocius retraçant, d'après Geminus, l'histoire des concepts de cône et de section conique : « Les Anciens avaient étudié ce qu'ils appelaient la *section du cône rectangle* dans le cas du seul cône rectangle coupé par un plan perpendiculaire à l'un des côtés du cône ; ils conduisaient leurs démonstrations sur la *section du cône obtusangle* et *celle du cône acutangle* respectivement dans le cas du cône obtusangle et du cône acutangle, en menant pour chaque espèce de cône pareillement un plan perpendiculaire à l'un des côtés du cône. C'est précisément ce que montrent les noms anciens des lignes.

C'est plus tard qu'Apollonius de Perge en a fait une étude générale et montré que tout cône, droit ou scalène, comportait tous les types de sections selon la manière dont le plan rencontre le cône. Ses contemporains l'admiraient et l'appelaient "grand géomètre", à cause du caractère admirable des théorèmes sur les coniques démontrés par lui » (éd. Heiberg, II, p. 176, 10-24 ; trad. Decorps-Federspiel).

cas du cône, et qu'elle est formée de deux génératrices dans celui d'une surface conique. Dans le second cas, le plan est parallèle au plan du cercle de base – proposition I.4 ; Apollonius montre que la section est un cercle homothétique du cercle de base de centre O. Tout au long du premier livre, il aborde plusieurs thèmes tels que le diamètre et son unicité, les diamètres conjugués, le côté droit, les tangentes, les diamètres quelconques et les côtés droits qui leur sont associés, des problèmes de construction. Ainsi, les dix premières propositions traitent, d'une manière ou d'une autre, du diamètre et de son unicité, avant qu'ils soient utilisés dans les propositions suivantes – de 11 à 14 – pour caractériser les trois sections coniques.

Exception faite des deux cas évoqués précédemment, Apollonius considère dans toutes les autres propositions la position du plan sécant $\mathscr{P}$ définie par rapport à un plan passant par l'axe OA de la surface conique. Ce plan sera désormais le plan de référence. Si celui-ci est orthogonal au plan de base, on l'appellera plan principal, et il contient la droite AK perpendiculaire au plan de base. L'expression « plan principal » n'appartient pas, il est vrai, au lexique d'Apollonius, mais la chose est cependant là. Il suffit pour s'en convaincre de lire l'énoncé de la proposition I.5. Dans celle-ci, comme on le verra plus loin, Apollonius considère un plan sécant $\mathscr{P}$ orthogonal au plan de référence et antiparallèle au plan de base, et montre que la section est un cercle. Dans la proposition suivante – la sixième – il considère un diamètre $B\Gamma$ du cercle de base et montre que le plan $AB\Gamma$ qui contient l'axe AO est un plan de symétrie oblique pour la surface conique. Dans la septième proposition, il considère ce plan $AB\Gamma$ et un autre plan $\mathscr{P}$ qui coupe la surface conique. Il montre que si $\mathscr{P}$ coupe le plan de référence suivant la droite HZ, cette droite HZ est alors un diamètre pour la section $\mathscr{S}$ de la surface conique par le plan $\mathscr{P}$. C'est dire que, à tout plan sécant $\mathscr{P}$, on peut associer un plan de référence *unique* $AB\Gamma$, et leur intersection est un diamètre pour la section plane. C'est le premier diamètre connu, que nous notons Dp. Ce diamètre est un *axe* dans le cas où le diamètre $B\Gamma$ passe par le point K. Dans ce cas, le plan $AB\Gamma$ est le plan principal AOK et Dp est en effet un axe. Il est aussi un axe dans le cas où la surface conique est de révolution. Dans ce cas, tout plan $AB\Gamma$ est orthogonal au plan de base et il en existe un qui est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$; Dp est en effet un axe.

Remarquons que, pour Apollonius, le plan de référence n'est pas nécessairement le plan principal, contrairement à ce que Chasles affirme par inadvertance[2].

[2] M. Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne*, 3e éd., Paris, 1889, p. 18.

Dans la proposition I.8, Apollonius examine la position de la droite HZ avec Z sur AB ; dans I.8, HZ est parallèle à $A\Gamma$ ou bien HZ coupe $A\Gamma$ au delà de A ; dans ces deux cas la section plane se prolonge indéfiniment. Dans I.9 la droite HZ qui est notée cette fois $H\Delta$ – le diamètre – coupe aussi $[A\Gamma)$; dans ce cas la section plane est une courbe fermée. On comprend que la proposition I.10 traite alors de l'intérieur et de l'extérieur d'une section. En fait, Apollonius démontre dans cette dernière proposition – démonstration menée grâce à la seconde proposition – que les sections coniques sont des courbes convexes. De cette propriété importante, aucune démonstration – que je sache – n'avait été donnée auparavant.

Rappelons enfin qu'Eutocius dans son commentaire s'arrête longuement sur ces propositions et souligne que ces dix propositions forment un tout. Il écrit « Χρὴ ἐπιστῆσαι, ὅτι τὰ ῑ ταῦτα θεωρήματα ἀλλήλων ἔχονται »[3], avant d'en donner un résumé.

Reprenons à présent ce premier groupe de propositions pour les examiner successivement.

PROPOSITION I.1. — Soit une surface conique de sommet A, dont la base est le cercle EZ ; soit B un point de cette surface ; tout point pris sur la droite AB appartient à cette surface.

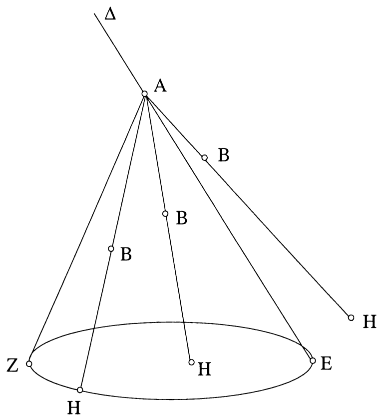


Fig. 1

La surface conique est engendrée par la droite ΔAE. Dans sa rotation suivant le cercle ZE, celle-ci passe nécessairement par B. La droite AB est une position de la génératrice.

[3] Éd. Heiberg, II, p. 214, 6-7.

Si B est intérieur (resp. extérieur) à la surface conique et si H est un point intérieur (resp. extérieur) au cercle de base, dans ce cas tout point de la droite AB sera intérieur (resp. extérieur) à la surface conique.

Si la droite AB est parallèle au plan $\mathscr{P}$, le point H n'existe pas et tout point de AB est extérieur à la surface conique. Ce cas n'a pas été signalé par Apollonius.

Dans la version arabe, cette proposition est relative à un cône. Ainsi on lit : « les droites menées du sommet du cône », alors que dans le grec il s'agit de « τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας »[4].

Il reste que les figures, qui sont les mêmes dans les deux traditions manuscrites, correspondent à une surface conique. Elles donnent en effet trois positions pour le point B : soit entre le sommet et la base ; soit au delà du sommet ; soit au delà de la base ; et le raisonnement est valable dans les trois cas. De plus on notera que dans la proposition suivante, I.2, l'énoncé en arabe est relatif à une surface conique, alors que la conclusion porte sur la surface du cône ; et la proposition I.3 concerne uniquement le cône. Or, pour établir I.2 et I.3, on utilise la proposition I.1. Il est donc indifférent de parler de cône ou de surface conique. S'agit-il donc d'un raccourci dû à la traduction, ou plutôt à une autre tradition manuscrite ?

PROPOSITION I.2. — Si on prend deux points Δ et E sur une surface conique (c'est-à-dire sur une des deux nappes), alors le segment ΔE est à l'intérieur de la surface conique et les prolongements sont à l'extérieur.

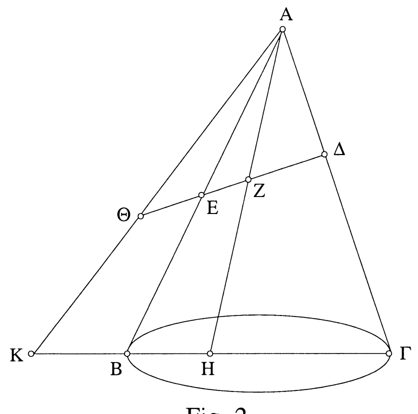


Fig. 2

Si A est le sommet de la surface conique, alors, d'après I.1, $A\Delta$ et AE sont des génératrices et coupent donc le cercle de base en B et Γ. Tout point

[4] Éd. Heiberg, I, p. 8, 26.

H du segment *BΓ* est intérieur à la surface conique, donc tout point *Z* du segment *ΔE* l'est aussi.

Si *Θ* est sur le prolongement de *ΔE*, un raisonnement par l'absurde montre que *Θ* est à l'extérieur de la surface.

On notera qu'Apollonius transporte les propriétés d'intérieur et d'extérieur à un cercle au cas des surfaces coniques. C'est pourquoi il se limite à l'une des deux nappes et ne considère pas les segments joignant deux points dont chacun appartient à une nappe sans passer par le sommet.

PROPOSITION I.3. — Lorsqu'un cône est coupé par un plan passant par le sommet, la section est un triangle.

Cette proposition se déduit directement de la proposition I.1. Parmi ces plans passant par le sommet, il y a celui qui contient l'axe et la perpendiculaire menée du sommet à la base, c'est-à-dire le plan principal. Ce plan est un plan de symétrie pour le cône. Il intervient dès la proposition I.5. Apollonius reprend dans la conclusion les termes de l'énoncé pour souligner, semble-t-il, que la démonstration est la même pour tout cône.

PROPOSITION I.4. — La section d'une surface conique par un plan parallèle au cercle de base est un cercle ayant son centre sur l'axe. La figure limitée par ce cercle et par la surface conique du côté du sommet est un cône.

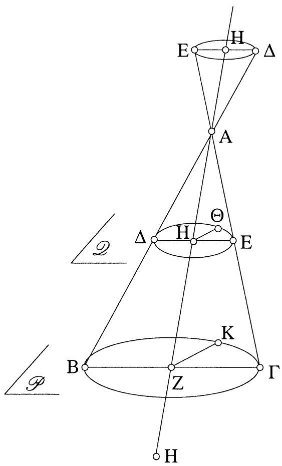


Fig. 3

Soit le cône défini par le sommet *A* et le cercle de diamètre *BΓ* de centre *Z* ; la droite *AZ* est donc l'axe. Un plan sécant parallèle au plan du cercle coupe le plan *ABΓ* suivant une droite *ΔE* qui coupe *AZ* en *H*. On a

$\Delta E // B\Gamma$. De même si Θ est un point de la ligne cherchée, le plan $AH\Theta$ coupe la base suivant ZK et $H\Theta // ZK$.

On a

$$\frac{ZB}{\Delta H} = \frac{AZ}{AH} = \frac{Z\Gamma}{HE} = \frac{ZK}{H\Theta} \ ;$$

mais $ZK = ZB = Z\Gamma$, d'où

$$H\Theta = H\Delta = HE \ ;$$

donc Θ et E appartiennent au cercle $(H, H\Delta)$ de diamètre ΔE.

La figure limitée par la surface conique, le sommet A et le cercle ΔE est un cône.

En d'autres termes inconnus d'Apollonius :

On considère les deux nappes de la surface conique $\mathscr{S}$ définie par le sommet A et le cercle (Z, ZB) ; on aura donc trois cas de figure (4.1, 4.2, 4.3 du texte). Le plan sécant parallèle au plan de base $\mathscr{P}$ coupe l'axe AZ au delà de A. Dans ces trois cas, si on considère l'homothétie $h\left(A, \frac{AH}{AZ}\right)$, on obtient un cercle de centre H et de rayon $r = BZ \cdot \frac{AH}{AZ}$. Les cercles se correspondent dans cette homothétie.

SECTION DE « SENS CONTRAIRE » OU SECTION ANTIPARALLÈLE

PROPOSITION I.5. — Soit un cône oblique de sommet A et le plan passant par l'axe et perpendiculaire à la base. Il coupe le cercle de base suivant le diamètre $B\Gamma$. Si un plan $\mathscr{P}$ perpendiculaire au plan $AB\Gamma$ suivant la droite HK est tel que $A\hat{K}H = A\hat{B}\Gamma$, alors $\mathscr{P}$ coupe la surface conique suivant un cercle.

Soit Θ un point de la courbe étudiée et Λ un point du cercle de base ; on mène ΘZ perpendiculaire au plan $BA\Gamma$ et ΛM perpendiculaire au plan $BA\Gamma$. Alors $Z \in [HK]$, $M \in [B\Gamma]$ et $\Theta Z // \Lambda M$.

On mène par Z la droite ΔE ; ΔE est parallèle à $B\Gamma$. Le plan $\Theta\Delta E$ est parallèle au plan $\Lambda B\Gamma$, donc la courbe $\Delta\Theta E$ est un cercle. On a donc

$$Z\Theta^2 = Z\Delta \cdot ZE.$$

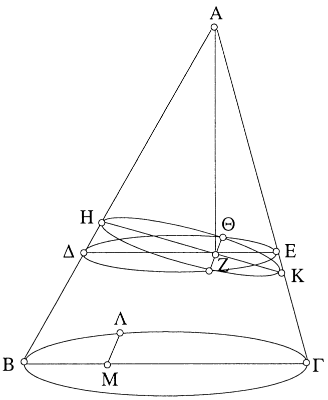


Fig. 4

D'autre part, $A\hat{\Delta}E = A\hat{B}\Gamma$; mais $A\hat{B}\Gamma = A\hat{K}H$, donc $A\hat{\Delta}E = A\hat{K}H$. Les triangles ΔZH et KZE sont alors équiangles, donc semblables, d'où

$$\frac{HZ}{Z\Delta} = \frac{EZ}{ZK} \ ;$$

on en déduit

$$HZ \cdot ZK = EZ \cdot \Delta Z,$$

donc

$$HZ \cdot ZK = Z\Theta^2,$$

ce qui exprime que Θ est sur le cercle de diamètre HK et de centre Z. Comme cela est vrai pour tout point Θ vérifiant cette relation, la courbe est donc un cercle de diamètre HK dans le plan $\mathscr{P}$ considéré, qui est un plan antiparallèle au plan de base du cône.

La démonstration s'appuie sur les propriétés du parallélisme et de l'orthogonalité et utilise une propriété caractéristique du triangle rectangle ; établies en particulier par les propositions XI.6, XI.15, VI.8 et VI.16 des *Éléments* d'Euclide.

Remarques :

1° Dans un autre langage, inconnu d'Apollonius, notons que le plan $AB\Gamma$ est ici un plan de symétrie pour la surface conique $\mathscr{S}$, pour le plan de base et pour le plan sécant $\mathscr{P}$. Puisque $A\hat{K}H = A\hat{B}\Gamma$ par hypothèse, les points K, H, B, Γ sont cocycliques. Le quadrilatère $HKB\Gamma$ peut être convexe ou croisé suivant la position du point K sur la droite $A\Gamma$.

Soit Σ et Σ_1 deux sphères centrées dans le plan $AB\Gamma$, avec Σ passant par les points A, B, Γ et Σ_1 par les points H, K, Γ, B. Soit p la puissance de A par rapport à Σ_1. Dans tous les cas de figure, on a $\overline{AH} \cdot \overline{AB} = \overline{AK} \cdot \overline{A\Gamma} = \pi$; et dans l'inversion I $(A\ ;\ p)$, on a $\mathscr{P} = I\ (\Sigma)$, $\mathscr{S} = I\ (\mathscr{S})$, $\Sigma_1 = I\ (\Sigma_1)$.

Mais le cercle de base du cône est $(B\Gamma)$; or $(B\Gamma) = \mathscr{S} \cap \Sigma$; et la section cherchée est (HK) ; $HK = \mathscr{S} \cap \mathscr{P}$, donc $(HK) = I\ (B\Gamma)$.

La section (HK) est donc le cercle inverse du cercle $(B\Gamma)$; ces deux cercles appartiennent à la sphère Σ_1 invariante dans l'inversion I.

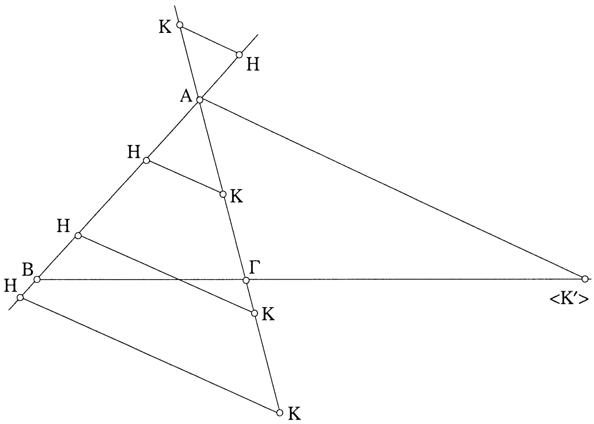


Fig. 5

La notion d'inversion n'apparaît pas sous la plume d'Apollonius ; il reste que cette proposition aura un impact important dans les mathématiques postérieures et aidera certains mathématiciens comme al-Farghānī à s'approcher de cette notion lors de son étude de la projection stéréographique[5].

2° Nous avons souligné l'usage au cours de la démonstration d'une propriété caractéristique du triangle rectangle, qui conduit à caractériser un cercle de diamètre d. Cette propriété est ici utilisée comme condition nécessaire et suffisante. Sur le rôle du cercle, nous reviendrons lors du commentaire de la proposition I.10.

[5] R. Rashed, « Les mathématiques de la terre », dans G. Marchetti, O. Rignani et V. Sorge (éd.), *Ratio et superstitio*, *Essays in Honor of Graziella Federici Vescovini*, Textes et études du Moyen Âge 24, Louvain-la-Neuve, 2003, p. 285-318 ; R. Rashed et P. Abgrall, « Le tradizioni sulle coniche e l'inizio delle ricerche sulle proiezioni », *Storia della scienza*, vol. III : *La civiltà islamica*, *Enciclopedia Italiana*, Rome, 2002, p. 385-402.

3° Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī note dans une glose que Apollonius utilise ici la réciproque de la proposition d'Euclide connue sous le nom « puissance d'un point par rapport au cercle » et donne donc une condition nécessaire et suffisante[6].

PROPOSITION I.6. — Soit un cône de sommet A, un diamètre $B\Gamma$ du cercle de base, et MN perpendiculaire à $B\Gamma$ dans le plan de ce cercle. Toute droite parallèle à MN et passant par un point Δ de la surface conique recoupe cette surface en un autre point, soit H, et le milieu de ΔH est dans le plan $AB\Gamma$.

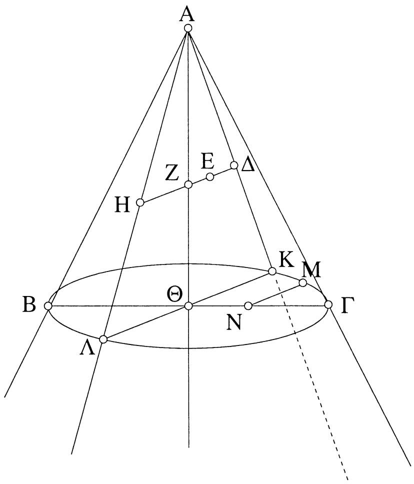


Fig. 6

Soit ΔE parallèle à MN (nous considérons un seul cas de figure parmi les trois ; cf. texte). La droite $A\Delta$ coupe la circonférence du cercle de base en K. On mène $K\Theta\Lambda$ parallèle à MN, le point Θ sur $B\Gamma$. La droite $A\Theta$ coupe ΔE en Z, car $\Delta E \,//\, K\Lambda$; donc ΔE coupe le plan $AB\Gamma$ en Z et coupe la surface conique en H ; le point H est sur $A\Lambda$.

Mais $K\Lambda \perp B\Gamma$, donc Θ est le milieu de $K\Lambda$; et d'autre part $\dfrac{HZ}{Z\Delta} = \dfrac{\Lambda\Theta}{\Theta K}$, donc Z est le milieu de $H\Delta$.

Remarques :

1° Le plan $AB\Gamma$ passant par l'axe est donc un plan de symétrie oblique pour la surface conique. La direction de la symétrie est celle de MN ($MN \perp B\Gamma$) qui est dans le plan du cercle ; mais MN n'est pas perpendiculaire au plan $AB\Gamma$ en général. Si le plan $AB\Gamma$ est perpendiculaire au plan du

[6] Voir Note complémentaire [18].

cercle *ΒΓΛ*, alors *MN* est perpendiculaire à ce plan, qui devient un plan de symétrie orthogonale.

2° Apollonius utilise dans sa démonstration les propositions I.1 et I.3 ainsi que les propositions des *Éléments* relatives au parallélisme des droites et à la similitude des triangles.

3° Encore une fois, Apollonius a transporté la propriété d'une corde d'un cercle à une corde parallèle du cône.

4° On comprend dans ces conditions qu'Apollonius commence par énoncer la condition « puis si, d'un point quelconque du cercle de sa base, nous menons une perpendiculaire à la base du triangle ». Cette phrase manque dans V et dans l'adaptation de Serenus de cette même proposition pour le cylindre. Voici en effet l'énoncé de la onzième proposition de son traité *De la section du cylindre* :

> Lorsqu'un cylindre est coupé par un plan passant par l'axe, si l'on prend, à la surface du cylindre, un point non situé sur le côté du parallélogramme passant par l'axe, et si, par ce point, l'on mène une droite parallèle à une droite située dans le même plan que la base du cylindre, à angles droits sur la base du parallélogramme passant par l'axe, elle tombera à l'intérieur de ce parallélogramme, et, prolongée jusqu'à l'autre partie de la surface, elle sera coupée en deux parties égales par ce parallélogramme[7].

De deux choses l'une par conséquent : ou bien Serenus a élaboré sa proposition à partir d'une version des *Coniques* comme celle éditée par Eutocius, ou bien il n'avait pas saisi qu'il fallait dès le départ donner la direction de la symétrie et avait ainsi cru que l'expression donnée plus tard dans l'énoncé d'Apollonius – « la droite menée suivant des angles droits à la base du triangle » – suffisait. Eutocius semble en revanche avoir senti l'absence de l'expression rappelée plus haut. Aussi précise-t-il dans son *Commentaire* à propos de cette dernière droite qu'elle est *quelconque* :

> [...] que la droite parallèle menée d'un point situé sur la surface doit être menée parallèle à l'une quelconque des droites situées dans le plan de la base du triangle passant par l'axe[8].

[7] Serenus d'Antinoë, *Le Livre de la section du cylindre et le livre de la section du cône*, Œuvres traduites pour la première fois du grec en français, avec une introduction et des notes, par Paul Ver Eecke, Paris, 1969, p. 17-18.

[8] Éd. Heiberg, II, p. 212, 15-18.

DIAMÈTRE D'UNE SECTION PLANE

PROPOSITION I.7. — Soit A le sommet d'un cône, $B\Gamma$ un diamètre du cercle de base, ΔE une droite du plan de base, avec $\Delta E \perp B\Gamma$. On considère un plan $\mathscr{P}$ passant par ΔE, coupant AB en Z et $B\Gamma$ en H ; alors la droite ZH est un *diamètre* pour la section $\mathscr{S}$ de la surface conique par le plan $\mathscr{P}$.

Si le cône est un cône droit, alors, quel que soit le plan $AB\Gamma$, la droite ZH est un *axe* pour $\mathscr{S}$. Si le cône est oblique, alors ZH est un diamètre si $AB\Gamma$ est quelconque, et un axe si $AB\Gamma$ est orthogonal au plan de base.

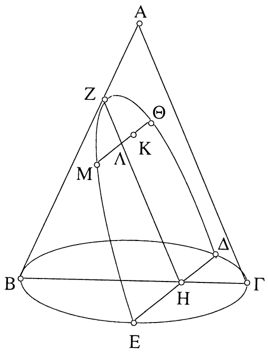


Fig. 7.1

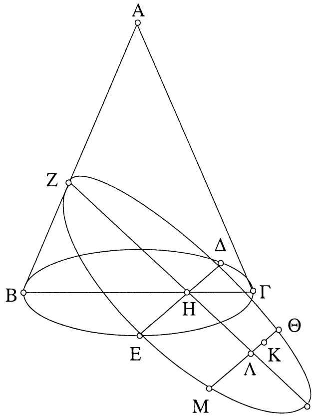


Fig. 7.2

Apollonius distingue trois cas pour la droite ΔE, selon qu'elle est sécante, tangente ou extérieure au cercle de base. Le cas de la sécante correspond à son tour à deux figures selon que ZH est parallèle ou non à la droite $A\Gamma$.

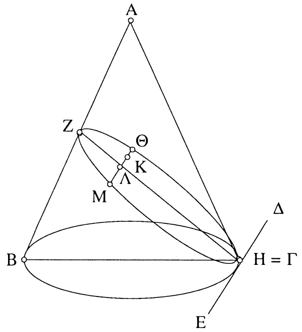


Fig. 7.3

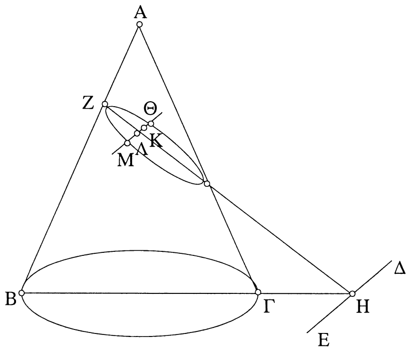


Fig. 7.4

D'après la proposition précédente I.6, quel que soit le point Θ de la section $\mathscr{S}$, la droite parallèle ΘK à ΔE menée par Θ coupe la droite ZH en Λ et la section $\mathscr{S}$ en M, avec Λ milieu de ΘM.

ZH est donc un diamètre dans tous les cas de figure.

Si le cône est de révolution, pour tout diamètre $B\Gamma$ du cercle de base, on a $(AB\Gamma) \perp (B\Gamma\Delta)$, donc $\Delta E \perp (AB\Gamma)$, d'où $\Theta M \perp (AB\Gamma)$, et par suite $\Theta M \perp ZH$ quel que soit le point Θ. La droite ZH est donc un *axe*.

Si le cône est oblique et le plan $AB\Gamma$ un plan principal, c'est-à-dire si $(AB\Gamma) \perp (B\Gamma\Delta)$, on a $\Delta E \perp (AB\Gamma)$, d'où $\Delta E \perp ZH$ et $\Theta M \perp ZH$ et ZH est un *axe*.

Le cône oblique admet un plan principal unique ; pour tout autre plan, Apollonius montre par réduction à l'absurde que l'on ne peut pas avoir $\Delta E \perp ZH$, et que la droite est un *diamètre*.

Remarque : La version arabe n'a pas l'expression « καὶ ὅτι δυνατόν ἐστιν ὑπὸ τῆς διαμέτρου τῆς ΖΗ παραλλήλους τινὰς δίχα τέμνεσθαι καὶ μὴ πρὸς ὀρθάς »[9], que l'on rend par « et qu'il est clair aussi que des parallèles soient coupées en deux parties égales par le diamètre ZH, même si elles ne lui sont pas perpendiculaires ». Or il nous semble que cette expression est d'authenticité douteuse. En effet, Apollonius a examiné tous les cas de figure, et il n'y a plus lieu de prouver à nouveau ce dernier.

SECTIONS PLANES À BRANCHES INFINIES

PROPOSITION I.8. — Soit un plan sécant qui coupe le plan $AB\Gamma$ suivant la droite ZH et le plan du cercle de base suivant $\Delta E \perp B\Gamma$ (cf. les données du problème précédent). On suppose que, ou bien $ZH \,//\, A\Gamma$, ou bien ZH coupe $A\Gamma$ au delà de A ; alors, si la surface conique et le plan sécant sont prolongés indéfiniment, il en sera de même pour la section ΔZE.

Par hypothèse, le prolongement de ZH au delà de H ne rencontre pas le prolongement de $A\Gamma$ au delà de Γ. Soit Θ un point de ZH au delà de H ; par Θ on mène $K\Lambda \,//\, B\Gamma$ ainsi que $MN \,//\, \Delta E$. Le plan $KM\Lambda N$ est donc parallèle au plan $B\Delta\Gamma$ et coupe la surface conique suivant un cercle. Les points M et N sont à la fois dans le plan sécant et sur la surface du cône ; ils appartiennent donc à la section.

[9] Éd. Heiberg, I, p. 28, 23-25.

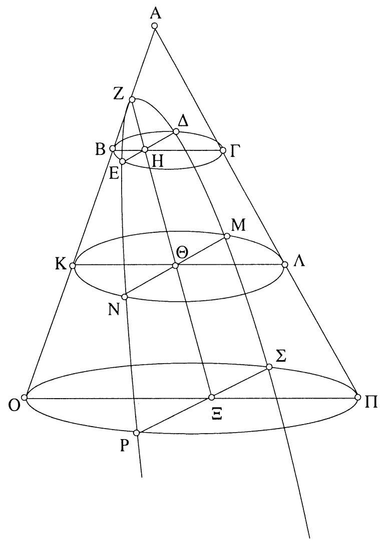


Fig. 8

Il est clair que ce raisonnement s'applique à tout point du prolongement de ZH. À toute longueur donnée l on associe sur ZH un point Ξ auquel correspondent les points P et Σ de la section. La longueur l peut croître indéfiniment ; alors les points tels que P et Σ s'éloignent indéfiniment. Ainsi Apollonius détermine ici les conditions pour qu'une section conique se prolonge à l'infini. Ces sections (parabole et hyperbole) ne sont pas encore nommées ; elles le seront après les préliminaires. Le but d'Apollonius dans cette proposition est de donner les conditions pour que certaines courbes coniques se prolongent indéfiniment.

SECTION FINIE NON CIRCULAIRE

PROPOSITION I.9. — Soit un cône de sommet A et de base le cercle de diamètre $B\Gamma$. On considère un plan sécant qui n'est ni parallèle ni antiparallèle au plan du cercle de base. Dans ce cas la section n'est pas un cercle.

On suppose que le plan donné coupe AB en Δ, $A\Gamma$ en E et le plan de base suivant ZH, avec H sur $B\Gamma$ et $ZH \perp B\Gamma$; les points H, E, Δ sont alignés.

Par un point K de la section, on mène $K\Lambda$ parallèle à ZH ; alors, d'après I.7, $K\Lambda$ coupe ΔE en M milieu de $K\Lambda$. Si donc la section $\Delta KE\Lambda$ était un cercle, ΔE serait le diamètre et on aurait $KM^2 = M\Delta \cdot ME$.

Par M on mène $N\Xi \,//\, B\Gamma$; le plan $KN\Lambda$ est parallèle à la base, donc, d'après I.4, il coupe la surface conique suivant un cercle. On a $KM \perp N\Xi$ et $KM^2 = MN \cdot M\Xi$. On aurait donc $M\Delta \cdot ME = MN \cdot M\Xi$, d'où $\frac{ME}{M\Xi} = \frac{MN}{M\Delta}$; les triangles AMN et $EM\Xi$ seraient semblables, d'où $\Delta\hat{N}M = E\hat{\Xi}M$. Mais $\Delta\hat{N}M = A\hat{B}\Gamma$ car $MN \,//\, B\Gamma$; on aurait donc $E\hat{\Xi}M = A\hat{B}\Gamma$, ce qui est contraire à l'hypothèse car le plan de base et le plan sécant ne sont pas antiparallèles. La section n'est donc pas un cercle.

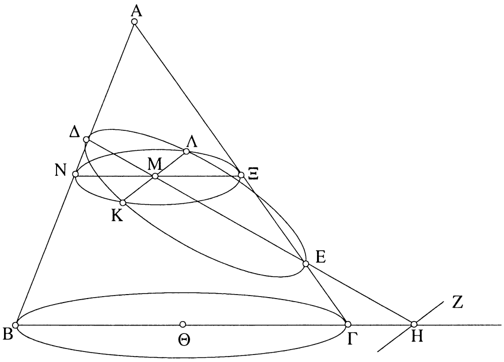


Fig. 9

Remarque : Le texte et la figure supposent que Δ et E sont respectivement sur les segments AB et $A\Gamma$. Le raisonnement reste le même s'ils sont pris sur les demi-droites $[AB)$ et $[A\Gamma)$ respectivement, ou sur leurs prolongements.

LES NOTIONS D'INTÉRIEUR ET D'EXTÉRIEUR D'UNE SECTION PLANE

PROPOSITION I.10. — Le segment joignant deux points d'une section plane tombera à l'intérieur de la section et son prolongement tombera à l'extérieur.

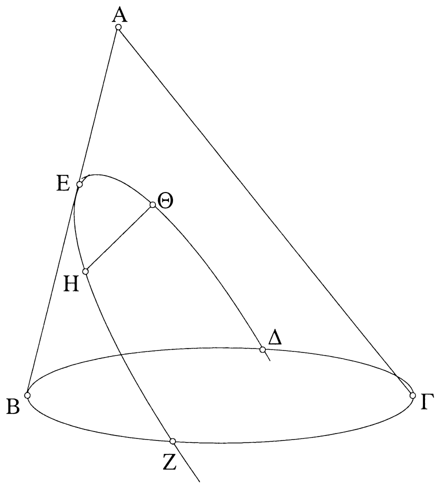


Fig. 10

Cette proposition est en quelque sorte une définition de l'intérieur et de l'extérieur d'une section plane, déduite de la proposition I.2 qui porte sur la notion d'intérieur et d'extérieur d'une surface conique. Elle exprime, comme nous l'avons dit, la convexité des sections coniques.

Ces notions seront utilisées dans les propositions I.22 et I.23 pour les trois sections.

Rappelons que, dans le troisième livre des *Éléments*, Euclide a donné une définition métrique du point intérieur et du point extérieur à un cercle (selon que la distance au centre du cercle est inférieure ou supérieure au demi-diamètre). Mais ici Apollonius ne peut pas donner une définition métrique, d'où l'importance de la proposition I.2. Il s'agit des définitions et des propriétés « topologiques ».

CARACTÉRISATION DES SECTIONS PLANES AUTRES QUE LES SECTIONS CIRCULAIRES

Dans les quatre propositions suivantes, Apollonius cherche à caractériser les trois sections non circulaires. Une certaine lecture de ces propositions a incité un bon nombre d'éminents historiens à trouver dans les livres des *Coniques* ce qu'ils n'ont jamais contenu : des équations algébriques des courbes. Il suffit de suivre Apollonius pour constater qu'il n'en est rien et qu'il s'agit d'une géométrie de position avec des éléments métriques.

Apollonius en effet caractérise les trois sections non circulaires à l'aide de deux concepts fondamentaux : le diamètre et le côté droit. C'est à l'aide de ces deux concepts qu'il établit pour chaque section une propriété vérifiée pour tout point de cette section ; mais jamais la réciproque, comme on le verra. Cela nous éloigne déjà de la notion d'équation.

Venons-en d'abord au concept de diamètre. Rappelons qu'Apollonius caractérise les trois sections à partir de la position du plan sécant $\mathscr{P}$. Cette étude fait intervenir un plan de référence $AB\Gamma$, passant par l'axe du cône, associé au plan $\mathscr{P}$ considéré. Leur intersection, soit Dp, est, d'après la proposition I.7, un diamètre de la section.

Jusqu'ici, Apollonius ne considère qu'*un* diamètre pour chaque section plane non circulaire, et nullement un diamètre quelconque. Ce diamètre *unique* peut être considéré comme un *premier* diamètre. C'est à ce diamètre unique qu'Apollonius, pour chacune des sections non circulaires, va associer un segment appelé *côté droit*, perpendiculaire à ce diamètre. La démarche d'Apollonius pour introduire ce dernier s'inspire sans doute de l'étude du cercle.

En effet, pour un cercle de diamètre $AB = d$, l'ordonnée MN d'un point du cercle est donnée par $MN^2 = NA \cdot NB$, relation déduite de la propriété de la puissance du point N, ou de la hauteur d'un triangle rectangle MAB. On peut écrire

$$MN^2 = NA\,(d - NA) = d \cdot AN - AN^2.$$

On obtient ainsi l'aire $d \cdot AN$ d'un rectangle construit sur l'abscisse AN, diminuée de celle d'un carré, comme égale à l'aire du carré de l'ordonnée MN.

L'idée d'un rectangle construit sur l'abscisse se retrouve chez Apollonius pour les trois sections coniques (sauf le cercle), ainsi que celle d'un carré de côté l'ordonnée. Il définit pour chacun des cas un segment de longueur c appelé côté droit, qui n'est autre que la longueur du rectangle construit sur l'abscisse. Ainsi pour la parabole on a

$$MN^2 = c \cdot AN.$$

Pour l'ellipse

$$MN^2 = c \cdot AN - \frac{c}{d} AN^2.$$

Pour l'hyperbole

$$MN^2 = c \cdot AN + \frac{c}{d} AN^2.$$

Dans ces deux derniers cas, d est la longueur du diamètre AB, et $\frac{c}{d}AN^2$ l'aire du rectangle à retrancher ou à ajouter, semblable à un rectangle fixe de côtés c et d.

L'analogie entre ellipse et cercle est immédiate ; le cercle est une ellipse particulière, avec $c = d$. La parabole peut être considérée comme le cas limite d'une ellipse dont la deuxième extrémité du diamètre s'éloigne indéfiniment ; ou, en d'autres termes, $d \to +\infty, \frac{c}{d} \to 0, \frac{c}{d}AN^2 \to 0$, et on a $MN^2 = c \cdot AN$.

Dans le cas de l'hyperbole, la propriété trouvée provient encore une fois de la propriété caractéristique du cercle par une construction identique à celle du cas de l'ellipse. Cependant le diamètre Dp est cette fois extérieur à la section et non plus intérieur, comme dans le cas de l'ellipse. Il en résulte que le rectangle $\frac{c}{d}AN^2$ est à ajouter au rectangle $c \cdot AN$ et non plus à soustraire.

C'est manifestement la voie suivie par Apollonius. D'un point de vue analytique, on ne pourrait passer d'un cas à l'autre que par l'intermédiaire des imaginaires.

Lorsque le diamètre d tend vers l'infini, le point Θ extrémité du diamètre transverse (voir prop. 12) s'éloignant indéfiniment, $\frac{c}{d}AN^2$ tend encore vers 0 et l'hyperbole devient une parabole.

PROPOSITION I.11. — LA CARACTÉRISATION DE LA PARABOLE

Soit $AB\Gamma$ un plan passant par l'axe du cône et un plan $\mathscr{P}$ qui coupe le plan de base suivant ΔE perpendiculaire à $B\Gamma$ en H. Si la droite ZH, intersection du plan $\mathscr{P}$ et du plan $AB\Gamma$, est parallèle à $A\Gamma$, on considère le segment $Z\Theta$ tel que $Z\Theta \perp ZH$ et que $\frac{Z\Theta}{ZA} = \frac{B\Gamma^2}{AB \cdot A\Gamma}$; alors si K est un point quelconque de la section et Λ le point de ZH tel que $K\Lambda \parallel \Delta E$, on a

$$K\Lambda^2 = Z\Theta \cdot \Lambda Z. \qquad (1)$$

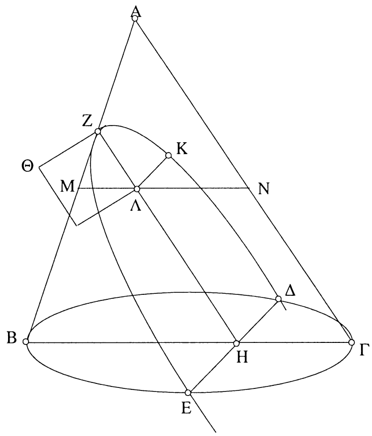


Fig. 11

Par Λ on mène $MN \parallel B\Gamma$; le plan (MKN) est parallèle au plan de base et d'après la proposition I.4 il coupe la surface conique suivant un cercle de diamètre MN ; on a donc $K\Lambda^2 = \Lambda M \cdot \Lambda N$. Les triangles $ZM\Lambda$, AMN et $AB\Gamma$ sont semblables, d'où

$$\frac{MN}{NA} = \frac{M\Lambda}{\Lambda Z} = \frac{B\Gamma}{\Gamma A} \text{ et } \frac{MN}{MA} = \frac{\Lambda M}{MZ} = \frac{\Lambda N}{AZ} = \frac{B\Gamma}{BA}.$$

Or par hypothèse

$$\frac{Z\Theta}{ZA} = \frac{B\Gamma}{\Gamma A} \cdot \frac{B\Gamma}{BA},$$

donc

$$\frac{Z\Theta}{ZA} = \frac{M\Lambda}{\Lambda Z} \cdot \frac{\Lambda N}{AZ} = \frac{K\Lambda^2}{\Lambda Z \cdot AZ},$$

d'où l'égalité (1).

La section est une parabole et le segment $Z\Theta$ est son côté droit associé au diamètre ZH. On a donc montré que *tout* point K pris sur la section vérifie (1).

Remarques :

1° L'hypothèse $Z\Theta \perp ZH$ d'Apollonius n'intervient pas dans la démonstration. Elle permet seulement de faire apparaître « l'aire d'un rectangle » dans l'énoncé de la propriété caractéristique. Tout se passe comme