

Häufig benutzte Formeln der Vektoranalysis

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\
 \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \\
 (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \\
 \nabla \times \nabla \psi &= 0 \\
 \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) &= 0 \\
 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} \\
 \nabla \cdot (\psi \mathbf{a}) &= \mathbf{a} \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \mathbf{a} \\
 \nabla \times (\psi \mathbf{a}) &= \nabla \psi \times \mathbf{a} + \psi \nabla \times \mathbf{a} \\
 \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \\
 \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \\
 \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}
 \end{aligned}$$

Es sei \mathbf{x} der Ortsvektor eines Punktes in einem kartesischen Koordinatensystem. Sein Betrag sei $r = |\mathbf{x}|$ und $\mathbf{n} = \mathbf{x}/r$ bezeichne den Einheitsvektor in Richtung von \mathbf{x} . Ferner sei $f(r)$ eine differenzierbare Funktion von r . Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{x} &= 3 \\
 \nabla \times \mathbf{x} &= 0 \\
 \nabla \cdot [\mathbf{n}f(r)] &= \frac{2}{r}f + \frac{\partial f}{\partial r} \\
 \nabla \times [\mathbf{n}f(r)] &= 0 \\
 (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{n}f(r) &= \frac{f(r)}{r} [\mathbf{a} - \mathbf{n}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})] + \mathbf{n}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \frac{\partial f}{\partial r} \\
 \nabla(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) &= \mathbf{a} + \mathbf{x}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + i(\mathbf{L} \times \mathbf{a})
 \end{aligned}$$

wobei

$$\mathbf{L} = \frac{1}{i}(\mathbf{x} \times \nabla)$$

den Drehimpulsoperator darstellt.

Sätze aus der Vektoranalysis

Im Folgenden bedeuten ϕ, ψ und \mathbf{A} stetig differenzierbare skalare bzw. vektorielle Funktionen. V ist ein dreidimensionales Volumen mit dem Volumenelement d^3x , S eine zweidimensionale geschlossene Fläche, die V begrenzt, und da ist ein Flächenelement von S . \mathbf{n} bezeichnet die von da ausgehende äußere Flächennormale.

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d^3x = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} da \quad (\text{Gauß'scher Satz})$$

$$\int_V \nabla \psi d^3x = \int_S \psi \mathbf{n} da$$

$$\int_V \nabla \times \mathbf{A} d^3x = \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{A} da$$

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) d^3x = \int_S \phi \mathbf{n} \cdot \nabla \psi da \quad (\text{Erste Green'sche Identität})$$

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) d^3x = \int_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \mathbf{n} da \quad (\text{Green'scher Satz})$$

Im Folgenden bedeutet S eine offene Fläche mit der Berandung C und dem Linienelement $d\mathbf{I}$. Die Richtung der mit \mathbf{n} bezeichneten Flächennormalen von S ist, in Abhängigkeit von der Orientierung von C , durch die Rechte-Hand-Regel festgelegt.

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} da = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{I} \quad (\text{Stokes'scher Satz})$$

$$\int_S \mathbf{n} \times \nabla \psi da = \oint_C \psi d\mathbf{I}$$

Jackson

Klassische Elektrodynamik, 4. A.

John David Jackson

Klassische Elektrodynamik

4., überarbeitete Auflage

Deutsche Übersetzung Kurt Müller
Bearbeitung Christopher Witte



Walter de Gruyter
Berlin · New York

Titel der Originalausgabe

John David Jackson
Classical Electrodynamics
Third Edition

John Wiley & Sons, Inc., New York, Chichester, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto.
Authorized translation from the English language edition published by John Wiley & Sons, Inc.

Copyright © 1999 John David Jackson. All rights reserved.

Autor

John David Jackson
Professor Emeritus of Physics
University of California, Berkeley

Übersetzer

Prof. Dr. Kurt Müller
Technische Fachhochschule Berlin

Bearbeiter

Christopher Witte
Technische Universität Berlin

Mit 204 Abbildungen und 7 Tabellen.

ISBN 13: 978-3-11-018970-4

ISBN 10: 3-11-018970-4

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Daten sind im Internet über <<http://dnb.ddb.de>> abrufbar.

© Gedruckt auf säurefreiem Papier, das die US-ANSI-Norm über Haltbarkeit erfüllt.

© Copyright 2006 by Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 10785 Berlin. – Dieses Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen. Printed in Germany. Satz und Druck: Tutte Druckerei GmbH, Salzweg. Bindung: Lüderitz & Bauer classic GmbH, Berlin. Einbandgestaltung: Martin Zech, Bremen.

Vorwort zur 4. Auflage

Wenige Lehrbücher der Theoretischen Physik haben einen ähnlichen Status als „das“ Standardwerk eines gesamten Teilgebiets erlangt, wie ihn „*der Jackson*“ für die Elektrodynamik darstellt. Seit mehr als 40 Jahren ist dieses Werk nun unverzichtbarer Begleiter für Studenten und Wissenschaftler auf allen Kontinenten.

Um seinem Rang eines großen Klassikers gerecht zu werden und seinen Erfolg auch für die Zukunft zu gewährleisten, ist es unumgänglich, das Buch – und folglich ebenso seine Übersetzung ins Deutsche – dadurch auf einem modernen Niveau zu halten, dass es neuen Anforderungen angepasst wird.

Die vor fünf Jahren erschienene dritte Auflage, die aus einer vollständig neu bearbeiteten englischsprachigen Auflage hervorgegangen war, tat sich insbesondere durch den Wechsel vom CGS-System ins Internationale Einheitensystem SI und inhaltliche Komplettierung hervor.

Die vollständige Revision, die zur vorliegenden vierten deutschsprachigen Auflage führte, galt nun vor allem der genauen fachlichen Durchsicht und Richtigstellung von Ungenauigkeiten, die sich in jedes Werk dieses Umfangs einschleichen. Wenn auch dies wohl leider niemals zu garantieren sein wird, so hoffe ich doch, dass diese Überarbeitung dem Anspruch auf komplette Fehlerfreiheit möglichst nahe kommt. Als Bearbeiter bin ich daher sowohl dem Übersetzer des Werkes, Prof. Kurt Müller, Berlin, für seine konstruktiven Hinweise, als auch all jenen Lesern zu großem Dank verpflichtet, die durch ihre zahlreichen und fachlich kompetenten Einsendungen beim Auffinden von Flüchtigkeiten, die sich im Zuge Neusatz der dritten Auflage ergeben hatten, behilflich waren.

Die Neubearbeitung wurde zugleich als geeigneter Anlass gewählt, die neue deutsche Rechtschreibung in dieses Buch einzuführen.

Berlin, im Juni 2006

Christopher Witte

Vorwort zur deutschsprachigen Ausgabe der 3. Auflage

Die äußerst positive Resonanz, die schon die deutschsprachige Ausgabe der zweiten Auflage des „Jackson“ gefunden hatte, war Anlass genug, auch die dritte Auflage des amerikanischen Originals in deutscher Sprache erscheinen zu lassen. Doch im Gegensatz zur Übersetzung der zweiten Auflage wurde das Buch jetzt vollkommen neu gesetzt.

Der große Wert des „Jackson“ liegt zweifellos darin, dass es eines der umfassendsten Werke zur klassischen Elektrodynamik darstellt. Manche Lücken, die noch die zweite Auflage enthielt, sind jetzt erfreulicherweise von David Jackson geschlossen worden. Dazu gehört – neben den klassischen Themen „Quasistationäre Felder“ und Hertz'sche Vektoren“ – auch die Behandlung numerischer Methoden in der Elektrostatik (und auch Magnetostatik), optischer Fasern (auch „Lichtwellenleiter“ genannt) und neuerer Entwicklungen auf dem Gebiet „Klassische Modelle geladener Teilchen“. Manch anderes dagegen, insbesondere die Plasmaphysik, wird nur noch sehr kurz behandelt oder gar nicht mehr erwähnt. Besonders hervorzuheben ist die Tatsache, dass die ersten zehn Kapitel des Buches, die der herkömmlichen klassischen Elektrodynamik gewidmet sind, jetzt im SI-System geschrieben sind, während in den restlichen Kapiteln, in denen die relativistische Elektrodynamik behandelt wird, sinnvollerweise am Gauß'schen CGS-System festgehalten wurde. Mit diesem Kompromiss kam Jackson – wenn auch schweren Herzens – den Wünschen vieler Physiker entgegen, und auch der Übersetzer kann nur hoffen, dass die vielen und teilweise sehr schrillen Stimmen, die sich gegen den Gebrauch des CGS-Systems wandten, nun verstummen werden. (An das jeweils benutzte Einheitensystem wird in den Kopfzeilen des Buches durch die Anhängsel „SI“ (für SI-System) bzw. „G“ (für Gauß'sches System) erinnert.)

Was die Übersetzung selbst angeht, so gilt im Wesentlichen dasselbe wie für die deutschsprachige Ausgabe der zweiten Auflage: Der Text wurde so frei wie möglich übersetzt, ohne jedoch das Original zu verfälschen. Geringfügig geändert wurden nur die Abschnitte über die Delta-Funktion (in Kap. 1.2) und die magnetische Hysterese (in Kap. 5.8). Zusätze bzw. Änderungen wurden in den Literaturhinweisen bzw. in der Bibliographie vorgenommen. Wo immer von einem im Original angegebenen Titel eine deutsche Übersetzung existiert, wurde diese angegeben. Ferner wurden einige zusätzliche deutsche Titel in die Literaturhinweise bzw. in die Bibliographie aufgenommen (und jeweils durch einen Stern * gekennzeichnet), um dem deutschsprachigen Leser die Vertiefung des Stoffes zu erleichtern. Entsprechend der Tatsache, dass in der nun vorliegenden dritten Auflage neue Themen behandelt werden, die in der zweiten Auflage nicht zur Sprache kamen, haben wir den Literaturhinweisen bzw. der Bibliographie weitere deutschsprachige Titel hinzugefügt. Das Buch enthält jetzt eine nahezu vollständige Liste von deutschsprachigen Werken

zur klassischen Elektrodynamik. Nachträglich möchten wir den Leser an den grundlegenden Handbuch-Artikel von Sigfried Flügge erinnern, den wir in die Bibliographie aufgenommen haben. Ein weiteres Werk, das ebenfalls in der Bibliographie, aber nicht im Text selbst genannt wird, ist das von Mectz und Engl. Es unterscheidet sich von allen anderen in der Bibliographie aufgeführten Büchern dadurch, dass es die Feldgrößen als Differentialformen betrachtet. Da aber vielen Physikern das Kalkül der alternierenden Differentialformen kaum geläufig ist, haben wir dieses Buch aus den Literaturhinweisen herausgenommen, möchten aber den Leser auf dieses bemerkenswerte Buch wenigstens aufmerksam machen. Da ferner die Übungen einen wesentlichen Bestandteil des „Jackson“ ausmachen und diese häufig sehr kompliziert sind, haben wir im Anschluß an die Bibliographie zusätzlich auf drei Bücher hingewiesen, die sich allein mit konkreten Problemen der Elektrodynamik beschäftigen. Zwar sind diese Bücher nicht mehr im Buchhandel erhältlich, aber in den meisten Bibliotheken dürften sie vorhanden sein.

Schließlich noch einige Bemerkungen zum Satz des Buches: Die Fußnoten wurden – kapitelweise – durchnummeriert, wobei die vom Übersetzer hinzugefügten Fußnoten mit dem Zusatz „Anm. des Übersetzers“ versehen wurden. Viele Gleichungen wurden, wie schon in der zweiten Auflage, zu einem Gleichungsblock zusammengefasst, wobei aber auf geschweifte Klammern verzichtet wurde; die neben der letzten Gleichung stehende Nummer, z. B. (3.139) oder (11.153), gilt auch den unmittelbar darüberstehenden Gleichungen. Was schließlich die Literaturzitate angeht, so weisen wir den Leser auf die Fußnote auf Seite 1 hin.

Abschließend noch eine Bemerkung zur Rechtschreibung: Wir sind *nicht* der Rechtschreibreform gefolgt, da eine Anpassung an diese Reform unnötig viele Änderungen nach sich gezogen hätte.

Berlin, im November 2001

Kurt Müller

Vorwort zur 3. Auflage

Vor 36 Jahren erschien die erste Auflage dieses Buches und vor 23 Jahren die zweite. Solche Zeitabstände mögen einem Gegenstand angemessen sein, dessen Grundlage vor 134 Jahren theoretisch von Maxwell und vor 110 Jahren experimentell von Hertz gelegt wurden. Immer jedoch verschieben sich die Schwerpunkte und verändern sich die Anwendungen. Diesem Sachverhalt versucht die vorliegende dritte Auflage ohne größere Änderungen des Umfangs gerecht zu werden. Dabei war nicht zu vermeiden, dass manche Themen der zweiten Auflage neuen Sachgebieten Platz machen mussten. In der Hauptsache wurde das Kapitel zur Plasmaphysik geopfert, wobei jedoch der eine oder andere Abschnitt an anderer Stelle eingefügt werden konnte. Im Übrigen glaube ich, dass die Leser, die an den hier weggefallenen Themen interessiert sind, leicht Zugang zur zweiten Auflage haben.

Die augenfälligste Veränderung ist die Umstellung auf SI-Einheiten (Système International d'Unités) in den ersten zehn Kapiteln. In den späteren Kapiteln wurden die Gauß'schen CGS-Einheiten beibehalten, da diese zur Relativitätstheorie und zur relativistischen Elektrodynamik besser zu passen scheinen als die SI-Einheiten. Das jeweils benutzte Einheitensystem wurde in der Kopfzeile jeder linken Seite durch den Zusatz „SI“ bzw. „G“ vermerkt.

Mein – wenn auch spätes – Einlenken auf das allgemein eingeführte SI-System entspricht der Tatsache, dass alle Einführungen in die Physik und sämtliche Lehrbücher für Ingenieure inzwischen SI-Einheiten verwenden. Über Jahre hinweg hatten Ed Purcell und ich ein Abkommen, uns gegenseitig im Gebrauch Gauß'scher Einheiten zu unterstützen. Nun aber bin ich ihm untreu geworden! Zwar gilt dieses Buch formell dem Andenken meines Vaters, aber – weniger formell – widme ich diese dritte Auflage auch Edward Mills Purcell (1912–1997). Er war ein hervorragender Physiker, voll tiefer Einsicht, ein großer Lehrer und ein wunderbarer Mensch.

Wegen der zunehmenden Bedeutung von Rechnern – sei es zur Ergänzung analytischer Problemlösungen oder auch dort, wo diese nicht möglich sind – habe ich einige Abschnitte zu den *Grundlagen* numerischer Methoden in der Elektrostatik und Magnetostatik hinzugefügt und auch ein paar einfache Aufgaben. Ich überlasse es dem Einfallsreichtum der Hochschullehrer, anspruchsvollere Aufgaben zu entwickeln. Mein Ziel war es, das Verständnis numerischer Methoden zu fördern, bevor man blindlings zu speziellen Programmpaketen oder gar zu *Mathematica* oder *Maple* greift.

Manche Abschnitte wurden umgestellt – insbesondere wurden das Faraday'sche Gesetz und quasistationäre Felder jetzt zusammen mit der Magnetostatik in Kapitel 5 behandelt, weil sich so Energie und Induktivitäten folgerichtiger diskutieren lassen. Eine größere Änderung bedeutet auch die in Kapitel 9 zu einer Einheit zusammengefasste Thematik der Strahlung von Ladungs- und Stromquellen, und zwar sowohl in elementarer Form als auch in der genauen Multipoldarstellung. Alle Anwendungen auf Streuung, Beugung und Brechung findet man jetzt in Kapitel 10.

In zwei neuen Abschnitten in Kapitel 8 werden die Prinzipien optischer Fasern und dielektrischer Wellenleiter behandelt. In Kapitel 13 wurde die Diskussion der Energieverluste gekürzt und konzentriert. Wegen der wachsenden Bedeutung von Synchrotronstrahlung als experimentelles Hilfsmittel wurde in Kapitel 14 ein Abschnitt hinzugefügt, der die Physik der sogenannten Undulatoren und Wiggler für Synchrotronlichtquellen gesondert behandelt. Kapitel 16 enthält neues Material zur Strahlungsreaktion und zu Modellen klassischer geladener Teilchen, die Akzente wurden verschoben.

Der gesamte Text ist durchzogen von vielen kleinen Änderungen, die der Leser hoffentlich nur als größere Klarheit wahrnimmt. Von den kleineren Zusätzen seien hier einige genannt: die Abschätzung von Selbstinduktivitäten, der Poyting'sche Satz für verlustbehaftete Medien, Polarisationspotentiale (Hertz'sche Vektoren), der Goos-Hänchen-Effekt, die Dämpfung in optischen Fasern sowie die London'sche Eindringtiefe in Supraleitern. Und natürlich mehr Übungen! Über 110 neue Aufgaben – eine Zunahme um 40% –, doch nicht zur Abschreckung, sondern zur Vertiefung.

Bei der Vorbereitung dieser neuen Auflage haben mir die Fragen und Vorschläge, der Rat und die kritischen Bemerkungen vieler Studenten, Kollegen und neuer Freunde geholfen. Ihnen allen danke ich sehr herzlich. Besonderen Dank für ihre Hilfe schulde ich Myron Bander, David F. Bartlett, Norbert N. Cahn, John Cooper, John L. Gammel, David J. Griffiths, Leroy T. Kerth, Kwang J. Kim, Norman M. Kroll, Michael A. Lee, Harry J. Lipkin, William Mendoza, Gerald A. Miller, William A. Newcomb, Ivan Otero, Alan M. Portis, Fritz Rohrlich, Wayne M. Saslow, Chris Schmid, Kevin E. Schmidt sowie George H. Trilling.

Berkeley, Kalifornien, 1998

J. David Jackson

Inhalt

| | |
|--|----|
| Einführung und Überblick | 1 |
| I.1 Die Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum; Felder und Quellen ... | 3 |
| I.2 Das Gesetz vom reziproken quadratischen Abstand oder die Masse des Photons | 6 |
| I.3 Lineare Superposition | 11 |
| I.4 Die Maxwell'schen Gleichungen in makroskopischer Materie | 15 |
| I.5 Grenzbedingungen an der Trennfläche verschiedener Medien | 20 |
| I.6 Anmerkungen zu Idealisierungen in der Theorie des Elektro- magnetismus | 22 |
| Literaturhinweise | 26 |
| | |
| 1 Einführung in die Elektrostatik | 29 |
| 1.1 Das Coulomb'sche Gesetz | 29 |
| 1.2 Das elektrische Feld | 30 |
| 1.3 Das Gauß'sche Gesetz | 33 |
| 1.4 Differentielle Form des Gauß'schen Gesetzes | 35 |
| 1.5 Die Wirbelfreiheit des elektrostatischen Feldes und das skalare Potential | 36 |
| 1.6 Flächenhaft verteilte Ladungen und Dipole, Unstetigkeiten des elektrischen Feldes und seines Potentials | 38 |
| 1.7 Die Poisson'sche und Laplace'sche Gleichung | 41 |
| 1.8 Der Green'sche Satz | 43 |
| 1.9 Eindeutigkeit der Lösung mit Dirichlet'scher oder Neumann'scher Randbedingung | 45 |
| 1.10 Formale Lösung des elektrostatischen Randwertproblems mithilfe der Green'schen Funktion | 46 |
| 1.11 Elektrostatische potentielle Energie und Energiedichte; Kapazität ... | 49 |
| 1.12 Näherungslösung der Laplace'schen und Poisson'schen Gleichung mithilfe von Variationsverfahren | 53 |
| 1.13 Relaxationsmethode zur Lösung zweidimensionaler Probleme der Elektrostatik | 57 |
| Literaturhinweise | 60 |
| Übungen | 61 |
| | |
| 2 Randwertprobleme in der Elektrostatik: I | 69 |
| 2.1 Methode der Spiegelladungen | 69 |
| 2.2 Punktladung gegenüber einer geerdeten, leitenden Kugel | 70 |

| | | |
|----------|---|------------|
| XII | Inhalt | |
| 2.3 | Punktladung gegenüber einer geladenen, isolierten, leitenden Kugel | 73 |
| 2.4 | Punktladung gegenüber einer leitenden Kugel auf konstantem Potential | 75 |
| 2.5 | Leitende Kugel im homogenen elektrischen Feld nach der Methode der Spiegelladungen | 76 |
| 2.6 | Green'sche Funktion der Kugel, allgemeine Lösung für das Potential | 77 |
| 2.7 | Leitende Kugelschale mit verschiedenen Potentialen auf ihren beiden Hälften | 79 |
| 2.8 | Entwicklung nach orthogonalen Funktionen | 81 |
| 2.9 | Trennung der Variablen, Laplace'sche Gleichung in kartesischen Koordinaten | 84 |
| 2.10 | Ein zweidimensionales Potentialproblem, Summation einer Fourier-Reihe | 87 |
| 2.11 | Felder und Ladungsdichten in Umgebung von Ecken und Kanten | 91 |
| 2.12 | Einführung in die Methode finiter Elemente in der Elektrostatik | 94 |
| | Literaturhinweise | 101 |
| | Übungen | 102 |
| 3 | Randwertprobleme in der Elektrostatik: II | 113 |
| 3.1 | Laplace'sche Gleichung in Kugelkoordinaten | 113 |
| 3.2 | Legendre'sche Differentialgleichung und Legendre-Polynome | 114 |
| 3.3 | Randwertprobleme mit azimuthaler Symmetrie | 119 |
| 3.4 | Verhalten der Felder in einer kegelförmigen Vertiefung oder in der Nähe einer Spitze | 122 |
| 3.5 | Zugeordnete Legendre-Funktionen und Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta, \phi)$ | 126 |
| 3.6 | Additionstheorem der Kugelflächenfunktionen | 129 |
| 3.7 | Laplace'sche Gleichung in Zylinderkoordinaten, Bessel-Funktionen | 131 |
| 3.8 | Randwertprobleme in Zylinderkoordinaten | 137 |
| 3.9 | Entwicklung Green'scher Funktionen in Kugelkoordinaten | 140 |
| 3.10 | Lösung von Potentialproblemen unter Verwendung der sphärischen Entwicklung der Green'schen Funktion | 143 |
| 3.11 | Entwicklung Green'scher Funktionen in Zylinderkoordinaten | 146 |
| 3.12 | Entwicklung Green'scher Funktionen nach Eigenfunktionen | 148 |
| 3.13 | Gemischte Randbedingungen, leitende Ebene mit kreisförmiger Öffnung | 151 |
| | Literaturhinweise | 157 |
| | Übungen | 158 |

| | | |
|----------|--|-----|
| 4 | Multipole, Elektrostatik makroskopischer Medien, Dielektrika | 169 |
| 4.1 | Multipolentwicklung | 169 |
| 4.2 | Multipolentwicklung der Energie einer Ladungsverteilung im äußeren Feld | 174 |
| 4.3 | Elementare Behandlung der Elektrostatik in dichten Medien | 176 |
| 4.4 | Randwertprobleme bei Anwesenheit von Dielektrika | 180 |
| 4.5 | Molekulare Polarisierbarkeit und elektrische Suszeptibilität | 185 |
| 4.6 | Modelle für die molekulare Polarisierbarkeit | 188 |
| 4.7 | Elektrostatische Energie in dielektrischen Medien | 192 |
| | Literaturhinweise | 196 |
| | Übungen | 197 |
| | | |
| 5 | Magnetostatik, Faraday'sches Induktionsgesetz, quasistationäre Felder | 203 |
| 5.1 | Einführung und Definitionen | 203 |
| 5.2 | Das Biot-Savart'sche Gesetz | 204 |
| 5.3 | Die Differentialgleichungen der Magnetostatik und das Ampère'sche Durchflutungsgesetz | 208 |
| 5.4 | Vektorpotential | 210 |
| 5.5 | Vektorpotential und magnetische Induktion einer kreisförmigen Stromschleife | 211 |
| 5.6 | Magnetische Felder einer lokalisierten Stromverteilung, magnetisches Moment | 215 |
| 5.7 | Kraft und Drehmoment auf eine lokalisierte Stromverteilung im äußeren Magnetfeld, Energie dieser Stromverteilung | 219 |
| 5.8 | Makroskopische Gleichungen, Grenzbedingungen für B und H | 223 |
| 5.9 | Lösungsmethoden für Randwertprobleme der Magnetostatik | 227 |
| 5.10 | Homogen magnetisierte Kugel | 231 |
| 5.11 | Magnetisierte Kugel im äußeren Feld, Permanentmagnete | 233 |
| 5.12 | Magnetische Abschirmung, Kugelschale aus hochpermeablem Material im äußeren Feld | 235 |
| 5.13 | Wirkung einer kreisförmigen Öffnung in ideal leitender Ebene, die auf der einen Seite ein asymptotisch tangentiales, homogenes Magnetfeld begrenzt | 237 |
| 5.14 | Numerische Methoden zur Berechnung zweidimensionaler Magnetfelder | 240 |
| 5.15 | Das Faraday'sche Induktionsgesetz | 243 |
| 5.16 | Energie des magnetischen Feldes | 247 |
| 5.17 | Energie des magnetischen Feldes und Induktivitätskoeffizienten | 250 |
| 5.18 | Quasistationäre Magnetfelder in Leitern; magnetische Diffusion | 254 |
| | Literaturhinweise | 260 |
| | Übungen | 262 |

| | | |
|----------|---|-----|
| 6 | Maxwell'sche Gleichungen, makroskopischer Elektromagnetismus, Erhaltungssätze | 275 |
| 6.1 | Maxwell'scher Verschiebungsstrom, Maxwell'sche Gleichungen | 275 |
| 6.2 | Vektorpotential und skalares Potential | 277 |
| 6.3 | Eichtransformationen, Lorenz-Eichung, Coulomb-Eichung | 279 |
| 6.4 | Green'sche Funktionen der Wellengleichung | 282 |
| 6.5 | Retardierte Lösungen der Feldgleichungen: Jefimenkos Verallgemeinerung des Coulomb'schen und Biot-Savart'schen Gesetzes; die Heaviside-Feynman-Formeln für die Felder einer Punktladung | 285 |
| 6.6 | Herleitung der Gleichungen des makroskopischen Elektromagnetismus | 288 |
| 6.7 | Der Poynting'sche Satz und die Erhaltung von Energie und Impuls eines aus geladenen Teilchen und elektromagnetischen Feldern bestehenden Systems | 299 |
| 6.8 | Der Poynting'sche Satz für linear-dispersive Medien mit Verlusten .. | 304 |
| 6.9 | Der Poynting'sche Satz für Felder mit harmonischer Zeitabhängigkeit, Definition von Impedanz und Admittanz über die Felder | 306 |
| 6.10 | Transformationseigenschaften der elektromagnetischen Felder und Quellen unter Drehungen, räumlichen Spiegelungen und Zeitumkehr | 310 |
| 6.11 | Zur Frage magnetischer Monopole | 317 |
| 6.12 | Diskussion der Dirac'schen Quantisierungsbedingung | 319 |
| 6.13 | Polarisationspotentiale (Hertz'sche Vektoren) | 326 |
| | Literaturhinweise | 328 |
| | Übungen | 329 |
| | | |
| 7 | Ebene elektromagnetische Wellen und Wellenausbreitung | 341 |
| 7.1 | Ebene Wellen in nichtleitenden Medien | 341 |
| 7.2 | Lineare und zirkulare Polarisation, die Stokes'schen Parameter | 346 |
| 7.3 | Reflexion und Brechung elektromagnetischer Wellen an der ebenen Trennfläche zweier Dielektrika | 350 |
| 7.4 | Polarisation durch Reflexion; Totalreflexion; Goos-Hänchen-Effekt | 354 |
| 7.5 | Charakteristische Eigenschaften der Dispersion in Dielektrika, Leitern und Plasmen | 357 |
| 7.6 | Vereinfachtes Modell zur Wellenausbreitung in der Ionosphäre und Magnetosphäre | 366 |
| 7.7 | Magnetohydrodynamische Wellen | 369 |
| 7.8 | Überlagerung von Wellen in einer Dimension, Gruppengeschwindigkeit | 373 |
| 7.9 | Beispiel für das Zerfließen eines Wellenpakets beim Durchgang durch ein dispersives Medium | 378 |

| | | |
|---|--|-----|
| 7.10 | Kausale Verknüpfung zwischen D und E , Kramers-Kronig-Relationen | 381 |
| 7.11 | Signalübertragung in einem dispersiven Medium | 388 |
| | Literaturhinweise | 392 |
| | Übungen | 393 |
| 8 Wellenleiter, Hohlraumresonatoren und optische Fasern | | |
| 8.1 | Felder an der Oberfläche und im Innern eines Leiters | 407 |
| 8.2 | Zylindrische Hohl- und Wellenleiter | 412 |
| 8.3 | Wellenleiter | 415 |
| 8.4 | Schwingungstypen in Rechteckwellenleitern | 417 |
| 8.5 | Energiestrom und Energiedämpfung in Wellenleitern | 419 |
| 8.6 | Störung der Randbedingungen | 423 |
| 8.7 | Hohlraumresonatoren | 426 |
| 8.8 | Leistungsverluste in einem Hohlraumresonator, Gütefaktor eines Hohlraumresonators | 429 |
| 8.9 | Erde und Ionosphäre als Hohlraumresonator: Schumann-Resonanzen | 433 |
| 8.10 | Mehrmodige Ausbreitung in optischen Fasern | 437 |
| 8.11 | Eigenwellen in dielektrischen Wellenleitern | 445 |
| 8.12 | Eigenwellenentwicklung; die von einer lokalisierten Quelle im metallischen Hohlleiter erzeugten Felder | 451 |
| | Literaturhinweise | 457 |
| | Übungen | 459 |
| 9 Strahlungssysteme, Multipolfelder und Strahlung | | |
| 9.1 | Felder und Strahlung einer lokalisierten, oszillierenden Quelle | 471 |
| 9.2 | Felder und Strahlung eines elektrischen Dipols | 474 |
| 9.3 | Magnetische Dipol- und elektrische Quadrupolfelder | 477 |
| 9.4 | Linearantenne mit symmetrischer Speisung | 481 |
| 9.5 | Multipolentwicklung für eine kleine Quelle oder Öffnung im Wellenleiter | 485 |
| 9.6 | Grundlösungen der skalaren Wellengleichung in Kugelkoordinaten | 491 |
| 9.7 | Multipolentwicklung elektromagnetischer Felder | 496 |
| 9.8 | Eigenschaften von Multipolfeldern; Energie und Drehimpuls der Multipolstrahlung | 499 |
| 9.9 | Winkelverteilung der Multipolstrahlung | 505 |
| 9.10 | Quellen der Multipolstrahlung, Multipolmomente | 508 |
| 9.11 | Multipolstrahlung in Atomen und Kernen | 511 |
| 9.12 | Multipolstrahlung einer Linearantenne mit symmetrischer Speisung | 513 |
| | Literaturhinweise | 519 |
| | Übungen | 520 |

| | | |
|-----------|--|-----|
| 10 | Streuung und Beugung | 527 |
| 10.1 | Streuung bei großen Wellenlängen | 527 |
| 10.2 | Störungstheorie für Streuung; Rayleighs Erklärung der blauen Himmelsfarbe; Streuung in Gasen und Flüssigkeiten; Dämpfung in optischen Fasern | 535 |
| 10.3 | Entwicklung einer räumlichen ebenen Welle nach sphärischen Lösungen der Wellengleichung | 545 |
| 10.4 | Streuung elektromagnetischer Wellen an einer Kugel | 547 |
| 10.5 | Skalare Beugungstheorie | 552 |
| 10.6 | Vektoräquivalente des Kirchhoff'schen Integrals | 558 |
| 10.7 | Vektorielle Beugungstheorie | 561 |
| 10.8 | Das Babinet'sche Prinzip komplementärer Blenden | 564 |
| 10.9 | Beugung an einer kreisförmigen Öffnung, Anmerkungen zu kleinen Öffnungen | 567 |
| 10.10 | Streuung im Grenzfall kurzer Wellenlängen | 573 |
| 10.11 | Optisches Theorem und Verwandtes | 579 |
| | Literaturhinweise | 585 |
| | Übungen | 586 |
| 11 | Spezielle Relativitätstheorie | 595 |
| 11.1 | Die Situation vor 1900, die beiden Einstein'schen Postulate | 596 |
| 11.2 | Einige neuere Experimente | 600 |
| 11.3 | Lorentz-Transformationen und die wichtigsten Folgerungen für die relativistische Kinematik | 607 |
| 11.4 | Addition von Geschwindigkeiten, Vierergeschwindigkeit | 614 |
| 11.5 | Relativistischer Impuls und relativistische Energie eines Teilchens ... | 617 |
| 11.6 | Mathematische Eigenschaften des Raum-Zeit-Kontinuums in der speziellen Relativitätstheorie | 624 |
| 11.7 | Matrixdarstellungen der Lorentz-Transformationen, infinitesimale Erzeugende | 628 |
| 11.8 | Thomas-Präzession | 633 |
| 11.9 | Invarianz der elektrischen Ladung, Kovarianz der Elektrodynamik | 639 |
| 11.10 | Transformation der elektromagnetischen Felder | 644 |
| 11.11 | Relativistische Bewegungsgleichung für den Spin in homogenen oder langsam veränderlichen äußeren Feldern | 649 |
| 11.12 | Anmerkung zu Notation und Einheiten in der relativistischen Kinematik | 653 |
| | Literaturhinweise | 654 |
| | Übungen | 656 |

| | | |
|-----------|---|-----|
| 12 | Dynamik relativistischer Teilchen und elektromagnetischer Felder | 669 |
| 12.1 | Lagrange- und Hamilton-Funktion eines relativistischen geladenen Teilchens im äußeren elektromagnetischen Feld | 670 |
| 12.2 | Bewegung im homogenen statischen Magnetfeld | 676 |
| 12.3 | Bewegung in miteinander kombinierten, homogenen statischen elektrischen und magnetischen Feldern | 677 |
| 12.4 | Teilchendrift in inhomogenen statischen Magnetfeldern | 680 |
| 12.5 | Adiabatische Invarianz des von der Teilchenbahn eingeschlossenen magnetischen Flusses | 685 |
| 12.6 | Niedrigste relativistische Korrekturen zur Lagrange-Funktion wechselwirkender geladener Teilchen: die Darwin'sche Lagrange-Funktion | 690 |
| 12.7 | Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes | 692 |
| 12.8 | Die Proca'sche Lagrange-Dichte, Effekte einer Photomasse | 694 |
| 12.9 | Effektive „Photon“-Masse in der Supraleitung; London'sche Eindringtiefe | 698 |
| 12.10 | Kanonischer und symmetrischer Energie-Impuls-Tensor, Erhaltungssätze | 700 |
| 12.11 | Lösung der Wellengleichung in kovarianter Form, invariante Green'sche Funktionen | 708 |
| | Literaturhinweise | 712 |
| | Übungen | 713 |
| | | |
| 13 | Stoßprozesse zwischen geladenen Teilchen; Energieverlust und Streuung; Tscherenkow- und Übergangsstrahlung | 721 |
| 13.1 | Energieübertrag bei Coulomb-Stößen zwischen einem schweren Teilchen und einem ruhenden, freien Elektron; Energieverlust bei harten Stößen | 722 |
| 13.2 | Energieverlust bei weichen Stößen; Gesamtenergieverlust | 725 |
| 13.3 | Einfluß der Dichte auf den Energieverlust beim Stoß | 729 |
| 13.4 | Tscherenkow-Strahlung | 736 |
| 13.5 | Elastische Streuung schneller Teilchen an Atomen | 740 |
| 13.6 | Mittlerer quadratischer Streuwinkel und Winkelverteilung bei Mehrfachstreuung | 743 |
| 13.7 | Übergangsstrahlung | 747 |
| | Literaturhinweise | 756 |
| | Übungen | 756 |
| | | |
| 14 | Strahlung bewegter Teilchen | 763 |
| 14.1 | Liénard-Wiechert'sche Potentiale und die Felder einer Punktladung | 763 |
| 14.2 | Strahlungsleistung einer beschleunigten Ladung: die Larmor'sche Formel und ihre relativistische Verallgemeinerung | 767 |

XVIII Inhalt

| | | |
|-----------|---|------------|
| 14.3 | Winkelverteilung der Strahlung einer beschleunigten Ladung | 771 |
| 14.4 | Die Strahlung einer ultrarelativistisch bewegten Ladung | 774 |
| 14.5 | Frequenz- und Winkelverteilung der Strahlungsenergie beschleunigter Ladungen | 777 |
| 14.6 | Frequenzspektrum der Strahlung einer relativistisch bewegten Ladung in momentaner Kreisbewegung | 780 |
| 14.7 | Undulatoren und Wiggler zur Erzeugung von Synchrotronstrahlung | 788 |
| 14.8 | Thomson-Streuung | 800 |
| | Literaturhinweise | 804 |
| | Übungen | 805 |
| 15 | Bremsstrahlung, Methode der virtuellen Quanten, Strahlung beim Beta-Zerfall | 817 |
| 15.1 | Strahlung bei Stößen | 818 |
| 15.2 | Strahlung bei Coulomb'scher Wechselwirkung | 824 |
| 15.3 | Abschirmeffekte; relativistischer Energieverlust durch Strahlung | 832 |
| 15.4 | Weizsäcker-Williams-Methode der virtuellen Quanten | 836 |
| 15.5 | Bremsstrahlung als Streuung virtueller Quanten | 841 |
| 15.6 | Strahlung beim Beta-Zerfall | 843 |
| 15.7 | Strahlung beim Kerneinfang eines Hüllenelektrons, Verschwinden von Ladung und magnetischem Moment | 845 |
| | Literaturhinweise | 850 |
| | Übungen | 851 |
| 16 | Strahlungsdämpfung, klassische Modelle geladener Teilchen | 859 |
| 16.1 | Einführende Betrachtungen | 859 |
| 16.2 | Berechnung der Strahlungsdämpfung aus dem Energieerhaltungsprinzip | 862 |
| 16.3 | Berechnung der Selbstkraft nach Abraham und Lorentz | 865 |
| 16.4 | Relativistische Kovarianz; Stabilität und Poincaré'sche Spannungen | 871 |
| 16.5 | Kovariante Definition von Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes | 873 |
| 16.6 | Das kovariante, stabile geladene Teilchen | 876 |
| 16.7 | Linienbreite und Niveaushiftung eines strahlenden Oszillators | 881 |
| 16.8 | Streuung und Absorption von Strahlung durch einen Oszillator | 884 |
| | Literaturhinweise | 886 |
| | Übungen | 887 |

| | |
|--|---------|
| Anhang: Einheiten und Dimensionen | 893 |
| 1 Einheiten und Dimensionen, Grundeinheiten und abgeleitete Einheiten | 893 |
| 2 Elektromagnetische Einheiten und Gleichungen | 895 |
| 3 Verschiedene Systeme elektromagnetischer Einheiten | 898 |
| 4 Zusammenhang zwischen Gleichungen und Beträgen in SI-Einheiten und Gauß'schen Einheiten | 901 |
| Bibliographie | 905 |
| Sachregister | 913 |

Einführung und Überblick

Bernstein und Magnetit kannte man bereits in der Antike, doch der Elektromagnetismus entwickelte sich erst sehr viel später zu einem Gegenstand quantitativer Forschung – und dies in weniger als hundert Jahren. Cavendish führte seine bemerkenswerten Experimente zur Elektrostatik in den Jahren zwischen 1771 und 1773 aus, und die denkwürdigen Untersuchungen Coulombs wurden das erste Mal 1785 veröffentlicht. Mit ihnen begann die weltweite quantitative Forschung auf dem Gebiet der Elektrizität und des Magnetismus. Fünfzig Jahre später untersuchte Faraday die bei zeitveränderlichen Strömen und Magnetfeldern auftretenden Phänomene. Um 1864 schließlich publizierte Maxwell seine berühmte Arbeit über eine dynamische Theorie des elektromagnetischen Feldes. Vierundzwanzig Jahre später (1888) veröffentlichte Hertz seine Entdeckung der transversalen elektromagnetischen Wellen, die sich mit gleicher Geschwindigkeit wie das Licht ausbreiten. Er stellte damit die Maxwell'sche Theorie auf den festen Boden des Experiments.

Die Geschichte der Entwicklung unseres Verständnisses von Elektrizität und Magnetismus sowie des Lichts ist natürlich sehr viel länger und verwickelter, als es bei Nennung von Namen eines einzigen Jahrhunderts erscheinen mag. Für ein eingehendes Studium dieser faszinierenden Geschichte empfehlen wir dem Leser das zweibändige Standardwerk von *Whittaker*.¹ Eine kürzere Darstellung, mit der Betonung optischer Phänomene, enthält die Einleitung des Buches von *Born* (bzw. dessen englischsprachige Erweiterung von *Born und Wolf*).

Seit den 1960er Jahren hat sich unser Verständnis von den elementaren Kräften und Bausteinen der Materie gründlich gewandelt. Heute (am Anfang des 21. Jahrhunderts) fällt die klassische Elektrodynamik in einen Sektor der vereinigten, als *Standardmodell* bekannten Theorie von Teilchen und Wechselwirkungen. Das Standardmodell beschreibt in quantenmechanisch widerspruchsfreier Weise elektromagnetische, schwache und starke Wechselwirkungen durch elementare Bausteine – Quarks und Leptonen –, die über Kraftträger – Photonen, W- und Z-Bosonen, Gluonen – miteinander in Wechselwirkung treten. Den theoretischen Rahmen liefern die Prinzipien der Eichinvarianz der Kräfte und die diskreten Symmetrien der Teilcheneigenschaften.

Unter dem Gesichtswinkel des Standardmodells ist die klassische Elektrodynamik ein Grenzfall der Quantenelektrodynamik (für kleinen Impuls- und Energieübertrag und eine große Zahl virtueller oder realer Photonen). Die Quantenelektrodynamik ist ihrerseits eine Folge aus spontan gebrochener Symmetrie in einer Theorie, in der ursprünglich die schwache und die elektromagnetische Wechselwirkung vereint sind und beide Kraftträger masselos sind. Die gebrochene Symmetrie belässt den

¹ Im Text oder in den Fußnoten kursiv gedruckte Zunamen verweisen auf die Autoren von Büchern, deren vollständige Titel in der Bibliographie angegeben sind.

elektromagnetischen Kraftträger (das Photon) masselos und – entsprechend dem Coulomb'schen Gesetz – versehen mit unendlicher Reichweite. Dagegen erhält der schwache Kraftträger eine Masse von ca. $80\text{--}90 \text{ GeV}/c^2$ und die schwache Wechselwirkung weist bei niedrigen Energien eine extrem kurze Reichweite auf (2×10^{-18} Meter). Da die Theorie ursprünglich eine vereinheitlichte war, stehen Reichweite und Stärke der schwachen Wechselwirkung in Beziehung zur elektromagnetischen Kopplung (beschrieben durch die Feinstrukturkonstante $\alpha \approx 1/137$).

Obwohl das Standardmodell eine beträchtliche Anzahl seiner Parameter der experimentellen Bestimmung überlassen muss, liefert es (am oberen Ende der Entfernungsskala zusammen mit der allgemeinen Relativitätstheorie) in jeder Hinsicht eine sehr genaue Beschreibung der Natur, von den Tiefen des Kerns über die Mikroelektronik bis hin zu Tisch und Stuhl und zu den entferntesten Milchstraßensystemen. Natürlich sind viele Erscheinungen klassischer Art oder mit nichtrelativistischer Quantenmechanik zu beschreiben. Doch im Bereich der relativistischen Quantenmechanik stimmt das Modell mit experimentellen Ergebnissen der Atom- oder Teilchenphysik erstaunlich gut überein. Die klassische Mechanik und klassische Elektrodynamik dienten als Vorläufer unseres heutigen Verständnisses und spielen immer noch eine wichtige Rolle – im praktischen Leben wie in der Forschung.

Das vorliegende Buch ist insofern in sich geschlossen, als es – abgesehen von einem gewissen mathematischen Hintergrund (Vektoranalysis und Differentialgleichungen) – die Elektrodynamik aus ihren Anfangsgründen, der Elektrostatik, entwickelt. Die meisten Leser werden jedoch nicht das erste Mal mit dem Gegenstand dieses Buches in Berührung gekommen sein. Daher wollen wir in dieser Einführung nicht etwa das Coulomb'sche Gesetz und anderweitige Grundlagen besprechen, sondern versuchen, einen Rück- und Überblick über den klassischen Elektromagnetismus zu geben. Wir beschäftigen uns hier mit Fragen wie der augenblicklichen Genauigkeitsgrenze des Gesetzes vom reziproken quadratischen Abstand (bzw. der Masse des Photons), dem Gültigkeitsbereich des linearen Superpositionsprinzips und den Konsequenzen der Diskretheit von Ladung und Energiedifferenzen. Auch das Problem der Grenzbedingungen makroskopischer Felder an der Trennfläche verschiedener Medien und Leiter wird hier diskutiert. Unser Ziel ist es, den klassischen Elektromagnetismus im Zusammenhang darzustellen, seinen Gültigkeitsbereich klar werden zu lassen und einige Idealisierungen zu verdeutlichen, die der Theorie des klassischen Elektromagnetismus anhaften. Im Verlauf der Diskussion bedienen wir uns einiger Ergebnisse aus späteren Kapiteln dieses Buches und auch einiger nichtklassischer Überlegungen. Natürlich werden Leser, die sich das erste Mal mit dem Elektromagnetismus beschäftigen, nicht allen Argumenten folgen oder ihre Bedeutung erkennen können. Den anderen Lesern aber soll diese Einführung als Sprungbrett in die späteren Teile des Buches dienen, die dem Kapitel 5 folgen, und sie gleichzeitig an den Status der Elektrodynamik als experimentelle Wissenschaft erinnern.

I.1 Die Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum; Felder und Quellen

Die Grundgleichungen, die elektromagnetische Phänomene beschreiben, sind die Maxwell'schen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\
 \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{J} \\
 \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0
 \end{aligned} \tag{I.1a}$$

wobei für äußere Quellen im Vakuum die Beziehungen $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ und $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ gelten. Die beiden ersten Maxwell'schen Gleichungen gehen dann über in

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho / \epsilon_0 \\
 \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{c^2 \partial t} &= \mu_0 \mathbf{J}
 \end{aligned} \tag{I.1b}$$

Implizit ist in den Maxwell'schen Gleichungen die Kontinuitätsgleichung für die Ladungs- und Stromdichte enthalten, nämlich

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \tag{I.2}$$

Dies erkennt man unmittelbar, wenn man die erste der Gln. (I.1a) mit der Divergenz der zweiten dieser Gleichungen kombiniert. Wesentlich für das Verhalten eines Teilchens ist auch die Gleichung für die Lorentz-Kraft:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{I.3}$$

die die auf eine Punktladung q im elektromagnetischen Feld ausgeübte Kraft beschreibt.

Wir haben diese Gleichungen im SI-Einheitensystem geschrieben, also jenem System elektromagnetischer Einheiten, das wir in den ersten zehn Kapiteln dieses Buches benutzen. (Das Problem der Einheiten und Dimensionen wird ausführlich im Anhang besprochen.) In Tabelle 2 des Anhangs ist angegeben, wie sich die Maxwell'schen Gleichungen in den gebräuchlichen Einheitensystemen schreiben.

Von grundlegender Bedeutung für die Elektrodynamik ist die Geschwindigkeit des Lichts im Vakuum. In SI-Einheiten ist sie gegeben durch

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Der genaue Wert ist

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

Dieser Wert ist *exakt*, da das Meter heute durch die Sekunde (basierend auf der Frequenz eines Hyperfein-Übergangs im Cs-133) und durch die Lichtgeschwindigkeit definiert ist. Diese Definition beruht auf der Annahme, dass die Lichtgeschwindigkeit eine universelle Konstante ist – in Übereinstimmung mit der Beobachtung (s. Kap. 11.2.C). Sie besagt, dass die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit mit großer Genauigkeit unabhängig von der Frequenz ist, und zwar von sehr niedrigen Frequenzen an bis zu Frequenzen von mindestens $\nu \simeq 10^{24}$ Hz (4 GeV-Photonen). Für die meisten praktischen Zwecke kann man die Näherung $c \simeq 3 \times 10^8$ m/s verwenden oder (wenn man genauer sein will) $c = 2.998 \times 10^8$ m/s.

Die elektrischen und magnetischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} in (I.1) wurden ursprünglich über die Kraftgleichung (I.3) eingeführt. In den Coulomb'schen Experimenten wurden Kräfte zwischen lokalisierten, endlich ausgedehnten Ladungsverteilungen gemessen. In diesem Zusammenhang (vgl. Kap. 1.2) ist es nützlich, das elektrische Feld \mathbf{E} als Kraft pro Ladungseinheit einzuführen. In ähnlicher Weise untersuchte Ampère in seinen Experimenten diejenigen Kräfte, die stromdurchflossene Leiter aufeinander ausüben (vgl. Kap. 5.2). Bedenkt man, dass $Nq\mathbf{v}$ gerade denjenigen Strom darstellt, der in einem Leiter vom Querschnitt A mit N Ladungsträgern pro Volumeneinheit fließt, die sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegen, so erkennt man, dass das in (I.3) auftretende Feld \mathbf{B} gleichbedeutend ist mit der auf den Einheitsstrom bezogenen Kraft. Obwohl also \mathbf{E} und \mathbf{B} zunächst nur als Ersatz für die von Ladungs- und Stromverteilungen ausgeübten Kräfte erscheinen, kommen ihnen weitere wichtige Aspekte zu. Zunächst ist festzustellen, dass die Einführung dieser Felder den Begriff der Quellen von dem des Testkörpers entkoppelt, auf den die elektromagnetischen Kräfte wirken. Sind die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} zweier verschiedener Quellverteilungen an einem bestimmten Raumpunkt die gleichen, dann sind die an diesem Punkt auf eine Testladung oder einen Teststrom ausgeübten Kräfte ebenfalls die gleichen, und zwar unabhängig von der Verschiedenheit der Quellverteilungen. Dies gibt den Feldern \mathbf{E} und \mathbf{B} in (I.3) eine eigene, von den Quellen losgelöste Bedeutung. Ferner können elektromagnetische Felder in Raumgebieten existieren, in denen sich keine Quellen befinden. Sie können Energie, Impuls und Drehimpuls tragen und haben somit eine von den Ladungen und Strömen vollkommen unabhängige Existenz. Obwohl es neuerdings wieder Versuche gibt, den expliziten Bezug auf die Felder zu eliminieren und stattdessen die Wechselwirkung geladener Teilchen durch eine *Fernwirkungstheorie* zu beschreiben, stellt doch der Begriff des elektromagnetischen Feldes eine der fruchtbarsten Ideen in der Geschichte der Physik dar, und zwar im klassischen wie im quantenmechanischen Bereich.

Die Interpretation von \mathbf{E} und \mathbf{B} als gewöhnliche Felder ist klassischer Natur. Man kann sie als klassischen Limes (Limes großer Quantenzahlen) einer quantenmechanischen Beschreibungsweise durch reelle oder virtuelle Photonen betrachten. Bei makroskopischen und sogar manchen atomaren Phänomenen kann man die Diskretheit des Photons i. A. ignorieren. So hat z. B. das mittlere elektrische Feld (d. h. die Wurzel aus dem zeitlichen Mittelwert seines Betragsquadrates) einer 100 Watt-Glühlampe in 1 Meter Entfernung von ihr die Größenordnung von 50 V/m, und es befinden sich dort ungefähr 10^{15} Photonen/cm² × s. In ähnlicher Weise erzeugt eine isotrope, frequenzmodulierte Antenne mit einer Leistung von 100 Watt bei 10^8 Hz in einer Entfernung von 100 Kilometern ein mittleres elektrisches Feld von nur 0,5 mV/m. Dies entspricht aber immer noch einem Fluss von 10^{12} Photonen/

$\text{cm}^2 \times \text{s}$ oder ungefähr 10^9 Photonen in einem Volumen von der dritten Potenz der Wellenlänge (27 m^3) in derselben Entfernung. Normalerweise spricht ein Gerät nicht auf die individuellen Photonen an; es ist der kumulative Effekt vieler emittierter oder absorbierter Photonen, der als kontinuierliche, makroskopisch beobachtbare Wirkung erscheint. In diesem Fall ist eine rein klassische Beschreibungsweise durch die Maxwell'schen Gleichungen erlaubt und angemessen.

Wie kann man nun a priori entscheiden, wann die klassische Beschreibungsweise des elektromagnetischen Feldes adäquat ist? Dazu sind manchmal subtile Überlegungen notwendig, doch i. Allg. ist folgendes Kriterium ausreichend: Kann die Zahl der Photonen als groß betrachtet werden, ist aber der Impuls eines einzelnen Photons im Vergleich zu dem des Materiesystems klein, so lässt sich die Reaktion des Materiesystems in adäquater Weise aus einer klassischen Beschreibung des elektromagnetischen Feldes gewinnen. Die oben erwähnte frequenzmodulierte Antenne erhält z. B. bei einer Emission eines einzelnen Photons der Frequenz 10^8 Hz einen Impuls von nur $2,2 \times 10^{-34} \text{ N} \cdot \text{s}$. In diesem Fall ist eine klassische Behandlung bestimmt gerechtfertigt. Ebenso wird die Streuung von Licht an einem freien Elektron bei niedrigen Frequenzen durch die klassische Thomson-Formel (vgl. Kap. 14.8) beschrieben, jedoch durch die Gesetze des Compton-Effektes, sobald der Impuls $h\nu/c$ eines einzelnen Photons gegenüber mc groß wird. Der photoelektrische Effekt ist für das Materiesystem nichtklassischer Natur, da die quasifreien Elektronen im Metall ihre Einzelenergien um Beträge ändern, die denen der absorbierten Photonen entsprechen; doch der photoelektrische Strom der Elektronen kann quantenmechanisch berechnet werden unter Zugrundelegung einer klassischen Beschreibung des elektromagnetischen Feldes.

Die Quantennatur des elektromagnetischen Feldes muss dagegen berücksichtigt werden bei der spontanen Emission von Strahlung durch Atome oder andere Systeme, wenn nämlich zu Beginn überhaupt keine Photonen vorhanden sind und auch nach Abschluss des Prozesses nur sehr wenige. Im zeitlichen Mittel aber kann das elektromagnetische Feld im Wesentlichen immer noch klassisch beschrieben werden, und zwar letzten Endes aufgrund der Erhaltung von Energie und Impuls. Ein Beispiel hierfür stellt die klassische Behandlung (in Kap. 16.2) eines geladenen Teilchens dar, das sich in einem anziehenden Potential (etwa eines Atomkerns) bewegt und von einer äußeren Bahn (einem hochangeregten Zustand) auf eine innere Bahn (etwa den Grundzustand) herabfällt. Bei hohen Quantenzahlen ist eine klassische Beschreibung der Teilchenbahn angemessen, und die Änderung von Energie und Drehimpuls pro Umlauf kann klassisch aus der Strahlungsrückwirkung berechnet werden, da die Energie der nachfolgend emittierten Photonen gegenüber der kinetischen und potentiellen Energie des umlaufenden Teilchens klein ist.

Die Quellen im Gleichungssystem (I.1) sind die elektrische Ladungsdichte $\rho(\mathbf{x}, t)$ und die elektrische Stromdichte $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$. In der klassischen Elektrodynamik werden sie als kontinuierliche Raumverteilungen angenommen, obwohl wir manchmal auch Verteilungen betrachten, die durch Punkte approximiert werden können. Die Beträge dieser Punktladungen werden als vollkommen beliebig angenommen, doch weiß man, dass sie in Wirklichkeit auf diskrete Werte beschränkt sind. Die Grundeinheit der Ladung ist der Betrag der Ladung eines Elektrons, nämlich

$$\begin{aligned} |q_e| &= 4,803\,206\,8(15) \times 10^{-10} \text{ esE} \\ &= 1,602\,177\,33(49) \times 10^{-19} \text{ C} \end{aligned}$$

wobei die in Klammern stehenden Dezimalstellen die Ungenauigkeiten angeben. Die Ladung des Protons und aller gegenwärtig bekannten Teilchen oder Teilchensysteme sind ganzzahlige Vielfache dieser Ladungseinheit². Die experimentelle Genauigkeit, mit der man weiß, dass es sich um exakt ganzzahlige Vielfache handelt, ist außerordentlich hoch (besser als Eins zu 10^{-20}). Die Experimente hierzu diskutieren wir in Abschnitt 11.9, in dem wir auch die Frage der Lorentz-Invarianz der Ladung untersuchen.

Die Diskretheit der elektrischen Ladung braucht in den meisten makroskopischen Anwendungen nicht berücksichtigt zu werden. Ein Kondensator von 1 Mikrofarad hat z. B. bei einer Spannung von 150 Volt ca. 10^{15} Elementarladungen auf jeder Elektrode. Einige Tausend mehr oder weniger Elektronen fallen dabei nicht ins Gewicht. Ein Strom von 1 Mikroampere entspricht $6,2 \times 10^{12}$ Elementarladungen/Sekunde. Natürlich gibt es einige makroskopische bzw. quasimakroskopische Experimente, bei denen die Diskretheit der Ladung ins Spiel kommt. Der berühmte Millikan'sche Öltröpfchenversuch ist ein Beispiel hierfür. Die bei diesem Versuch benutzten Tröpfchen haben einen typischen Radius von 10^{-4} cm und tragen nur einige oder mehrere zehn Elementarladungen.

Hinsichtlich der Quellterme besteht in den Maxwell'schen Gleichung (I.1a) eine Asymmetrie. Die beiden ersten Gleichungen enthalten Quellen, die beiden anderen aber nicht. Dieser Umstand spiegelt den experimentellen Befund des *Nichtvorhandenseins magnetischer Ladungen und Ströme* wider. Tatsächlich könnten Teilchen, wie wir in Kap. 6.11 zeigen werden, sowohl magnetisch wie elektrisch geladen sein. Wäre das Verhältnis von magnetischer zu elektrischer Ladung für alle in der Natur vorkommenden Teilchen gleich, ließen sich die Felder und Quellen so umdefinieren, dass man die üblichen Maxwell'schen Gleichungen (I.1) zurückerhielte. Insofern ist es eine Konvention zu sagen, es gebe keine magnetischen Ladungen und Ströme. In diesem Buch nehmen wir fast durchweg an, dass in den Maxwell'schen Gleichungen nur elektrische Ladungen und Ströme auftreten. Doch einige Konsequenzen der möglichen Existenz eines Teilchens verschiedener magnetischer und elektrischer Ladung, wie z. B. die eines magnetischen Monopols, werden wir in Kap. 6 besprechen.

1.2 Das Gesetz vom reziproken quadratischen Abstand oder die Masse des Photons

Die Abstandsabhängigkeit der elektrostatischen Kraft entspricht, wie Coulomb und Cavendish zeigten, einem Gesetz vom reziproken quadratischen Abstand. Über das Gauß'sche Gesetz und den Gauß'schen Integralsatz (vgl. Kap. 1.3 und 1.4) führt dies zu der ersten der Maxwell'schen Gleichungen (I.1b). Die ursprünglichen Experimente hatten nur eine Genauigkeit von einigen Prozent und wurden zudem in Bereichen von der Ausdehnung eines Labors ausgeführt. Experimente größerer Genauigkeit und in verschiedenen Längensbereichen wurden seitdem in mannigfacher

² Quarks haben, in dieser Einheit, Ladungen von $2/3$ und $-1/3$, wurden jedoch (bisher) nie als freie Teilchen beobachtet.

Weise ausgeführt. Es ist heute üblich, die Tests des Gesetzes vom reziproken quadratischen Abstand in einer der beiden folgenden Versionen zu formulieren:

- (a) Man nimmt an, dass die Kraft wie $1/r^{2+\epsilon}$ variiert, und gibt für ϵ einen bestimmten Wert oder eine obere Schranke an.
- (b) Man nimmt für das elektrostatische Potential die Yukawa-Form $r^{-1}e^{-\mu r}$ an (vgl. Kap. 12.8) und gibt jetzt für μ oder μ^{-1} einen bestimmten Wert oder eine obere Schranke an. Da $\mu = m_\gamma c/\hbar$ ist, wenn m_γ die angenommene Masse des Photons ist, wird der Test des Gesetzes vom reziproken quadratischen Abstand auch als Test der oberen Schranke von m_γ bezeichnet. Laborexperimente liefern i. Allg. einen Wert für ϵ und u. U. auch für μ oder m_γ , während geomagnetische Experimente μ oder m_γ liefern.

Die ursprünglichen Experimente mit zwei konzentrischen Kugelschalen, die Cavendish³ im Jahre 1772 ausführte, ergaben für ϵ die obere Schranke $|\epsilon| \leq 0,02$. Die von Cavendish benutzte Apparatur zeigt Abb. I.1. Ungefähr hundert Jahre später führte Maxwell ein ähnliches Experiment in Cambridge durch⁴ und erhielt als obere Schranke $|\epsilon| \leq 5 \times 10^{-5}$. Zwei andere bemerkenswerte Laborexperimente, die auf dem Gauß'schen Gesetz beruhen, gehen auf Plimpton und Lawton⁵ zurück (sie erhielten $|\epsilon| < 2 \times 10^{-9}$) und in neuerer Zeit auf Williams, Faller und Hill.⁶ Die Versuchsanordnung des zuletzt genannten Experiments ist schematisch in Abb. I.2 dargestellt. Obwohl es sich um ein nichtstatisches Experiment handelt ($\nu = 4 \times 10^6$ Hz), ist die ihm zugrundeliegende Idee fast die gleiche wie beim Experiment von Cavendish. Letzterer suchte – vergeblich – nach einer Ladung auf der inneren Kugelschale, nachdem sie in elektrischen Kontakt mit der äußeren, geladenen Kugelschale gebracht und diese dann wieder entfernt worden war. Williams, Faller und Hill dagegen suchten nach einer Spannungsdifferenz zwischen zwei konzentrischen Metallschalen (in Form von Zwanzigflächern), von denen die äußere einer Wechselfrequenz von ± 10 kV gegen Erde unterworfen war. Die Empfindlichkeit ihrer Versuchsanordnung war so groß, dass sie eine Spannungsdifferenz von 10^{-12} V hätten nachweisen können. Ihr Nullergebnis, interpretiert auf der Basis der Proca-Gleichung (vgl. Kap. 12.8), liefert als obere Schranke für ϵ den Wert $\epsilon = (2,7 \pm 3,1) \times 10^{-16}$.

Ausmessungen des Magnetfeldes der Erde, und zwar sowohl an ihrer Oberfläche als auch – über Satellitenbeobachtungen – außerhalb von ihr, geben für ϵ bzw. die Photomasse m_γ den genauesten Wert. Die geophysikalischen und die im Labor gemachten Beobachtungen werden in den Übersichtsartikeln von Kobzarev und Okun sowie Goldhaber und Nieto diskutiert, die wir am Schluss dieser Einführung zitieren. Zu den besten Werten gehören diejenigen, die man durch Ausmessung des an der Erdoberfläche herrschenden Magnetfeldes gewann (vgl. hierzu auch Übg. 12.15), nämlich

$$m_\gamma < 4 \times 10^{-51} \text{ kg}$$

³ Cavendish, H., *Electrical Researches*, Hrsg. J.C. Maxwell, Cambridge University Press 1879, S. 104–113.

⁴ *Ebd.*, Anmerkung 19.

⁵ Plimpton, S. J. und W. E. Lawton, *Phys. Rev.* **50**, 1066 (1936).

⁶ Williams, E. R., J. E. Faller und H. A. Hill, *Phys. Rev. Letters* **26**, 721 (1971).

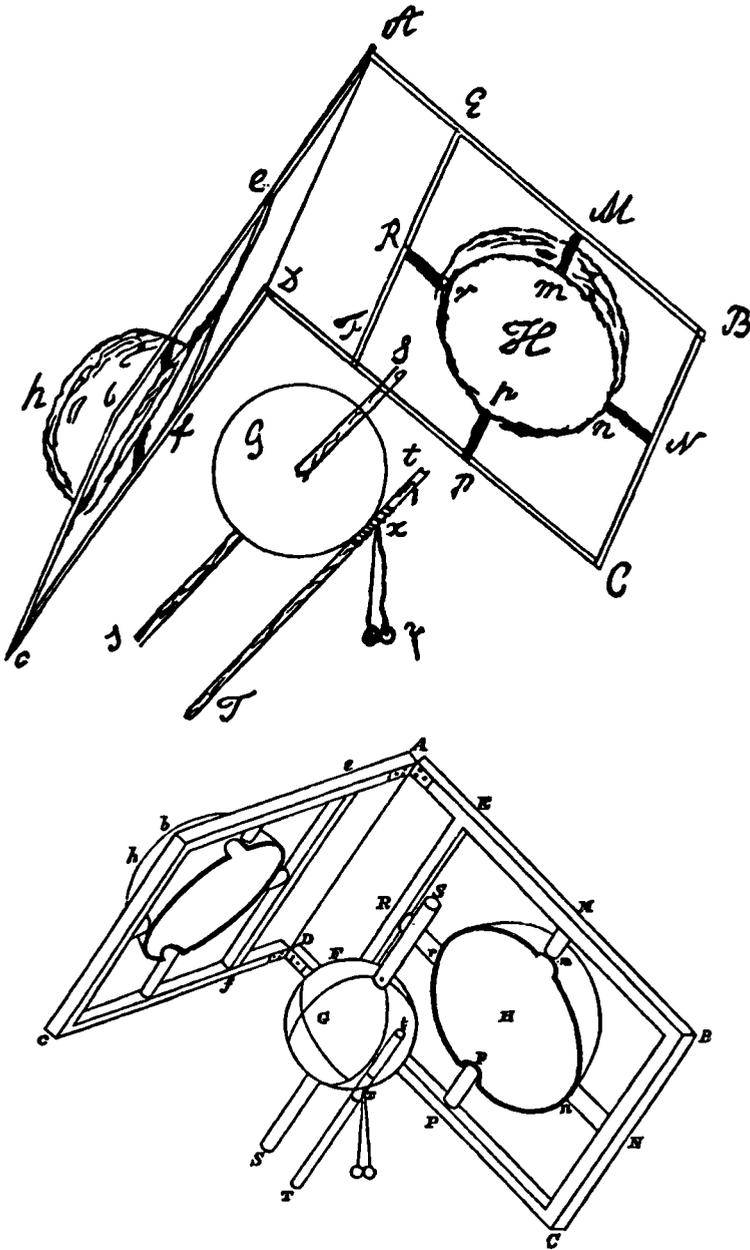


Abb. I.1 Cavendishs Versuchsanordnung zum Nachweis des Gesetzes vom reziproken quadratischen Abstand der Elektrostatik. Der obere Teil der Abbildung zeigt das Faksimile Cavendishs eigener Zeichnung, der untere dagegen eine technische Zeichnung. Die innere Kugelschale hat einen Durchmesser von 30,6 cm, die hohlen Halbkugeln (bestehend aus Pappe) sind etwas größer. Sowohl die innere Kugelschale als auch die äußeren Halbkugeln waren mit Stanniol beklebt, „um aus ihnen möglichst ideale Leiter zu machen“. (Wiedergabe der Abbildung mit freundlicher Genehmigung von Cambridge University Press.)

oder

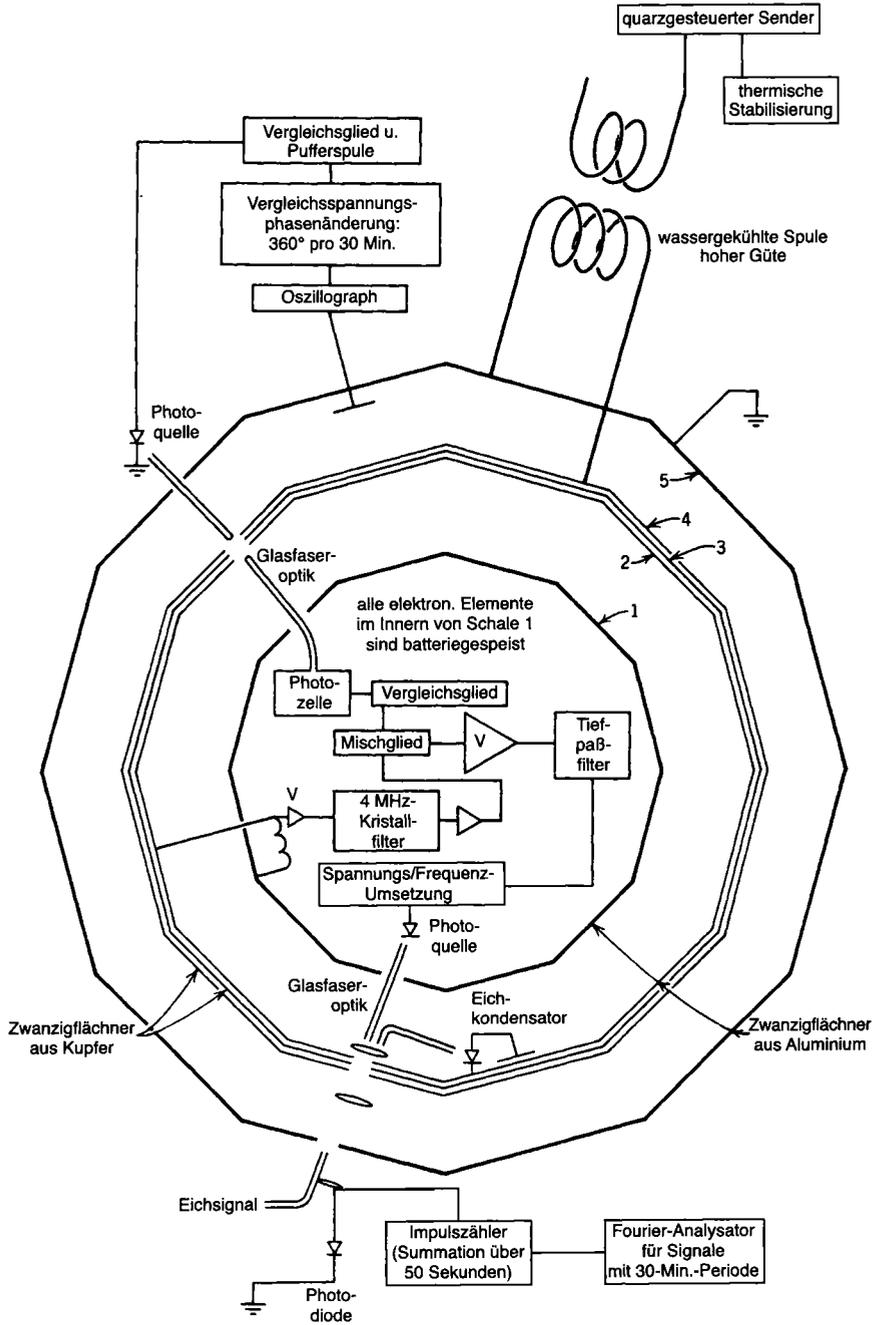
$$\mu^{-1} > 10^8 \text{ m}$$

Im Vergleich dazu ist die Masse des Elektrons, $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, außerordentlich groß. Das Laborexperiment von Williams, Faller und Hill liefert als obere Schranke $m_\gamma < 1,6 \times 10^{-50} \text{ kg}$, die nur um den Faktor 4 schlechter ist als die geomagnetische Schranke.

Zu einer *groben* Abschätzung für die obere Schranke der Photonmasse gelangt man auf relativ einfache Art und Weise. Hierzu braucht man nur die Tatsache auszunutzen, dass in dem von der Erde und der Ionosphäre gebildeten Hohlraumresonator Schwingungstypen sehr niedriger Frequenz existieren (die sog. Schumann-Resonanzen, die wir in Kap. 8.9 diskutieren). Die Einstein-Relation $h\nu = m_\gamma c^2$ lässt vermuten, dass die Photonmasse einer Ungleichung der Art $m_\gamma < h\nu_0/c^2$ genügt, wobei ν_0 eine elektromagnetische Resonanzfrequenz darstellt. Die niedrigste Schumann-Resonanz liegt bei $\nu_0 \simeq 8 \text{ Hz}$. Hieraus folgt $m_\gamma < 6 \times 10^{-50} \text{ kg}$, d. h. eine sehr kleine obere Schranke, die nur um eine Größenordnung über der besten Abschätzung liegt. Während diese Argumentation nur näherungsweise Gültigkeit besitzt, zeigen genauere Betrachtungen (vgl. Kap. 12.8 und die dort angegebenen Literaturhinweise), dass die auf diese Weise gewonnene Schranke um ungefähr ein Zehnfaches höher liegt, da sie mit $(R/H)^{1/2} \simeq 10$ zu multiplizieren ist, wobei $R \simeq 6400 \text{ km}$ der Erdradius und $H \simeq 60 \text{ km}$ die Höhe der Ionosphäre über der Erde ist.⁷ Trotz dieses Abschwächungsfaktors ist die allein durch die Schumann-Resonanzen bedingte obere Schranke von 10^{-48} kg recht beachtlich.

Die im Labor ausgeführten und die geophysikalischen Tests zeigen, dass das Gesetz vom reziproken quadratischen Abstand über Entfernungsbereiche in der Größenordnung von 10^{-2} bis 10^7 m mit extrem hoher Genauigkeit gilt. Für kleinere Entfernungsbereiche muss man zu Nachweismethoden übergehen, die weniger direkt sind und oft noch zusätzliche Annahmen enthalten. So stellt z. B. Rutherfords historische Analyse der Streuung von Alphateilchen einen Beweis für den Gültigkeitsbereich des Coulomb'schen Kraftgesetzes bis zu Entfernungen von 10^{-13} m dar – vorausgesetzt, dass die Alphateilchen und der Kern als klassische Punktladungen betrachtet werden können, die statisch miteinander wechselwirken, und dass die Elektronenwolke um den Kern vernachlässigt werden kann. All diese Annahmen können natürlich nur im Rahmen des Gültigkeitsbereichs der Quantenmechanik, des linearen Superpositionsprinzips (s. unten) und anderer (wenn auch sehr vernünftiger) Annahmen getestet werden. In noch kleineren Entfernungsbereichen muß man die relativistische Quantenmechanik heranziehen, wobei allerdings Effekte der starken Wechselwirkung die Fragen und die Antworten auf sie zu verdunkeln beginnen. Dennoch haben elastische Streuexperimente mit positiven und negativen Elektronen bei einer Schwerpunktsenergie bis hin zu 100 GeV gezeigt, dass die Quantenelektrodynamik (die relativistische Theorie eines punktförmigen Elektrons, das mit dem

⁷ Der entscheidende Punkt ist folgender: Soweit H/R vernachlässigt werden kann, breitet sich die extrem niederfrequente Welle genauso aus wie die transversal-elektromagnetische Grundwelle (die TEM-Grundwelle) in einem normalen Hohlleiter. Eine endliche Photonmasse hat auf diese Ausbreitung keinen Einfluss, es sei denn durch Änderungen der statischen Kapazität und Induktivität pro Längeneinheit. Die Effekte einer Photonmasse liegen in der Größenordnung von $(H/R)\mu^2$.



Feld des masselosen Photons wechselwirkt) bis zu Abständen in der Größenordnung von 10^{-18} m gültig ist. Wir schließen daraus, dass die Photonmasse über den gesamten klassischen Bereich bis tief in den quantenmechanischen Entfernungsbereich Null gesetzt werden kann. D. h. der Gültigkeitsbereich des Gesetzes vom reziproken quadratischen Abstand erstreckt sich über eine Entfernungsskala von 25 Größenordnungen.

I.3 Lineare Superposition

Die Maxwell'schen Gleichungen für das Vakuum sind in den Feldern \mathbf{E} und \mathbf{B} linear. Diese Linearität macht man sich dermaßen häufig zunutze – z. B. bei der Übertragung verschiedener Telefongespräche über ein einziges Mikrowellenkabel –, dass man sie als selbstverständlich hinnimmt. Natürlich können auch nichtlineare Effekte auftreten – z. B. in magnetischen Materialien oder in Kristallen, die auf Laserstrahlen hoher Intensität reagieren, und sogar in den Geräten, mit denen man die erwähnten Telefongespräche in den Mikrowellenstrahl einführt und wieder aus ihm heraus. Doch an dieser Stelle beschäftigen uns allein mit Feldern im Vakuum bzw. mit mikroskopischen Feldern in Atomen und Kernen.

Mit welcher Evidenz nun wird das Prinzip der linearen Superposition von der Natur untermauert? Im makroskopischen Bereich wird es von Experimenten jeglicher Art mit einer Genauigkeit von 0,1 % bestätigt – Systeme von Ladungen und Ströme erzeugen elektrische und magnetische Kräfte, die sich durch lineare Superposition berechnen lassen: Transformatoren funktionieren wie erwartet, auf Lecher-Leitungen beobachtet man stehende Wellen usw. In der Optik schließlich erzeugt ein Spalt ein Beugungsbild, und die Beugung von Röntgen-Strahlen an Kristallen gibt Aufschluss über deren Struktur; weißes Licht schließlich wird beim Durchgang durch ein Prisma in Regenbogenfarben zerlegt und wieder zu weißem Licht vereinigt. Mit anderen Worten: Im makroskopischen und sogar atomaren Bereich ist das Prinzip der linearen Superposition in erstaunlich weitem Umfang gültig.

Es ist der subatomare Bereich, in dem man Abweichungen vom Prinzip der linearen Superposition legitimerweise erwarten darf. Wird die Entfernung zwischen geladenen Teilchen sehr klein, dann werden die Feldstärken sehr groß. Stellt man sich

- ◀ **Abb. I.2** Schematische Darstellung des „Cavendish-Experiments“ von Williams, Fallor und Hill. Die konzentrischen Zwanzigflächner bestehen aus leitendem Material. Zwischen den Schalen 4 und 5 ist eine 4 MHz-Spannung mit einer 10 kV-Amplitude angelegt. Die Schale 4 und die angrenzenden Schalen 2 und 3 haben einen Durchmesser von ca. 1,5 m und umschließen die Schale 1. Die Spannungsdifferenz zwischen den Schalen 1 und 2 tritt (wenn überhaupt) am Induktor innerhalb der Schale 1 auf. Das Verstärkersystem und das optische System sind notwendig, um die Information über die Spannung dem Experimentator zugänglich zu machen. Sie entsprechen den von Cavendish benutzten Fäden, die die über ein Scharniersystem miteinander verbundenen Halbkugeln automatisch öffneten, um die Ladung auf der inneren Kugel mithilfe von Holunderkugeln zu testen. (Wiedergabe der Abbildung mit freundlicher Genehmigung der Autoren.)

ein geladenes Teilchen als eine lokalisierte, d. h. auf ein kleines Raumgebiet begrenzte Ladungsverteilung vor, dann wird seine Energie mit zunehmender Lokalisierung immer größer. Natürlich wird man vermuten, dass eine Art Sättigung eintritt, so dass die Feldstärken eine bestimmte obere Grenze nicht überschreiten und unendliche Selbstenergien nicht auftreten. Entsprechende klassische, nichtlineare Theorien sind in der Vergangenheit verschiedentlich untersucht worden. Ein bekanntes Beispiel ist die Theorie von Born und Infeld.⁸ In ihr besitzt das Vakuum eine von Eins verschiedene Dielektrizitätskonstante und Permeabilität. Sie sind gegeben durch

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{\mu}{\mu_0} = \left[1 + \frac{1}{b^2} (c^2 B^2 - E^2) \right]^{-1/2} \quad (\text{I.4})$$

wobei b eine maximale Feldstärke bedeutet. Tatsächlich ist Gl. (I.4) die vereinfachte Form einer Gleichung, die vorher bereits von Born allein vorgeschlagen wurde. Die zugrundeliegende Idee ist die, dass zwar die Felder auf kurzen Abständen offensichtlich modifiziert werden, aber alle elektromagnetischen Energien endlich bleiben. Doch solche Theorien haben den Nachteil, willkürlich über die Wahl der Nichtlinearitäten zu verfügen und beim Übergang zur Quantentheorie große Probleme mit sich zu bringen. Abgesehen davon gibt es auch keinen Hinweis auf eine derartige klassische Nichtlinearität. Ein Mehr-Elektronen-Atom wird mit großer Genauigkeit durch die normale Quantentheorie mit Wechselwirkungen zwischen dem Kern und den Elektronen einerseits und den Elektronen untereinander andererseits beschrieben, und diese Wechselwirkungen werden durch *lineare Superposition* von Zwei-Teilchen-Potentialen (oder retardierten relativistischen Potentialen zur Beschreibung der Feinstruktur) erzeugt. Am Ort der Elektronenbahnen herrschen Feldstärken in der Größenordnung von $10^{11} - 10^{17}$ V/m, während das elektrische Feld am Rand eines schweren Kerns 10^{21} V/m beträgt. Energieniveaudifferenzen in leichten Atomen wie dem Helium, die auf der Grundlage der linearen Superposition elektromagnetischer Wechselwirkungen berechnet werden, stimmen mit dem Experiment mit einer Genauigkeit von 10^{-6} überein, und auch die Coulomb-Energien von schweren Kernen sind mit dem Prinzip der linearen Superposition verträglich. Es ist natürlich möglich, dass bei Feldstärken über 10^{21} V/m nichtlineare Effekte auftreten. Nach solchen Effekten kann man z. B. bei superschweren Kernen ($Z > 110$) suchen, und zwar sowohl unter den atomaren Energieniveaus als auch unter den Coulomb-Energien des Kerns.⁹ Bis zum heutigen Tag existiert jedoch keinerlei Hinweis darauf, dass sich die Vakuumfelder auf kurzen Abständen im klassischen Sinn nichtlinear verhalten.

Tatsächlich *gibt* es einen *nichtlinearen* Effekt elektromagnetischer Felder. Doch dieser ist *quantenmechanischer* Natur und kann deswegen auftreten, weil das Unschärfepinzip die momentane Erzeugung eines Elektron-Positron-Paares durch zwei Photonen und das anschließende Verschwinden dieses Paares unter Emission zweier voneinander verschiedener Photonen gestattet. Der entsprechende Prozess ist sche-

⁸ Born, M. und L. Infeld, *Proc. Roy. Soc. A* **144**, 425 (1934). Elementar wird dieses Problem auch behandelt bei Born, M., *Atomic Physics*. London: Blackie 1949; Anhang VI.

⁹ Der Effekt einer Nichtlinearität vom Born-Infeld-Typ auf atomare Energieniveaus superschwerer Elemente wurde von Rafelski, J., Greiner, W. und L. P. Fulcher, *Nuovo Cimento* **13B**, 135 (1973) untersucht.

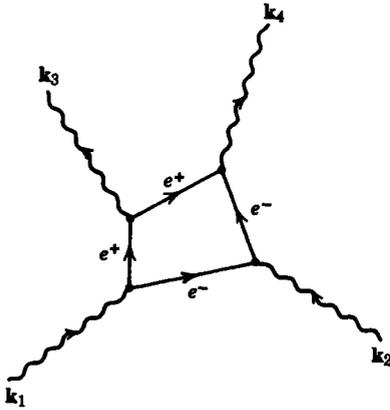


Abb. I.3 Streuung von Licht an Licht. Schematisches Diagramm der Photon-Photon-Streuung.

matisch in Abb. I.3 dargestellt und wird *Photon-Photon-Streuung* oder *Streuung von Licht an Licht* genannt.¹⁰ Die beiden einfallenden ebenen Wellen $e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - i\omega_1 t}$ und $e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - i\omega_2 t}$ addieren sich nicht einfach kohärent, wie man es bei linearer Superposition erwarten würde, sondern wechselwirken miteinander und gehen (mit geringer Wahrscheinlichkeit) in zwei andere, voneinander verschiedene ebene Wellen mit den Wellenvektoren \mathbf{k}_3 bzw. \mathbf{k}_4 über. Dieser nichtlineare Aspekt der *Quantenelektrodynamik* kann – zumindest für schwach veränderliche Felder – durch elektrische und magnetische Permeabilitätstensoren des Vakuums beschrieben werden, nämlich

$$D_i = \epsilon_0 \sum_k \epsilon_{ik} E_k, \quad B_i = \mu_0 \sum_k \mu_{ik} H_k$$

mit

$$\begin{aligned} \epsilon_{ik} &= \delta_{ik} + \frac{e_G^4 \hbar}{45 \pi m^4 c^7} [2(E^2 - c^2 B^2) \delta_{ik} + 7 c^2 B_i B_k] + \dots \\ \mu_{ik} &= \delta_{ik} + \frac{e_G^4 \hbar}{45 \pi m^4 c^7} [2(c^2 B^2 - E^2) \delta_{ik} + 7 E_i E_k] + \dots \end{aligned} \quad (I.5)$$

Hierin bedeutet e_G die Ladung des Elektrons in Gauß'schen Einheiten und m seine Masse. Diese Resultate wurden das erste Mal von Euler und Kockel im Jahre 1935 hergeleitet.¹¹ Im klassischen Limes ($\hbar \rightarrow 0$) verschwinden die nichtlinearen Effekte. Ein Vergleich mit dem klassischen Born-Infeld-Ausdruck (I.4) zeigt ferner, dass für schwache Nichtlinearitäten die quantenmechanische Feldstärke

$$b_q = \frac{\sqrt{45 \pi}}{2} \sqrt{\frac{e_G^2}{\hbar c} \frac{e_G}{r_0^2}} \simeq 0,51 \frac{e_G}{r_0^2}$$

¹⁰ Sind die beiden in Abb. I.3 angedeuteten Photonen virtuell, d. h. stellen sie eine Wechselwirkung zweiter Ordnung im statischen Coulomb-Feld des Kerns dar, dann spricht man von *Delbrück-Streuung*. Vgl. hierzu Jauch, J. M. und F. Rohrlich, *The Theory of Photons and Electrons*. Reading, Mass.: Addison-Wesley 1955; Abschn. 15.8.

¹¹ Euler, H. und B. Kockel, *Naturwiss.* 23, 246 (1935).

eine zum Born-Infeld-Parameter b analoge Rolle spielt. Hierbei ist $r_0 = e_G^2/mc^2 \simeq 2,8 \times 10^{-15}$ m der klassische Elektronenradius und $e_G/r_0^2 = 1,8 \times 10^{20}$ V/m ist das elektrische Feld an der Oberfläche eines solchen klassischen Elektrons. Zwei Bemerkungen seien noch angefügt: (a) die in Gl. (I.5) angegebenen Ausdrücke für ϵ_{ik} und μ_{ik} sind Näherungen, die ungültig werden, sobald sich die Feldstärken dem Wert von b_q nähern oder die Felder zu schnell in Raum und Zeit variieren (wobei \hbar/mc die kritische Längenskala und \hbar/mc^2 die kritische Zeitskala darstellen); (b) die zufällige numerische Koinzidenz von b_q und $e_G/2r_0^2$ ist zwar suggestiv, aber ohne physikalische Bedeutung, da b_q das Planck'sche Wirkungsquantum \hbar enthält.

In Analogie zur Polarisation $\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E}$ bezeichnet man die durch (I.5) beschriebene Feldabhängigkeit von ϵ_{ik} und μ_{ik} als *Vakuumpolarisationseffekte*. Über die Photon-Photon- oder Delbrück-Streuung hinaus verursacht die Vakuumpolarisation sehr kleine Verschiebungen atomarer Energieniveaus. Der Hauptbeitrag enthält ein virtuelles Elektron-Positron-Paar – ähnlich wie in Abb. I.3, aber nur mit zwei anstatt mit vier Photonen. Sind die Photonen reell, dann trägt der Prozess zur Photonmasse bei und muss folglich verschwinden. Für virtuelle Photonen dagegen, wie sie bei elektromagnetischen Wechselwirkungen zwischen einem Kern und einem Elektron der Atomhülle oder tatsächlich bei jeder Wechselwirkung in einem äußeren Feld auftreten, verursacht die Erzeugung und Vernichtung eines virtuellen Elektron-Positron-Paares mitunter beobachtbare Effekte.

Die Vakuumpolarisation bewirkt eine Änderung der elektrostatischen Wechselwirkung zweier Ladungen bei kleinen Abständen, die sich als Abschirmung der „nackten“ Ladung mit wachsender Distanz oder – in moderner Diktion – als „gleitende“ Kopplungskonstante beschreiben lässt. Da die Ladung eines Teilchens durch die Stärke seiner elektromagnetischen Kopplung bei großem Abstand (d. h. bei zu vernachlässigendem Impulsübertrag) definiert ist, bedeutet eine Abschirmung durch Elektron-Positron-Paare in Ladungsnähe, dass die bei geringeren Abständen zu beobachtende „nackte“ Ladung größer ist als die bei großen Abständen definierte Ladung. Quantitativ liefert die Quantenelektrodynamik in niedrigster Ordnung für die um die Vakuumpolarisation korrigierte Coulombenergie zweier Ladungen $Z_1 e$ und $Z_2 e$ folgendes Ergebnis:

$$V(r) = \hbar c \frac{Z_1 Z_2 \alpha}{r} \left[1 + \frac{2\alpha}{3\pi} \int_{2m}^{\infty} d\kappa \frac{\sqrt{\kappa^2 - 4m^2}}{\kappa^2} \left(1 + \frac{2m^2}{\kappa^2} \right) e^{-\kappa r} \right] \quad (\text{I.6})$$

wobei α die Feinstrukturkonstante ist ($\approx 1/137$) und m die reziproke Compton-Wellenlänge des Elektrons (Elektronmasse, multipliziert mit c/\hbar). Das Integral, eine Überlagerung von Yukawa-Potentialen ($e^{-\kappa r}/r$), ist der sog. Ein-Loop-Beitrag aller virtuellen Elektron-Positron-Paare. Er vergrößert die potentielle Energie bei Abständen, die innerhalb der Compton-Wellenlänge des Elektrons ($\hbar/mc = \alpha a_0 \approx 3,86 \times 10^{-13}$ m) liegen.

Wegen der geringen Reichweite ist der Energieübertrag der Vakuumpolarisation in leichten Atomen – außer bei sehr genauen Messungen – kaum von Bedeutung. Wichtig wird er jedoch bei Atomen mit hohem Z und bei müonischen Atomen, wo der Bohr'sche Radius infolge der höheren Masse des Müons ($m_\mu \approx 207 m_e$) deutlich innerhalb der Reichweite des modifizierten Potentials liegt. Die Röntgen-Spektren

von müonischen Atomen mittlerer Masse liefern eine äußerst genaue Bestätigung des Vakuumpolarisationseffektes, wie er durch Formel (I.6) beschrieben wird.

Der Begriff einer „gleitenden“ Kopplungskonstanten, d. h. einer effektiven Wechselwirkung, die sich mit dem Impulsübertrag ändert, wird innerhalb des Elektromagnetismus deutlich, wenn man von der Wechselwirkungsenergie (I.6) die räumliche Fourier-Transformierte bildet. Sie lautet:

$$\tilde{v}(Q^2) = \frac{4\pi Z_1 Z_2 \alpha(Q^2)}{Q^2} \quad (\text{I.7})$$

Die $1/Q^2$ -Abhängigkeit ist typisch für das Coulomb-Potential (vertraut aus der Rutherford-Streuung), aber der Betrag wird jetzt bestimmt von der gleitenden Kopplungskonstanten $\alpha(Q^2)$ mit dem reziproken Wert

$$[\alpha(Q^2)]^{-1} \approx \frac{1}{\alpha(0)} - \frac{1}{3\pi} \ln\left(\frac{Q^2}{m^2 e^{5/3}}\right) \quad (\text{I.8})$$

Hierbei ist $\alpha(0) = 1/137,036 \dots$ die *Feinstrukturkonstante*, e die Euler'sche Zahl und Q^2 das Quadrat der Wellenzahl (Impuls)-Übertrags. Der Ausdruck (I.8) ist eine Näherung für große Q^2/m^2 . Die gleitende Kopplungskonstante $\alpha(Q^2)$ nimmt mit wachsendem Q^2 (geringerer Entfernung) langsam zu, die Teilchen dringen in die abschirmende Wolke der Elektron-Positron-Paare ein und erfahren ein größeres effektives Ladungsprodukt.

Da die Vakuumpolarisationsenergie in erster Näherung zum α -fachen der äußeren Ladung proportional ist, spricht man von einem linearen Effekt, obwohl (über α) das Quadrat der inneren Ladung von Elektron und Positron zur Wirkung kommt. Nichtlineare Wechselwirkungen sind dann die kleinen Beiträge höherer Ordnung. Ähnlich wie in Abb. I.3 entsprechen z. B. drei Photonen der dritten Potenz des äußeren Feldes bzw. der Ladung.

Abschließend können wir feststellen: Die lineare Superposition der Vakuumfelder ist bei klassischen Längen und für klassisch erreichbare Feldstärken ausgezeichnet bestätigt, nichts spricht gegen sie. Im atomaren und subatomaren Bereich treten quantenmechanisch bedingte, nichtlineare Effekte auf, deren Ursprung in der Kopplung geladener Teilchen an das elektromagnetische Feld liegt. Sie modifizieren die Wechselwirkung geladener Teilchen und verursachen gleichzeitig Wechselwirkungen zwischen elektromagnetischen Feldern, und zwar selbst bei Abwesenheit physikalischer Teilchen.

I.4 Die Maxwell'schen Gleichungen in makroskopischer Materie

Bisher betrachteten wir elektromagnetische Felder und Quellen im Vakuum. Die Maxwell'schen Gleichungen (I.1b) können als Gleichungen betrachtet werden, die die elektrischen und magnetischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} in jedem Raumpunkt liefern, sobald die Quellen ρ und \mathbf{J} spezifiziert sind. Für eine kleine Anzahl definierter Quellen stellt die Bestimmung der Felder ein lösbares Problem dar, doch für makroskopische

Materie ist die Lösung dieser Gleichung fast unmöglich. In diesem Zusammenhang spielen zwei Aspekte eine wichtige Rolle. Der eine ist die immens große Zahl einzelner Quellen, nämlich die der geladenen Teilchen in der Hülle und im Kern eines jeden Atoms. Der andere ist die Tatsache, dass das detaillierte Verhalten der Felder, mit ihren drastischen Änderungen über Raumgebiete atomarer Ausdehnung, für makroskopische Beobachtungen nicht von Bedeutung ist. Entscheidend ist allein der Mittelwert eines Feldes bzw. einer Quelle über ein Volumen, das im Vergleich zu dem eines einzelnen Atoms oder Moleküls groß ist. Solche gemittelten Größen nennen wir *makroskopische* Felder bzw. Quellen. In Kap. 6.6 werden wir zeigen, dass die *makroskopischen Maxwell'schen Gleichungen* die Gestalt (I.1 a) haben, wobei \mathbf{E} und \mathbf{B} die Mittelwerte der Felder der mikroskopischen, d. h. für das Vakuum geltenden Maxwell'schen Gleichungen sind, während \mathbf{D} und \mathbf{H} nicht mehr einfache Vielfache von \mathbf{E} bzw. \mathbf{B} sind. Die Komponenten der beiden *makroskopischen* Feldgrößen \mathbf{D} und \mathbf{H} , die man *dielektrische Verschiebung* bzw. *magnetisches Feld* nennt (\mathbf{B} ist die sog. *magnetische Induktion*), sind gegeben durch

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \epsilon_0 E_\alpha + \left(P_\alpha - \sum_\beta \frac{\partial Q'_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \dots \right) \\ H_\alpha &= \frac{1}{\mu_0} B_\alpha - (M_\alpha + \dots) \end{aligned} \quad (\text{I.9})$$

Die Größen \mathbf{P} , \mathbf{M} , $Q'_{\alpha\beta}$ stellen die makroskopisch gemittelten elektrischen Dipol-, magnetischen Dipol- und elektrischen Quadrupoldichten des Materiesystems bei Anwesenheit äußerer Felder dar, während die Momentdichten höherer Ordnung durch Punkte angedeutet sind. In ähnlicher Weise sind die Ladungs- und Stromdichten ρ und \mathbf{J} die makroskopischen Mittel der „freien“ Ladungs- bzw. Stromdichten innerhalb des Mediums. Die gebundenen Ladungen und Ströme erscheinen in den Gleichungen über \mathbf{P} , \mathbf{M} und $Q'_{\alpha\beta}$.

Die makroskopischen Maxwell'schen Gleichungen (I.1 a) sind ein Satz von acht Gleichungen für die Komponenten der vier Felder \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} und \mathbf{H} . Die vier homogenen Gleichungen können formal gelöst werden, indem man \mathbf{E} und \mathbf{B} durch das skalare Potential Φ und das Vektorpotential \mathbf{A} ausdrückt. Dagegen lassen sich die inhomogenen Gleichungen erst dann lösen, wenn \mathbf{D} und \mathbf{H} als Funktion von \mathbf{E} und \mathbf{B} bekannt sind. Diese Zusammenhänge, die implizit in (I.9) enthalten sind, werden formal ausgedrückt durch die *Verknüpfungsgleichungen*

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{D}[\mathbf{E}, \mathbf{B}] \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}[\mathbf{E}, \mathbf{B}] \end{aligned}$$

die auch *Materialgleichungen* genannt werden. Für leitende Medien tritt noch das *verallgemeinerte Ohm'sche Gesetz*

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}[\mathbf{E}, \mathbf{B}]$$

hinzu. Die eckigen Klammern sollen dabei andeuten, dass die Zusammenhänge nicht unbedingt einfach zu sein brauchen und von der Vorgeschichte des Materials abhängen können (wie z. B. im Fall der Hysterese); sie können auch nichtlinear sein.

In den meisten Materialien kann man das elektrische Quadrupolmoment und höhere Terme in (I.9) vollkommen vernachlässigen. Nur die *elektrische Polarisation*

\mathbf{P} und die *Magnetisierung* \mathbf{M} sind von Bedeutung. Das heißt jedoch nicht, dass die Verknüpfungsgleichungen dann einfach werden. Es existiert eine ungeheure Vielfalt in den elektrischen und magnetischen Eigenschaften der Materie, und zwar besonders in kristallinen Festkörpern. Zu ihnen gehören einerseits die dielektrischen, diamagnetischen und paramagnetischen Stoffe, andererseits die Ferroelektrika und Ferromagnetika, deren Polarisierungen, \mathbf{P} bzw. \mathbf{M} , selbst bei Abwesenheit äußerer Felder von Null verschieden sind. Das Studium der Eigenschaften dieser Materialien macht einen Teil der Festkörperphysik aus. In diesem Buch streifen wir nur kurz einige Aspekte. Eine systematische und ausführliche Behandlung der elektromagnetischen Eigenschaften makroskopischer Materie findet man in Büchern über Festkörperphysik wie etwa in dem von *Kittel*.

In anderen Substanzen als Ferroelektrika oder Ferromagnetika induzieren nicht zu starke äußere elektrische oder magnetische Felder eine elektrische bzw. magnetische Polarisation, die proportional zum Betrag des angelegten Feldes ist. Man sagt dann, das Medium reagiere linear, und schreibt die kartesischen Komponenten von \mathbf{D} und \mathbf{H} in der Form¹²

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \sum_\beta \epsilon_{\alpha\beta} E_\beta \\ H_\alpha &= \sum_\beta \mu'_{\alpha\beta} B_\beta \end{aligned} \quad (\text{I.10})$$

Die Tensoren $\epsilon_{\alpha\beta}$ und $\mu'_{\alpha\beta}$ heißen Dielektrizitätstensor bzw. Tensor der reziproken Permeabilität. Sie drücken die lineare Reaktion des Materials aus und hängen nicht nur von seiner molekularen und u. U. auch kristallinen Struktur ab, sondern auch von makroskopischen Eigenschaften wie Dichte und Temperatur. Linear reagierende Materialien verhalten sich räumlich oft isotrop. In diesem Fall sind $\epsilon_{\alpha\beta}$ und $\mu'_{\alpha\beta}$ diagonal und ihre drei von Null verschiedenen Elemente gleich, so dass man $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ und $\mathbf{H} = \mu' \mathbf{B} = \mathbf{B}/\mu$ schreiben kann.

Um korrekt zu sein, sollte erwähnt werden, dass die Gln. (I.10) allgemein nur für die raumzeitlichen Fourier-Komponenten der jeweiligen Feldgrößen gelten, da der lineare Zusammenhang zwischen \mathbf{D} und \mathbf{E} (bzw. \mathbf{H} und \mathbf{B}) nichtlokal sein kann. Allgemein gilt z. B.:

$$D_\alpha(\mathbf{x}, t) = \sum_\beta \int d^3x' \int dt' \epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{x}', t') E_\beta(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t')$$

wobei $\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{x}', t')$ um $\mathbf{x}' = 0, t' = 0$ lokalisiert sein kann, aber auch noch weit weg vom Ursprung nichtverschwindende Werte haben kann. Führt man die Fourier-Transformierten $D_\alpha(\mathbf{k}, \omega)$, $E_\beta(\mathbf{k}, \omega)$ und $\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ gemäß

$$f(\mathbf{k}, \omega) = \int d^3x \int dt f(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\omega t}$$

¹² Folgt man dem vorigen Abschnitt, so sollte man $B_\alpha = \sum_\beta \mu_{\alpha\beta} H_\beta$ schreiben mit dem Permeabilitätstensor $\mu_{\alpha\beta}$. Doch diese Schreibweise kehrt die natürlichen Rollen von \mathbf{B} als magnetischem Grundfeld und von \mathbf{H} als abgeleitete Größe um. In Kapitel 5 kehren wir jedoch zu dieser traditionellen Schreibweise wieder zurück.

ein, so lässt sich Gl. (I.10) in folgender Weise durch die genannten Fourier-Transformierten ausdrücken:

$$D_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{\beta} \epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) E_{\beta}(\mathbf{k}, \omega) \quad (\text{I.11})$$

In ähnlicher Weise lässt sich auch $H_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega)$ durch $B_{\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ ausdrücken. Die Permeabilitätstensoren sind daher Funktionen der Frequenz und i. Allg. auch des Wellenvektors. Für sichtbares Licht oder langwellige elektromagnetische Strahlung ist es oft erlaubt, die räumliche Nichtlokalität zu vernachlässigen. $\epsilon_{\alpha\beta}$ und $\mu'_{\alpha\beta}$ sind dann Funktionen allein der Frequenz. Diesen Fall diskutieren wir in Kapitel 7, in dem wir in vereinfachter Weise die Hochfrequenzeigenschaften der Materie behandeln und die Konsequenzen für die Kausalität untersuchen. Für Leiter und Supraleiter können langreichweitige Effekte von Bedeutung werden. Wird z. B. die freie Weglänge des Elektrons in einem Leiter gegenüber der Eindringtiefe groß, dann ist die räumlich lokale Form des Ohm'schen Gesetzes nicht mehr angemessen, weil auch die Abhängigkeit vom Wellenvektor ins Spiel kommt. Für das Verständnis einer Reihe von Eigenschaften der Festkörper ist das Konzept einer vom Wellenvektor und von der Frequenz abhängenden Dielektrizitätskonstanten äußerst fruchtbar. Literatur zu diesem Gebiet findet der Leser unter den Literaturhinweisen am Ende dieser Einführung.

Orientierungshalber sei erwähnt, dass die Dielektrizitätskonstante $\epsilon_{\alpha\alpha}/\epsilon_0$ bei kleinen Frequenzen ($\nu \lesssim 10^6$ Hz), bei denen alle Ladungen – unabhängig von ihrer Trägheit – auf äußere Felder reagieren, im Bereich zwischen 2 und 20 liegen; höhere Werte sind jedoch nicht außergewöhnlich. Substanzen mit permanenten molekularen Dipolmomenten können weitaus größere und temperaturabhängige Dielektrizitätskonstanten besitzen. Destilliertes Wasser z. B. hat bei 0°C die statische Dielektrizitätskonstante $\epsilon/\epsilon_0 = 88$, bei 100°C dagegen $\epsilon/\epsilon_0 = 56$. Für optische Frequenzen, bei denen nur die Elektronen merklich reagieren, sind die Dielektrizitätskonstanten $\epsilon_{\alpha\alpha}/\epsilon_0$ wesentlich kleiner; sie liegen dann zwischen 1,7 und 10, wobei für die meisten Festkörper $\epsilon_{\alpha\alpha}/\epsilon_0 \simeq 2-3$ ist. Wasser hat im sichtbaren Bereich die Dielektrizitätskonstante $\epsilon/\epsilon_0 = 1,77-1,80$, und diese ist zwischen 0°C und 100°C im Wesentlichen unabhängig von der Temperatur.

Die Art und Weise, wie ein Material auf ein angelegtes Magnetfeld reagiert, hängt nicht nur von den Eigenschaften der individuellen Atome und Moleküle ab, sondern auch von deren gegenseitiger Wechselwirkung. *Diamagnetische* Substanzen bestehen aus Atomen bzw. Molekülen mit dem Gesamtdrehimpuls Null. Die Wirkung eines angelegten Magnetfeldes besteht bei ihnen darin, dass in den Atomen Ringströme erzeugt werden, die ihrerseits eine dem Feld entgegengerichtete schwache Magnetisierung der Materie bewirken. Nach der Definition (I.10) bzw. (I.9) bedeutet dies, dass $\mu_0\mu'_{\alpha\alpha} > 1$ ist. Für Wismuth z. B. – der stärksten diamagnetischen Substanz, die wir kennen – ist $(\mu_0\mu'_{\alpha\alpha} - 1) \simeq 1,8 \times 10^{-4}$. D. h. der Diamagnetismus ist ein sehr kleiner physikalischer Effekt. Besitzt das einzelne Atom einer Substanz einen aus ungepaarten Elektronen resultierenden Drehimpuls, dann ist die Substanz *paramagnetisch*. Das magnetische Moment des ungepaarten Elektrons hat die Richtung des angelegten Feldes. Daher ist $\mu_0\mu'_{\alpha\alpha} < 1$. Typische Werte von $(1 - \mu_0\mu'_{\alpha\alpha})$ bei Zimmertemperatur sind $10^{-2} - 10^{-5}$. Bei hohen Temperaturen fallen sie jedoch aufgrund statistischer Schwankungen der thermischen Anregungen stark ab.

Ferromagnetische Materialien sind paramagnetisch, zeigen aber wegen zwischenatomarer Wechselwirkungen ein völlig anderes Verhalten. Unterhalb der Curie-Temperatur (1040 K für Fe, 630 K für Ni) tritt bei ferromagnetischen Substanzen spon-

tane Magnetisierung auf, d. h. alle magnetischen Momente in einem mikroskopisch großen Gebiet, das man *Weiss'schen Bezirk* nennt, sind parallel zueinander ausgerichtet. Ein angelegtes Feld versucht, die Lage der Bezirke zu verändern und die Momente verschiedener Bezirke in ein und dieselbe Richtung zu bringen, bis in der Magnetisierung schließlich eine Sättigung eintritt. Wird das äußere Feld wieder abgeschaltet, so bleibt eine beträchtliche Anzahl ausgerichteter Momente zurück, und dies führt zu einer remanenten Permanentmagnetisierung, die Werte bis zu $B_r = \mu_0 M_r \gtrsim 1$ Tesla annehmen kann.

Für Daten über dielektrische und magnetische Materialeigenschaften empfehlen wir dem Leser die unten zitierten, grundlegenden Handbücher, in denen speziellere und detailliertere Werte kompiliert sind.¹³

Materialien, die auf schwache Felder linear reagieren, zeigen bei hinreichend hohen Feldstärken, die den oszillierenden Elektronen und Ionen große Amplituden geben, u. U. ein nichtlineares Verhalten. Die linearen Beziehungen (I.10) gehen dann z. B. über in

$$D_\alpha = \sum_\beta \epsilon_{\alpha\beta}^{(1)} E_\beta + \sum_{\beta,\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} E_\beta E_\gamma + \dots \quad (\text{I.12})$$

Für stationäre Felder sind die Konsequenzen nicht besonders dramatisch, wohl aber für zeitabhängige Felder. Eine Welle großer Amplitude, die die Frequenzen ω_1 und ω_2 enthält, erzeugt im Medium nicht nur Wellen der ursprünglichen Frequenzen ω_1 und ω_2 , sondern auch solche der Frequenzen 0 , $2\omega_1$, $2\omega_2$, $\omega_1 + \omega_2$ und $\omega_1 - \omega_2$. Aus kubischen und höheren nichtlinearen Termen kann ein noch reicheres Spektrum erzeugt werden. Mit der Entwicklung von Lasern wurde dieses nichtlineare Verhalten zu einem eigenen Forschungsgebiet, der *nichtlinearen Optik*, und auch zu einem Hilfsmittel im Labor. Gegenwärtig lassen sich mit Lasern Lichtimpulse erzeugen, deren maximale elektrische Feldstärken bis zu 10^{12} oder 10^{13} V/m erreichen. Das statische elektrische Feld, dem ein Bahnelektron im Wasserstoffatom ausgesetzt ist, beträgt dagegen $e_G/a_0^2 \simeq 5 \times 10^{11}$ V/m. D. h. Laserfelder können atomare Oszillatoren in ihren nichtlinearen Bereich bringen und ein Probestück sogar zerstören. Literaturhinweise zu diesem Gebiet bringen wir am Ende dieser Einführung. Der Leser des vorliegenden Buches wird sich im Wesentlichen mit der Untersuchung linearer Phänomene zufrieden geben müssen.

¹³ *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, Hrsg. D.R. Lide, 78. Aufl., Boca Raton, FL: CRC Press 1997–98. *American Institute of Physics Handbook*, Hrsg. D.E. Gray, McGraw Hill, New York, 1972 (3. Aufl.), Abschnitte 5.d und 5.f.

1.5 Grenzbedingungen an der Trennfläche verschiedener Medien

Die Maxwell'schen Gleichungen (I.1) sind Differentialgleichungen, die lokal auf jeden Raum-Zeit-Punkt (\mathbf{x}, t) anzuwenden sind. Mithilfe des Gauß'schen und Stokes'schen Satzes lassen sie sich auf Integralform bringen. Sei V ein endliches Raumgebiet, das von der Fläche S (die aus mehreren Stücken bestehen kann) begrenzt wird, und \mathbf{n} die vom Flächenelement da nach außen zeigende Flächennormale. Dann führt der Gauß'sche Satz, angewandt auf die erste und letzte der Gln. (I.1a), auf die Integralbeziehungen

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_V \rho \, d^3x \quad (\text{I.13})$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da = 0 \quad (\text{I.14})$$

Die erste dieser beiden Gleichungen ist nichts anderes als das *Gauß'sche Gesetz*, nach dem der durch die Oberfläche eines Volumens hindurchtretende Gesamtfluss von \mathbf{D} proportional zur Ladung innerhalb des Volumens ist. Die zweite Gleichung stellt das magnetische Analogon dar – jedoch mit dem Unterschied, dass der Fluss von \mathbf{B} durch die geschlossene Oberfläche insgesamt gleich Null ist, da es keine magnetischen Ladungen gibt.

In ähnlicher Weise liefert die Anwendung des Stokes'schen Satzes auf die zweite und dritte der Gln. (I.1a) die beiden Integralbeziehungen

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S'} \left[\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] \cdot \mathbf{n}' \, da \quad (\text{I.15})$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{S'} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}' \, da \quad (\text{I.16})$$

Dabei ist C die geschlossene Berandungskurve der offenen Fläche S' , $d\mathbf{l}$ ein Linienelement dieser Kurve, da ein Flächenelement von S' und \mathbf{n}' die von da ausgehende Flächennormale mit der durch die Orientierung von C bestimmten Richtung. Gleichung (I.15) ist das *Ampère'sche Durchflutungsgesetz* für magnetische Felder, während Gl. (I.16) das *Faraday'sche Induktionsgesetz* darstellt.

Aus dieser bekannten Integralschreibweise der Maxwell'schen Gleichungen lassen sich Relationen für die Normal- und Tangentialkomponenten der Felder zu beiden Seiten der Trennfläche verschiedener Medien herleiten, wenn die Trennfläche mit Flächenladungen und Flächenströmen belegt ist. Die Geometrie einer entsprechenden Anordnung zeigt Abb. I.4. Die Deckflächen des infinitesimal flachen Zylinders, auf den das Gauß'sche Gesetz angewandt werden soll, liegen jeweils in einem der beiden Medien mit verschiedenen elektromagnetischen Eigenschaften. Entsprechend liegen die Längsseiten des infinitesimal kleinen Rechtecks C auf je einer der beiden Seiten der Trennfläche, und die von C aufgespannte Fläche ist so orientiert, dass ihre Normale Tangentenvektor der Trennfläche ist. Wir wenden zunächst die Integralbeziehungen (I.13) und (I.14) auf das Volumen des flachen Zylinders an. Im

Grenzfall infinitesimal kleiner Höhe liefert die Mantelfläche zu den Integralen auf der linken Seite von (I.13) und (I.14) keinen Beitrag, und nur die obere und untere Deckfläche tragen zu den Integralen bei. Liegen sie tangential zur Trennfläche und ist ihre Fläche jeweils gleich Δa , dann hat das Integral auf der linken Seite von (I.13) den Wert

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, da = (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} \, \Delta a$$

Entsprechendes gilt für (I.14). Ist die Ladungsdichte ρ auf der Trennfläche singulär und bildet sie dort eine idealisierte Flächenladungsdichte σ , dann ergibt sich für das Integral auf der rechten Seite von (I.13):

$$\int_V \rho \, d^3x = \sigma \, \Delta a$$

D.h. die *Normalkomponenten* von \mathbf{D} und \mathbf{B} zu beiden Seiten der Trennfläche sind miteinander verknüpft durch

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \sigma \tag{I.17}$$

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{I.18}$$

Anders ausgedrückt: die Normalkomponente von \mathbf{B} ist stetig, während die von \mathbf{D} einen Sprung vom Betrag der Flächenladungsdichte am betrachteten Punkt macht.

In analoger Weise lässt sich auf die rechteckige Schleife C auch der Stokes'sche Satz anwenden, um die Unstetigkeiten der Tangentialkomponenten von \mathbf{E} und \mathbf{H}

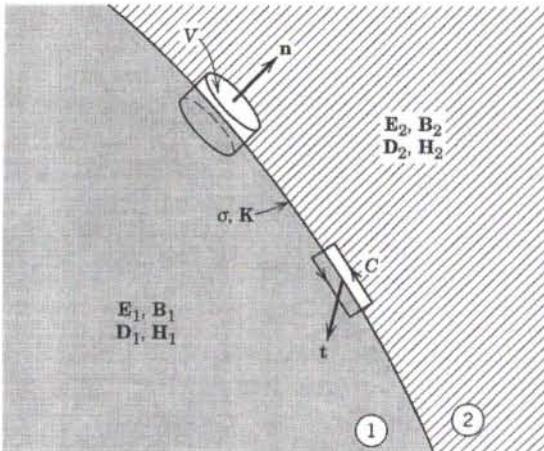


Abb. I.4 Schematische Darstellung einer mit idealisierten Flächenladungen und Flächenströmen der Dichte σ bzw. \mathbf{K} belegten Trennfläche verschiedener Medien. Das Volumen V wird von einem flachen Zylinder begrenzt, dessen Deckflächen in jeweils einem der beiden Medien liegen. Die Normale \mathbf{n} zeigt vom Medium 1 ins Medium 2. Die rechteckige Kurve C liegt teilweise in dem einen, teilweise in dem anderen Medium. Die von C aufgespannte Fläche ist senkrecht zur Trennfläche gerichtet, sodass ihre Normale \mathbf{t} Tangentenvektor der Trennfläche ist.

zu ermitteln. Sind die Querseiten von C vernachlässigbar klein und liegen die Längsseiten parallel zur Trennfläche, dann liefert, wenn Δl die Länge einer der beiden Längsseiten ist, das Integral auf der linken Seite von (I.16):

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \Delta l$$

Analog lautet das Resultat für das Integral auf der linken Seite von (I.15). Die rechte Seite von (I.16) verschwindet, weil $\partial \mathbf{B} / \partial t$ an der Trennfläche endlich ist und die von C aufgespannte Fläche für infinitesimal klein werdende Querseiten verschwindet. Die rechte Seite von (I.15) dagegen verschwindet nicht, wenn auf der Trennfläche ein idealisierter Flächenstrom der Dichte \mathbf{K} fließt. In diesem Fall ergibt sich für das Integral auf der rechten Seite von (I.15):

$$\int_{S'} \left[\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] \cdot \mathbf{t} da = \mathbf{K} \cdot \mathbf{t} \Delta l$$

Der zweite Term unter dem Integral verschwindet aus dem gleichen Grund wie die rechte Seite von (I.16). Die *Tangentialkomponenten* von \mathbf{E} und \mathbf{H} zu beiden Seiten der Trennfläche sind also miteinander verknüpft durch

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (\text{I.19})$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K} \quad (\text{I.20})$$

In Gl. (I.20) wird vorausgesetzt, dass der Flächenstrom \mathbf{K} an jedem Punkt nur Komponenten parallel zur Trennfläche besitzt. Die Tangentialkomponente von \mathbf{E} ist über die Trennfläche hinweg stetig. Dagegen macht die Tangentialkomponente von \mathbf{H} einen Sprung, der dem Betrag nach gleich dem von \mathbf{K} ist und die Richtung von $\mathbf{K} \times \mathbf{n}$ hat.

Die Sprungbeziehungen (I.17)–(I.20) benutzt man, um die Maxwell'schen Gleichungen für Raumgebiete mit verschiedenen Medien zu lösen und die gefundenen Lösungen aneinander anzupassen, um so die Felder im ganzen Raum zu gewinnen.

1.6 Anmerkungen zu Idealisierungen in der Theorie des Elektromagnetismus

In den vorangegangenen Abschnitten machten wir von der Vorstellung flächenhaft verteilter Ladungen oder Ströme Gebrauch. Dies sind natürlich mathematische Idealisierungen, die in der physikalischen Realität nicht existieren. Darüber hinaus gibt es weitere Abstraktionen, denen wir in der Theorie des Elektromagnetismus ständig begegnen. So sagt man z. B. in der Elektrostatik, man halte bestimmte Objekte auf festem Potential bezüglich eines Nullpotentials, das man i. Allg. „Erde“ nennt. Die Beziehung solcher Idealisierungen zur physikalischen Realität wollen wir hier kurz diskutieren, wenngleich dem erfahrenen Physiker vieles als offenkundig erscheinen mag.

Zunächst wollen wir die Frage untersuchen, was es bedeutet, einen Leiter auf festem Potential bezüglich eines bestimmten Bezugspotentials zu halten. Impliziert

ist dabei die Vorstellung, dass die dazu notwendigen Hilfsmittel die angestrebte Ladungs- und Feldkonfiguration nur unmerklich stören. Um einen Leiter auf festem Potential zu halten, benötigt man jedoch – zumindest zeitweilig – eine Zu- oder Ableitung zwischen dem betrachteten Leiter und einer weit entfernten (im „Unendlichen“ liegenden) Ladungsquelle. Sie sorgt dafür, dass in dem Moment, in dem andere geladene oder ungeladene Objekte in die Nähe des Leiters gebracht werden, die Ladungen zu ihm hin- oder von ihm zurückfließen können und er selbst auf dem gewünschten festen Potential bleibt. Obwohl es bessere Methoden gibt, benutzt man für die Zu- bzw. Ableitung i. Allg. Metalldrähte. Intuitiv würde man erwarten, dass sich dünne Drähte weniger störend auswirken als dicke. Der Grund hierfür ist nach Maxwell folgender:

„Da die Elektrizitätsmenge auf einem gegebenen Stück Draht bei festgehaltenem Potential und immer kleiner werdenden Drahtdurchmesser vernachlässigbar gering wird, wird die Elektrizitätsverteilung auf Körpern großer räumlicher Ausdehnung nur unwesentlich beeinflusst, wenn man in deren Feld einen sehr dünnen Metalldraht bringt, wie z. B. bei der Herstellung elektrischer Verbindungen zwischen diesen Körpern und der Erde – seien es elektrische Maschinen oder Elektrometer.“¹⁴

Das elektrische Feld in unmittelbarer Umgebung eines dünnen Drahtes ist natürlich sehr stark. In Entfernungen jedoch, die von der Größenordnung der Abmessungen der „Körper großer räumlicher Ausdehnung“ sind, können die Nebeneffekte nahezu ausgeschaltet werden. Eine historisch wichtige Illustrierung der Worte Maxwells stellen die Untersuchungen dar, die 200 Jahre zuvor Henry Cavendish unternahm. Bei seinen Experimenten, die er in einer laborartig verwandelten Scheune des Hauses seines Vaters durchführte, benutzte Cavendish Leyden'sche Flaschen als Ladungsquellen und dünne Drähte als Leiter. Seine Messungen galten der Ladungsmenge, die sich bei festgehaltenem Potential auf an der Decke aufgehängten Zylindern, Scheiben etc. befand, und er verglich diese mit der Ladung einer Kugel (derselben, wie sie in Abb. I.1 dargestellt ist) auf gleichem Potential. Die von ihm gemessenen Kapazitätswerte haben eine Genauigkeit von nur wenigen Prozent. So fand er z. B. für das Verhältnis der Kapazitäten einer Kugel und einer dünnen Kreisscheibe von gleichem Radius den Wert 1,57, der zu vergleichen ist mit dem theoretischen Wert $\pi/2$.

Für den Gebrauch immer dünner werdender Drähte gibt es eine praktische Grenze, da die Ladung pro Längeneinheit nur logarithmisch abnimmt [nämlich wie das Reziproke von $\ln(d/a)$, wenn a der mittlere Radius des Drahtes ist und d ein typischer Abstand des Drahtes von einer leitenden Fläche]. Um die Störung des Systems unterhalb eines bestimmten Niveaus auf ein Minimum zu bringen, muss man zur Aufrechterhaltung des Potentials zu anderen Mitteln greifen, z. B. zu Vergleichsverfahren unter Verwendung von Strahlen geladener Teilchen.

Wenn man einen Leiter als *geerdet* bezeichnet, so nimmt man dabei an, dass er über einen dünnen, leitenden Draht mit einem weit entfernten Ladungsreservoir verbunden ist, das als Nullpotential dient. Körper, die auf festem Potential gehalten werden, sind in ähnlicher Weise auf der einen Seite mit einer Spannungsquelle, z. B.

¹⁴ Maxwell, J. C., *A Treatise on Electricity and Magnetism*, New York: Dover 1954 (Nachdruck der 3. Aufl. aus dem Jahr 1891), Bd. 1, S. 96.

einer Batterie, verbunden, auf der anderen Seite dagegen mit der gemeinsamen „Erde“. Werden Körper mit bestimmter Anfangsladung gegeneinander bewegt, so dass sich ihre Ladungsverteilung ändert, aber ihr Potential konstant bleibt, dann fließen entsprechende Ladungsmengen von dem entfernten Reservoir ab oder zu ihm hin – wobei vorausgesetzt wird, dass dessen Ladungsvorrat unerschöpflich ist. Der Begriff der Erdung eines Körpers ist in der Elektrostatik wohldefiniert, wird aber für zeitabhängige Felder wegen ihrer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit verschwommen. Anders ausgedrückt: es können beachtliche induktive und kapazitive Störeffekte auftreten. In solchen Fällen ist große Mühe darauf zu verwenden, um eine „gute Erdung“ sicherzustellen.

Eine andere Idealisierung in der Theorie des makroskopischen Elektromagnetismus ist die Vorstellung einer flächenhaft verteilten Ladungs- oder Stromdichte. In der physikalischen Realität sind die Ladungen oder Ströme auf die unmittelbare Umgebung der Oberfläche des Leiters beschränkt. Ist die Dicke dieser Schicht im Vergleich zur Ausdehnung des betrachteten Körpers klein, so kann man sie als infinitesimal dünn betrachten und von einer Flächenverteilung sprechen. Dabei müssen zwei verschiedene Grenzfälle unterschieden werden. In dem einen ist die „Flächen“-Verteilung auf einen Bereich nahe der Oberfläche begrenzt, der *makroskopisch zwar klein ist, mikroskopisch aber groß*. Ein Beispiel hierfür ist das Eindringen zeitveränderlicher Felder in einen sehr guten, aber nicht idealen Leiter, das wir in Kap. 8.1 untersuchen. Dort wird gezeigt, dass die Felder auf einen Bereich der Dicke δ , der sog. Eindringtiefe, begrenzt sind, und diese Dicke wird für hinreichend hohe Frequenzen und genügend gute Leitfähigkeit makroskopisch sehr klein. Es ist dann angemessen, die Stromdichte \mathbf{J} über die Richtung senkrecht zur Oberfläche zu integrieren, um so zu einer effektiven Flächenstromdichte \mathbf{K}_{eff} zu gelangen.

Der andere Grenzfall ist *rein mikroskopischer Art*. Sein Ursprung sind quantenmechanische Effekte im atomaren Aufbau des Materials. Als Beispiel aus der Elektrostatik betrachten wir einen Ladungsüberschuss auf einem Leiter, der sich bekanntlich vollständig auf dessen Oberfläche verteilt. Wir sprechen dann von einer *Flächenladungsdichte* σ . Innerhalb des Leiters herrscht kein elektrisches Feld, doch in unmittelbarer Umgebung der Oberfläche ist die Normalkomponente des elektrischen Feldes, in Übereinstimmung mit (I.17), von Null verschieden. Mikroskopisch gesehen, befindet sich die Ladung nicht genau an der Oberfläche, und das Feld ändert sich nicht sprunghaft. Die meisten elementaren Überlegungen zeigen, dass der Übergangsbereich eine Ausdehnung von einigen Atomdurchmessern hat. Die Ionen in einem Metall kann man sich als relativ unbeweglich und auf einen Bereich von 1 Ångström lokalisiert vorstellen. Die Ergebnisse von Modellrechnungen¹⁵ sind in Abb. I.6 dargestellt. Sie wurden aus der Lösung eines quantenmechanischen Viel-Elektronen-Problems gewonnen, in dem die Leiterionen durch eine stetige, konstante Ladungsdichte innerhalb des Festkörpers (d. h. im Bereich $x < 0$) approximiert wurden. Die Elektronendichte (zum Wigner-Seitz-Radius $r_s = 5$)¹⁶ entspricht in etwa der des Kupfers oder der schweren Alkalimetalle. Der Ladungsüberschuss an Elekt-

¹⁵ Lang, N.D. und W. Kohn, *Phys. Rev.* **B1**, 4555 (1970); **B3**, 1215 (1971); Kenner, V.E., Allen, R.E. und W.M. Saslow, *Phys. Letters* **38A**, 255 (1972).

¹⁶ Der (dimensionslose) Wigner-Seitz-Radius r_s hängt mit der Dichte n über die Beziehung $(4\pi/3)[r_s(n)]^3 = 1/n$ zusammen (Anm. des Übersetzers).

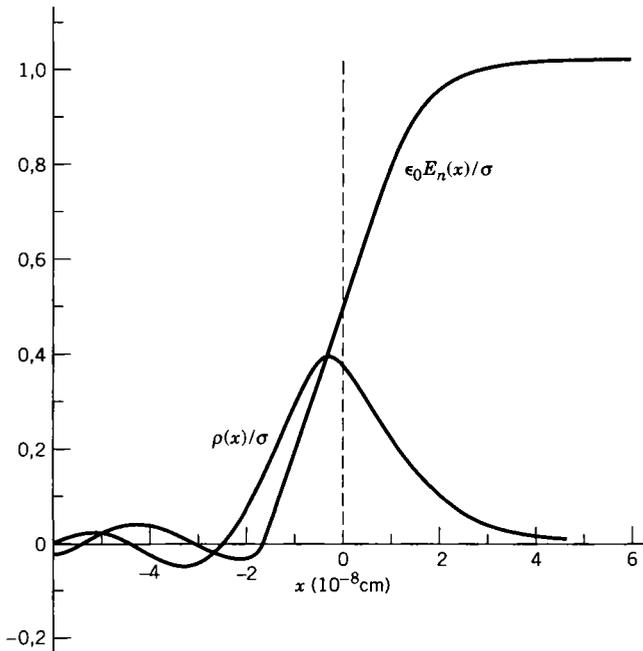


Abb. I.5 Verteilung eines Ladungsüberschusses und der Normalkomponente des elektrischen Feldes an der Oberfläche eines Leiters. Die Ionen im Festkörper sind auf den Bereich $x < 0$ beschränkt. Sie werden durch eine konstante, kontinuierliche Ladungsverteilung approximiert, durch die sich die Elektronen hindurchbewegen. Der Hauptanteil des Ladungsüberschusses ist auf einen Bereich von $\pm 2 \text{ \AA}$ um die „Oberfläche“ verteilt.

ronen ist, wie aus der Abbildung hervorgeht, auf einen Bereich von $\pm 2 \text{ \AA}$ um die „Oberfläche“ der Ionenverteilung begrenzt. Das elektrische Feld steigt über diesen Bereich stetig auf seinen Wert σ „außerhalb“ des Leiters an. Im Makroskopischen, wo 10^{-9} m eine vernachlässigbar kleine Strecke darstellen, kann das Verhalten der Ladungsdichte und des elektrischen Feldes durch $\rho(x) = \sigma\delta(x)$ bzw. $E_n(x) = \sigma\theta(x)/\epsilon_0$ idealisiert werden. Dies entspricht einer wirklichen Flächenverteilung bzw. einem Sprung des elektrischen Feldes, beschrieben durch eine Stufenfunktion.

Die theoretische Behandlung des klassischen Elektromagnetismus enthält also, wie wir gesehen haben, eine Reihe von Idealisierungen, die teils technischer, teils physikalischer Art sind. Das Gebiet der Elektrostatik, das wir in den ersten Kapiteln dieses Buches behandeln, entwickelte sich als experimentelle Wissenschaft der makroskopischen elektrischen Phänomene, wie es letzten Endes auch alle anderen Zweige des Elektromagnetismus taten. Die Ausdehnung der entsprechenden makroskopischen Gesetze auf den *mikroskopischen* Bereich stellte selbst für Ladungen und Ströme im Vakuum eine nicht gerechtfertigte Extrapolation dar. Einige Grenzen dieser Extrapolation diskutierten wir zu Beginn dieser Einführung. An dieser Stelle sollte folgender Punkt hervorgehoben werden: Aufgrund späterer Erkenntnisse wissen wir, dass sich sehr viele Aspekte der Gesetze des klassischen Elektromagnetismus

auch auf den atomaren Bereich anwenden lassen. Voraussetzung hierfür ist, dass die Quellen quantenmechanisch behandelt werden und dass die Mittelung elektromagnetischer Größen über Volumina mit einer großen Anzahl von Molekülen die schnellen Fluktuationen dermaßen glättet, dass die Materie auf statische äußere Felder im Mittel statisch reagiert. Eine weitere Voraussetzung ist schließlich, dass sich ein Ladungsüberschuss auf der Oberfläche eines Leiters verteilt. Insofern haben die makroskopischen Beobachtungen Coulombs und Ampères sowie unsere mathematischen Abstraktionen einen größeren Anwendungsbereich, als ein übervorsichtiger Physiker meinen könnte. Daß die Luft eine kaum merkliche elektrische und magnetische Suszeptibilität besitzt, vereinfachte natürlich die Dinge.

Literaturhinweise

Die Geschichte der Elektrizität und des Magnetismus deckt sich weitgehend mit der Geschichte der Wissenschaft überhaupt. Wir haben in diesem Zusammenhang bereits die beiden Bände von

– Whittaker

zitiert, deren erster über die Zeit bis 1900 berichtet, sowie die kürzere Darstellung von

– Born (bzw. Born und Wolf),

die den Hauptakzent auf die Optik legt. Eine andere gute Darstellung mit einer sehr klaren Besprechung der Originalexperimente findet man bei

– Feather, N.: *Electricity and Matter*. Edinburgh: University Press 1968.

Die experimentellen Tests des Coulomb'schen Gesetzes vom reziproken quadratischen Abstand oder, moderner gesprochen, der Masse des Photons werden in den folgenden Übersichtsartikeln diskutiert:

– Kobzarev, I. Yu. und L. B. Okun, *Uspekhi Fiz. Nauk* **95**, 131 (1968) (engl. Übers. *Sov. Phys. Uspekhi* **11**, 338 (1968)).

– Goldhaber, A. S. und M. M. Nieto: *Rev. Mod. Phys.* **43**, 277 (1971).

Das Prinzip der Eichinvarianz bei der Konstruktion von Feldtheorien wird – aufbauend auf der klassischen Elektrodynamik und der Quantenmechanik – in zugänglicher Weise behandelt bei

– Aitchison, J. R. und A. J. G. Hey: *Gauge Theories in Particle Physics*. 2. Aufl. Bristol: Adam Hilger 1998.

Literaturhinweise zum Thema der makroskopischen Maxwell'schen Gleichungen und ihrer Herleitung aus den entsprechenden mikroskopischen Gleichungen geben wir am Ende von Kapitel 6. Die grundlegenden physikalischen Eigenschaften von Dielektrika, Ferroelektrika und magnetischen Materialien werden in verschiedenen Büchern über Festkörperphysik besprochen, so z. B. bei

– Ashcroft und Mermin

– Beam

– *Becker und Sauter, Bd. III

– Kittel

– Wert und Thomson

– Wooten.

Das zweite der hier genannten Bücher richtet sich besonders an Elektrotechniker und behandelt Themen, die von praktischer Bedeutung sind, wie z. B. Halbleiter. Das zuletzt genannte Buch befasst sich hauptsächlich mit optischen Eigenschaften.

Die Notwendigkeit, bei der Behandlung der Oberflächenimpedanz von Metallen zu räumlicher Nichtlokalität überzugehen (anomaler Skin-Effekt), wird an verschiedenen Stellen diskutiert von

- Pippard, A. B.: *Advances in Electronics and Electron Physics*. Bd. VI, Hrsg. L. Marton. New York: Academic Press 1954, S. 1–45; *Reports on Progress in Physics*. Bd. XXIII, S. 176–266 (1960); *The Dynamics of Conduction Electrons*. New York: Gordon and Breach 1965.

Der Begriff des Wellenvektors und einer frequenzabhängigen Dielektrizitätskonstanten $\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$ wird in folgenden Büchern entwickelt:

- Kittel, Kap. 12
- Pines, D.: *Elementary Excitations in Solids*. New York: W.A. Benjamin 1963.
- Stern, F.: *Solid State Physics*. Bd. 15, Hrsg. F. Seitz und D. Turnbull. New York: Academic Press, S. 299–408.

Das Arbeitsgebiet der nichtlinearen Optik ist inzwischen fast 40 Jahre alt. Eine Einführung geben

- Giordmaine, J. A.: *Phys. Today* **22** (1), 38 (1969)
- Bloembergen, N.: *Am. J. Phys.* **35**, 989 (1967)
- Unger, H. G.: *Quantenelektronik*, Vieweg, Braunschweig (1967).

Nichtlineare optische Phänomene und ihre Anwendungen sind Gegenstand des Buches von

- Sutherland, R. I.: *The Principles of Nonlinear Optics*. New York: Marcel Dekker 1966.

Eine Auswahl von Lehrbüchern und Monographien bilden

- Boyd, R. W.: *Nonlinear Optics*. New York: Academic Press 1990.
- Schubert, M. und B. Wilhelmini: *Einführung in die nichtlineare Optik*. Teil I und II. Leipzig: Teubner 1978.
- Shen, Y. R.: *Handbook of Nonlinear Optics*. New York: Wiley 1984.

1 Einführung in die Elektrostatik

Wir beginnen unsere Diskussion der Elektrodynamik mit der *Elektrostatik*, d.h. der Untersuchung ruhender Ladungsverteilungen und ihrer Felder. Für die meisten Leser wird die Lektüre dieses Kapitels eine Art Wiederholung sein. Wir gehen hier nicht sehr ins Detail, sondern führen nur Begriffe und Definitionen ein, die für das Folgende wichtig sind, und stellen einige grundlegende mathematische Hilfsmittel bereit. In den sich anschließenden Kapiteln entwickeln wir dann spezielle mathematische Techniken, um sie auf verschiedenste Probleme anzuwenden.

Ein wichtiger physikalischer Gesichtspunkt sollte vorweg unterstrichen werden. Historisch gesehen beschäftigte sich die Elektrostatik zunächst nur mit *makroskopischen* Vorgängen. Idealisierungen wie die Begriffe „Punktladung“ oder „elektrische Felder an einem Punkt“ müssen daher, wie bereits am Ende der Einführung erwähnt, als mathematische Konstruktionen betrachtet werden, die zwar die Beschreibung makroskopischer Phänomene gestatten, aber im mikroskopischen Bereich bedeutungslos werden können.

1.1 Das Coulomb'sche Gesetz

Die gesamte Elektrostatik beruht auf dem Coulomb'schen Gesetz. Es beschreibt in quantitativer Weise die Kraft zwischen zwei geladenen Körpern, die sich relativ zueinander in Ruhe befinden. In einer beeindruckenden Reihe von Experimenten zeigte Coulomb, dass die Kraft zwischen zwei geladenen Körpern, deren gegenseitiger Abstand im Vergleich zu ihrer räumlichen Ausdehnung groß ist, in der Luft folgende Merkmale aufweist:

- Sie ist direkt proportional zum Betrag jeder Ladung.
- Sie ist umgekehrt proportional zum Quadrat des relativen Abstands der Ladungen.
- Sie wirkt in Richtung der Verbindungslinie zwischen den Ladungen.
- Sie ist anziehend für Körper mit entgegengesetzter Ladung und abstoßend für Körper mit gleichnamiger Ladung.

Ferner zeigte das Experiment, dass die Gesamtkraft, die ein kleiner geladener Körper von einem System anderer Ladungen erfährt, die sich in seiner Umgebung befinden, gleich der *Vektorsumme* der einzelnen Coulomb'schen Zweikörperkräfte ist. Genau genommen bezieht sich das Coulomb'sche Gesetz auf Ladungen im Vakuum oder Medien vernachlässigbar geringer Suszeptibilität. Die Untersuchung von Ladungen in Dielektrika verschieben wir auf das Kapitel 4.

1.2 Das elektrische Feld

Obwohl letzten Endes immer Kräfte gemessen werden, empfiehlt es sich, ein anderes, wenn auch von den Kräften nur wenig losgelöstes Konzept einzuführen – nämlich das des elektrischen Feldes, das von einer bestimmten Ladungsanordnung herrührt. Wir definieren es vorläufig als diejenige Kraft, die pro Ladungseinheit an einem gegebenen Punkt wirksam wird. Diese auf die Ladungseinheit bezogene Kraft ist eine vektorielle Funktion des Ortes und wird mit \mathbf{E} bezeichnet. Bei dieser Definition ist jedoch Vorsicht am Platz. Denn es muss sich nicht unbedingt um diejenige Kraft handeln, die man z. B. beobachtet, wenn man die auf einer Holunderkugel sitzende Ladungseinheit ins elektrische Feld bringt. Der Grund hierfür ist darin zu suchen, dass eine einzelne Ladungseinheit so groß sein kann, dass ihre Anwesenheit die Feldkonfiguration merklich ändert. Man muss daher einen Grenzprozess vornehmen, bei dem das Verhältnis der auf den Probekörper ausgeübten Kraft zu der auf ihm sitzenden Ladung für immer kleiner werdenden Betrag der Testladung gemessen wird.¹ Das Experiment zeigt dann, dass dieses Verhältnis und die Richtung der Kraft bei kleiner werdender Ladung konstant werden. Diese Grenzwerte definieren den Betrag und die Richtung des elektrischen Feldes \mathbf{E} an dem betreffenden Punkt. Formelmäßig ausgedrückt ist also

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad (1.1)$$

wenn \mathbf{F} die Kraft, \mathbf{E} das elektrische Feld und q die Ladung bedeuten. Hierbei wird angenommen, dass sich die Ladung q an dem Punkt befindet, an dem auch die Kraft und das elektrische Feld gemessen werden.

In ähnlicher Weise lässt sich jetzt auch das Coulomb'sche Gesetz formelmäßig erfassen. Ist \mathbf{F} die Kraft, die eine Punktladung q_1 am Ort \mathbf{x}_1 von einer anderen Punktladung q_2 am Ort \mathbf{x}_2 erfährt, so besagt das Coulomb'sche Gesetz:

$$\mathbf{F} = kq_1q_2 \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} \quad (1.2)$$

Zu beachten ist hierbei, dass q_1 und q_2 positiv oder negativ sein können. Die Proportionalitätskonstante k hängt vom benutzten Einheitensystem ab.

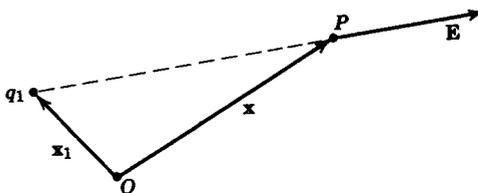


Abb. 1.1

¹ Die Diskretheit der elektrischen Ladung (vgl. Abschn. I.1) bedeutet, dass sich dieser mathematische Grenzprozess physikalisch nicht realisieren lässt. Dies ist eines der Beispiele für die mathematischen Idealisierungen der makroskopischen Elektrostatik.

Für das elektrische Feld am Punkt \mathbf{x} , das von einer Punktladung q am Ort \mathbf{x}_1 herrührt (vgl. Abb. 1.1), ergibt sich aus (1.2) unmittelbar:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = kq_1 \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} \quad (1.3)$$

Die Konstante k nimmt je nach Einheitensystem verschiedene Werte an². In elektrostatischen Einheiten (esE) wird $k = 1$ gewählt, und die Ladungseinheit ist als diejenige Ladung definiert, die auf eine gleiche Ladung in 1 cm Entfernung die Kraft von 1 dyn ausübt. Die esE-Einheit der Ladung wird 1 esE (oder 1 *stat-Coulomb*) genannt, und das elektrische Feld wird in *stat-Volt pro cm* gemessen. Im SI-System, das wir hier verwenden, ist $k = (4\pi\epsilon_0)^{-1}$, wobei die Konstante $\epsilon_0 \approx 8,854 \times 10^{-12}$ Farad pro Meter (F/m) die Dielektrizitätskonstante des Vakuums ist (die in der älteren deutschen Literatur auch „Influenzkonstante“ genannt wird). Der *numerische* Wert von k ist per Definition exakt gleich $10^{-7} c^2$. Die SI-Einheit für die Ladung ist das *Coulomb* (C), und das elektrische Feld wird in *Volt pro Meter* (V/m) gemessen. Ein Coulomb (1 C) erzeugt in 1 m Entfernung ein Feld von annähernd $8,9874 \times 10^9$ V/m (bzw. 8,9874 GV/m). Ein Elektron ($q \approx 1,602 \times 10^{-19}$ C) erzeugt in 1 m Entfernung ein Feld von ca. $1,44 \times 10^{-9}$ V/m (bzw. 1,44 nV/m).

Die experimentell beobachtete lineare Superposition der von mehreren Ladungen ausgeübten Kräfte bedeutet, dass sich das elektrische Feld \mathbf{E} am Ort \mathbf{x} eines Systems von n Punktladungen q_i an den Orten \mathbf{x}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) als Vektorsumme schreiben lässt:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3} \quad (1.4)$$

Sind die Ladungen so klein und zahlreich, dass sie durch eine Ladungsdichte $\rho(\mathbf{x}')$ beschrieben werden können (so dass die Ladung Δq in einem kleinen Volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$ um den Punkt \mathbf{x}' durch $\Delta q = \rho(\mathbf{x}') \Delta x \Delta y \Delta z$ gegeben ist), dann lässt sich die Summe durch ein Integral ersetzen:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x' \quad (1.5)$$

wobei $d^3x' = dx' dy' dz'$ das dreidimensionale Volumenelement am Ort \mathbf{x}' darstellt.

An dieser Stelle ist es zweckmäßig, die *Dirac'sche Delta-Funktion* einzuführen.³ Es handelt sich dabei um eine sog. verallgemeinerte Funktion oder *Distribution*, also keine Funktion im üblichen mathematischen Sinn. Sie ist, in einer Dimension, definiert durch die beiden Eigenschaften

$$(1) \quad \delta(x - a) = 0 \quad \text{für } x \neq a,$$

und

$$(2) \quad \int \delta(x - a) dx = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x = a \text{ im Integrationsgebiet liegt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Delta-Funktion gewinnt eine anschauliche, wenn auch nicht strenge Bedeutung, wenn man sie als Grenzfall einer Kurve mit stark ausgeprägtem Maximum, etwa einer Gauß-Kurve,

² Das Problem der Einheiten diskutieren wir ausführlich im Anhang.

³ Die folgenden Ausführungen zur Delta-Funktion enthalten gegenüber dem amerikanischen Original einige Ergänzungen (Anm. des Übersetzers).

interpretiert, die immer schmaler und gleichzeitig immer höher wird, und zwar so, dass die Fläche unter der Kurve stets gleich 1 bleibt. Tatsächlich lässt sich die Delta-Funktion streng als Limes von Folgen gewöhnlicher Funktionen $\delta_n(x)$ definieren, die auf Eins normiert sind und für die

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int dx \delta_n(x-a) f(x) = f(a)$$

gilt. Beispiele für solche Funktionenfolgen sind

$$\delta_n(x) = n e^{-\pi n^2 x^2}$$

und

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi} \left(\frac{\sin nx}{nx} \right)^2$$

Einen umfassenden und strengen mathematischen Zugang zur Delta-Funktion und ihrer Handhabung gibt die von Laurent Schwartz entwickelte Theorie der Distributionen. Literaturhinweise zu diesem Teilgebiet der Mathematik findet der Leser am Ende dieses Kapitels.

Aus den oben angegebenen, definierenden Eigenschaften der Delta-Funktion folgt für eine beliebige Funktion $f(x)$:

$$(3) \quad \int f(x) \delta(x-a) dx = f(a).$$

Das Integral über eine mit der Ableitung der Delta-Funktion multiplizierte Funktion $f(x)$ ist einfach zu verstehen, wenn man die Delta-Funktion in dem oben erläuterten Sinn als Grenzwert gewöhnlicher Funktionen mit stark ausgeprägtem Maximum definiert. Partielle Integration führt dann auf

$$(4) \quad \int f(x) \delta'(x-a) dx = -f'(a)$$

wobei der Strich die Differentiation bezüglich des Arguments bezeichnet.

Ist das Argument der Delta-Funktion wieder eine Funktion der unabhängigen Variablen x , so lässt sich folgende Formel verwenden:

$$(5) \quad \delta[f(x)] = \sum_i \frac{1}{\left| \frac{df}{dx}(x_i) \right|} \delta(x - x_i)$$

sofern $f(x)$ an den Stellen $x = x_i$ nur einfache Nullstellen besitzt. Aus dieser Formel ergibt sich die häufig benutzte Beziehung

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} [\delta(x-a) + \delta(x+a)].$$

Die Definition der Delta-Funktion lässt sich auf eine beliebige Anzahl von Dimensionen erweitern. So gilt z. B. in drei Dimensionen bei Verwendung kartesischer Koordinaten:

$$(6) \quad \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \delta(x_3 - x'_3)$$

$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ stellt also eine „Funktion“ dar, die nur im Punkt $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ nicht verschwindet, und zwar derart, dass

$$(7) \quad \int_{\Delta V} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3 x' = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \Delta V \text{ den Punkt } \mathbf{x}' = \mathbf{x} \text{ enthält} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beim Übergang von kartesischen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) zu krummlinigen Koordinaten (ξ_1, ξ_2, ξ_3) gilt für das Volumenelement bekanntlich $d^3 x = J(x_i, \xi_i) d^3 \xi$ wenn J die Jakobi-

Determinante dieser Transformation ist. Aus der Definitionsgleichung (2) folgt daher unmittelbar

$$(8) \quad \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{|J(\xi_i, \xi'_i)|} \delta(\xi_1 - \xi'_1) \delta(\xi_2 - \xi'_2) \delta(\xi_3 - \xi'_3)$$

Hiernach lautet z. B. die Darstellung der Delta-Funktion in Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) :

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(\phi - \phi') \delta(z - z')$$

Man beachte, dass die Delta-Funktion stets die Dimension eines reziproken „Volumens“ hat, im Dreidimensionalen speziell die des reziproken räumlichen Volumens.

Eine diskrete Anordnung von Punktladungen lässt sich mithilfe einer Ladungsdichte beschreiben, die aus einer Summe von Delta-Funktionen besteht. So stellt z. B.

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n q_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (1.6)$$

eine Verteilung von n Punktladungen q_i an den Orten \mathbf{x}_i dar. Setzt man diese Ladungsdichte in Gl. (1.5) ein, so erhält man bei Integration und Beachtung der Eigenschaften der Delta-Funktion die diskrete Summe (1.4).

1.3 Das Gauß'sche Gesetz

Das Integral (1.5) ist nicht immer dazu geeignet, um elektrische Felder zu berechnen. Es gibt jedoch eine andere Integralbeziehung, das sog. *Gauß'sche Gesetz*, das oft nützlicher ist und darüberhinaus zu einer Differentialgleichung für $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ führt. Um dieses Gesetz herzuleiten, betrachten wir eine Punktladung q und eine *geschlossene* Fläche S (vgl. Abb. 1.2). Der Abstand, den die Ladung von einem Punkt auf der Fläche hat, sei r , während \mathbf{n} die nach außen gerichtete Flächennormale und da das zugehörige Flächenelement bezeichne. Bildet das von der Punktladung q herrührende elektrische Feld \mathbf{E} mit der Flächennormale am betrachteten Punkt den Winkel θ , dann gilt für die mit dem Flächenelement da multiplizierte Komponente von \mathbf{E} in Richtung der Normalen:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2} da \quad (1.7)$$

Da \mathbf{E} in Richtung der Verbindungslinie vom Flächenelement zur Ladung q liegt, ist $\cos\theta da = r^2 d\Omega$, wenn $d\Omega$ der räumliche Winkel ist, unter dem das Flächenelement da vom Ort der Ladung q aus erscheint. Wir können also schreiben:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \quad (1.8)$$

Integriert man jetzt die Normalkomponente von \mathbf{E} über die gesamte Fläche, so ist leicht zu sehen, dass

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \begin{cases} q/\epsilon_0 & \text{wenn } q \text{ innerhalb von } S \text{ liegt} \\ 0 & \text{wenn } q \text{ außerhalb von } S \text{ liegt} \end{cases} \quad (1.9)$$

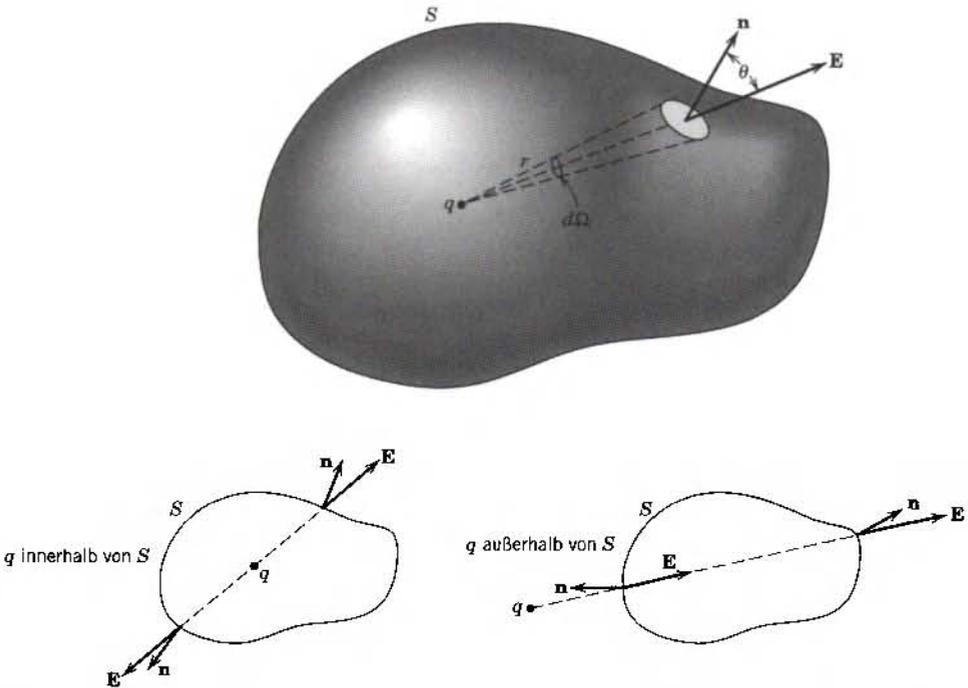


Abb. 1.2 Zum Gauß'schen Gesetz. Die Normalkomponente des elektrischen Feldes wird über die geschlossene Fläche S integriert. Liegt die Ladung innerhalb (außerhalb) von S , dann liefert der über q errichtete und auf das Innere (Äußere) von S zeigende Raumwinkel nach Integration 4π (0).

Dieses Ergebnis ist das *Gauß'sche Gesetz* für eine einzelne Punktladung. Für einen diskreten Satz mehrerer Ladungen lautet es:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i \quad (1.10)$$

wobei die Summe über sämtliche Ladungen *innerhalb* von S zu nehmen ist. Im Falle einer kontinuierlichen Ladungsdichte $\rho(\mathbf{x})$ nimmt das Gauß'sche Gesetz die Gestalt

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}) \, d^3x \quad (1.11)$$

an, wenn V das von der Fläche S umschlossene Volumen bedeutet.

Gleichung (1.11) ist eine der Grundgleichungen der Elektrostatik. Sie ist unmittelbare Folge

- des Gesetzes vom reziproken quadratischen Abstand für die Kraft zwischen zwei Ladungen,
- des zentralen Charakters der Coulomb-Kraft sowie
- der linearen Superposition der Wirkungen verschiedener Ladungen.

Natürlich gilt das Gauß'sche Gesetz auch für die Newton'sche Gravitationskraft; an die Stelle der Ladungsdichte tritt dann die Massendichte.

Interessant ist folgende historische Feststellung: Schon vor den Experimenten von Cavendish und Coulomb ging Priestley der von Franklin gemachten Beobachtung nach, dass die an die Innenwand eines metallischen Bechers gebrachte Ladung stets zur äußeren Oberfläche abwandert (so dass das Innere feldfrei bleibt). In Analogie zum Newton'schen Gesetz der universellen Gravitation schloss er daraus, dass sich auch die elektrostatische Kraft umgekehrt proportional zum Quadrat der Entfernung ändern müsse. Die gegenwärtige Gültigkeitsgrenze dieses Gesetzes diskutierten wir bereits in Abschnitt 2 des einleitenden Kapitels.

1.4 Differentielle Form des Gauß'schen Gesetzes

Das Gauß'sche Gesetz kann als Integralform eines der beiden Grundgesetze der Elektrostatik betrachtet werden. Seine differentielle Form (d. h. die äquivalente Differentialgleichung) gewinnt man aus dem *Gauß'schen Integralsatz*.⁴ Er besagt folgendes: Ist $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, das in dem von einer geschlossenen Fläche S begrenzten Volumen V definiert ist, dann gilt:

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, d^3x$$

Hiernach ist also das Volumenintegral der Divergenz von \mathbf{A} gleich dem Oberflächenintegral der nach außen gerichteten Normalkomponente von \mathbf{A} . Tatsächlich kann diese Gleichung auch als Definition der Divergenz benutzt werden (vgl. *Stratton*, S. 4).

Der Gauß'sche Integralsatz gestattet es nun, das Gauß'sche Gesetz

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}) \, d^3x$$

auf die Form

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{E} - \rho/\epsilon_0) \, d^3x = 0 \quad (1.12)$$

zu bringen, wobei V ein beliebiges Volumen ist. Hieraus folgt aber, dass der Integrand Null sein muss, d. h. es muss die Beziehung

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \quad (1.13)$$

gelten, die die gesuchte differentielle Form des Gauß'schen Gesetzes darstellt. Sie kann zur Lösung elektrostatischer Probleme herangezogen werden, doch ist es oft einfacher, mit einer skalaren anstatt mit einer vektoriellen, ortsabhängigen Funktion zu arbeiten und anschließend, falls erforderlich, die vektoriellen Größen daraus abzuleiten (s. unten).

⁴ Den Gauß'schen Integralsatz zitieren wir im folgenden, wenn keine Verwechslung mit dem Gauß'schen Gesetz möglich ist, auch kurz als „Gauß'schen Satz“ (Anm. des Übersetzers).

1.5 Die Wirbelfreiheit des elektrostatischen Feldes und das skalare Potential

Die eine Gleichung (1.13) genügt noch nicht, um die drei Komponenten des elektrischen Feldes $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ vollständig festzulegen. Der Leser wird wahrscheinlich wissen, dass ein Vektorfeld nahezu⁵ vollständig festgelegt ist, wenn seine Divergenz *und* seine Rotation im ganzen Raum bekannt sind. Wir suchen daher nach einer Gleichung, die auch die Rotation von \mathbf{E} als Ortsfunktion festlegt. Eine solche Gleichung, nämlich

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.14)$$

folgt unmittelbar aus dem Coulomb'schen Gesetz (1.5), d.h. aus

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x'$$

Der Faktor des Integranden, mit dem $\rho(\mathbf{x}')$ multipliziert wird, ist – als Funktion von \mathbf{x} betrachtet – der negative Gradient des Skalars $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$:

$$\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = -\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right)$$

Da sich der Gradient auf \mathbf{x} bezieht, nicht aber auf die Integrationsvariable \mathbf{x}' , kann er vor das Integralzeichen gezogen werden. D.h. das Feld $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ lässt sich in der Form

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (1.15)$$

schreiben. Da die Rotation des Gradienten einer Ortsfunktion verschwindet ($\nabla \times \nabla \psi = 0$ für alle ψ), folgt Gl. (1.14) in der Tat unmittelbar aus (1.15).

Es sei darauf hingewiesen, dass es für die Gültigkeit der Gleichung $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ nur auf den zentralen Charakter der zwischen den Ladungen wirkenden Kraft und deren Abhängigkeit vom relativen Abstand ankommt. Die Abhängigkeit vom reziproken quadratischen Abstand geht dabei überhaupt nicht ein.

In Gl. (1.15) wird das elektrische Feld (ein Vektor) aus einem Skalar durch Gradientenbildung gewonnen. Da es sich mit *einer* skalaren Funktion leichter rechnen lässt als mit den drei skalaren Komponenten einer Vektorfunktion, ist es sinnvoll, sich auf die skalare Funktion zu konzentrieren und ihr auch einen Namen zu geben. Wir definieren daher das *Skalarpotential* $\Phi(\mathbf{x})$ durch die Gleichung

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi \quad (1.16)$$

Nach (1.15) lässt sich dann Φ folgendermaßen durch die Ladungsdichte ausdrücken:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (1.17)$$

⁵ D.h. bis auf den Gradienten einer der Laplace'schen Gleichung genügenden skalaren Funktion. Vgl. hierzu Abschnitt 1.9 über Eindeutigkeit.

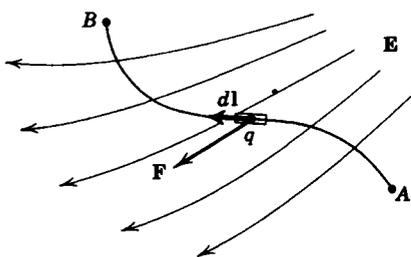


Abb. 1.3

wobei über sämtliche im Raum verteilten Ladungen zu integrieren ist und Φ nur bis auf eine Konstante festgelegt ist, die man zur rechten Seite von (1.17) hinzuzuschieben darf.

Die physikalische Bedeutung des Skalarpotentials wird klar, wenn man die Arbeit berechnet, die beim Transport einer Probeladung q von einem Punkt (A) zu einem anderen Punkt (B) im elektrischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ zu verrichten ist (vgl. Abb. 1.3). Die auf die Ladung wirkende Kraft ist an jedem Raumpunkt durch

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

gegeben. Die beim Transport der Ladung von A nach B aufzubringende Arbeit ist daher

$$W = - \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.18)$$

Das Minuszeichen tritt deswegen auf, weil wir die *an* der Ladung gegen das elektrische Feld zu verrichtende Arbeit berechnen. Mit der Definition (1.16) lässt sich für W auch folgendes schreiben:

$$W = q \int_A^B \nabla\Phi \cdot d\mathbf{l} = q \int_A^B d\Phi = q(\Phi_B - \Phi_A) \quad (1.19)$$

D.h. das Produkt $q\Phi$ kann als die potentielle Energie der Probeladung im elektrostatischen Feld interpretiert werden.

Aus (1.18) und (1.19) folgt, dass das zwischen zwei Punkten genommene Linieneintegral des elektrischen Feldes unabhängig vom Weg und gleich dem Negativen der Potentialdifferenz zwischen den betrachteten Punkten ist:

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -(\Phi_B - \Phi_A) \quad (1.20)$$

Dies folgt natürlich auch unmittelbar aus der Definition (1.16). Ist der Weg geschlossen, so verschwindet das Linieneintegral:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1.21)$$

Dieses Ergebnis lässt sich auch direkt aus dem Coulomb'schen Gesetz herleiten, und die Gleichung

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

folgt dann aus dem *Stokes'schen Satz*. Denn nach ihm gilt ja für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ auf einer beliebigen offenen Fläche S und längs deren geschlossener Berandung C die Integralbeziehung

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} da$$

wenn $d\mathbf{l}$ ein Linienelement von C und da ein Flächenelement von S ist. Die Berandung von S ist dabei bezüglich der Flächennormalen \mathbf{n} in rechtshändig negativem Drehsinn zu durchlaufen.

1.6 Flächenhaft verteilte Ladungen und Dipole, Unstetigkeiten des elektrischen Feldes und seines Potentials

Eines der allgemeinen Probleme der Elektrostatik ist die Bestimmung des elektrischen Feldes oder Potentials einer gegebenen Flächenladungsverteilung. Das Gauß'sche Gesetz (1.11) gestattet es, einen Teil der Lösung dieses Problems direkt hinzuschreiben. Trägt die Fläche S mit der von der Seite 1 zur Seite 2 zeigenden Normalen \mathbf{n} eine Flächenladung der Dichte $\sigma(\mathbf{x})$ (gemessen in Coulomb pro m^2) und sind \mathbf{E}_1 und \mathbf{E}_2 die elektrischen Felder zu beiden Seiten der Fläche (vgl. Abb. 1.4), dann folgt aus dem Gauß'schen Gesetz unmittelbar:

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n} = \sigma/\epsilon_0 \quad (1.22)$$

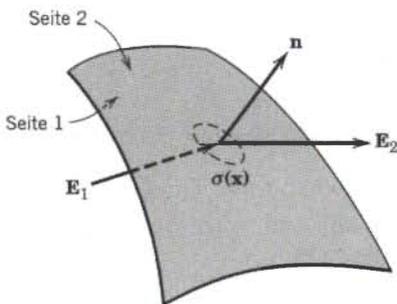


Abb. 1.4 Unstetigkeit der Normalkomponente des elektrischen Feldes beim Durchgang durch eine Flächenladung.

Diese Gleichung allein bestimmt jedoch nur dann die Felder \mathbf{E}_1 und \mathbf{E}_2 , wenn keine anderen Feldquellen vorhanden sind und die Geometrie und Form von σ besonders einfach sind. Gleichung (1.22) besagt nichts anderes, als dass die Normalkomponente des elektrischen Feldes beim Durchgang durch die Fläche mit der Flächenladungsdichte einen Sprung um σ/ϵ_0 macht, wenn die Fläche in Richtung der Normalen durchquert wird.

Dagegen ist die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes beim Durchqueren einer Grenzfläche stetig. Um dies zu zeigen, braucht man nur Gl. (1.21) auf das

Linienintegral von \mathbf{E} längs eines Rechtecks anzuwenden, dessen beide Schmalseiten vernachlässigbar klein sind, während seine Längsseiten auf je einer der beiden Seiten der Fläche liegen.

Einen Ausdruck für das Potential (und somit, durch Differenzieren, auch für das Feld) an einem beliebigen Raumpunkt (der nicht unbedingt auf der Fläche zu liegen braucht) erhält man aus (1.17) durch Substitution von ρd^3x durch σda :

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} da' \quad (1.23)$$

Für räumlich oder flächenhaft verteilte Ladungen ist das Potential überall stetig, und zwar selbst innerhalb der Ladungsverteilung. Dies lässt sich entweder anhand von (1.23) nachweisen oder unter Verwendung der Tatsache, dass \mathbf{E} beschränkt ist, obwohl es beim Durchgang durch eine Flächenladungverteilung unstetig ist. Für Punkt- oder Linienladungen oder auch Doppelschichten ist das Potential nicht mehr stetig.

Die Verhältnisse bei der Doppelschicht wollen wir hier näher untersuchen. Man versteht unter ihr eine Fläche, die mit Dipolen belegt ist, deren Achsen die Richtung der Flächennormalen haben. D.h. eine Dipolschicht kann man sich vorstellen als zwei dicht übereinanderliegende Flächen S und S' , von denen die obere eine Flächenladung der Dichte $\sigma(\mathbf{x})$ trägt, während die Ladungsdichte der unteren Fläche gleich $-\sigma(\mathbf{x})$ ist (vgl. Abb. 1.5). Eine Doppelschicht mit einem *Dipolmoment* der

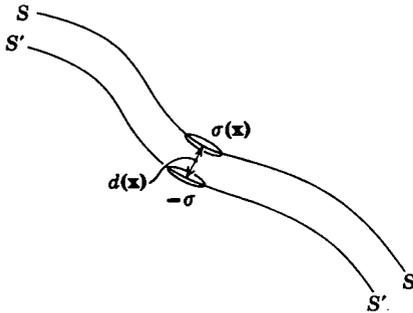


Abb. 1.5 Grenzprozess zur Erzeugung einer Doppelschicht.

Stärke $D(\mathbf{x})$ erhält man, indem man die lokale Entfernung $d(\mathbf{x})$ zwischen den beiden Flächen infinitesimal klein werden lässt, und zwar so, dass das Produkt aus $\sigma(\mathbf{x})$ und $d(\mathbf{x})$ in der Grenze $d(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ den Wert $D(\mathbf{x})$ annimmt:

$$\lim_{d(\mathbf{x}) \rightarrow 0} \sigma(\mathbf{x}) d(\mathbf{x}) = D(\mathbf{x})$$

Das Dipolmoment ist parallel zur Flächennormalen von S gerichtet und weist von der negativen zur positiven Ladung.

Um das Potential der Doppelschicht zu bestimmen, kann man entweder einen einzelnen Dipol betrachten und dann aus einer Vielzahl solcher Dipole eine Flächendichte bilden oder aber für die Potentiale der beiden Flächen S und S' den mathematischen Grenzprozess vornehmen, den wir oben bei der Definition von $D(\mathbf{x})$ in Worten beschrieben haben. Der erste Weg mag zwar einfacher erscheinen, aber

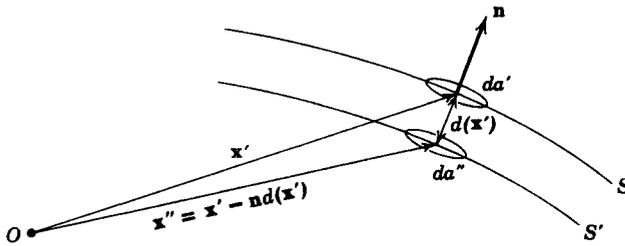


Abb. 1.6 Geometrie einer Doppelschicht.

der zweite stellt eine nützliche Übung im Umgang mit Vektorgrößen dar, und daher wählen wir diesen. Ist \mathbf{n} die von S' wegzeigende Flächennormale von S (vgl. Abb. 1.6), so schreibt sich das Potential der beiden benachbarten Flächen in der Form

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} da' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{x}'')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|} da'' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \left[\frac{\sigma(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{\sigma(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}' + \mathbf{n}d|} \right] da' \end{aligned}$$

Für kleine d kann man den reziproken Abstand $|\mathbf{x} - \mathbf{x}' + \mathbf{n}d|^{-1}$ entwickeln. Wir betrachten dazu zunächst den allgemeineren Ausdruck $|\mathbf{x} + \mathbf{a}|^{-1}$ für $|\mathbf{a}| \ll |\mathbf{x}|$. Seine Taylor-Reihenentwicklung in drei Dimensionen lautet:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} + \mathbf{a}|} = \frac{1}{x} + \mathbf{a} \cdot \nabla \left(\frac{1}{x} \right) + \dots$$

Damit erhalten wir für das Potential in der Grenze $d \rightarrow 0$:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S D(\mathbf{x}') \mathbf{n} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) da' \tag{1.24}$$

Der Integrand in dieser Gleichung ist nichts anderes als das Potential eines punktförmigen Dipols mit dem Dipolmoment $\mathbf{p} = \mathbf{n} D da'$. Das Potential, das ein an der Stelle \mathbf{x}' lokalisierter Dipol \mathbf{p} am Ort \mathbf{x} erzeugt, ist gegeben durch

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \tag{1.25}$$

Gleichung (1.24) lässt eine einfache geometrische Interpretation zu. Zunächst stellen wir fest, dass

$$\mathbf{n} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) da' = - \frac{\cos \theta da'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} = -d\Omega$$

ist, wobei $d\Omega$ den räumlichen Winkel darstellt, unter dem ein Flächenelement da' vom Aufpunkt aus erscheint (vgl. Abb. 1.7). Man beachte, dass $d\Omega$ positiv ist, wenn θ ein spitzer Winkel ist, d.h. wenn der Beobachter die „innere“ Seite der Doppelschicht sieht. Für das Potential lässt sich nun schreiben:

$$\Phi(\mathbf{x}) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S D(\mathbf{x}') d\Omega \tag{1.26}$$

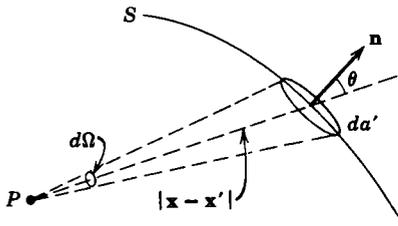


Abb. 1.7 Das am Punkt P herrschende Potential einer Doppelschicht, die über ein Flächenelement da' ausgebreitet ist und die Stärke D hat, ist gleich dem Negativen des Produktes aus D und dem über P von da' aufgespannten räumlichen Winkel $d\Omega$.

Bei konstantem D ist somit das Potential nichts anderes als das Produkt aus dem durch $4\pi\epsilon_0$ dividierten Moment und dem räumlichen Winkel, unter dem ein Beobachter die Fläche sieht, unabhängig von deren Gestalt.

Das Potential macht beim Durchqueren der Doppelschicht einen Sprung. Dies erkennt man, wenn man mit dem Aufpunkt infinitesimal nahe an die Doppelschicht heranrückt. Es ist dann zweckmäßig, sich die Schicht in zwei Anteile zerlegt zu denken – eine kleine Scheibe unmittelbar vor dem Aufpunkt und den Rest. Die Scheibe sei dabei so klein, dass sie als eben und das Dipolmoment als konstant betrachtet werden können. Das Gesamtpotential der Schicht erhält man dann offensichtlich aus der linearen Superposition der Potentiale der kleinen Scheibe und des Restes. Aus (1.26) ist ersichtlich, dass das Potential der Scheibe beim Durchgang von der Innenseite zur Außenseite einen Sprung um D/ϵ_0 macht, resultierend aus dem Wert von $-D/2\epsilon_0$ auf der inneren und $+D/2\epsilon_0$ auf der äußeren Seite. Das Potential des Restes, d. h. der Doppelschicht mit der ausgesparten Scheibe, ist beim Durchgang durch diese Öffnung stetig. Insgesamt ergibt sich daher für den Sprung des Potentials:

$$\Phi_2 - \Phi_1 = D/\epsilon_0 \tag{1.27}$$

Dieses Ergebnis befindet sich in Analogie zu Gl. (1.22) für die Unstetigkeit des elektrischen Feldes beim Durchgang durch eine Flächenladungsdichte. Der Ausdruck (1.27) kann „physikalisch“ als Potentialabfall „innerhalb“ der Doppelschicht gedeutet werden und berechnet sich als das Produkt aus dem elektrischen Feld zwischen den beiden Flächenladungsdichten und deren Abstand vor dem Grenzübergang.

1.7 Die Poisson'sche und Laplace'sche Gleichung

In den Abschnitten 4 und 5 dieses Kapitels zeigten wir, dass sich das elektrostatische Feld durch die beiden Differentialgleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \tag{1.13}$$

und

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{1.14}$$

beschreiben lässt, wobei die letzte Gleichung äquivalent zu der Feststellung ist, dass \mathbf{E} der Gradient einer skalaren Funktion, nämlich des Skalarpotentials Φ ist:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi \quad (1.16)$$

Die Gln. (1.13) und (1.16) können zu einer einzigen partiellen Differentialgleichung für die Funktion $\Phi(\mathbf{x})$ allein kombiniert werden:

$$\nabla^2\Phi = -\rho/\epsilon_0 \quad (1.28)$$

Diese Gleichung ist die sog. *Poisson'sche Gleichung*. In Raumgebieten ohne Ladungen reduziert sie sich auf die *Laplace'sche Gleichung*

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (1.29)$$

Eine Lösung für das Skalarpotential hatten wir bereits in dem Ausdruck (1.17) gefunden:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (1.17)$$

Um zu zeigen, dass dieser Ausdruck tatsächlich der Poisson'schen Gleichung genügt, haben wir auf beiden Seiten von Gl. (1.17) den Laplace'schen Operator anzuwenden. Der dabei resultierende Integrand auf der rechten Seite erweist sich jedoch als singular. Wir nehmen daher einen Grenzprozess vor und führen ein sog. *a*-Potential, $\Phi_a(\mathbf{x})$, ein, definiert durch

$$\Phi_a(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{\sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 + a^2}} d^3x'$$

Das tatsächliche Potential (1.17) ergibt sich hieraus im Limes $a \rightarrow 0$. Die Anwendung des Laplace'schen Operators auf das *a*-Potential führt zunächst auf

$$\begin{aligned} \nabla^2\Phi_a(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{x}') \nabla^2 \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) d^3x' \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{x}') \left[\frac{3a^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}} \right] d^3x' \end{aligned} \quad (1.30)$$

mit $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. Der Ausdruck in eckigen Klammern ist der negative Laplace'sche Operator, angewandt auf $(r^2 + a^2)^{-1/2}$. Er ist für nicht-verschwindendes a wohldefiniert, während er im Limes $a \rightarrow 0$ an der Stelle $r = 0$ unendlich wird und für $r \neq 0$ verschwindet. Sein Volumenintegral hat für beliebige a den Wert 4π . Zur Ausführung der Integration ist es zweckmäßig, den Raum in zwei Gebiete zu unterteilen, indem man um \mathbf{x} eine Kugel mit festem Radius R legt. Dabei ist R so zu wählen, dass sich $\rho(\mathbf{x}')$ im Innern der Kugel nur wenig ändert. Gleichzeitig soll a sehr viel kleiner als R sein und schließlich gegen Null streben. Ist dann die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{x}')$ so beschaffen, dass das Potential (1.17) existiert, so verschwindet der Integralbeitrag vom Außenraum der Kugel im Limes $a \rightarrow 0$ wie a^2 und es braucht nur der Innenraum betrachtet zu werden. Eine Taylor-Entwicklung von $\rho(\mathbf{x}')$ um $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ führt dann auf

$$\nabla^2\Phi_a(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_0^R \frac{3a^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}} \left[\rho(\mathbf{x}) + \frac{r^2}{6} \nabla^2\rho + \dots \right] r^2 dr + O(a^2)$$

und die Integration liefert

$$\nabla^2 \Phi_a(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{x}) [1 + O(a^2/R^2)] + O(a^2, a^2 \log a) \nabla^2 \rho + \dots$$

Im Limes $a \rightarrow 0$ gewinnt man daraus die Poisson'sche Gleichung (1.28).

Den singulären Charakter von $\nabla^2(1/r)$ kann man formal mit Hilfe der Dirac'schen Delta-Funktion verdeutlichen. Da $\nabla^2(1/r) = 0$ ist für $r \neq 0$ und das Volumenintegral von $\nabla^2(1/r)$ den Wert -4π hat, kann man formal $\nabla^2(1/r) = -4\pi \delta(\mathbf{x})$ schreiben oder allgemeiner:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \tag{1.31}$$

1.8 Der Green'sche Satz

Hätte man es bei elektrostatischen Problemen stets nur mit lokalisierten diskreten oder kontinuierlichen Ladungsverteilungen ohne Randflächen zu tun, dann stellte die allgemeine Lösung (1.17) den geeignetsten und direktesten Weg zur Lösung eines jeden elektrostatischen Problems dar. Die Poisson'sche oder Laplace'sche Gleichung brauchte man dann nicht mehr. In Wirklichkeit aber hat man es bei vielen, wenn nicht den meisten elektrostatischen Problemen mit endlichen Raumgebieten zu tun, in denen sich Ladungen befinden (oder auch nicht), wobei an den Randflächen vorgegebene Bedingungen zu erfüllen sind. Diese Randbedingungen können durch geeignete Ladungsverteilungen außerhalb des interessierenden Raumgebiets (u.U. im Unendlichen) simuliert werden. Aber dann wird der Ausdruck (1.17) – abgesehen von besonders einfachen Fällen (in denen sich z. B. die Methode der Spiegelladungen anwenden lässt) – zur Berechnung des Potentials ungeeignet.

Um Randbedingungen in den Griff zu bekommen, müssen wir einige zusätzliche mathematische Hilfsmittel entwickeln, nämlich die nach George Green (1824) benannten Green'schen Identitäten. Sie folgen aus einer einfachen Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, d^3x = \oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, da$$

der bekanntlich für ein Vektorfeld \mathbf{A} gilt, das in dem von einer geschlossenen Fläche S begrenzten Volumen V definiert ist. Ist nun $\mathbf{A} = \phi \nabla \psi$ mit beliebigen skalaren Feldern ϕ und ψ , dann gilt zunächst

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi \tag{1.32}$$

und

$$\phi \nabla \psi \cdot \mathbf{n} = \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \tag{1.33}$$

wobei $\partial/\partial n$ die Ableitung in Richtung der (äußeren) Normalen von S bedeutet. Setzt man (1.32) und (1.33) in den Gauß'schen Integralsatz ein, so erhält man die *erste Green'sche Identität*

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) d^3x = \oint_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} da \quad (1.34)$$

Vertauscht man in dieser Gleichung ϕ mit ψ und subtrahiert die resultierende Gleichung von der ursprünglichen, so fallen die Terme mit $\nabla \phi \cdot \nabla \psi$ heraus, und als Ergebnis erhält man die *zweite Green'sche Identität*

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) d^3x = \oint_S \left[\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] da \quad (1.35)$$

die auch *Green'scher Satz* genannt wird.

Die Poissonsche Differentialgleichung für das Potential kann in eine Integralgleichung verwandelt werden, indem man für ψ eine spezielle Funktion wählt, nämlich $1/R \equiv 1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, wobei \mathbf{x} der Aufpunkt und \mathbf{x}' die Integrationsvariable ist. Ferner setzen wir $\phi = \Phi$ mit dem skalaren Potential Φ und benutzen $\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho$. Aus (1.31) wissen wir nun, dass $\nabla^2(1/R) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ ist. Daher führt (1.35) zu der Gleichung

$$\int_V \left[-4\pi\Phi(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \frac{1}{\epsilon_0 R} \rho(\mathbf{x}') \right] d^3x' = \oint_S \left[\Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right] da'$$

Liegt \mathbf{x} innerhalb von V , so ergibt sich hieraus:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{R} d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n'} - \Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{R} \right) \right] da' \quad (1.36)$$

Für außerhalb von V liegende Punkte \mathbf{x} verschwindet die linke Seite von (1.36)⁶. (Man beachte, dass dies konsistent ist mit der Interpretation des Oberflächenintegrals als Potential einer Flächenladungsdichte $\sigma = \epsilon_0 \partial\Phi/\partial n'$ und einer Doppelschicht vom Moment $D = -\epsilon_0 \Phi$. Die durch (1.22) und (1.27) beschriebenen Unstetigkeiten des elektrischen Feldes bzw. Potentials beim Durchgang durch eine Flächenladung führen dann zu einem verschwindenden Potential außerhalb des Volumens V .)

Zwei Bemerkungen zu dem Ergebnis (1.36) seien hier noch angefügt. Zunächst: rückt die Fläche S ins Unendliche und fällt das elektrische Feld auf S schneller ab als R^{-1} , dann verschwindet das Oberflächenintegral, und (1.36) reduziert sich auf das bereits bekannte Ergebnis (1.17). Ferner: in (1.36) wird das Potential für ein ladungsfreies Volumen (in dem Φ also Lösung der Laplace'schen Gleichung sein muss) an jedem Punkt innerhalb des Volumens durch seine eigenen Werte und die seiner Ableitung in Normalenrichtung allein auf der Randfläche S bestimmt. Diese überraschende Feststellung besagt, dass (1.36) keine Lösung eines Randwertproblems sein kann, sondern nur eine Integralbeziehung für Φ , da die willkürliche Fest-

⁶ Der Leser mag sich daran stoßen, dass die Art und Weise, wie wir (1.36) hergeleitet haben, nicht ganz legal war, da ja $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ im Innern von V singular werden kann. Um streng zu sein, hätte man einen Grenzprozess vornehmen müssen und – wie schon im vorigen Abschnitt – den Punkt $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ durch eine kleine Kugel vom Integrationsgebiet ausschließen müssen. Auch in diesem Fall aber würde man zu Gl. (1.36) gelangen.

legung sowohl von Φ als auch von $\partial\Phi/\partial n$ (*Cauchy'sche Randbedingungen*) eine Überbestimmung des Problems darstellt. Diesen Punkt werden wir in den nächsten Abschnitten ausführlich besprechen. Dort werden wir Techniken entwickeln, die bei Verwendung des Green'schen Satzes (1.35) zu Lösungen von Problemen mit geeigneten Randbedingungen führen.

1.9 Eindeutigkeit der Lösung mit Dirichlet'scher oder Neumann'scher Randbedingung

Es erhebt sich die Frage, inwieweit Randbedingungen für die Poisson'sche (oder Laplace'sche) Gleichung geeignet sind, um zu eindeutigen und physikalisch vernünftigen Lösungen innerhalb eines begrenzten Raumgebietes zu führen. Die physikalische Erfahrung lässt vermuten, dass die Festlegung des Potentials auf einer geschlossenen Fläche (z. B. eines Systems von Leitern, die auf verschiedenen Potentialen gehalten werden) ein eindeutiges Potentialproblem definiert. Dieses Problem wird *Dirichlet'sches Problem* oder auch *Dirichlet'sches Randwertproblem* genannt. In ähnlicher Weise darf man vermuten, dass die Festlegung des (aus einer gegebenen Flächenladungsdichte resultierenden) elektrischen Feldes (d. h. der Ableitung des Potentials in Normalenrichtung) auf jedem Punkt der Fläche ebenfalls ein eindeutiges Problem definiert. Die Vorgabe der Ableitung des Potentials in Normalenrichtung bezeichnet man als *Neumann'sche Randbedingung*. Die Richtigkeit unserer Vermutungen wollen wir jetzt mithilfe der ersten Green'schen Identität beweisen.

Zunächst wollen wir die Eindeutigkeit der Lösung der Poisson'schen Gleichung $\nabla^2\Phi = -\rho/\epsilon_0$ innerhalb eines Volumens V zeigen, dessen geschlossene Begrenzungsfläche S der Dirichlet'schen oder Neumann'schen Randbedingung unterliegt. Wir nehmen dazu an, es gebe – im Gegenteil – zwei Lösungen Φ_1 und Φ_2 , die beide dieselben Randbedingungen erfüllen. Es sei dann

$$U = \Phi_2 - \Phi_1 \quad (1.37)$$

Innerhalb von V gilt dann $\nabla^2 U = 0$, und auf S ist $U = 0$ oder $\partial U/\partial n = 0$, je nachdem, ob die Dirichlet'sche oder Neumann'sche Randbedingung vorliegt. Aus der ersten Green'schen Identität (1.34) mit $\phi = \psi = U$ folgt dann:

$$\int_V (U \nabla^2 U + \nabla U \cdot \nabla U) d^3x = \oint_S U \frac{\partial U}{\partial n} da \quad (1.38)$$

Aufgrund der speziellen Eigenschaften von U reduziert sich dies (für beide Arten von Randbedingungen) auf

$$\int_V |\nabla U|^2 d^3x = 0$$

Dies bedeutet $\nabla U = 0$, und damit ist U im Innern von V konstant. Bei Dirichlet'scher Randbedingung ist $U = 0$ auf S und somit $\Phi_1 = \Phi_2$ innerhalb von V . D. h. die Lösung ist eindeutig. Ähnlich findet man auch im Fall der Neumann'schen Randbedingung, dass die Lösung – abgesehen von einer unwichtigen, willkürlichen additiven Konstanten – eindeutig ist.

Aus der rechten Seite von (1.38) geht hervor, dass das gemischte Randwertproblem (von Dirichlet'schem Typ auf einem Teil von S und von Neumann'schem Typ auf dem Rest) ebenfalls eine eindeutige Lösung besitzt.

Es ist aber klar, dass die Poisson'sche Gleichung bei willkürlich vorgegebenen Werten von Φ und $\partial\Phi/\partial n$ auf einer geschlossenen Berandungsfläche (*Cauchy'sche Randbedingungen*) keine Lösung besitzt, da die Lösungen mit Dirichlet'scher und Neumann'scher Randbedingung separat eindeutig und im Allgemeinen nicht miteinander verträglich sind. Dies lässt sich mithilfe von Gl. (1.36) unmittelbar nachweisen. Setzt man dort auf der rechten Seite für Φ und $\partial\Phi/\partial n$ willkürliche Werte ein, so kann man zeigen, dass die Werte von $\Phi(\mathbf{x})$ und $\nabla\Phi(\mathbf{x})$ im allgemeinen unverträglich mit den vorausgesetzten Randbedingungen werden, sobald sich \mathbf{x} der Randfläche nähert. Die Frage, ob die Cauchy'schen Randbedingungen auf einer *offenen* Fläche ein eindeutiges elektrostatisches Randwertproblem definieren, erfordert eine gründlichere Diskussion, als wir sie hier geben können. Für ein eingehendes Studium dieses Problems empfehlen wir dem Leser die Bücher von *Morse und Feshbach*, Abschn. 6.2, S. 692–706 oder *Sommerfeld, Partielle Differentialgleichungen der Physik*, Kap. II. Abschließend stellen wir fest, dass die elektrostatischen Probleme dadurch ausgezeichnet sind, dass in ihnen jeweils Dirichlet'sche oder Neumann'sche Randbedingungen auf einer geschlossenen Fläche (die natürlich teilweise oder auch vollständig im Unendlichen liegen kann) zu erfüllen sind.

1.10 Formale Lösung des elektrostatischen Randwertproblems mithilfe der Green'schen Funktion

Die Lösungen der Poisson'schen oder Laplace'schen Gleichung in einem endlichen Volumen V mit Dirichlet'scher oder Neumann'scher Randbedingung auf der V begrenzenden Fläche S lassen sich mithilfe des Green'schen Satzes (1.35) und der sog. Green'schen Funktion ermitteln.

Um zu dem Ausdruck (1.36) zu gelangen (der nicht Lösung eines Randwertproblems ist), wählen wir für ψ das Potential einer Punktladung, nämlich $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, das der Gleichung

$$\nabla'^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1.31)$$

genügt. Die Funktion $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ hängt von zwei Argumenten ab, den Variablen \mathbf{x} und \mathbf{x}' . Sie ist ein Beispiel für die soeben erwähnten *Green'schen Funktionen*, die allgemein der Gleichung

$$\nabla'^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1.39)$$

gehörchen, wobei

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (1.40)$$

ist. Die Funktion F genügt dabei innerhalb des Volumens V der Laplace'schen Gleichung:

$$\nabla^2 F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0 \tag{1.41}$$

Um die an Φ oder $\partial\Phi/\partial n$ gestellten Randbedingungen zu erfüllen, greifen wir auf (1.36) zurück. Wie oben bereits ausgeführt, stellt (1.36) keine Lösung dar, die dem richtigen Typ von Randbedingung genügt, da sowohl Φ wie $\partial\Phi/\partial n$ im Oberflächenintegral auftreten. Bestenfalls handelt es sich um eine Integralbeziehung für Φ . Mit dem allgemeinen Konzept einer Green'schen Funktion und ihrer zusätzlichen Freiheit [über die Funktion $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$] taucht die Möglichkeit auf, den Green'schen Satz mit $\psi = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ zu benutzen und durch geeignete Wahl von $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ eines der beiden Oberflächenintegrale zu eliminieren, um zu einem Ergebnis zu gelangen, das der Dirichlet'schen oder Neumann'schen Randbedingung genügt. Hinge $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ von der genauen Form der Randbedingungen ab, so wäre diese Methode natürlich von wenig allgemeinem Wert. Wie wir aber sogleich sehen werden, ist dies nicht der Fall, da $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ auf S relativ einfachen Randbedingungen genügt.

Wendet man den Green'schen Satz (1.35) für $\phi = \Phi$ und $\psi = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ an, so erhält man bei Beachtung der für G geltenden Gl. (1.39) folgende Verallgemeinerung von (1.36):

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' \\ & + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial\Phi}{\partial n'} - \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} \right] da' \end{aligned} \tag{1.42}$$

Die Freiheit in der durch (1.40) definierten Green'schen Funktion bedeutet, dass wir das Oberflächenintegral allein von der gewählten Art von Randbedingung abhängig machen können. Dementsprechend fordern wir für *Dirichlet'sche Randbedingungen*

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0 \quad \text{für Punkte } \mathbf{x}' \text{ auf } S \tag{1.43}$$

Der erste Term im Oberflächenintegral in (1.42) verschwindet dann, und die Lösung lautet:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G_D}{\partial n'} da' \tag{1.44}$$

Bei *Neumann'schen Randbedingungen* muss man sorgfältiger vorgehen. Die nächstliegende Randbedingung an $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ scheint

$$\frac{\partial G_N}{\partial n'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0 \quad \text{für Punkte } \mathbf{x}' \text{ auf } S$$

zu sein, da dann – wie gefordert – der zweite Term im Oberflächenintegral in (1.42) verschwindet. Doch wendet man den Gauß'schen Satz auf (1.39) an, so sieht man, dass

$$\oint_S \frac{\partial G}{\partial n'} da' = -4\pi$$

ist. Die einfachste, erlaubte Randbedingung an G_N lautet daher:

$$\frac{\partial G_N}{\partial n'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{4\pi}{S} \quad \text{für Punkte } \mathbf{x}' \text{ auf } S \quad (1.45)$$

wenn S den gesamten Flächeninhalt der Randfläche bedeutet. Die Lösung lautet dann:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \langle \Phi \rangle_S + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\partial \Phi}{\partial n'} G_N da' \quad (1.46)$$

wobei $\langle \Phi \rangle_S$ das über die gesamte Oberfläche gemittelte Potential darstellt. Das übliche Neumannsche Problem ist das sog. äußere Problem, in dem das Volumen V von zwei Flächen begrenzt wird, einer geschlossenen, endlichen Fläche und einer anderen, die im Unendlichen liegt. In diesem Fall ist S unendlich; die Randbedingung (1.45) wird homogen, und der Mittelwert $\langle \Phi \rangle_S$ verschwindet.

Wie man sieht, sind die Randbedingungen (1.43) und (1.45), denen die Green'schen Funktionen genügen, tatsächlich einfacher Art und hängen nicht von der detaillierten Form der Dirichlet'schen bzw. Neumann'schen Randwerte ab. Dennoch ist es oft kompliziert (wenn nicht unmöglich), die Funktion $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ zu bestimmen, da sie von der Gestalt von S abhängt. Derartigen Problemen werden wir in Kap. 2 und 3 begegnen.

Für Green'sche Funktionen, die der Dirichlet'schen Randbedingung (1.43) genügen, lässt sich die Symmetriebeziehung $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ nachweisen, und zwar mithilfe des Green'schen Satzes mit $\phi = G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ und $\psi = G(\mathbf{x}', \mathbf{y})$, wo \mathbf{y} die Integrationsvariable ist. Da die Green'sche Funktion, aufgefasst als Funktion einer ihrer Variablen, das Potential einer Punktladung darstellt, bedeutet die Symmetrie nichts anderes als die physikalisch unmittelbar einsichtige Austauschbarkeit von Quell- und Aufpunkt. Für Neumann'sche Randbedingungen folgt die Symmetrie nicht automatisch, kann aber als separate Forderung hinzugefügt werden.⁷

Abschließend sei noch eine wichtige Bemerkung zur physikalischen Bedeutung von $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')/4\pi\epsilon_0$ gemacht. Diese Funktion ist Lösung der Laplace'schen Gleichung innerhalb von V und stellt somit das Potential eines Ladungssystems *außerhalb* von V dar. Man kann $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')/4\pi\epsilon_0$ als das Potential einer äußeren Ladungsverteilung interpretieren, die so gewählt ist, dass die homogenen Randbedingungen verschwindenden Potentials (oder verschwindender Ableitung des Potentials in Normalenrichtung) auf der Fläche S erfüllt sind, wenn das Potential einer Punktladung am Quellpunkt \mathbf{x}' hinzutritt. Da das von der Punktladung herrührende Potential an einem auf der Randfläche gelegenen Punkt \mathbf{x} von der Lage des Quellpunkts abhängt, muss die durch $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ beschriebene äußere Ladungsverteilung ebenfalls vom „Parameter“ \mathbf{x}' abhängen. So gesehen, ist die Methode der Spiegelladungen (die wir in Kapitel 2 beschreiben) ein physikalisches Äquivalent zur Bestimmung einer geeigneten Funktion $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, um den Randbedingungen (1.43) oder (1.45) zu genügen. Für das Dirichlet'sche Problem mit Leitern kann $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ als das Potential einer Flächenladungsdichte interpretiert werden, die auf den Leitern durch Anwesenheit einer Punktladung am Quellpunkt \mathbf{x}' induziert wird.

⁷ Siehe Kim, K.-J. und Jackson, J.D., *Am. J. Phys.* **61**, (12) 1144–1146 (1993).

1.11 Elektrostatische potentielle Energie und Energiedichte; Kapazität

In Abschnitt 5 dieses Kapitels zeigten wir, dass das mit der Ladung multiplizierte Skalarpotential als potentielle Energie interpretiert werden kann. Genauer gesagt: wird eine Punktladung q_i aus dem Unendlichen an den Ort \mathbf{x}_i eines räumlich begrenzten Gebietes gebracht, in dem ein durch das skalare (im Unendlichen verschwindende) Potential Φ beschriebenes elektrisches Feld herrscht, dann ist die an der Ladung geleistete Arbeit (und damit deren potentielle Energie) gegeben durch

$$W_i = q_i \Phi(\mathbf{x}_i) \quad (1.47)$$

Das Potential Φ kann man sich erzeugt denken aus einem System von $(n-1)$ Ladungen q_j ($j = 1, 2, \dots, n-1$) an den Orten \mathbf{x}_j . Dann ist

$$\Phi(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \quad (1.48)$$

und somit die potentielle Energie der Ladung q_i :

$$W_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \quad (1.49)$$

Die *gesamte* potentielle Energie aller miteinander wechselwirkender Ladungen berechnet sich zu

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j<i}^n \frac{q_i q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \quad (1.50)$$

Dies erkennt man unmittelbar, wenn man die einzelnen Ladungen sukzessiv in das betrachtete Raumgebiet bringt. Einen symmetrischeren Ausdruck erhält man, indem man über alle i und j uneingeschränkt summiert und anschließend durch 2 dividiert:

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \quad (1.51)$$

Natürlich sind hierbei die Terme mit $i = j$ (unendliche „Selbstenergie“-Terme) aus der Doppelsumme auszuschließen.

Für kontinuierliche Ladungsverteilungen [oder Delta-funktionsartige Ladungsverteilungen wie (1.6)] nimmt die potentielle Energie die Form

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int \int \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x d^3x' \quad (1.52)$$

an. Einen anderen, hierzu äquivalenten Ausdruck findet man, wenn man berücksichtigt, dass eines der beiden Integrale in (1.52) gerade das Skalarpotential (1.17) ist. Man kann daher auch schreiben:

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) d^3x \quad (1.53)$$

Die Gln. (1.51), (1.52) und (1.53) stellen die elektrostatische potentielle Energie in Abhängigkeit vom Relativabstand der Ladungen dar, und die Betonung liegt bei ihnen auf der Coulomb'schen Wechselwirkung der Teilchen. Eine andere, sehr fruchtbare Alternative hierzu besteht darin, das Hauptgewicht auf das elektrische Feld zu legen und die Energie als im elektrischen Feld der Ladungen gespeichert zu betrachten. Um einen entsprechenden Ausdruck zu erhalten, machen wir von der Poisson'schen Gleichung Gebrauch, um so die Ladungsdichte aus (1.53) zu eliminieren:

$$W = \frac{-\epsilon_0}{2} \int \Phi \nabla^2 \Phi d^3x$$

Partielle Integration führt dann auf

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\nabla\Phi|^2 d^3x = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\mathbf{E}|^2 d^3x \quad (1.54)$$

wobei die Integration über den gesamten Raum zu erstrecken ist. In der letzten Gleichung besteht kein expliziter Bezug mehr zu Ladungen: Die Energie wird ausgedrückt durch ein über den gesamten Raum erstrecktes Integral des Betragsquadrats des elektrischen Feldes. Dies führt in natürlicher Weise zur Identifikation des Integranden

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 \quad (1.55)$$

als Energiedichte.

Der Ausdruck (1.55) zeichnet sich dadurch aus, dass er für die Energiedichte stets einen positiv-definiten Wert liefert. Mithin kann sein Volumenintegral nie negativ werden. Dies scheint in Widerspruch zu stehen zu dem Eindruck, den (1.51) erweckt, dass nämlich die potentielle Energie von zwei Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens negativ ist. Die Ursache dieses scheinbaren Widerspruchs ist darin zu suchen, dass (1.54) und (1.55) „Selbstenergie“-Beiträge zur Energiedichte enthalten, während diese in der Doppelsumme (1.51) nicht auftreten. Zur Illustration betrachte man zwei Punktladungen q_1 und q_2 an den Orten \mathbf{x}_1 bzw. \mathbf{x}_2 (vgl. Abb. 1.8). Das elektrische Feld am Punkt P mit der Koordinate \mathbf{x} ist

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_2|^3}$$

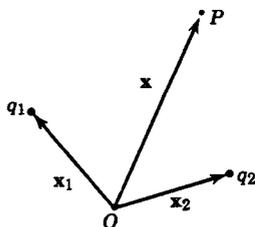


Abb. 1.8

und die Energiedichte (1.55) wird damit

$$32\pi^2 \epsilon_0 w = \frac{q_1^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^4} + \frac{q_2^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^4} + 2 \frac{q_1 q_2 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^3} \quad (1.56)$$

Die ersten beiden Terme sind natürlich „Selbstenergie“-Beiträge. Um zu zeigen, dass der dritte Term für die potentielle Energie der Wechselwirkung das richtige Ergebnis liefert, integrieren wir über den gesamten Raum:

$$W_{int} = \frac{q_1 q_2}{16\pi^2 \epsilon_0} \int \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^3} d^3x \quad (1.57)$$

Der Übergang zur Integrationsvariablen $\boldsymbol{\rho} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)/|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ führt auf

$$W_{int} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} \times \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\rho} \cdot (\boldsymbol{\rho} + \mathbf{n})}{\rho^3 |\boldsymbol{\rho} + \mathbf{n}|^3} d^3\rho \quad (1.58)$$

wobei \mathbf{n} ein Einheitsvektor in Richtung von $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ ist. Berücksichtigt man, dass $(\boldsymbol{\rho} + \mathbf{n})/|\boldsymbol{\rho} + \mathbf{n}|^3 = -\nabla_{\boldsymbol{\rho}}(1/|\boldsymbol{\rho} + \mathbf{n}|)$ ist, so ist leicht nachzuweisen, dass das Volumenintegral den Wert 4π besitzt und sich somit die Wechselwirkungsenergie auf den erwarteten Wert reduziert.

Die zwischen geladenen Körpern wirkende Kraft lässt sich berechnen, indem man die Änderung der elektrostatischen Energie berechnet, die sich bei virtuellen Verschiebungen der Ladungen einstellt. Beispiele hierzu bringen wir in den Übungen. Es ist dabei stets darauf zu achten, dass man die Energie in einer Form darstellt, die klar erkennen lässt, welche Faktoren bei einer Konfigurationsänderung variieren und welche konstant bleiben.

Ein Beispiel möge dies illustrieren. Wir berechnen die Kraft, die pro Flächeneinheit auf die mit einer Flächenladungsdichte $\sigma(\mathbf{x})$ belegte Oberfläche eines Leiters wirksam wird. In der unmittelbaren Umgebung der Leiteroberfläche ist die Energiedichte:

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 = \sigma^2/2\epsilon_0 \quad (1.59)$$

Wird nun ein Element Δa der Leiteroberfläche um eine kleine Strecke Δx nach außen verrückt, so nimmt die elektrostatische Energie um einen Betrag ab, der gegeben ist durch das Produkt aus der Energiedichte und dem überstrichenen Volumen $\Delta x \Delta a$:

$$\Delta W = -\sigma^2 \Delta a \Delta x/2\epsilon_0 \quad (1.60)$$

Dies bedeutet, dass die nach außen gerichtete Kraft pro Flächeneinheit an der Leiteroberfläche gleich $\sigma^2/2\epsilon_0 = w$ ist. Normalerweise leitet man dieses Ergebnis her, indem man das Produkt aus der Flächenladungsdichte und dem elektrischen Feld bildet und letzteres über das von einem Flächenladungselement hervorgerufene elektrische Feld eliminiert.

Für ein System aus n Leitern (im sonst leeren Raum) mit den Potentialen V_i und den Gesamtladungen Q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) lässt sich die elektrostatische potentielle Energie allein durch die Potentiale und gewisse geometrische Größen ausdrücken, die man *Kapazitätskoeffizienten* nennt. Für eine gegebene Konfiguration von Leitern

bedeutet die lineare Abhängigkeit des Potentials von der Ladungsdichte, dass das Potential des i -ten Leiters in der Form

$$V_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} Q_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

geschrieben werden kann, wobei die p_{ij} von der Geometrie der Leiter abhängen. Diese n Gleichungen lassen sich nach der Ladung des i -ten Leiters auflösen:

$$Q_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} V_j \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.61)$$

Jede der n Ladungen Q_i ist also eine lineare Funktion aller auf den Leitern herrschenden Potentiale. Die Koeffizienten C_{ij} heißen *Kapazitäten*, während die C_{ij} mit $i \neq j$ *Kapazitätskoeffizienten* genannt werden. *Die Kapazität eines Leiters ist somit gleich der Gesamtladung, die sich auf ihm befindet, wenn er auf dem Einheitspotential gehalten wird und alle anderen Leiter sich auf dem Potential Null befinden.* Manchmal wird die Kapazität eines Leitersystems auch anders definiert. So definiert man z. B. die Kapazität zweier Leiter, die – bei Abwesenheit anderer geerdeter Leiter – entgegengesetzt gleiche Ladungen tragen, als das Verhältnis der Ladung auf dem einen Leiter zur Potentialdifferenz zwischen den Leitern. Die Gleichungen (1.61) können dann dazu benutzt werden, um diese Kapazität durch die Koeffizienten C_{ij} auszu-drücken.

Für die potentielle Energie (1.53) eines Leitersystems ergibt sich nach (1.61):

$$W = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n Q_j V_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} V_i V_j \quad (1.62)$$

Diese Formel, die die Energie durch die Potentiale V_i und die Kapazitätskoeffizienten C_{ij} bzw. durch die Ladungen Q_i und die Koeffizienten p_{ij} ausdrückt, gestattet die Anwendung von Variationsverfahren zur näherungsweise Bestimmung von Kapazitäten. Mithilfe solcher Verfahren lassen sich obere und untere Schranken für die C_{ij} berechnen (vgl. Übg. 1.17 und 1.18), und sogar für relativ komplizierte Leitersysteme ermöglichen sie Kapazitätsabschätzungen mit Angabe der Fehlergrenzen. Die elektronische Rechentechnik macht es schließlich möglich, subtile Versuchsfunktionen mit mehreren Parametern zu verwenden. Es sei jedoch bemerkt, dass die Erfordernis einer Green'schen Funktion, die an der unteren Grenze einer Dirichlet'schen Randbedingung genügt, die Fehlerabschätzung nichttrivial macht. Weiteres zu diesem Verfahren der Kapazitätsberechnung bringen wir in den Übungen am Ende dieses und des nächsten Kapitels.

1.12 Näherungslösung der Laplace'schen und Poisson'schen Gleichung mithilfe von Variationsverfahren

In vielen Bereichen der klassischen Physik und der Quantenmechanik spielen Variationsverfahren eine hervorragende Rolle. Sie liefern einen formalen Weg, um „Bewegungsgleichungen“ herzuleiten, und mit ihrer Hilfe gewinnt man Näherungslösungen und nicht selten sogar die genauen Lösungen bestimmter Probleme, die auf keinem anderen Weg zu erhalten sind. Man denke zum Beispiel an die Resonanzfrequenzen akustischer Resonatoren oder an die Energieeigenwerte atomarer Systeme.

Der Gleichgewichtszustand physikalischer Systeme ist der Zustand minimaler Energie. Dieses grundlegende Prinzip lässt sich erweitern auf energieähnliche Funktionale. Gegeben sei etwa das Funktional

$$I[\psi] = \frac{1}{2} \int_V \nabla\psi \cdot \nabla\psi d^3x - \int_V g\psi d^3x \quad (1.63)$$

wobei $\psi(\mathbf{x})$ innerhalb eines gegebenen Volumens V und auf seiner Oberfläche S (die aus mehreren getrennten Flächen bestehen kann) eine physikalisch sinnvolle Funktion ist und $g(\mathbf{x})$ eine „Quellen“-Funktion darstellt, die in V keine Singularitäten besitzt. Wir untersuchen nun, wie sich das Funktional in erster Näherung bei dem Übergang $\psi \rightarrow \psi + \delta\psi$ ändert, wenn $\delta\psi(\mathbf{x})$ eine infinitesimale Änderung innerhalb von V ist. Die Differenz $\delta I = I[\psi + \delta\psi] - I[\psi]$ ist dann gegeben durch

$$\delta I = \int_V \nabla\psi \cdot \nabla(\delta\psi) d^3x - \int_V g\delta\psi d^3x + \dots \quad (1.64)$$

Der vernachlässigte Anteil ist positiv-semidefinit und von zweiter Ordnung in $\delta\psi$. Aus der ersten Greenschen Identität (1.34) mit $\psi = \psi$ und $\phi = \delta\psi$ erhalten wir:

$$\delta I = \int_V [-\nabla^2\psi - g] \delta\psi d^3x + \oint_S \delta\psi \frac{\partial\psi}{\partial n} da \quad (1.65)$$

Unter der Voraussetzung, dass auf der begrenzenden Oberfläche S $\delta\psi = 0$ ist (so dass das Oberflächenintegral verschwindet), ist die Änderung von $I[\psi]$ in erster Näherung gleich Null, sofern $\psi(\mathbf{x})$ der Bedingung

$$\nabla^2\psi = -g \quad (1.66)$$

genügt. Da der in (1.64) vernachlässigte Anteil positiv-semidefinit ist, folgt, dass $I[\psi]$ ein stationäres Minimum darstellt, wenn ψ im Volumen V einer Differentialgleichung vom Poisson'schen Typ genügt und die Änderungen $\delta\psi$ auf der Randfläche verschwinden. Für $\psi \rightarrow \Phi$ und $g \rightarrow \rho/\epsilon_0$ liefert die Minimierung des Funktionals die „Bewegungsgleichung“ für das elektrostatische Potential bei Anwesenheit einer Ladungsdichte und Dirichlet'schen Randbedingungen (Φ auf S gegeben, so dass dort $\delta\Phi = 0$ ist).

Die Herleitung der Poisson'schen Differentialgleichung aus den Variationsfunktional stellt die mathematisch-formale Seite dar. Nicht weniger wichtig ist der prak-

tische Gesichtspunkt, dass durch die stationäre Eigenschaft des Extremums von $I[\psi]$ eine Näherungslösung für $\psi(\mathbf{x})$ ermöglicht wird. Wir wählen eine flexible „Versuchs“-Funktion $\psi(\mathbf{x}) = A\Psi(\mathbf{x}, \alpha, \beta, \dots)$, die von einer Normierungskonstanten A und einer Anzahl von Parametern α, β, \dots abhängt und so konstruiert werden muss, dass sie den gegebenen Randbedingungen auf der Oberfläche S genügt. Die Funktion Ψ kann sich aus einer Summe von Ausdrücken mit den Parametern als Koeffizienten zusammensetzen oder eine einzige Funktion mehrerer Parameter sein. Sie sollte im Hinblick auf die zu erwartende Form der Lösung gewählt werden. (Hier kommt es auf Intuition an!) Die Berechnung von $I[\psi]$ ergibt die Funktion $I(A, \alpha, \beta, \dots)$. Anschließend variiert man die Parameter, um das Extremum von $I(A, \alpha, \beta, \dots)$ (hier ein Minimum) zu finden. Mit den optimierten Parametern ergibt sich aus der Versuchsfunktion – für die einmal gewählte Funktionsform – die bestmögliche Näherung für die tatsächliche Lösung. Im Falle der Laplace’schen Gleichung wird die Normierungskonstante durch die Dirichlet’schen Randwerte von ψ bestimmt. Für die Poisson’sche Gleichung ergibt sie sich, ebenso wie die Randwerte auf S , aus der Quellstärke $g(\mathbf{x})$.

Bei Neumann’schen Randbedingungen braucht man ein anderes Funktional. Die Randbedingungen für ψ seien gegeben durch $\partial\psi/\partial n|_S = f(\mathbf{s})$, wobei \mathbf{s} auf einen Punkt der Randfläche S zeigt. Das geeignete Funktional ist dann

$$I[\psi] = \frac{1}{2} \int_V \nabla\psi \cdot \nabla\psi d^3x - \int_V g\psi d^3x - \oint_S f\psi da \quad (1.67)$$

Die gleichen Schritte wie oben führen für $\psi \rightarrow \psi + \delta\psi$ zu der folgenden Differenz erster Ordnung:

$$\delta I = \int_V [-\nabla^2\psi - g] \delta\psi d^3x + \oint_S \left(\frac{\partial\psi}{\partial n} - f(\mathbf{s}) \right) \delta\psi da \quad (1.68)$$

Die Forderung, dass δI unabhängig von $\delta\psi$ verschwinden soll, bedeutet:

$$\nabla^2\psi = -g \text{ innerhalb von } V \quad \text{und} \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = f(\mathbf{s}) \text{ auf } S \quad (1.69)$$

Wiederum stellt das Funktional ein stationäres Minimum dar, wenn ψ die Bedingung (1.69) erfüllt. Näherungslösungen können – genauso, wie oben für Dirichlet’sche Randbedingungen beschrieben – mithilfe von Versuchsfunktionen gefunden werden.

Als einfache Anwendung zur Poisson’schen Gleichung betrachte man das zwei-dimensionale Problem eines um die z -Achse zentrierten hohlen Kreiszylinders vom Radius Eins mit einer inneren, azimutalsymmetrischen und von z unabhängigen Queldichte $g(\mathbf{x}) = g(\rho)$. Das Potential verschwindet für $\rho = 1$. Für ψ (eine nur von ρ abhängige Funktion) ergibt sich als „Bewegungsgleichung“ in Polarkoordinaten:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial\psi}{\partial \rho} \right) = -g(\rho) \quad (1.70)$$

Als Versuchsfunktionen betrachten wir Polynome nicht zu hohen Grades in $(1 - \rho)$ und in ρ . Eine dreiparametrische Funktion des ersten Typs ist

$$\Psi_1 = \alpha_1(1 - \rho) + \beta_1(1 - \rho)^2 + \gamma_1(1 - \rho)^3 \quad (1.71)$$

Diese Wahl mag zwar naheliegend erscheinen, weil sie automatisch die Randbedingung bei $\rho = 1$ erfüllt. Sie hat aber den Nachteil, dass sie eine weniger genaue Darstellung von ψ liefert als Polynome in ρ . Der Grund dafür ist darin zu suchen, dass nach dem Gauß'schen Satz, wenn die Quelledichte g im Ursprung einen endlichen Wert hat, ψ dort ein Maximum oder Minimum, also die Steigung Null haben muss. Die beiden Forderungen an ψ , sowohl im Ursprung als auch bei $\rho = 1$, werden von dem dreiparametrischen Versuchspolynom

$$\Psi_2 = \alpha\rho^2 + \beta\rho^3 + \gamma\rho^4 - (\alpha + \beta + \gamma) \quad (1.72)$$

erfüllt. Man darf erwarten, dass diese Versuchsfunktion im allgemeinen eine bessere Näherung für g darstellt als die Funktion Ψ_1 mit derselben Anzahl von Variationsparametern. [Natürlich könnten wir an (1.71) zusätzlich die Forderung $\alpha_1 + 2\beta_1 + 3\gamma_1 = 0$ stellen, um das richtige Verhalten im Ursprung zu erzwingen; aber damit würde die Anzahl der Parameter von 3 auf 2 reduziert werden.]

Das Funktionalintegral für Ψ_2 ergibt sich zu

$$\frac{1}{2\pi} I[\Psi_2] = \left[\frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{6}{5} \alpha\beta + \frac{4}{3} \alpha\gamma + \frac{3}{4} \beta^2 + \frac{12}{7} \beta\gamma + \gamma^2 \right] - [e_2\alpha + e_3\beta + e_4\gamma] \quad (1.73)$$

wobei $e_n = \int_0^1 g(\rho)(\rho^n - 1)\rho d\rho$ ist.

Für Ψ_1 hat das Funktionalintegral die gleiche Form wie (1.73), aber andere Koeffizienten. Wie oben beschrieben, suchen wir von (1.73) ein Extremum auf, indem wir die partiellen Ableitungen nach den Parametern α, β und γ gleich Null setzen. Aus dem resultierenden linearen Gleichungssystem ergeben sich die „Optimalwerte“

$$\begin{aligned} \alpha &= 225e_2 - 420e_3 + 210e_4 \\ \beta &= -420e_2 + \frac{2450}{3}e_3 - 420e_4 \\ \gamma &= 210e_2 - 420e_3 + \frac{441}{2}e_4 \end{aligned} \quad (1.74)$$

Diese Werte kann man in (1.73) einsetzen, um $I[\Psi_2]_{min}$ als Funktion der e_n zu erhalten. Aber diese Funktion ist nicht sehr aussagekräftig. Man würde nur erkennen, dass der „kinetische“ (erste) Klammerausdruck den halben Wert des zweiten, „potentiellen“ Klammerausdrucks hat und das umgekehrte Vorzeichen aufweist – ein Charakteristikum des Extremums.

Um konkret zu werden, müssen wir jetzt noch $g(\rho)$ spezifizieren. Als Beispiel wählen wir die Quelledichte

$$g(\rho) = -5(1 - \rho) + 10^4\rho^5(1 - \rho)^5 \quad (1.75)$$

Die entsprechenden Ergebnisse für die optimalen Versuchsfunktionen Ψ_1 und Ψ_2 zeigt Abb.1.9. Die im Prinzip beliebige Quelledichte wurde so gewählt, dass sie ein nicht völlig strukturloses Potential ergibt. Die „optimalen“ Parameter für Ψ_2 sind $\alpha = 2,915$, $\beta = -7,031$ und $\gamma = 3,642$. Das Variationsintegral hat den Wert $I[\Psi_2]_{min} = -1,5817$, was zu vergleichen ist mit dem exakten Wert $I[\psi]_{exakt} = -1,6017$. Der relative Fehler beträgt 1,3%.

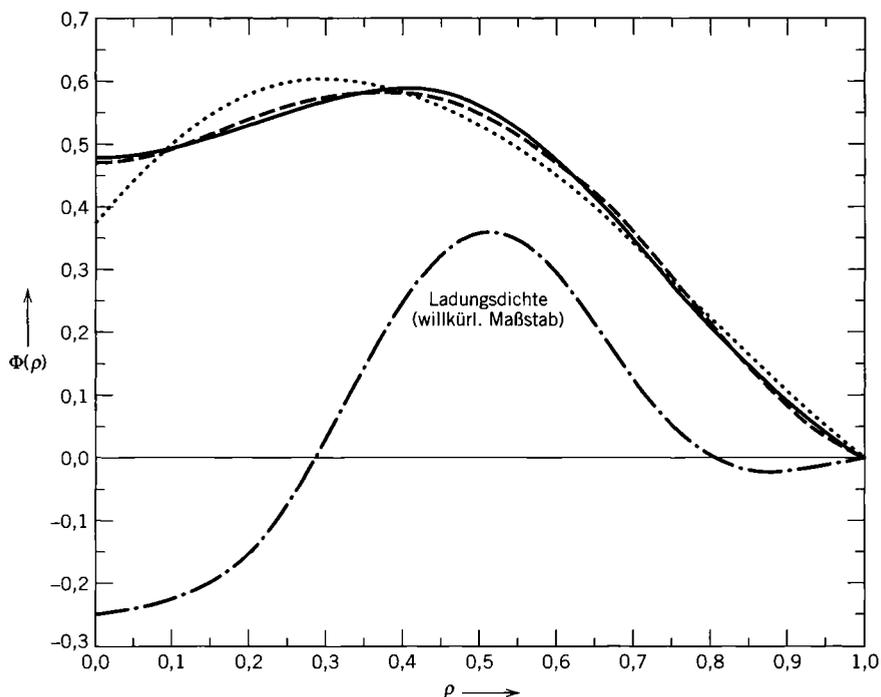


Abb. 1.9 Vergleich der exakten Lösung $\psi(\rho)$ (durchgezogene Kurve) mit zwei Variationsnäherungen für das Potential, ψ_1 (punktierte Kurve) und ψ_2 (gestrichelte Kurve). Die Ladungsdichte (1.75) ist in willkürlichem Maßstab wiedergegeben (strichpunktierte Kurve).

Man beachte, dass die Versuchsfunktion Ψ_1 für $\rho < 0,3$ eine ziemlich schlechte Näherung darstellt, weil bei ihr nicht berücksichtigt wurde, dass die Steigung bei $\rho = 0$ verschwinden muss. Dennoch liefert sie mit $I[\Psi_1]_{min} = -1,5136$ ein Resultat, das kaum schlechter (mit einem relativen Fehler von 5,5%) ausfällt als das Ergebnis für Ψ_2 . In der Unempfindlichkeit von $I[\psi]$ gegenüber der Wahl der Versuchsfunktion liegt eine Stärke, aber auch eine Schwäche der Variationsmethode. Sie bewährt sich prinzipiell bei der Bestimmung von Eigenwerten, die mit dem Wert von $I[\Psi]$ verknüpft sind. Wenn es dagegen um eine Näherungslösung für $\psi \approx \Psi$ geht, kann sie – zumindest in Teilbereichen des Konfigurationsraumes – grob versagen.

Aus Gl.(1.70) erkennt man, dass eine Queldichte in Form eines Polynoms zu einem exakten Lösungspolynom für ψ führt; uns ging es aber in erster Linie um die Variationsmethode selbst und nicht darum, eine ganze Klasse expliziter Lösungen aufzuzeigen. Weitere Beispiele bringen wir in den Aufgaben am Ende dieses Kapitels und späterer Kapitel.

1.13 Relaxationsmethode zur Lösung zweidimensionaler Probleme der Elektrostatik

Die Relaxationsmethode (gelegentlich auch „iterative Methode finiter Differenzen“ genannt) ist ein iteratives Verfahren zur Lösung der Laplace’schen oder Poisson’schen Gleichung in zwei Dimensionen. Wir stellen hier nur das Prinzip dieses Verfahrens und seinen Zusammenhang mit der Variationsmethode dar. Zunächst betrachten wir die Laplace’sche Gleichung bei Dirichlet’schen Randbedingungen in einem zweidimensionalen Bereich S mit der Berandungskurve C . Wir denken uns den Bereich S von einem quadratischen Gitter mit dem Gitterabstand h überzogen (und die Randkurve C angenähert durch eine Treppenkurve, die die Gitterstellen entlang C miteinander verbindet). Die Gitterstellen bezeichnen wir mit Paaren ganzer Zahlen (i, j) , die hier die Rolle der unabhängigen Variablen spielen. Die abhängigen Variablen sind die Versuchswerte $\psi(i, j)$ für das Potential an jeder Gitterstelle. Die Potentialwerte an den Randstellen seien vorgegeben.

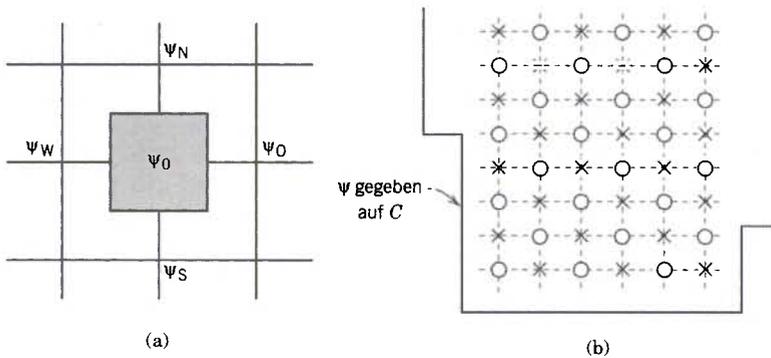


Abb. 1.10 Vergrößerung eines Teilbereichs der Fläche S , über die das Funktionalintegral zu erstrecken ist (schattierte Fläche). Die Versuchswerte für das Potential an den Nachbarstellen sind mit ψ_N , ψ_S , ψ_O und ψ_W bezeichnet, während ψ_O der Wert des Potentials im Mittelpunkt des Teilbereichs ist. (b) Eines der möglichen Iterationsverfahren besteht darin, die Versuchswerte an den Gitterstellen (\circ) durch das Mittel der Werte an den benachbarten Stellen (\times) zu ersetzen.

Um den Zusammenhang mit dem Variationsverfahren herzustellen und ein Iterationsschema zu konstruieren, denken wir uns das Funktionalintegral $I[\psi]$ über S , wie in Abb. 1.10(a) angedeutet, als Summe über kleine Bereiche der Fläche h^2 . Wir betrachten die Versuchswerte für das Potential an benachbarten Punkten als feste Größen, während der Wert im Mittelpunkt eines jeden Teilbereichs die Variationsgröße darstellt, die es zu optimieren gilt. Der Gitterabstand soll so klein sein, dass wir die Ableitungen zum Beispiel im ersten Quadranten, dem „Nord-Ost“-Quadranten, approximieren können durch

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{NO} = \frac{1}{h}(\psi_O - \psi_W); \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{NO} = \frac{1}{h}(\psi_N - \psi_O)$$

und entsprechend in den anderen drei Quadranten. Das Funktionalintegral für den „Nord-Ost“-Quadranten ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned} I_{NO} &= \frac{1}{2} \int_0^{h/2} dx \int_0^{h/2} dy \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] \\ &\approx \frac{1}{8} [(\psi_0 - \psi_N)^2 + (\psi_0 - \psi_O)^2] \end{aligned} \quad (1.76)$$

Für das Integral über den gesamten (schattierten) Teilbereich erhalten wir:

$$I \approx \frac{1}{4} [(\psi_0 - \psi_N)^2 + (\psi_0 - \psi_O)^2 + (\psi_0 - \psi_S)^2 + (\psi_0 - \psi_W)^2] \quad (1.77)$$

Durch Minimieren des Integrals bezüglich ψ_0 ergibt sich der Optimalwert

$$(\psi_0)_{\text{optimal}} = \frac{1}{4} (\psi_N + \psi_O + \psi_S + \psi_W) \quad (1.78)$$

Das Integral erreicht also sein Minimum, wenn ψ_0 gleich dem Mittelwert der Werte an den „Kreuz“-Punkten ist.⁸

Betrachten wir nun das gesamte Funktionalintegral, also die Summe der Integrale sämtlicher Teilbereiche. Wir beginnen mit geschätzten Näherungswerten für die $\psi(i, j)$ und bestimmen das Integral $I[\psi]$ in erster Näherung durch die Summe von Ausdrücken der Form (1.77). Dann ersetzen wir, über das ganze Gitter hinweg, die Hälfte der Werte, die zu den in Abb. 1.10(b) durch einen Kreis markierten Stellen gehören, durch das Mittel der Werte an den benachbarten „Kreuz“-Punkten. Der neue Satz von Versuchswerten $\psi(i, j)$ bringt $I[\psi]$ dem gesuchten Minimum und damit der exakten Lösung näher als die ursprünglichen Werte. Tatsächlich braucht man die Mittelwertbildung nicht auf die Hälfte der Gitterpunkte einzuschränken; dies geschah hier nur, um die in Abb. 1.10(a) angedeutete Prozedur einfach zu wiederholen.

Es lassen sich viele Verbesserungen vornehmen. Entscheidend ist dabei die Art der Mittelwertbildung. Anstelle der „Kreuz“-Werte hätten wir auch die „Eck“-Werte des großen Quadrats in Abb. 1.10(a) mitteln können oder auch eine gewichtete Linearkombination aus beiden Mittelwerten bilden können. Ein spezielles gewichtetes Mittel für eine Funktion $F(x, y)$ ist das Folgende (vgl. Übg. 1.22):

$$\langle\langle F(x, y) \rangle\rangle = \frac{4}{5} \langle F \rangle_K + \frac{1}{5} \langle F \rangle_Q \quad (1.79)$$

mit dem „Kreuz“- bzw. „Quadrat“-Mittel

$$\begin{aligned} \langle F(x, y) \rangle_K &= \frac{1}{4} [F(x+h, y) + F(x, y+h) \\ &\quad + F(x-h, y) + F(x, y-h)] \end{aligned} \quad (1.80a)$$

⁸ Die Formel (1.78) heißt auch *Fünf-Punkte-Formel*, weil sie die Potentiale an den fünf Punkten der Abb. 1.10(a) miteinander verknüpft. Den mathematischen Hintergrund der Formel (1.78) und auch der Formel (1.79) bilden die Mittelwertsätze der Potentialtheorie. Vgl. hierzu das Buch von *Lehner* (Kap. 8) (Anm. des Übersetzers).

und

$$\begin{aligned} \langle F(x, y) \rangle_Q = \frac{1}{4} [F(x+h, y+h) + F(x+h, y-h) \\ + F(x-h, y+h) + F(x-h, y-h)] \end{aligned} \quad (1.80b)$$

Falls $F(x, y)$ hinreichend oft differenzierbar ist, lässt sich durch Taylor-Entwicklung zeigen, dass das gewichtete Mittel (1.79) zu

$$\langle\langle F(x, y) \rangle\rangle = F(x, y) + \frac{3}{10} h^2 \nabla^2 F + \frac{1}{40} h^4 \nabla^2 (\nabla^2 F) + O(h^6) \quad (1.81)$$

führt. Hierbei sind die Laplace-Operatoren, angewandt auf F , auszuwerten an der Stelle (x, y) . Wenn die Funktion $F(x, y)$ eine Lösung der Laplace'schen Gleichung ist, liefert das gewichtete Mittel der Werte an den acht benachbarten Gitterstellen nach (1.79) den Wert von F im Mittelpunkt, und zwar bis auf Korrekturen der Größenordnung h^6 . Ein besseres Iterationsverfahren verwendet anstelle von (1.78), was zu (1.80a) äquivalent ist, $\psi_{neu}(i, j) = \langle\langle \psi(i, j) \rangle\rangle + O(h^6)$. Für das „Kreuz“- oder das „Quadrat“-Mittel beläuft sich der Fehler jeweils auf $O(h^4)$. Dem Gewinn an Genauigkeit bei Verwendung von $\langle\langle \psi \rangle\rangle$ steht ein verdoppelter Rechenaufwand an jeder Gitterstelle gegenüber; für gleiche Genauigkeit benötigt man jedoch wesentlich weniger Gitterpunkte: $\langle\langle N \rangle\rangle = O(\langle N \rangle^{2/3})$, wobei $\langle\langle N \rangle\rangle$ die Zahl der Gitterstellen ist, die für $\langle\langle \psi \rangle\rangle$ gebraucht werden, während $\langle N \rangle$ die Anzahl der Gitterstellen bei „Kreuz“- oder „Quadrat“-Mittlung bezeichnet.

Bei Rechnungen mit der Poisson'schen Gleichung $\nabla^2 \psi = -g$ hat (1.81) einen weiteren Vorteil. Die Terme der Ordnung h^2 und h^4 lassen sich unmittelbar durch die gegebene Ladungsdichte bzw. durch die einfachste Näherung für den auf sie angewandten Laplace-Operator ausdrücken. Der neue Wert der Versuchsfunktion am Gitterpunkt (i, j) ergibt sich zu

$$\psi_{neu}(i, j) = \langle\langle \psi(i, j) \rangle\rangle + \frac{h^2}{5} g(i, j) + \frac{h^2}{10} \langle g(i, j) \rangle_K + O(h^6) \quad (1.82)$$

wobei $\langle g \rangle_K$ das „Kreuz“-Mittel von g gemäß (1.80a) bedeutet.

Die iterative numerische Lösung der zweidimensionalen Laplace'schen oder Poisson'schen Gleichung bei Dirichlet'schen Randbedingungen erfordert grundsätzlich folgende Schritte:

1. Man wählt einen Gitterabstand h und bezeichnet die Gitterstellen – einschließlich derjenigen auf der Randkurve – nach Belieben [hier (i, j)].
2. Die Werte des Potentials an den Randstellen werden in eine Tabelle eingetragen, die auch die anderen Potentialwerte enthält (vgl. Schritt 3).
3. Die Werte des Potentials an den inneren Gitterpunkten – wir bezeichnen sie mit $\Phi_{alt}(i, j)$ – werden geschätzt. Am einfachsten ist es, für alle Punkte denselben Wert zu wählen. Diese Werte werden ebenfalls in die Tabelle eingetragen, und zwar in einer Spalte „Startwerte“.
4. Im ersten Iterationsschritt werden die Gitterpunkte systematisch, eine nach der anderen, durchlaufen und nach (1.79) oder nach einer der Formeln (1.80) die $\langle\langle \Phi(i, j) \rangle\rangle$ berechnet. Diese Werte [oder, im Fall der Poisson'schen Gleichung, die nach (1.82) berechneten Werte] werden als $\Phi_{neu}(i, j)$ in eine Tabelle „neuer“

Potentialwerte an jedem Gitterpunkt eingetragen. Man beachte, dass die Gitterpunkte in der Nähe der Randkurve von den gegebenen Randwerten profitieren, sodass ihre $\langle\langle\Phi\rangle\rangle$ -Werte tendenziell sofort näher an den endgültigen Werten liegen, als es bei den inneren Punkten der Fall ist. Mit jedem Iterationsschritt breitet sich die Genauigkeit vom Rand her ins Innere weiter aus.

5. Wenn alle Gitterstellen bearbeitet sind, werden die Werte $\Phi_{alt}(i, j)$ durch einen Satz neuer Werte $\Phi_{neu}(i, j)$ ersetzt und der nächste Iterationsschritt kann beginnen.
6. Die Iteration wird fortgesetzt, bis der gewünschte Genauigkeitsgrad erreicht ist – also bis zum Beispiel die Differenz zwischen alten und neuen Werten an jeder Stelle im Innern dem Betrag nach kleiner als eine vorgegebene kleine Zahl ist.

Die hier beschriebene Verfahrensweise trägt den Namen *Jacobi-Iteration*. Man braucht für die Werte an den Gitterstellen pro Iterationsschritt zwei Potentialtabellen. Eine einfache Änderung führt zu einem verbesserten Schema, der *Gauß-Seidel-Iteration*: man ersetzt $\Phi_{alt}(i, j)$ durch $\Phi_{neu}(i, j)$, sobald dieser neue Wert berechnet ist. Damit profitiert man noch während des Iterationsschrittes von den verbesserten Werten. $\langle\langle\Phi\rangle\rangle$ wird sich an jedem Gitterpunkt, je nach dem gewählten Weg über das Gitter, typischerweise je zur Hälfte aus alten und aus neuen Werten zusammensetzen. Es gibt viele andere Verbesserungsmöglichkeiten. Sie werden z. B. beschrieben in dem Buch von *Press et al.* („*Numerical Recipes*“) oder in der am Ende dieses Kapitels angegebenen Literatur. Die Relaxationsmethode lässt sich auch, wie in Abschnitt 5.14 kurz skizziert, zur Berechnung magnetischer Felder verwenden.

Literaturhinweise

Eine mathematisch einfache, aber strenge Behandlung der Delta-Funktion enthalten die Bücher von

- Lighthill
- Dennery und Kryzwicki.

Die funktionalanalytischen Aspekte der Delta-Funktion behandeln z. B.

- *Schwartz
- *Constantinescu.

Für das Studium partieller Differentialgleichungen mit verschiedenen Randbedingungen empfehlen wir

- Courant und Hilbert, Bd. II, Kap. III–VI
- Morse und Feshbach, Kap. 6
- *Smirnow, Teil II
- Sommerfeld, *Partielle Differentialgleichungen der Physik*
- *Tychonov und Samarski.

Die allgemeine Theorie Green'scher Funktionen wird eingehend behandelt bei

- Friedman, Kap. 3
- Morse und Feshbach, Kap. 7.

Ausführlichere Darstellungen der allgemeinen Theorie der Elektrostatik enthalten die meisten älteren Lehrbücher. Erwähnenswert unter ihnen sind

- Maxwell, Bd. 1, Kap. II und IV
- Jeans, Kap. II, VI und VII

– Kellogg.

Von den neueren Lehrbüchern, die die allgemeine Theorie der Elektrostatik behandeln, seien erwähnt

- *Simonyi, Kap. 1 und 2
- Stratton, Kap. III und Teile von Kap. II.

Leser, die sich für Variationsverfahren zur Lösung elektromagnetischer Probleme interessieren, verweisen wir auf

- Cairo und Kahan
- Collin, Kap. 4
- *Lehner, Kap. 8
- Sadiku, Kap. 4

und insbesondere auf

- Polya und Szegö

für elegante und leistungsfähige mathematische Verfahren.

Klassische Literaturangaben zu Relaxationsmethoden sind die beiden Bücher von R. V. Southwell:

- *Relaxation Methods in Engineering Science*. Oxford: Oxford University Press 1940.
- *Relaxation Methods in Theoretical Physics*. Oxford: Oxford University Press 1946.

Physiker werden eher zu dem zweiten Buch tendieren, aber auch das erste enthält sehr viel Grundlegendes. Moderne Abhandlungen zu Relaxations- und anderen numerischen Methoden sind die von

- Sadiku
- Zhou.

Übungen

1.1 Mithilfe des Gauß'schen Gesetzes [und eventuell der Gl. (1.21)] beweise man:

(a) Jeder auf einen Leiter gebrachte Ladungsüberschuss verteilt sich vollständig auf dessen Oberfläche. (Ein Leiter enthält definitionsgemäß Ladungen, die sich unter Wirkung eines angelegten elektrischen Feldes frei bewegen können.)

(b) Ein geschlossener, hohler Leiter schirmt sein Inneres gegen Felder ab, die von Ladungen außerhalb des Leiters herrühren, nicht aber sein Äußeres gegen Felder von Ladungen in seinem Innern.

(c) Das elektrische Feld an der Oberfläche eines Leiters steht senkrecht auf ihr und hat den Betrag σ/ϵ_0 , wenn σ die Ladungsdichte pro Flächeneinheit ist.

1.2 Die Dirac'sche Delta-Funktion in drei Dimensionen kann, nach Abschnitt 2 dieses Kapitels, durch die Folge der Gauß-Funktionen

$$D(n; x, y, z) = n^3 \exp[-\pi n^2(x^2 + y^2 + z^2)] \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

realisiert werden. Man betrachte ein allgemeines orthogonales Koordinatensystem, das durch die Flächen $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ und $w = \text{const.}$ und durch die zueinander orthogonalen Linienelemente du/U , dv/V und dw/W gekennzeichnet ist. Unter Verwendung des an obigen Gauß-Funktionen vorzunehmenden Grenzprozesses zeige man, dass

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta(u - u') \delta(v - v') \delta(w - w') \cdot UVW$$

Man beachte, dass man in der Grenze $n \rightarrow \infty$ im Exponenten nur infinitesimal kleine Abstände zwischen zwei Punkten zu betrachten braucht.

1.3 Mithilfe der Dirac'schen Delta-Funktion in geeigneten Koordinaten drücke man die folgenden Ladungsverteilungen als räumliche Ladungsdichten $\rho(\mathbf{x})$ aus.

- (a) Eine über eine Kugelschale vom Radius R gleichmäßig verteilte Ladung Q in Kugelkoordinaten.
- (b) Eine über die Oberfläche eines Zylinders vom Radius b verteilte Ladung λ (pro Längeneinheit) in Zylinderkoordinaten.
- (c) Die über eine flache, infinitesimal dünne Kreisscheibe vom Radius R gleichmäßig verteilte Ladung Q in Zylinderkoordinaten.
- (d) Das gleiche wie in (c), jedoch unter Verwendung von Kugelkoordinaten.

1.4 Gegeben seien drei geladene Kugeln vom Radius a mit der jeweiligen Gesamtladung Q . Die erste von ihnen sei leitend, die zweite enthalte eine über ihr Volumen homogen verteilte Ladungsdichte und die dritte eine kugelsymmetrische Ladungsdichte, die in radialer Richtung wie r^n ($n > -3$) variiert. Mithilfe des Gauß'schen Gesetzes bestimme man die elektrischen Felder innerhalb und außerhalb dieser Kugeln. Ferner skizziere man die Radialabhängigkeit der Felder für die ersten beiden Kugeln und für die dritte im Falle von $n = -2, +2$.

1.5 Das Potential eines neutralen Wasserstoffatoms ist im zeitlichen Mittel durch

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\alpha r}}{r} \left(1 + \frac{\alpha r}{2}\right)$$

gegeben, wobei q der Betrag der Elektronenladung und $\alpha^{-1} = a_0/2$ der durch 2 dividierte Bohr'sche Radius ist. Man bestimme die (kontinuierliche wie auch diskrete) Ladungsverteilung, die dieses Potential erzeugt, und interpretiere das Ergebnis physikalisch.

1.6 Ein einfacher Kondensator besteht aus zwei zueinander parallelen Leitern, die durch einen Isolator voneinander getrennt sind. Bringt man auf die Leiter entgegengesetzt gleiche Ladungen, so stellt sich zwischen den Leitern eine bestimmte Potentialdifferenz ein. Der Quotient aus dem Betrag der Ladung auf dem einen Leiter und dem Betrag der Potentialdifferenz wird Kapazität genannt (und bei Verwendung von SI-Einheiten in Farad gemessen). Mithilfe des Gauß'schen Gesetzes berechne man die Kapazität

- (a) von zwei großen leitenden Platten der Fläche A , die durch einen kleinen Abstand d voneinander getrennt sind;
- (b) von zwei konzentrischen leitenden Kugeln mit den Radien a, b ($b > a$);
- (c) von zwei konzentrischen leitenden Zylindern der Länge L , die im Vergleich zu den Zylinderradien a bzw. b ($b > a$) groß sei.
- (d) Welchen inneren Durchmesser hat der äußere Leiter eines luftgefüllten Koaxialkabels, dessen Innenleiter ein kreiszylindrischer Draht von 1 mm Durchmesser mit der Kapazität 3×10^{-11} F/m bzw. 3×10^{-12} F/m ist?

1.7 Zwei lange, kreiszylindrische Leiter mit den Radien a_1 bzw. a_2 seien parallel im Abstand d zueinander angeordnet. Der genannte Abstand zwischen den Drähten sei im Vergleich zu ihren beiden Radien groß. Man zeige, dass die Kapazität dieses Systems näherungsweise durch

$$C \simeq \pi\epsilon_0 \left(\ln \frac{d}{a}\right)^{-1}$$

gegeben ist, wenn a das geometrische Mittel der beiden Radien ist.

Welchen Durchmesser (in mm) müssen zwei Drähte haben, um aus ihnen eine Doppelleitung der Kapazität $1,2 \times 10^{-11}$ F/m herstellen zu können, wenn der Abstand der Drähte 0,5 cm (1,5 cm, 5,0 cm) betragen soll?

1.8 (a) Für die drei in Übg. 1.6 beschriebenen Kondensatoren berechne man die gesamte elektrostatische Energie und drücke sie alternativ durch die auf den Leitern sitzenden Ladungen Q bzw. $-Q$ aus *und* durch die zwischen ihnen herrschende Potentialdifferenz.

(b) Man skizziere die Energiedichte des elektrostatischen Feldes als Funktion einer jeweils geeigneten Abstandskoordinate.

1.9 Man berechne die anziehende Kraft zwischen den Leitern eines Plattenkondensators (Übg. 1.6a) und eines Zylinderkondensators (Übg. 1.7), wenn

(a) die Ladungen auf den Leitern festgehalten werden;

(b) die Potentialdifferenz zwischen den Leitern festgehalten wird.

1.10 Man beweise den folgenden *Mittelwertsatz der Potentialtheorie*:

Im ladungsfreien Raum ist der Wert des elektrostatischen Potentials an jedem Punkt gleich dem Mittelwert des Potentials auf der Oberfläche einer *beliebigen* Kugel um diesen Punkt.

1.11 Unter Verwendung des Gauß'schen Gesetzes zeige man, dass auf der Oberfläche eines gekrümmten, geladenen Leiters die Ableitung des elektrischen Feldes in Normalenrichtung durch

$$\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial n} = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

gegeben ist, wenn R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien der Leiteroberfläche sind.

1.12 Man beweise den *Green'schen Reziprozitätssatz*: Ist Φ das Potential, das von einer Raumladungsdichte ρ innerhalb eines Volumens V und von einer Flächenladungsdichte σ auf der das Volumen V begrenzenden Fläche S herrührt, und bedeutet Φ' ein anderes, aus den Ladungsverteilungen ρ' und σ' resultierendes Potential, dann gilt:

$$\int_V \rho \Phi' d^3x + \int_S \sigma \Phi' da = \int_V \rho' \Phi d^3x + \int_S \sigma' \Phi da$$

1.13 Zwei unendlich ausgedehnte und zueinander parallele, leitende Ebenen seien durch den Abstand d voneinander getrennt. Zwischen ihnen befinde sich eine Punktladung q . Mithilfe des Green'schen Reziprozitätssatzes zeige man, dass die Ladung, die auf einer der beiden Ebenen insgesamt induziert wird, gleich $-q$ ist, multipliziert mit dem Bruchteil von d , um den die Punktladung von der anderen Ebene entfernt ist.

Hinweis: Zum Vergleich wähle man ein elektrostatisches Problem mit denselben Flächen, wobei aber die Ladungsdichte und das Potential auf einer der beiden Flächen bekannt und einfach sind.

1.14 Man betrachte die in Abschnitt 1.10 eingeführten Green'schen Funktionen der Elektrostatik für Dirichlet'sche oder Neumann'sche Randbedingungen auf der Begrenzungsfläche S des Volumens V . Auf diese Funktionen wende man den Green'schen Satz (1.35) an, und zwar mit \mathbf{y} als Integrationsvariable und den Funktionen $\phi = G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ und $\psi = G(\mathbf{x}', \mathbf{y})$, wobei die Gleichung

$$\nabla_{\mathbf{y}}^2 G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = -4\pi\delta(\mathbf{y} - \mathbf{z})$$

zu beachten ist. Die Differenz $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G(\mathbf{x}', \mathbf{y})$ drücke man durch ein Integral über die Begrenzungsfläche S aus.

(a) Für Dirichlet'sche Randbedingungen des Potentials, zusammen mit der zugehörigen Randbedingung der Green'schen Funktion, zeige man, dass $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ symmetrisch in \mathbf{x} und \mathbf{x}' sein muss.

(b) Für Neumann'sche Randbedingungen benutze man die Randbedingung (1.45) für $G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, um zu zeigen, dass $G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ selbst im Allgemeinen *nicht* symmetrisch in \mathbf{x} und \mathbf{x}' ist, während die Differenz $G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - F(\mathbf{x})$ tatsächlich symmetrisch *ist*, wenn $F(\mathbf{x})$ definiert ist durch

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{S} \oint_S G_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) da_y$$

(c) Ferner zeige man, dass die Addition von $-F(\mathbf{x})$ zur Green'schen Funktion das Potential $\Phi(\mathbf{x})$ nicht ändert. Vgl. hierzu die Übg. 3.26, in der ein Beispiel für eine Neumann'sche Green'sche Funktion behandelt wird.

1.15 Man beweise den folgenden *Thomson'schen Satz*:

Hält man mehrere Flächen mit jeweils vorgegebener Gesamtladung im Raum fest, so nimmt die elektrostatische Energie in dem von den Flächen begrenzten Gebiet ein absolutes Minimum an, wenn die Ladungen so verteilt sind, dass jede der Flächen – wie im Falle von Leitern – eine Äquipotentialfläche bildet.

1.16 Man beweise folgenden Satz:

Hält man mehrere leitende Flächen mit jeweils vorgegebener Gesamtladung im Raum fest, so erniedrigt sich bei Einbringen eines ungeladenen, isolierten Leiters in das von den Flächen begrenzte Gebiet die elektrostatische Energie.

1.17 Ein Volumen V im Vakuum werde von einer Fläche S begrenzt, die aus mehreren, getrennten leitenden Teilflächen S_i bestehe. Einer der Leiter werde auf dem *Einheitspotential* gehalten, während alle anderen Leiter auf dem Potential Null liegen.

(a) Man zeige, dass die Kapazität des *einen* Leiters gegeben ist durch

$$C = \epsilon_0 \int_V |\nabla\Phi|^2 d^3x$$

wobei $\Phi(\mathbf{x})$ die Lösung für das Potential ist.

(b) Man zeige, dass die tatsächliche Kapazität C stets durch die Größe

$$C[\Psi] = \epsilon_0 \int_V |\nabla\Psi|^2 d^3x$$

nach oben beschränkt ist, wenn Ψ eine beliebige Versuchsfunktion darstellt, die den Randbedingungen auf den Leitern genügt. Dieses Variationsverfahren liefert also eine *obere Schranke* für die Kapazität.

1.18 Man betrachte die Leiteranordnung aus Übg. 1.17, wenn alle Leiter, mit Ausnahme der Fläche S_1 , auf dem Potential Null gehalten werden.

(a) Man zeige, dass das Potential $\Phi(\mathbf{x})$ an einem beliebigen Punkt innerhalb des Volumens V und auf *jeder* der Flächen S_i in der Form

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_1} \sigma_1(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') da'$$

geschrieben werden kann, wenn $\sigma_1(\mathbf{x}')$ die Flächenladungsdichte auf S_1 bedeutet und $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ die Green'sche Funktion für das Potential einer Punktladung bei Anwesenheit sämtlicher, auf dem Potential Null gehaltener Flächen (aber bei Abwesenheit von S_1) ist. Ferner zeige man, dass die elektrostatische Energie gegeben ist durch

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \oint_{S_1} da \oint_{S_1} da' \sigma_1(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \sigma_1(\mathbf{x}')$$

wobei die Integrale nur über die Fläche S_1 zu erstrecken sind.

(b) Man zeige, dass das *Funktional*

$$C^{-1}[\sigma] = \frac{\oint_{S_1} da \oint_{S_1} da' \sigma(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \sigma(\mathbf{x}')}{4 \pi \epsilon_0 \left[\oint_{S_1} \sigma(\mathbf{x}) da \right]^2}$$

mit einer beliebigen, auf S_1 definierten, integrierbaren Funktion $\sigma(\mathbf{x})$ stationär gegen kleine Änderungen von σ ist, die den Betrag der Differenz zwischen σ und σ_1 vergrößern. Mithilfe des Thomson'schen Satzes weise man schließlich nach, dass das Reziproke von $C^{-1}[\sigma]$ eine *untere Schranke* für die tatsächliche Kapazität des Leiters S_1 liefert.

1.19 Für den in Übg. 1.6(c) beschriebenen Zylinderkondensator bestimme man, entsprechend Übg. 1.17(b), durch Variation die obere Schranke für die Kapazität, und zwar unter Zugrundelegung der Versuchsfunktion $\Psi_1(\rho) = (b - \rho)/(b - a)$. Das Variationsergebnis vergleiche man mit dem exakten Ergebnis für $b/a = 1,5; 2; 3$ und erkläre den Trend der erhaltenen Ergebnisse aus der funktionalen Abhängigkeit von Ψ_1 . Eine verbesserte Versuchsfunktion wird bei *Collin*, S. 275–277 diskutiert.

1.20 Für die Abschätzung der Kapazität einer gegebenen Leiteranordnung ist es oft nützlich, sie mit bekannten Kapazitäten zu vergleichen. Man betrachte z. B. zwei Anordnungen von n Leitern, von denen $n - 1$ Leiter, die alle auf dem Potential Null gehalten werden, gleich sind, während sich der eine Leiter, dessen Kapazität bestimmt werden soll, von den anderen unterscheidet. Speziell habe der Leiter in der einen Anordnung eine geschlossene Oberfläche S_1 und in der anderen eine Oberfläche S'_1 , die vollkommen im Innern von S_1 liege.

(a) Unter Verwendung des Extremalprinzips aus Abschnitt 1.12 und des Variationsverfahrens aus Übg. 1.17 zeige man, dass die Kapazität C' des Leiters mit der Oberfläche S'_1 nicht größer ist als die Kapazität C des Leiters mit der S'_1 umschließenden Oberfläche S_1 .

(b) Man bestimme obere und untere Schranken für die Kapazität eines leitenden Würfels mit der Kantenlänge a und vergleiche die erhaltenen Ergebnisse und ihren Mittelwert mit dem numerischen Wert $C \approx 0,655(4 \pi \epsilon_0 a)$.

(c) Um wieviel wird sich die Kapazität pro Längeneinheit in dem Zwei-Drähte-System aus Übg. 1.7 schätzungsweise ändern (wird sie größer oder kleiner?), wenn man *einen* der Drähte durch einen anderen mit quadratischem Querschnitt ersetzt, wobei die Kantenlänge des Quadrats gleich dem Durchmesser des anderen Drahtes sei?

1.21 Man betrachte das folgende zweidimensionale Potentialproblem: Gegeben sei eine quadratische Einheitsfläche ($0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$), die begrenzt wird von „Flächen“ (in z -Richtung), die auf dem Potential Null gehalten werden. Das Quadrat sei gleichmäßig mit der Ladungsdichte Eins (pro Längeneinheit in z -Richtung) belegt. Zu untersuchen ist das Potential an einem beliebigen Punkt innerhalb des Quadrats.

(a) Man wende das Variationsprinzip (1.63) für die Poisson'sche Gleichung an und gehe von der „Variations“-Versuchsfunktion $\Psi(x, y) = A \cdot x(1 - x) \cdot y(1 - y)$, um den besten Wert für die Konstante A zu bestimmen. (In dem Begriff „Variations“-Versuchsfunktion wurden hier Anführungszeichen gesetzt, weil außer dem Gesamtfaktor A kein veränderlicher Parameter auftritt.)

(b) Die exakte Lösung des Problems (wenn auch nur in Form einer Reihe) lautet:

$$4 \pi \epsilon_0 \Phi(x, y) = \frac{16}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin[(2m + 1)\pi x]}{(2m + 1)^3} \left\{ 1 - \frac{\cosh[2m + 1)\pi(y - \frac{1}{2})]}{\cosh[(2m + 1)\pi/2]} \right\}$$

(vgl. Übg. 2.15 und 2.16). Für $y = 0,25$ und $y = 0,5$ stelle man das Ergebnis als Funktion von x dar und vergleiche die einfache Variationslösung aus Teil (a) mit der exakten Lösung.

1.22 Bei zweidimensionalen Relaxationsrechnungen benutzt man im Allgemeinen ein aus Quadraten bestehendes Gitter mit dem Gitterabstand bzw. der Seitenlänge $\Delta x = \Delta y = h$ und bezeichnet die Schnittpunkte der Längs- und Querseiten mit (i, j) , wobei i und j ganze Zahlen sind; die Koordinaten sind dann $x_i = ih + x_0$, $y_j = jh + y_0$. Der Potentialwert im Schnitt- oder Kreuzungspunkt (i, j) kann durch den Mittelwert der Potentialwerte an den benachbarten Seiten angenähert werden (unter Ausnutzung des diesbezüglichen Satzes für harmonische Funktionen). Doch welcher Mittelwert ist der geeignetste?

(a) Wenn $F(x, y)$ eine im Ursprung hinreichend oft differenzierbare, aber nicht notwendigerweise harmonische Funktion ist, so zeige man durch explizite Taylor-Entwicklung, dass die „Kreuz“-Summe

$$S_K = F(h, 0) + F(0, h) + F(-h, 0) + F(0, -h)$$

sich ausdrücken lässt als

$$S_K = 4F(0, 0) + h^2 \nabla^2 F + \frac{h^4}{12} (F_{xxxx} + F_{yyyy}) + O(h^6)$$

(b) In ähnlicher Weise zeige man, dass die „Quadrat“-Summe

$$S_Q = F(h, h) + F(-h, h) + F(-h, -h) + F(h, -h)$$

sich ausdrücken lässt in der Form

$$S_Q = 4F(0, 0) + 2h^2 \nabla^2 F - \frac{h^4}{3} (F_{xxxx} + F_{yyyy}) + \frac{h^4}{2} \nabla^2 (\nabla^2 F) + O(h^6)$$

Dabei ist F_{xxxx} die vierte partielle Ableitung von F nach x an der Stelle $x = 0$, $y = 0$, usw. Falls $\nabla^2 F = 0$ ist, liefern die Mittelwerte $S_K/4$ und $S_Q/4$ jeweils den Wert von $F(0, 0)$, und zwar korrekt bis hin zur Ordnung h^3 . Ein „verbessertes“ Mittel erhält man mit

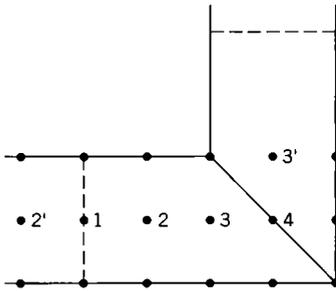
$$\langle\langle F(0, 0) \rangle\rangle = \frac{1}{5} \left[S_K + \frac{1}{4} S_Q \right]$$

wobei

$$\langle\langle F(0, 0) \rangle\rangle = F(0, 0) + \frac{3}{10} h^2 \nabla^2 F + \frac{h^4}{40} \nabla^2 (\nabla^2 F) + O(h^6)$$

ist. Falls wiederum $\nabla^2 F = 0$ gilt, ergibt $\langle\langle F(0, 0) \rangle\rangle$ ebenfalls den Wert von $F(0, 0)$, jetzt aber bis hin zur Ordnung h^5 . Im Falle der Poisson'schen Gleichung erreicht man dieselbe Genauigkeit, wenn man die Ladungsdichte und den auf sie angewandten Laplace'schen Operator niedrigster Ordnung einsetzt.

1.23 Gegeben sei folgende Doppelleitung: Ihr äußerer Leiter bestehe aus einem langen, geraden Hohlzylinder quadratischer Querschnittsfläche und in ihm befinde sich ein weiterer Leiter mit ebenfalls quadratischer Querschnittsfläche, die ein Viertel des Hohlraumquerschnitts ausmacht. Der innere Leiter sei symmetrisch zum Mittelpunkt der Querschnittsfläche des äußeren Leiters angeordnet – und zwar so, dass seine Begrenzungsflächen parallel zu den Wänden des Hohlraums verlaufen. Wenn die beiden Leiter auf verschiedenen Potentialen liegen, weisen Potential und elektrisches Feld im Zwischenraum eine achtfache Symmetrie auf. Einen Teil der Querschnittsfläche zeigt die untere Abbildung. Die hohe Effizienz der Relaxationsmethode bei der Bestimmung der Eigenschaften der beschriebenen Doppelleitung zeigt die folgenden sehr einfach durchzuführenden Rechnungen.



(a) Man benutze allein die in der Abbildung gezeigten vier inneren Punkte und schreibe für jeden Punkt die Relaxationsgleichung für das „Kreuz“- und das „verbesserte“ Mittel nieder (vgl. Übg. 1.22), wobei der innere Leiter auf dem Potential $\Phi = 100$ V liege und für den äußeren $\Phi = 0$ gelte. Man bestimme aus beiden Mittelungsverfahren Näherungswerte des Potentials in allen vier Punkten, und zwar entweder durch Iteration oder durch Lösen der zugehörigen linearen Gleichungssysteme.

(b) Mithilfe der Ergebnisse aus Teil (a) gebe man eine möglichst gute Abschätzung (oder Abschätzungen) für die auf die Längeneinheit bezogene Kapazität der Doppelleitung an.

(c) man wiederhole die Relaxationsberechnungen mit halbiertem Gitterabstand (21 innere Punkte) und vergleiche die Ergebnisse mit den vorhergehenden.

Lösung: $\Phi_1 = 48,87$ V, $\Phi_2 = 47,18$ V, $\Phi_3 = 38,34$ V, $\Phi_4 = 19,81$ V und $C = 10,23 \epsilon_0$ F/m (Ergebnis einer genauen numerischen Berechnung).

1.24 Man löse die zweidimensionale Poisson'sche Gleichung für das Problem aus Übg. 1.21 – Einheitsquadrat mit auf dem Rand verschwindendem Potential und der Ladungsdichte Eins im Inneren – unter Verwendung der Relaxationsmethode. Für h wähle man $h = 0,25$, sodass neun innere Gitterstellen existieren. Unter Ausnutzung der Symmetrie reduziere man die Anzahl der benötigten Stellen auf nur drei, nämlich $(0,25; 0,25)$, $(0,5; 0,25)$ und $(0,5; 0,5)$. Mit so wenigen Gitterstellen lassen sich die Iterationen mit Schreibblock und Taschenrechner durchführen.

(a) Man verwende den „verbesserten“ Mittelwert aus Übg. 1.22 und das einfache (Jakobische) Iterationsverfahren. Man beginne mit $4\pi\epsilon_0\Phi = 1,0$ an allen inneren Gitterstellen. Es sind mindestens sechs, besser jedoch acht oder zehn Iterationen durchzuführen.

(b) Man wiederhole die Iteration mit den gleichen Anfangswerten, aber unter Verwendung des Gauß-Seidel-Verfahrens.

(c) Die beiden Ergebnisreihen jeder Iteration trage man als Funktion der durchgeführten Iterationsschritte auf und vergleiche sie mit den genauen Werten, nämlich $4\pi\epsilon_0\Phi(0,25; 0,25) = 0,5691$, $4\pi\epsilon_0\Phi(0,5; 0,25) = 0,7205$, $4\pi\epsilon_0\Phi(0,5; 0,5) = 0,9258$. Die Konvergenzgeschwindigkeit und die Endgenauigkeit sind zu kommentieren.

2 Randwertprobleme in der Elektrostatik: I

In vielen Problemen der Elektrostatik treten Randflächen auf, auf denen entweder das Potential oder die Flächenladungsdichte vorgegeben ist. Die formale Lösung solcher Probleme hatten wir, unter Verwendung der Methode der Green'schen Funktion, bereits in Kap. 1.10 angegeben. In der Praxis (und zwar selbst dann, wenn man sie stark idealisiert) ist das Auffinden der richtigen Green'schen Funktion nicht immer einfach. Man hat daher für elektrostatische Randwertprobleme eine Reihe von Lösungsmethoden entwickelt, von denen einige nur entfernt mit der Methode der Green'schen Funktion zusammenhängen. Drei dieser Verfahren sollen Gegenstand dieses Kapitels sein: (1) die Methode der Spiegelladungen, (2) die Entwicklung nach orthogonalen Funktionen, die direkt über die Differentialgleichung des betreffenden Problems verläuft und nur wenig mit der Green'schen Funktion zu tun hat, und (3) die Methode finiter Elemente (kurz „FEM“ genannt), eine äußerst wichtige Methode der numerischen Mathematik. Ein nicht ganz unbedeutendes Gebiet lassen wir hier aus, nämlich die funktionentheoretischen Verfahren zur Behandlung zweidimensionaler Probleme, einschließlich der konformen Abbildung. Diese Verfahren sind zwar von großer Bedeutung, doch übergehen wir sie hier aus Platzgründen und auch deswegen, weil dieses Gebiet in vielen anderen Büchern ausführlich behandelt wird. Dem interessierten Leser empfehlen wir die am Ende dieses Kapitels zitierten Bücher.

2.1 Methode der Spiegelladungen

Die Methode der Spiegelladungen benutzt man zur Lösung von Problemen, bei denen sich eine oder mehrere Punktladungen in der Nähe von Randflächen befinden, z. B. gegenüber Leitern, die geerdet sind oder auf festem Potential gehalten werden. Unter günstigen Bedingungen lässt sich aus der gegebenen Geometrie darauf schließen, dass eine kleine Anzahl von Ladungen, die außerhalb des interessierenden Gebiets geeignet plaziert werden und die geeignete Stärke haben, die geforderten Randbedingungen simulieren können. Diese Ladungen nennt man *Spiegelladungen* (oder auch *Bildladungen*), und die Ersetzung des tatsächlichen Randwertproblems durch ein äquivalentes Problem mit einem erweiterten Gebiet mit Spiegelladungen, aber ohne Randflächen heißt *Methode der Spiegelladungen*. Diese Spiegelladungen müssen außerhalb des interessierenden Gebietes liegen, da ihre Potentiale innerhalb von ihm der Laplace'schen Gleichung genügen müssen; das „partikuläre Integral“ (d. h. die Lösung der Poisson'schen Gleichung) erhält man durch Addition der Potentiale sowohl der ursprünglichen Ladungen wie der Spiegelladungen.

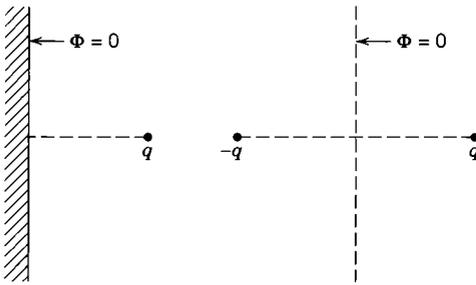


Abb. 2.1 Lösung nach der Methode der Spiegelladungen. Links das ursprüngliche Potentialproblem, rechts das äquivalente Problem mit der Spiegelladung.

Ein einfaches Beispiel hierfür ist eine Punktladung gegenüber einer unendlich ausgedehnten, leitenden Ebene, die sich auf dem Potential Null befindet (vgl. Abb. 2.1). Es ist klar, dass dieses Problem äquivalent ist zu dem der ursprünglichen Ladung mit einer zusätzlichen, entgegengesetzt gleichen Ladung am Spiegelpunkt hinter der leitenden Ebene.

2.2 Punktladung gegenüber einer geerdeten, leitenden Kugel

Zur Illustration der Methode der Spiegelladungen betrachten wir das in Abb. 2.2 skizzierte Problem einer Punktladung q mit dem Abstand $|y|$ vom Koordinatenursprung, der Mittelpunkt einer geerdeten, leitenden Kugel vom Radius a sei. Wir suchen das Potential $\Phi(\mathbf{x})$, das der Bedingung $\Phi(|\mathbf{x}| = a) = 0$ genügt. Aus Symmetriegründen ist klar, dass die Spiegelladung q' (sofern tatsächlich nur eine einzige Spiegelladung erforderlich ist) auf der Verbindungslinie zwischen dem Ursprung und der Ladung q liegen muss. Befindet sich die Ladung *außerhalb* der Kugel, dann liegt der Ortsvektor \mathbf{y}' der Spiegelladung innerhalb der Kugel. Das von den Ladungen q und q' erzeugte Potential ist

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q/4\pi\epsilon_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \frac{q'/4\pi\epsilon_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|} \quad (2.1)$$

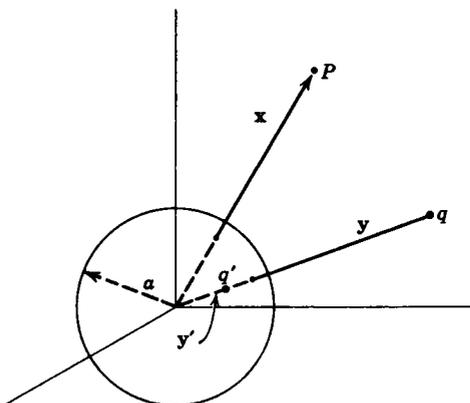


Abb. 2.2 Leitende Kugel vom Radius a mit der Ladung q und der Spiegelladung q' .

Wir müssen jetzt q' und $|y'|$ so wählen, dass dieses Potential bei $|\mathbf{x}| = a$ verschwindet. Sind \mathbf{n} und \mathbf{n}' Einheitsvektoren in Richtung von \mathbf{x} bzw. \mathbf{y} , so ist

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q/4\pi\epsilon_0}{|\mathbf{x}\mathbf{n} - y\mathbf{n}'|} + \frac{q'/4\pi\epsilon_0}{|\mathbf{x}\mathbf{n} - y'\mathbf{n}'|} \quad (2.2)$$

Klammert man im ersten Term x und im zweiten Term y' aus, so nimmt das Potential bei $x = a$ die Gestalt

$$\Phi(x = a) = \frac{q/4\pi\epsilon_0}{a \left| \mathbf{n} - \frac{y}{a} \mathbf{n}' \right|} + \frac{q'/4\pi\epsilon_0}{y' \left| \mathbf{n}' - \frac{a}{y'} \mathbf{n} \right|} \quad (2.3)$$

an. Die Forderung $\Phi(x = a) = 0$ ist also für alle Werte von $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'$ erfüllt, wenn

$$\frac{q}{a} = -\frac{q'}{y'}, \quad \frac{y}{a} = \frac{a}{y'}$$

ist. Für den Betrag und die Lage der Spiegelladung ergibt sich daraus:

$$q' = -\frac{a}{y}q, \quad y' = \frac{a^2}{y} \quad (2.4)$$

Rückt also die Ladung q näher an die Kugel heran, so wird die Spiegelladung dem Betrag nach größer und entfernt sich vom Mittelpunkt. Befindet sich q unmittelbar über der Oberfläche der Kugel, so nimmt die Spiegelladung den Wert $-q$ an und liegt direkt unterhalb der Kugeloberfläche.

Nachdem wir die Stärke und den geometrischen Ort der Spiegelladung bestimmt haben, kehren wir nun zum ursprünglichen Problem einer Punktladung q außerhalb einer geerdeten, leitenden Kugel wieder zurück und untersuchen die verschiedenen Effekte, die hierbei auftreten. Die auf der Kugeloberfläche induzierte Ladungsdichte berechnet sich aus dem Wert der Normalenableitung von Φ an der Oberfläche:

$$\sigma = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=a} = -\frac{q}{4\pi a^2} \left(\frac{a}{y} \right) \frac{1 - \frac{a^2}{y^2}}{\left(1 + \frac{a^2}{y^2} - 2\frac{a}{y} \cos \gamma \right)^{3/2}} \quad (2.5)$$

Dabei ist γ der Winkel zwischen \mathbf{x} und \mathbf{y} . Diese Ladungsdichte, gemessen in Einheiten von $-q/4\pi a^2$, ist in Abb. 2.3 als Funktion von γ aufgetragen, und zwar für zwei Werte von y/a . Die Konzentration der Ladung in Richtung der Punktladung q ist offensichtlich, insbesondere für $y/a = 2$. Durch Integration erkennt man, dass die gesamte, auf der Kugeloberfläche induzierte Ladung gleich dem Betrag der Spiegelladung ist, wie es nach dem Gauß'schen Gesetz auch sein muss.¹

¹ Die Erscheinung, dass ein elektrisch geladener Körper auf der Oberfläche eines benachbarten, ursprünglich ungeladenen Leiters Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens hervorruft, nennt man in der deutschen Literatur meist *Influenz* (zuweilen auch *elektrostatische Induktion*) (Anm. des Übersetzers).

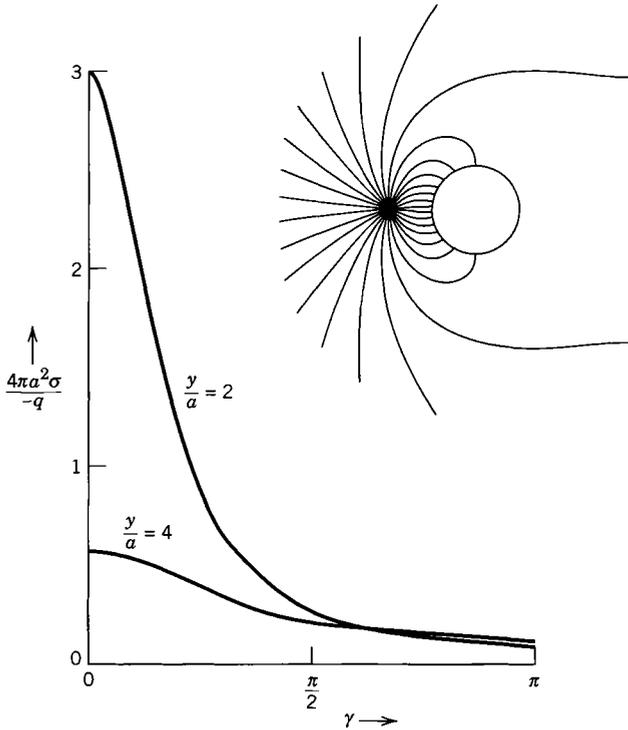


Abb. 2.3 Die Flächenladungsdichte σ , die auf einer geerdeten Kugel vom Radius a durch eine Punktladung q im Abstand y vom Kugelmittelpunkt induziert wird. σ ist, in Einheiten von $-q/4\pi a^2$, als Funktion des Winkels γ zwischen den Ortsvektoren des Aufpunktes und der Ladung aufgetragen, und zwar für die Werte $y = 2a, 4a$. Oben rechts die Kraftlinien für $y = 2a$.

Die auf die Ladung q wirkende Kraft kann auf verschiedene Art und Weise berechnet werden. Am einfachsten ist es, auf die anziehende Kraft zwischen der Ladung q und der Spiegelladung q' das Coulomb'sche Gesetz anzuwenden. Mit $y - y' = y(1 - a^2/y^2)$ als dem Abstand zwischen den beiden Ladungen ergibt sich dann:

$$|\mathbf{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2} \left(\frac{a}{y}\right)^3 \left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right)^{-2} \quad (2.6)$$

Für große Entfernungen erhält man also ein Gesetz des reziproken kubischen Abstands, während die Kraft in unmittelbarer Umgebung der Kugel umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands zwischen Kugel und Ladung ist.

Eine andere Methode zur Bestimmung der Kraft besteht darin, die auf die Kugeloberfläche insgesamt wirkende Kraft zu berechnen. Die Kraft auf ein Flächenelement da ist $(\sigma^2/2\epsilon_0) da$ mit der durch (2.5) gegebenen Flächendichte σ (vgl. hierzu Abb. 2.4). Aus Symmetriegründen ist jedoch klar, dass nur die Komponente parallel zu dem vom Kugelmittelpunkt zur Ladung q zeigenden Radiusvektor beiträgt. Fol-

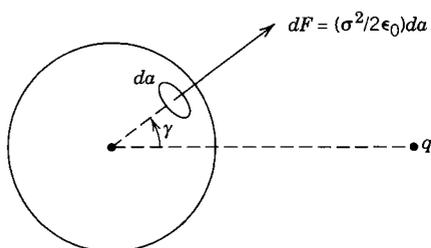


Abb. 2.4

lich ist die Gesamtkraft, die auf die *Kugel* wirkt (und der Kraft auf q entgegengesetzt gleich ist), durch das Integral

$$|\mathbf{F}| = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 a^2} \left(\frac{a}{y}\right)^2 \left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right)^2 \int \frac{\cos\gamma}{\left(1 + \frac{a^2}{y^2} - \frac{2a}{y}\cos\gamma\right)^3} d\Omega \quad (2.7)$$

gegeben. Die Berechnung dieses Integrals führt ebenfalls auf (2.6).

Wir haben bisher stets vorausgesetzt, dass sich die Punktladung q *außerhalb* der Kugel befindet. Tatsächlich aber können die gewonnenen Resultate auch auf eine Ladung q *innerhalb* der Kugel angewandt werden. Die einzige Änderung ist in dem Ausdruck (2.5) für die Flächenladungsdichte vorzunehmen. Es ist jetzt nicht die Ableitung in Richtung der nach außen, sondern nach innen gerichteten Normalen zu bilden, und dies ist gleichbedeutend mit einem Vorzeichenwechsel. Wir überlassen es dem Leser, sämtliche Formeln umzuschreiben. Zu beachten ist, dass jetzt $y \leq a$ ist. Die Winkelverteilung der induzierten Flächenladungsdichte verhält sich bei verschiedenen Abständen der Ladung q vom Kugelmittelpunkt ähnlich, wie in Abb. 2.3 gezeigt, doch die insgesamt induzierte Flächenladung ist natürlich wieder gleich $-q$, unabhängig von y .

2.3 Punktladung gegenüber einer geladenen, isolierten, leitenden Kugel

Im vorigen Abschnitt untersuchten wir das Problem einer Punktladung q in der Nähe einer geerdeten, leitenden Kugel und stellten fest, dass auf der Kugel eine Flächenladungsdichte induziert wird. Diese Ladung hat den Gesamtbetrag $q' = -aq/y$ und verteilt sich so auf der Oberfläche, dass sie sich unter allen wirkenden Kräften im Gleichgewicht befindet.

Für das Problem einer Punktladung q gegenüber einer isolierten, leitenden Kugel mit der Gesamtladung Q erhält man die Lösung für das Potential durch lineare Superposition. Wir stellen uns hierzu die leitende Kugel (mit der auf ihrer Oberfläche verteilten Ladung q') zunächst als geerdet vor. Sodann unterbrechen wir die Erdung und bringen auf die Kugel eine zusätzliche Ladung vom Betrag $Q - q'$. Die Ladung der Kugel hat dann insgesamt den Betrag Q . Um das Potential zu finden, genügt die Feststellung, dass sich die hinzugefügte Ladung $Q - q'$ auf der Oberfläche *gleich-*