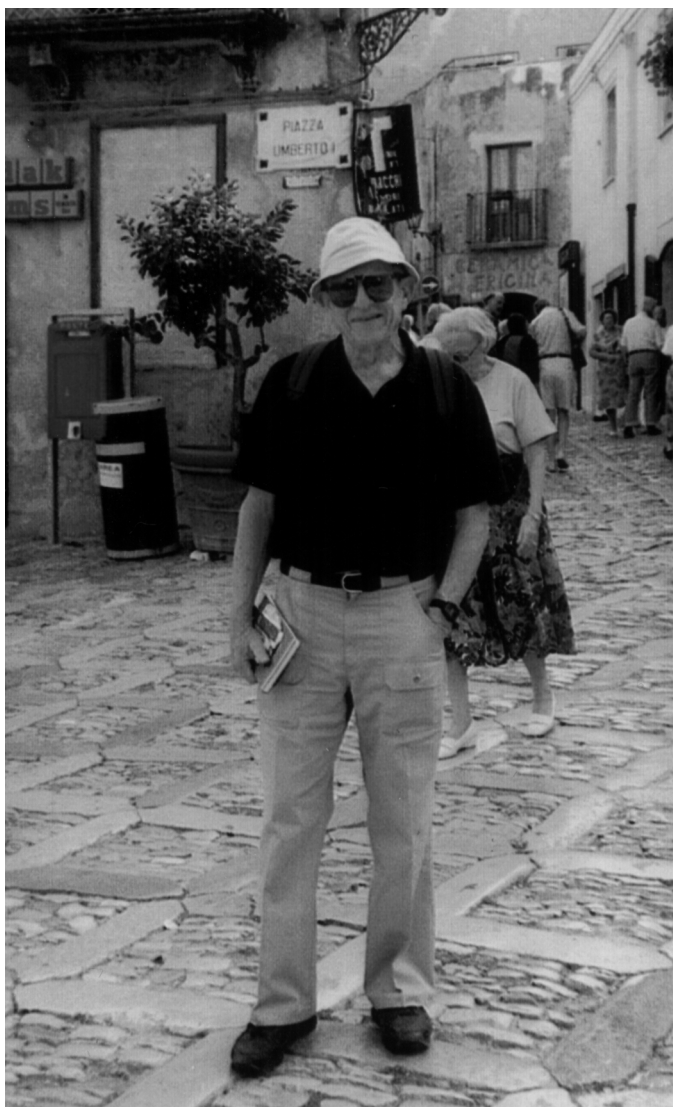


Geometric Aspects of Dwork Theory

Volume I



Bernie in Erice, October 1994

Bernard M. Dwork
1923–1998

Geometric Aspects of Dwork Theory

Editors

Alan Adolphson, Francesco Baldassarri,
Pierre Berthelot, Nicholas Katz,
and François Loeser

Volume I



Walter de Gruyter · Berlin · New York

Editors

Alan Adolphson
Department of Mathematics
Oklahoma State University
Stillwater, OK 74078
USA
e-mail: adolphs@math.okstate.edu

Francesco Baldassarri
Dipartimento di Matematica
Università di Padova
Via Belzoni 7
35131 Padova
Italy
e-mail: baldassa@math.unipd.it

Pierre Berthelot
IRMAR
Université de Rennes 1
Campus de Beaulieu
35042 Rennes cedex
France
e-mail: pierre.berthelot@univ-rennes1.fr

Nicholas Katz
Department of Mathematics
Princeton University
Princeton, NJ 08544-1000
USA
e-mail: nmk@math.princeton.edu

François Loeser
École Normale Supérieure
Département de mathématiques et applications
UMR 8553 du CNRS
45 rue d'Ulm
75230 Paris Cedex 05
France
e-mail: Francois.Loeser@ens.fr

Mathematics Subject Classification 2000:
14-06; 14Fxx, 14Gxx, 11Gxx, 11Lxx

Keywords:

p-adic cohomologies, zeta functions, *p*-adic modular forms, *D*-modules

⊗ Printed on acid-free paper which falls within the guidelines of the
ANSI to ensure permanence and durability.

Library of Congress Cataloging-in-Publication Data

Geometric aspects of Dwork theory / edited by Alan Adolphson ... [et al.].

p. cm.

Includes bibliographical references.

ISBN 3-11-017478-2 (cloth : alk. paper)

1. Geometry, Algebraic. 2. Number theory. 3. *p*-adic analysis. I. Adolphson, Alan, 1951–
QA564.G47 2004
516.3'5–dc22

2004011345

ISBN 3-11-017478-2

Bibliographic information published by Die Deutsche Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie;
detailed bibliographic data is available in the Internet at <<http://dnb.ddb.de>>.

© Copyright 2004 by Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 10785 Berlin, Germany.
All rights reserved, including those of translation into foreign languages. No part of this book
may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical,
including photocopy, recording or any information storage and retrieval system, without permis-
sion in writing from the publisher.

Printed in Germany.

Cover design: Thomas Bonnie, Hamburg.

Typeset using the authors' T_EX files: I. Zimmermann, Freiburg.

Printing and binding: Hubert & Co. GmbH & Co. KG, Göttingen.

Preface

Bernard Dwork (New York 5/27/1923 – Princeton 5/9/1998) stunned the algebro-geometric world in 1958 with his proof of rationality of the zeta function of an algebraic variety over a finite field and with the p -adic methods he introduced in his proof. He then went on to create a completely new p -adic cohomology theory for hypersurfaces of characteristic $p > 0$, and to study the p -adic variation, in families, of the zeta function, creating out of whole cloth a p -adic theory of Picard–Fuchs equations and their relation to zeta functions. He established a general theory of p -adic differential equations and deep results on the relation between the Hodge and slope filtrations of Picard–Fuchs equations.

In the course of this work, he introduced ideas that have been fundamental in the development of p -adic arithmetic geometry as it presently stands. Among these are the notions of Frobenius structure for p -adic differential equations, and of the slope and growth filtrations on their solution spaces. Equally fundamental has been his insistence on the role of monodromy of Picard–Fuchs equations around supersingular points, and on the still mysterious notion of excellent lifting of Frobenius.

In order to explore and clarify the intrinsic geometric content of Dwork’s arithmetic results and his p -adic analytic methods a group of Dwork’s mathematical heirs organized an extended cycle of conferences which was entitled “The Dwork Trimester in Italy” by reason of its duration and venue. Moreover, during this intensive trimester new developments were presented via a series of mini-courses dedicated to some of the most salient aspects of Dwork’s theory.

The Dwork Trimester took place from May to July of 2001. The principal site was at the University of Padova. There were also two one-week special conferences. The first, on p -adic modular forms, p -adic L -functions and p -adic integration, was organized by M. Bertolini, and held at the Villa Monastero in Varenna on Lake Como from June 3 to June 9, 2001. The second, which comprised the final week of the Dwork Trimester, was held at the mountain resort Bressanone from July 1 to July 7, 2001. The Dwork Trimester brought together over a hundred mathematicians from many countries to pay a fitting scientific and personal homage to the remarkable mathematician and man who was Bernard M. Dwork.

The organizers of the Dwork Trimester wish to extend their heartfelt thanks to the Istituto Nazionale di Alta Matematica (INdAM), Rome, and to the European Network “Arithmetic Algebraic Geometry” which co-sponsored the events, as well as to the Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata of the Università di Padova, to the staffs of Villa Monastero in Varenna and the Scuola Estiva of the Università di Padova at Bressanone whose unstinting cooperation made possible the Dwork Trimester.

As one might infer from the fact that the Dwork Trimester took place in northern Italy, Bernie had strong and enduring ties with Italy. Already in the fall of 1966 he

had accepted an invitation from Francesco Gherardelli to be a visiting professor at the University of Florence. It was an eventful year: early November rains brought the Arno to historically unprecedented levels while Bernie, Shirley and their three children were visiting Rome for a very wet All Saints holiday. The heavy rains and flooding had blocked the roads back to Florence, thus forcing the family to make an overnight stop in Cortona. From there Bernie sent his brother Leo a memorable two-word telegram (“Glug glug”), clearly showing both that the family was safe, and that his sense of humor was intact. (His brother sent a two word reply: “Use Listerine”.) The havoc produced by the flood made a return to Florence by car unthinkable. Following the family’s return to Rome the threat of typhoid fever in Florence ruled out even the train trip to Florence that Bernie and his son Andrew had planned, hoping to retrieve warm clothing for the family. The planned sabbatical in Italy seemed ruined. The Dworks were on the verge of returning to the United States, but the timely efforts of Aldo Andreotti enabled Bernie and his family to move to the University of Pisa for the rest of the academic year.

In the fall of 1975 Francesco Baldassarri, recently “laureato” at the University of Padova under the direction of I. Barsotti, went to Princeton University as a postdoctoral fellow. Dwork soon became his mentor, and a lasting collaboration and friendship ensued. A few years later another young mathematician from Padova, Bruno Chiarellotto, also went to Princeton to study with Dwork. As a result, both Bernie and Shirley Dwork became frequent visitors to Padova in the years that followed. During their many visits throughout the 1980s they established firm friendships both within the mathematical community at Padova and also beyond it. Thus, it was natural (although by no means bureaucratically trivial) that when Bernie retired from Princeton University he was “called” to the University of Padova where he served as “Professore per Chiara Fama” from 1992 until his death in 1998. During this period his influence on mathematics in Padova was vibrant and deep. Among his other students and collaborators from this period are Maurizio Cailotto, Lucia DiVizio, Giovanni Gerotto, Frank Sullivan, and Francesca Tovenà. But Bernie’s interest in Italy was not limited to its mathematicians. Indeed, Bernie had a keen interest in Italian life, culture, and politics. His openness and *joie de vivre* won him, throughout his life, close friendships in many places, and Italy was no exception. His friends in Italy were honored to organize a mathematical trimester dedicated to the developments which came out of his work and out of the tools he invented. The result of that trimester is the present publication.

April 2004

*A. Adolphson, F. Baldassarri,
P. Berthelot, N. Katz, and F. Loeser*

Table of Contents of Volume I

Preface	v
Table of Contents of Volume II	ix
The Mathematical Publications of Bernard Dwork	xi
<i>Alan Adolphson</i> Exponential sums and generalized hypergeometric functions. I: Cohomology spaces and Frobenius action	1
<i>Alan Adolphson and Steven Sperber</i> Exponential sums and free hyperplane arrangements	43
<i>Yves André</i> Sur la conjecture des p -courbures de Grothendieck–Katz et un problème de Dwork	55
<i>Fabrizio Andreatta and Eyal Z. Goren</i> Hilbert modular varieties of low dimension	113
<i>Francesco Baldassarri and Pierre Berthelot</i> On Dwork cohomology for singular hypersurfaces	177
<i>Francesco Baldassarri and Andrea D’Agnolo</i> On Dwork cohomology and algebraic $\mathcal{D}$ -modules	245
<i>Laurent Berger</i> An introduction to the theory of p -adic representations	255
<i>Vladimir G. Berkovich</i> Smooth p -adic analytic spaces are locally contractible. II	293
<i>Jean-Benoît Bost</i> Germs of analytic varieties in algebraic varieties: canonical metrics and arithmetic algebraization theorems	371
<i>Gilles Christol</i> Thirty years later	419
<i>Robert F. Coleman and William A. Stein</i> Approximation of eigenforms of infinite slope by eigenforms of finite slope	437

<i>Richard Crew</i>	
Crystalline cohomology of singular varieties	451
<i>Andrea D'Agnolo and Pietro Polesello</i>	
Stacks of twisted modules and integral transforms	463
<i>Jan Denef and François Loeser</i>	
On some rational generating series occuring in arithmetic geometry	509
<i>Mladen Dimitrov</i>	
Compactifications arithmétiques des variétés de Hilbert et formes modulaires de Hilbert pour $\Gamma_1(c, n)$	527

Table of Contents of Volume II

<i>Mladen Dimitrov and Jacques Tilouine</i> Variétés et formes modulaires de Hilbert arithmétiques pour $\Gamma_1(c, n)$	555
<i>Lucia Di Vizio</i> Introduction to p -adic q -difference equations	615
<i>Matthew Emerton and Mark Kisin</i> An introduction to the Riemann–Hilbert correspondence for unit F -crystals	677
<i>Jean-Yves Etesse</i> Introduction to L -functions of F -isocrystals	701
<i>Ofer Gabber</i> Notes on some t -structures	711
<i>Haruzo Hida</i> Non-vanishing modulo p of Hecke L -values	735
<i>Luc Illusie</i> On semistable reduction and the calculation of nearby cycles	785
<i>Nicholas M. Katz and Rahul Pandharipande</i> Inequalities related to Lefschetz pencils and integrals of Chern classes	805
<i>Kiran S. Kedlaya</i> Full faithfulness for overconvergent F -isocrystals	819
<i>Bernard Le Stum</i> Frobenius action, F -isocrystals and slope filtration	837
<i>Shigeki Matsuda</i> Conjecture on Abbes–Saito filtration and Christol–Mebkhout filtration	845
<i>Christine Noot-Huyghe</i> Transformation de Fourier des $\mathcal{D}$ -modules arithmétiques I	857
<i>Tomohide Terasoma</i> Boyarsky principle for $\mathcal{D}$ -modules and Loeser’s conjecture	909
<i>Nobuo Tsuzuki</i> Cohomological descent in rigid cohomology	931

Isabelle Vidal

Monodromie locale et fonctions Zêta des log schémas 983

*Anne Virrion*Trace et dualité relative pour les $\mathcal{D}$ -modules arithmétiques 1039*Daqing Wan*

Geometric moment zeta functions 1113

The Mathematical Publications of Bernard Dwork

Books

- [1] *Generalized hypergeometric functions*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York 1990.
- [2] *Lectures on p -adic differential equations*. Grundlehren Math. Wiss. 253, Springer-Verlag, New York, Berlin 1982.
- [3] (with G. Gerotto, and F. J. Sullivan), *An Introduction to G -functions*. Ann. of Math. Stud. 133, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994.

Articles

- [1] Detection of a pulse superimposed on fluctuation noise. *Proc. I. R. E.* **38** (1950), 771–774.
- [2] On the root number in the functional equation of the Artin-Weil L -series. PhD thesis, Columbia University, 1954.
- [3] The local structure of the Artin root number. *Proceedings of the National Academy of Science*, **41** (1955), 754–756.
- [4] On the Artin root number. *Amer. J. Math.* **78** (1956), 444–472.
- [5] Norm residue symbol in local number fields. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **22** (1958), 180–190.
- [6] On the congruence properties of the zeta function of algebraic varieties. *J. Reine Angew. Math.* **203** (1960), 130–142.
- [7] On the rationality of the zeta function of an algebraic variety. *Amer. J. Math.* **82** (1960), 631–648.
- [8] A deformation theory for the zeta function of a hypersurface defined over a finite field. In *Proceedings of the International Congress of Mathematics, Stockholm*, 1962.
- [9] On the zeta function of a hypersurface. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **12** (1962), 5–68.
- [10] On the zeta function of a hypersurface, part II. *Ann. of Math.* **80** (1964), 227–299.
- [11] Analytic theory of zeta functions of algebraic varieties. In *Arithmetical Algebraic Geometry* (O. F. Schilling, editor), Harper and Row, New York 1965, 18–32.
- [12] On p -adic analysis. In *Proceedings Annual Science Conference Belfer Graduate School, Yeshiva University, 1965–1966*, volume 2, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York, 129–154.

- [13] On the rationality of zeta functions and L -series. In *Proceedings of the Conference on Local Fields*, Driebergen, Springer-Verlag, Berlin 1966, 40–55.
- [14] On the zeta function of a hypersurface, part III. *Ann. of Math.* **83** (1966), 457–519.
- [15] On zeta functions of hypersurfaces. In *Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres*, Editions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris 1966, 77–82.
- [16] A deformation theory for singular hypersurfaces. In *Algebraic Geometry, Bombay Colloquium 1968*, Oxford University Press, 1969, 85–92.
- [17] On the zeta function of a hypersurface, part IV: A deformation theory for singular hypersurfaces. *Ann. of Math.* **90** (1969), 335–352.
- [18] p -adic cycles. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **39** (1969), 327–415.
- [19] Normalized period matrices I. *Ann. of Math.* **94** (1971), 337–388.
- [20] On Hecke polynomials. *Invent. Math.* **12** (1971), 249–256.
- [21] Normalized period matrices II. *Ann. of Math.* **98** (1973), 1–57.
- [22] On p -adic differential equations II. *Ann. of Math.* **98** (1973), 366–376.
- [23] On p -adic differential equations III. *Invent. Math.* **29** (1973), 35–45.
- [24] On p -adic differential equations IV. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **6** (1973), 295–316.
- [25] On the U_p operator of Atkin modular functions of level 2 with growth conditions. In *Modular functions of one variable* (W. Kuyk and J. P. Serre, editors), Lecture Notes in Math. 350, Springer-Verlag, Berlin 1973, 57–67.
- [26] Bessel functions as p -adic functions of the argument. *Duke Math. J.* **41** (1974), 711–738.
- [27] On p -adic differential equations I. *Bull. Soc. Math. France* **39–40** (1974), 711–738.
- [28] On ordinary linear p -adic differential equations with algebraic function coefficients. *Groupe d'étude d'Analyse Ultramétrique*, 10 pages, exp. 18, 1975/76.
- [29] (with P. Robba), On linear p -adic differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **231** (1977), 1–46.
- [30] (with P. Robba), Majorations effective. *Groupe d'étude d'Analyse Ultramétrique*, 1978/79. exp. 18, 2pp.
- [31] (with F. Baldassarri), On second order linear differential equations with algebraic solutions. *Amer. J. Math.* **101** (1979), 42–76.
- [32] (with P. Robba), On natural radii of p -adic convergence. *Trans. Amer. Math. Soc.* **256** (1979), 199–213.
- [33] (with S. Bosch and P. Robba), Un théorème de prolongement pour les fonctions analytiques. *Math. Ann.* **252** (1980), 165–173.
- [34] (with P. Robba), Effective p -adic bounds for solutions of homogeneous linear differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **259** (1980), 559–577.
- [35] Maurizio Boyarsky (pseudonym for B. Dwork). p -adic gamma functions and Dwork cohomology. *Trans. Amer. Math. Soc.* **257** (1980), 359–369.

- [36] Nilpotent second order linear differential equations with Fuchsian singularities. *Groupe d'étude d'Analyse Ultramétrique*, 7 pages, exp. 19, 1980/81.
- [37] On Apéry's differential operator. *Groupe d'étude d'Analyse Ultramétrique*, 10 pages, exp. 25, 1980/81.
- [38] Arithmetic theory of differential equations. In *Symposia Mathematica XXIV* (Sympos., INDAM, Rome, 1979), Academic Press, London, New York 1981.
- [39] Majoration effective et application. *Groupe d'étude d'Analyse Ultramétrique*, 5 pages, exp. 1, 1981/82.
- [40] A note on the p -adic gamma function. *Groupe d'étude d'Analyse Ultramétrique*, 10 pages, exp. 15, 1981/82.
- [41] (with A. Adolphson and S. Sperber), Growth of solutions of linear differential equations at a logarithmic singularity. *Trans. Amer. Math. Soc.* **271** (1982), 245–252.
- [42] Differential equations which come from geometry. *Groupe d'étude d'Analyse Ultramétrique*, 6 pages, exp. 9, 1982/83.
- [43] Puiseux expansions. *Groupe d'étude d'Analyse Ultramétrique*, 6 pages, exp. 14, 1982/83.
- [44] Singular residue classes which are ordinary for $F(a, b, c, d)$. *Groupe d'étude d'Analyse Ultramétrique*, 11 pages, exp. 23, 1982/83.
- [45] On the Boyarsky principle. *Amer. J. Math.* **105** (1983), 115–156,
- [46] On the Tate constant. *Groupe d'étude d'Analyse Ultramétrique* (1983/84), 14 pages, exp. 11.
- [47] On Kummer's twenty four solutions of the hypergeometric equation. *Trans. Amer. Math. Soc.* **285** (1984), 497–521.
- [48] Maurizio Boyarsky (pseudonym for B. Dwork). The Reich trace formula. p -adic cohomology. *Astérisque* **119–120** (1984), 129–150.
- [49] (with S. Chowla and R. Evans), On the mod p^2 determination of $\binom{(p-1)/2}{(p-1)/4}$. *J. Number Theory* **24** (1986), 188–196.
- [50] (with A. Ogus), Canonical liftings of Jacobians. *Compositio Math.* **58** (1986), 111–131.
- [51] On the Tate constant. *Compositio Math.* **61** (1987), 43–59.
- [52] (with F. Baldassarri and F. Tavenas), On singular projective structures on Riemann surfaces. *J. Differential Equations* **80** (1989), 364–376.
- [53] On the uniqueness of the Frobenius operator on differential equations. *Adv. Stud. Pure Math.* **17** (1989), 89–96.
- [54] Differential operators with nilpotent p -curvature. *Amer. J. Math.* **112** (1990), 749–786.
- [55] Work of Philippe Robba. In *p -adic Analysis Proceedings, Trento 1989*, Lecture Notes in Math. 1454, Springer-Verlag, Berlin 1990, 1–10.
- [56] (with G. Christol), Effective p -adic bounds at regular singular points. *Duke Math. J.* **62** (1991), 689–720.
- [57] (with S. Sperber), Logarithmic decay and overconvergence of the unit root and associated zeta functions. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **24** (1991), 575–604.

- [58] (with G. Christol), Differential modules of bounded spectral norm. *Contemp. Math.* **133** (1992), 39–58.
- [59] (with A. van der Poorten), The Eisenstein constant. *Duke Math. J.* **65** (1992), 23–43.
- [60] Cohomological interpretation of hypergeometric series. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **90** (1993), 239–263,
- [61] (with F. Loeser), Hypergeometric series. *Japanese Journal of Mathematics* **19** (1993), 81–129.
- [62] (with Gilles Christol), Modules différentiels sur des couronnes. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **44** (1994), 669–672.
- [63] (with F. Loeser), Hypergeometric series and functions as periods of exponential modules. In *Barsotti Symposium in Algebraic Geometry (Abano Terme 1991)*, Perspect. Math. 15, Academic Press, San Diego, CA, 1994, 153–174
- [64] (with Alfred J. van der Poorten), Corrections to “the Eisenstein constant”. *Duke Math. J.* **65** (1994), 669–672.
- [65] (with Alan Adolphson), Contiguity relations for generalized hypergeometric functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (2) (1995), 615–625.
- [66] On exponents of p -adic differential modules. *J. Reine Angew. Math.* **484** (1997), 85–126.
- [67] On systems of ordinary differential equations with transcendental parameters. *J. Differential Equations* **156** (1) (1999), 18–25.
- [68] On the size of differential modules. *Duke J. Math.* **96** (2) (1999), 225–239.
- [69] Cohomology of singular hypersurfaces. *Pacific J. Math.* **195** (1) (2000), 81–89.

Exponential sums and generalized hypergeometric functions.

I: Cohomology spaces and Frobenius action

*Alan Adolphson**

Abstract. We discuss the variation of p -adic cohomology of families of exponential sums on the n -torus $\mathbb{T}^n$. This variation is described by p -adic analogues of classical generalized hypergeometric functions.

2000 Mathematics Subject Classification: 11

1 Introduction

In [4], Dwork studied generalized Jacobi sums, i.e., sums of the form

$$\sum_{x \in (\mathbb{F}_q^\times)^{n_1}} \left(\prod_{i=1}^{n_1} \chi_i(x_i) \right) \left(\prod_{j=1}^{n_2} \chi_{n_1+j}(f^{(j)}(x)) \right), \quad (1.1)$$

where $\mathbb{F}_q$ is a finite field of characteristic p , the χ_i are multiplicative characters on $\mathbb{F}_q^\times$, and the $f^{(j)}$ are forms in n_1 variables with coefficients in $\mathbb{F}_q$. More precisely, he studied how such sums vary p -adically as functions of the χ_i and of the coefficients of the $f^{(j)}$ and explained how this variation is described by p -adic analogues of classical hypergeometric functions. As explained in the introduction to [4], up to simple factors the sum (1.1) equals

$$\sum_{x \in (\mathbb{F}_q^\times)^{n_1+n_2}} \left(\prod_{i=1}^{n_1+n_2} \chi_i(x_i) \right) \Psi \left(\sum_{j=1}^{n_2} x_{n_1+j} f^{(j)}(x_1, \dots, x_{n_1}) \right), \quad (1.2)$$

where $x_{n_1+1}, \dots, x_{n_1+n_2}$ are additional variables and Ψ is a nontrivial additive character of $\mathbb{F}_q$. From the viewpoint of Dwork theory this latter sum is somewhat more natural than (1.1), hence sums of the form (1.2) are the basic objects of study in [4].

*Partially supported by NSF Grant no. DMS-0070510

The work of Sperber and myself ([2, 3]) indicates that one should be able to prove analogues of the results of [4] without restricting the polynomial that appears in the additive character Ψ to have the special form of (1.2). That is, one could study exponential sums of the form

$$\sum_{x \in (\mathbb{F}_q^\times)^n} \left(\prod_{i=1}^n \chi_i(x_i) \right) \Psi(f(x)), \quad (1.3)$$

where f is a Laurent polynomial in n variables over the field $\mathbb{F}_q$. The p -adic variation of such sums as functions of the χ_i and of the coefficients of f would then be described in terms of p -adic analogues of classical hypergeometric functions, now possibly confluent. (Sums of the form (1.2) are related to nonconfluent hypergeometric functions.)

This article carries out part of such a program. We extend chapters 1–4 and chapter 6 of [4] to exponential sums of the form (1.3). This involves defining and studying the cohomology space $\mathcal{W}_{a,\lambda}$ associated to (1.3), its dual space $\mathcal{K}_{a,\lambda}$, and the Frobenius map

$$\alpha_{a,a',\lambda}^* : \mathcal{K}_{a',\lambda^p} \rightarrow \mathcal{K}_{a,\lambda}.$$

(The p -adic n -vector a parametrizes the multiplicative characters $\{\chi_i\}_{i=1}^n$, the p -adic vector λ parametrizes the coefficients of f , and a' is a preimage of a modulo $\mathbb{Z}^n$ under multiplication by p .) An important role is played by the “contiguity map” $x^u : \mathcal{W}_{a,\lambda} \rightarrow \mathcal{W}_{a-u,\lambda}$, which is an algebraic reflection of the classical contiguity relationship between two hypergeometric functions of the variables λ , one with parameters a , the other with parameters $a - u$ (where $u \in \mathbb{Z}^n$). In the second paper of this series, we plan to extend chapter 5 of [4] (deformation theory and action of Frobenius on solutions of p -adic differential equations) to this setting. The deformation equations that arise from the variation of λ in $\mathcal{K}_{a,\lambda}$ are p -adic versions of generalized hypergeometric equations, and one obtains an action of Frobenius on p -adic analytic solutions of these equations.

We follow rather closely the methods of [4]. Our main results are the analyticity of the Frobenius matrix (Theorem 9.12) and the description of the determinant of the contiguity matrix (Theorem 8.7). By “analyticity of the Frobenius matrix” we mean that the matrix representing $\alpha_{a,a',\lambda}^*$ (relative to fixed bases and a fixed choice of a') is an analytic function of a and λ in a certain region (described in Theorem 9.12). Theorem 8.7 implies immediately Theorem 8.1, which, together with Theorem 5.2, gives a necessary and sufficient condition for the contiguity map to be an isomorphism. This settles in the affirmative [4, Conjecture 6.3.1].

In order to make this paper more accessible, we have included some results of an expository nature. In sections 2 and 3 we review the p -adic cohomology of exponential sums of the form (1.3). Proposition 4.6 then explains the reason for studying the spaces denoted $\mathcal{W}_a$ and $\mathcal{W}_{a,\lambda}$ later in the paper. In Remark 9.9 we explain the precise

relationship between exponential sums, the “dual spaces” $\mathcal{K}_{a,\lambda}$, and the “Frobenius map” $\alpha_{a,a',\lambda}^*$.

This article is based on lectures I gave at Princeton University in Spring, 1991, and I am grateful for their hospitality. It was originally intended to be part of a larger joint project with Professor Dwork, which was to extend more of [4] to sums of the form (1.3) and also improve some of the results of that book. Unfortunately, circumstances prevented its completion.

2 Preliminaries

We begin by fixing notation and defining the exponential sums that will be studied. Let p be a prime and q a power of p . Recall that the series (where $\pi = (-p)^{1/(p-1)}$)

$$\theta(t) = \exp \pi(t - t^p) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^j$$

satisfies the estimate

$$\text{ord } c_j \geq j \left(\frac{p-1}{p^2} \right). \quad (2.1)$$

Furthermore, $\theta(1)$ is a primitive p -th root of unity and if z lies in an extension of $\mathbb{Q}_p$ and satisfies $z^{p^r} = z$, then

$$\theta(1)^{z+z^p+\dots+z^{p^{r-1}}} = \theta(z)\theta(z^p)\dots\theta(z^{p^{r-1}}). \quad (2.2)$$

Let $f \in \mathbb{F}_q[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$ and write f in the form

$$f = \sum_{v \in \Gamma} f_v x^v, \quad (2.3)$$

where $\Gamma \subseteq \mathbb{Z}^n$ is finite and $f_v \in \mathbb{F}_q^\times$. Let $\hat{f}_v \in \mathbb{Q}_p(\zeta_{q-1})$ be the Teichmüller lifting of f_v and define

$$F_0(x) = \prod_{v \in \Gamma} \theta(\hat{f}_v x^v) \theta(\hat{f}_v^p x^{pv}) \dots \theta(\hat{f}_v^{q/p} x^{qv/p}) \\ \in \mathbb{Q}_p(\pi, \zeta_{q-1})[[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]].$$

By (2.1), the series $F_0(x)$ converges on a polyannulus containing the polycircle $|x| = 1$ (i.e., $|x_i| = 1$ for $i = 1, \dots, n$), and if $x \in \mathbb{Q}_p(\zeta_{q^m-1})^n$ satisfies $x^{q^m} = x$ (i.e., $x_i^{q^m} = x_i$ for $i = 1, \dots, n$), then by (2.2)

$$\prod_{i=0}^{m-1} F_0(x^{q^i}) = \theta(1)^{\text{Trace}_{\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_p}(f(\bar{x}))}, \quad (2.4)$$

where $\bar{x} \in (\mathbb{F}_{q^m})^n$ is the reduction of x modulo p . Thus the function F_0 gives a p -adic analytic representation of a nontrivial additive character on $\mathbb{F}_q$.

Let $\omega : \mathbb{F}_q^\times \rightarrow \mathbb{Q}_p(\zeta_{q-1})^\times$ be the Teichmüller character, i.e., $\omega(x)$ is the Teichmüller lifting of x . Since ω generates the character group of $\mathbb{F}_q^\times$, every multiplicative character of $\mathbb{F}_q^\times$ can be written in the form $\omega^{-a(q-1)}$, where

$$a \in \frac{1}{q-1}\mathbb{Z}, \quad 0 \leq a < 1. \quad (2.5)$$

Let $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}^n$, where each a_i satisfies (2.5). Exponential sums of the form (1.3) can then be represented p -adically as

$$S_m(f, a) = \sum_{\substack{x \in \mathbb{Q}_p(\zeta_{q^{m-1}}) \\ x^{q^m-1}=1}} x^{-a(q^m-1)} \prod_{i=0}^{m-1} F_0(x^{q^i}). \quad (2.6)$$

Its associated L -function is

$$L(f, a; t) = \exp \left(\sum_{m=0}^{\infty} S_m(f, a) \frac{t^m}{m} \right). \quad (2.7)$$

We describe the cohomology of such exponential sums. Let f be as in (2.3). The *Newton polyhedron* of f , denoted $\Delta(f)$, is defined to be the convex hull in $\mathbb{R}^n$ of $\Gamma \cup \{(0, \dots, 0)\}$. Let $C(f)$ be the cone over $\Delta(f)$, i.e., the union of all rays emanating from the origin and passing through $\Delta(f)$. For $u \in C(f)$, we define the *weight* of u , denoted $w(u)$, to be the least nonnegative real number such that $u \in w(u)\Delta(f)$, where $w(u)\Delta(f)$ denotes the dilatation of $\Delta(f)$ by the factor $w(u)$. The weight function is easily seen to have the following properties.

Lemma 2.1. (a) If $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$, and $u \in C(f)$, then $w(cu) = cw(u)$.

(b) If $u, u' \in C(f)$, then $w(u + u') \leq w(u) + w(u')$ with equality holding if and only if u and u' lie over a common face of $\Delta(f)$.

(c) There exists a positive integer M such that $w(u) \in M^{-1}\mathbb{Z}$ for all $u \in \mathbb{Z}^n \cap C(f)$.

Let K be an extension of $\mathbb{Q}_p$. Until section 4, we assume that the residue field of K is $\mathbb{F}_q$. Let “ord” denote the p -ordinal, normalized by $\text{ord } p = 1$. For $b, c \in \mathbb{R}$, $b > 0$, define

$$\begin{aligned} L(b, c) &= \left\{ \sum_{u \in \mathbb{Z}^n \cap C(f)} A_u x^u \mid A_u \in K, \text{ ord } A_u \geq bw(u) + c \right\} \\ L(b) &= \bigcup_{c \in \mathbb{R}} L(b, c) \\ L &= \left\{ \sum_{u \in \mathbb{Z}^n \cap C(f)} A_u \pi^{w(u)} x^u \mid A_u \in K, A_u \rightarrow 0 \text{ as } w(u) \rightarrow \infty \right\}. \end{aligned}$$

Note that these sets depend on K but we omit K from the notation. Note also that when writing $\pi^{w(u)}$ in the definition of L we are implicitly assuming that a fixed M -th root of π has been chosen (see Lemma 2.1(c)) and that this M -th root lies in K . One sees that $L(b) \subseteq L$ for $b > 1/(p-1)$ and $L \subseteq L(1/(p-1))$. The spaces $L(b)$ are Banach spaces under the norm

$$\|\xi\| = \sup_{u \in \mathbb{Z}^n \cap C(f)} |A_u / p^{bw(u)}|,$$

where $\xi = \sum_{u \in \mathbb{Z}^n \cap C(f)} A_u x^u \in L(b)$. We give L the norm inherited from the inclusion $L \subseteq L(1/(p-1))$:

$$\|\xi\| = \sup_{u \in \mathbb{Z}^n \cap C(f)} |A_u|$$

for $\xi = \sum_{u \in \mathbb{Z}^n \cap C(f)} A_u \pi^{w(u)} x^u \in L$. It is straightforward to check from (2.1) and Lemma 2.1(b) that $F_0 \in L((p-1)/pq, 0)$.

For any formal series $\sum_{u \in \mathbb{Z}^n} A_u x^u$, define

$$\psi \left(\sum_{u \in \mathbb{Z}^n} A_u x^u \right) = \sum_{u \in \mathbb{Z}^n} A_{pu} x^u. \quad (2.8)$$

Note that $\psi(L(b)) \subseteq L(pb)$. Let $a \in \mathbb{Q}^n$ be such that $(q-1)a \in \mathbb{Z}^n$ and $-a \in C(f)$. Write $q = p^s$ and define

$$\alpha_{(q-1)a} = \psi^s \circ x^{(1-q)a} F_0(x) : L(b) \rightarrow L(b)$$

for $0 < b < (p-1)/p$, i.e., $\alpha_{(q-1)a}$ is the composition

$$L(b) \xrightarrow{x^{(1-q)a} F_0(x)} L(\min\{b, (p-1)/pq\}) \xrightarrow{\psi^s} L(\min\{qb, (p-1)/p\}) \hookrightarrow L(b).$$

The following result is often referred to as the *Dwork trace formula* (see, for example, [1]).

Theorem 2.2.

$$(q^m - 1)^n \text{Trace}((\alpha_{(q-1)a})^m | L(b)) = \sum_{x^{q^m-1}=1} x^{-a(q^m-1)} \prod_{i=0}^{m-1} F_0(x^{q^i}).$$

Remark 2.3. This theorem remains true when L is substituted for $L(b)$ provided that $1/(p-1) < (p-1)/p$ (i.e., $p \neq 2$) because then for $\epsilon > 0$,

$$L(1/(p-1) + \epsilon) \subseteq L \subseteq L(1/(p-1))$$

and $\alpha_{(q-1)a}$ is stable on L .

By (2.6), (2.7), and Theorem 2.2 we have

$$\begin{aligned} L(f, a; t)^{(-1)^{n-1}} &= \exp \left((-1)^{n-1} \sum_{m=1}^{\infty} (q^m - 1)^n \text{Trace} (\alpha_{(q-1)a})^m \frac{t^m}{m} \right) \\ &= \exp \left(- \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j (q^j t)^m \right) \frac{\text{Trace} (\alpha_{(q-1)a})^m}{m} \right). \end{aligned}$$

But

$$\det(I - t\alpha_{(q-1)a}) = \exp \left(- \sum_{m=1}^{\infty} \text{Trace} (\alpha_{(q-1)a})^m \frac{t^m}{m} \right),$$

so if we define an operator ϕ on formal power series with constant term 1 by $g(t)^\phi = g(qt)$, then we have

$$L(f, a; t)^{(-1)^{n-1}} = \det(I - t\alpha_{(q-1)a})^{(1-\phi)^n}. \quad (2.9)$$

To interpret (2.9) cohomologically, we introduce certain differential operators on our p -adic Banach spaces. For f as in (2.3), let $\hat{f}$ be its Teichmüller lifting:

$$\hat{f} = \sum_{v \in \Gamma} \hat{f}_v x^v \in \mathbb{Q}_p(\zeta_{q-1})[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$$

and set $\hat{f}_i = x_i \partial \hat{f} / \partial x_i$. For $a \in K^n$, define differential operators $D_{i,a}$ by

$$D_{i,a} = x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + a_i + \pi \hat{f}_i.$$

The $D_{i,a}$ operate on L and on the $L(b)$ and commute with one another. Choose $\mu \in \mathbb{Z}^n$ such that $-\mu \in C(f)$ and set $a' = (a + \mu)/q$.

Lemma 2.4. *As operators on L or $L(b)$,*

$$\alpha_\mu \circ D_{i,a} = q D_{i,a'} \circ \alpha_\mu.$$

Proof. By continuity and linearity, it suffices to check the action of each side on a single monomial x^u with $u \in \mathbb{Z}^n \cap C(f)$. This is a straightforward calculation. $\square$

This lemma admits the following interpretation. Let $\mathcal{K}_\bullet(L, \{D_{i,a}\}_{i=1}^n)$ be the Koszul complex on L formed by the $D_{i,a}$. Define a map $\tilde{\alpha}_\mu : \mathcal{K}_\bullet(L, \{D_{i,a}\}_{i=1}^n) \rightarrow \mathcal{K}_\bullet(L, \{D_{i,a'}\}_{i=1}^n)$ as being $q^j \alpha_\mu$ acting on the j -th term $\mathcal{K}_j(L, \{D_{i,a}\}_{i=1}^n) = L^{\binom{n}{j}}$ of the Koszul complex.

Corollary 2.5. *The map $\tilde{\alpha}_\mu$ is a chain map from the complex $\mathcal{K}_\bullet(L, \{D_{i,a}\}_{i=1}^n)$ to the complex $\mathcal{K}_\bullet(L, \{D_{i,a'}\}_{i=1}^n)$.*

Now let $a \in \mathbb{Q}^n$ be such that $(q-1)a \in \mathbb{Z}^n$ and $-a \in C(f)$ and consider the L -function $L(f, a; t)$ defined in (2.7). Take $\mu = (q-1)a$, so that $a' = a$. Then by Corollary 2.5, $\tilde{\alpha}_\mu$ is an endomorphism of the complex $\mathcal{K}_\bullet(L, \{D_{i,a}\}_{i=1}^n)$, and from (2.9) we have

$$\begin{aligned} L(f, a; t)^{(-1)^{n-1}} &= \prod_{j=0}^n \det(I - tq^j \alpha_{(q-1)a} | L)^{(-1)^j \binom{n}{j}} \\ &= \det(I - t\tilde{\alpha}_{(q-1)a} | \mathcal{K}_\bullet(L, \{D_{i,a}\}_{i=1}^n)). \end{aligned} \quad (2.10)$$

If we let $H_j(\mathcal{K}_\bullet(L, \{D_{i,a}\}_{i=1}^n))$ denote the homology of this Koszul complex, then we have by [7]

$$L(f, a; t)^{(-1)^{n-1}} = \prod_{j=0}^n \det(I - tq^j \alpha_{(q-1)a} | H_j(\mathcal{K}_\bullet(L, \{D_{i,a}\}_{i=1}^n)))^{(-1)^j}. \quad (2.11)$$

3 Calculation of $H_j(\mathcal{K}_\bullet(L, \{D_{i,a}\}_{i=1}^n))$

We first use a theorem of Kouchnirenko to calculate the homology of a related Koszul complex in characteristic p and then use a theorem of Monsky to lift the result to characteristic 0.

Let $R = \mathbb{F}_q[x^u \mid u \in \mathbb{Z} \cap C(f)]$. The weight function $w : \mathbb{Z}^n \cap C(f) \rightarrow M^{-1}\mathbb{Z}$ (see Lemma 2.1(c)) defines a filtration on R by setting for each nonnegative integer i

$$R_{i/M} = \left\{ \sum b_u x^u \in R \mid w(u) \leq i/M \text{ if } b_u \neq 0 \right\}.$$

Let $\text{gr}(R) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \text{gr}(R)^{(i/M)}$ be the associated graded ring, where

$$\text{gr}(R)^{(i/M)} = R_{i/M} / R_{(i-1)/M}.$$

Then R and $\text{gr}(R)$ are identical as $\mathbb{F}_q$ -vector spaces, but, by Lemma 2.1(b), in $\text{gr}(R)$

$$x^u x^{u'} = \begin{cases} x^{u+u'} & \text{if } u \text{ and } u' \text{ lie over a common face of } \Delta(f), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

For σ a face of $\Delta(f)$, set $f_\sigma = \sum_{v \in \sigma \cap \Gamma} f_v x^v$. We say that f is *nondegenerate (relative to $\Delta(f)$)* if for every face σ of $\Delta(f)$ that does not contain the origin, the polynomials $\{\partial f_\sigma / \partial x_i\}_{i=1}^n$ have no common zero in $(\bar{\mathbb{F}}_q^\times)^n$, where $\bar{\mathbb{F}}_q$ denotes the algebraic closure of $\mathbb{F}_q$.

Let σ be a polytope in $\mathbb{R}^n$, containing the origin, with vertices in $\mathbb{Z}^n$. Let L_σ be the smallest linear subspace of $\mathbb{R}^n$ containing σ . By the *dimension* d_σ of σ we mean the dimension of L_σ . Define $V(\sigma)$ to be the d_σ -dimensional volume of σ relative to $\mathbb{Z}^n$, i.e., $V(\sigma)$ is the volume of σ with respect to Haar measure on L_σ normalized so that a fundamental domain for the lattice $\mathbb{Z}^n \cap L_\sigma$ has volume 1. (So if $d_\sigma = n$, $V(\sigma)$

is ordinary volume with respect to Lebesgue measure on $\mathbb{R}^n$.) Set $N_\sigma = d_\sigma!V(\sigma)$, a nonnegative integer. In the special case where $\sigma = \Delta(f)$, we write d_f , L_f , $V(f)$, N_f in place of $d_{\Delta(f)}$, $L_{\Delta(f)}$, $V(\Delta(f))$, $N_{\Delta(f)}$, respectively.

For $i = 1, \dots, n$, set $f_i = x_i \partial f / \partial x_i \in R_1$ and let $\text{gr}(f_i) \in \text{gr}(R)^{(1)}$ be its image in the associated graded. If the exponents $v \in \Gamma$ appearing in f all lie in a hyperplane $\sum_{i=1}^n b_i v_i = 0$ (where $v = (v_1, \dots, v_n)$), then $\sum_{i=1}^n b_i \bar{f}_i = 0$ also. Since $\dim \Delta(f) = d_f$, it follows that there exists a subset $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ with $|S| = d_f$ such that each $\text{gr}(f_j)$ is an $\mathbb{F}_q$ -linear combination of $\{\text{gr}(f_i)\}_{i \in S}$. The following result is a variation of [5, Théorème 2.8]. For a proof, see [2, Theorem 2.14].

Theorem 3.1. *If f is nondegenerate, the Koszul complex $\mathcal{K}_\bullet(\text{gr}(R), \{\text{gr}(f_i)\}_{i \in S})$ is acyclic in positive dimension and*

$$\dim_{\mathbb{F}_q} \text{gr}(R) / \sum_{i \in S} \text{gr}(f_i) \text{gr}(R) = N_f.$$

Remark 3.2. This result remains true for a polynomial f with coefficients in any field, i.e., the finiteness of $\mathbb{F}_q$ is not used in the proof.

For $c \in \mathbb{F}_q^n$, define differential operators $D_{i,c}$ acting on $\text{gr}(R)$ by

$$D_{i,c} = x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c_i + \text{gr}(f_i).$$

Corollary 3.3. *If f is nondegenerate, the Koszul complex $\mathcal{K}_\bullet(\text{gr}(R), \{D_{i,c}\}_{i \in S})$ is acyclic in positive dimension and*

$$\dim_{\mathbb{F}_q} \text{gr}(R) / \sum_{i \in S} D_{i,c} \text{gr}(R) = N_f.$$

Proof. The grading on $\text{gr}(R)$ makes $\mathcal{K}_\bullet(\text{gr}(R), \{D_{i,c}\}_{i \in S})$ into a filtered complex whose associated graded complex is $\mathcal{K}_\bullet(\text{gr}(R), \{\text{gr}(f_i)\}_{i \in S})$. By standard facts in commutative algebra, the assertion of the lemma then follows immediately from Theorem 3.1. $\square$

Remark 3.4. It also follows from standard facts in commutative algebra that any elements of $\text{gr}(R)$ that form a basis for $\text{gr}(R) / \sum_{i \in S} \text{gr}(f_i) \text{gr}(R)$ also form a basis for $\text{gr}(R) / \sum_{i \in S} D_{i,c} \text{gr}(R)$.

Remark 3.5. Note that if c lies in the subspace of $\mathbb{F}_q^n$ generated by the reductions mod p of the elements of Γ , then as operators on $\text{gr}(R)$ the $\{D_{i,c}\}_{i=1}^n$ are linear combinations of the $\{D_{i,c}\}_{i \in S}$. In this case, $\sum_{i=1}^n D_{i,c} \text{gr}(R) = \sum_{i \in S} D_{i,c} \text{gr}(R)$.

Let $L^{(0)}$ be the unit ball of L , i.e.,

$$L^{(0)} = \left\{ \sum_{u \in \mathbb{Z}^n \cap C(f)} A_u \pi^{w(u)} x^u \mid |A_u| \leq 1 \text{ for all } u \text{ and } A_u \rightarrow 0 \text{ as } u \rightarrow \infty \right\}.$$

In the obvious way, $L^{(0)}$ is a module over $\mathcal{O}_K$, the ring of integers of K . We now assume that $\pi^{1/M}$ is a uniformizer for $\mathcal{O}_K$ (for example, take $K = \mathbb{Q}_p(\zeta_{q-1}, \pi^{1/M})$). The map

$$\sum A_u \pi^{w(u)} x^u \mapsto \sum \bar{A}_u x^u, \quad (3.1)$$

where $\bar{A}_u$ denotes the reduction of A_u modulo $\pi^{1/M} \mathcal{O}_K$, induces an identification $L^{(0)}/\pi^{1/M} L^{(0)} = \text{gr}(R)$ of $\mathbb{F}_q$ -vector spaces. In fact, more is true. The space $L^{(0)}$ is a ring and, using Lemma 2.1(b), one checks that (3.1) is a homomorphism of rings. Thus $L^{(0)}/\pi^{1/M} L^{(0)}$ and $\text{gr}(R)$ are identified as $\mathbb{F}_q$ -algebras.

If $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{O}_K^n$, we may form the Koszul complex $\mathcal{K}_\bullet(L^{(0)}, \{D_{i,a}\}_{i \in S})$. Since $\pi \hat{f}_i \mapsto \text{gr}(f_i)$ under the map (3.1), the reduction mod $\pi^{1/M} \mathcal{O}_K$ of this complex is the Koszul complex $\mathcal{K}_\bullet(\text{gr}(R), \{D_{i,\bar{a}}\}_{i \in S})$, where $\bar{a} = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) \in \mathbb{F}_q^n$ and $\bar{a}_i$ denotes the reduction of a_i modulo the maximal ideal of $\mathcal{O}_K$. To “lift” the result of Corollary 3.3 to characteristic 0 and compute the cohomology of the complex $\mathcal{K}_\bullet(L, \{D_{i,a}\}_{i=1}^n)$, which describes the L -function $L(f, a; t)$, we need the following result of Monsky [6, Theorem 8.5]. For a proof, one can also see the appendix to [2].

Theorem 3.6. *Let $\mathcal{O}$ be a complete discrete valuation ring with uniformizer $\pi_{\mathcal{O}}$ and let*

$$\mathcal{K}_\bullet = \{\cdots \rightarrow K_1 \rightarrow K_0 \rightarrow 0\}$$

be a complex of $\mathcal{O}$ -modules satisfying

- (i) *multiplication by $\pi_{\mathcal{O}}$ is injective on each K_i ,*
- (ii) $\bigcap_{l=0}^{\infty} \pi_{\mathcal{O}}^l K_i = 0$ *for all i ,*
- (iii) *each K_i is complete in the metric $|x| = |\pi_{\mathcal{O}}|^{l(x)}$, where*

$$l(x) = \max\{l \mid x \in \pi_{\mathcal{O}}^l K_i\}.$$

Let $\bar{\mathcal{K}}_\bullet$ be the complex obtained by reducing $\mathcal{K}_\bullet$ modulo $\pi_{\mathcal{O}}$. Then

- (a) *for any l , $H_l(\bar{\mathcal{K}}_\bullet) = 0$ implies $H_l(\mathcal{K}_\bullet) = 0$,*
- (b) *if $\dim_{\mathcal{O}/(\pi_{\mathcal{O}})} H_0(\bar{\mathcal{K}}_\bullet) = r < \infty$ and $H_1(\bar{\mathcal{K}}_\bullet) = 0$, then $H_0(\mathcal{K}_\bullet)$ is a free $\mathcal{O}$ -module of rank r and any lifting of any basis for $H_0(\bar{\mathcal{K}}_\bullet)$ is a basis for $H_0(\mathcal{K}_\bullet)$.*

Applying this theorem to the Koszul complex $\mathcal{K}_\bullet(L^{(0)}, \{D_{i,a}\}_{i \in S})$ (and Corollary 3.3 to its reduction modulo $\pi^{1/M}$), we conclude that if f is nondegenerate and $a \in \mathcal{O}_K^n$, then

$$H_j(\mathcal{K}_\bullet(L^{(0)}, \{D_{i,a}\}_{i \in S})) = 0$$

for $j > 0$ while $H_0(\mathcal{K}_\bullet(L^{(0)}, \{D_{i,a}\}_{i \in S}))$ is a free $\mathcal{O}_K$ -module of rank N_f . Since $L = L^{(0)} \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ and K is a flat $\mathcal{O}_K$ -module, the following result is an immediate consequence.

Theorem 3.7. *If f is nondegenerate and $a \in \mathcal{O}_K^n$, then*

$$H_j(\mathcal{K}_\bullet(L, \{D_{i,a}\}_{i \in S})) = 0$$

for $j > 0$ and

$$\dim_K L / \sum_{i \in S} D_{i,a} L = N_f.$$

From (2.11) we get immediately the following.

Corollary 3.8. *Let $a \in \mathbb{Q}^n$ be such that $(q-1)a \in \mathbb{Z}^n$ and $-a \in C(f)$. Suppose that f is nondegenerate and that $d_f = n$ (hence $S = \{1, \dots, n\}$). Then*

$$L(f, a; t)^{(-1)^{n-1}} = \det \left(I - t\alpha_{(q-1)a} \mid L / \sum_{i=1}^n D_{i,a} L \right).$$

In particular, $L(f, a; t)^{(-1)^{n-1}}$ is a polynomial of degree $\leq N_f$.

Remark 3.9. It follows from Theorem 9.8 and equation 9.5 that the degree of $L(f, a; t)^{(-1)^{n-1}}$ equals N_f .

For completeness, we describe the L -function when $d_f < n$. We assume that $a \in \mathcal{O}_K^n \cap (L_f \otimes_{\mathbb{Q}} K)$. This implies that as operators on L the $\{D_{i,a}\}_{i=1}^n$ are linear combinations of the $\{D_{i,a}\}_{i \in S}$. Since $|S| = d_f$, a standard result in commutative algebra relating the homology of $\mathcal{K}_\bullet(L, \{D_{i,a}\}_{i=1}^n)$ to the homology of $\mathcal{K}_\bullet(L, \{D_{i,a}\}_{i \in S})$ gives the following.

Theorem 3.10. *If f is nondegenerate and $a \in \mathcal{O}_K^n \cap (L_f \otimes_{\mathbb{Q}} K)$, then*

$$H_j(\mathcal{K}_\bullet(L, \{D_{i,a}\}_{i=1}^n)) = 0$$

for $j > n - d_f$, $H_j(\mathcal{K}_\bullet(L, \{D_{i,a}\}_{i=1}^n))$ is isomorphic to the direct sum of $\binom{n-d_f}{j}$ copies of $L / \sum_{i=1}^n D_{i,a} L$ for $0 \leq j \leq n - d_f$, and

$$\dim_K L / \sum_{i=1}^n D_{i,a} L = N_f.$$

When a satisfies the hypothesis of Corollary 3.8, these Koszul complexes have an action of Frobenius $\tilde{\alpha}_{(q-1)a}$ and the isomorphisms of Theorem 3.10 respect that action. Applying (2.11) we get the following result.

Corollary 3.11. *If f is nondegenerate, $(q-1)a \in \mathbb{Z}^n$, and $-a \in C(f)$, then*

$$L(f, a; t)^{(-1)^{n-1}} = \det \left(I - t\alpha_{(q-1)a} \mid L / \sum_{i=1}^n D_{i,a} L \right)^{(1-\phi)^{n-d_f}}.$$

4 Generalization of the cohomology spaces

Under the hypothesis of Corollary 3.11, the quotient space $L / \sum_{i=1}^n D_{i,a} L$ carries the essential information about $L(f, a; t)$. This quotient space depends on the rational variable a and the Teichmüller lifting $\hat{f}$ of f that were used to define the $D_{i,a}$. To discuss p -adic variation of cohomology, we need to replace a and $\hat{f}$ by p -adic variables. The purpose of this section is to construct such a generalization of the $D_{i,a}$ and show that the corresponding quotient spaces behave nicely.

Let K be an arbitrary extension of $\mathbb{Q}_p$ containing π and let

$$g = \sum_{v \in \Gamma} g_v x^v \in K[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}].$$

If g has coefficients in $\mathcal{O}_K$, we let $\bar{g}$ be its reduction modulo the maximal ideal.

Lemma 4.1. *If g and $\bar{g}$ have the same Newton polyhedron, then $\bar{g}$ nondegenerate implies g nondegenerate.*

Proof. Suppose there is a face σ of $\Delta(f)$ not containing the origin such that $\partial g_\sigma / \partial x_1, \dots, \partial g_\sigma / \partial x_n$ have a common zero $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\bar{K}^\times)^n$, where $\bar{K}$ denotes the algebraic closure of K . Since $g_\sigma = \sum_{v \in \sigma \cap \Gamma} g_v x^v$, we have

$$x_i \frac{\partial g_\sigma}{\partial x_i} \Big|_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = \sum_{v \in \sigma \cap \Gamma} g_v v_i \alpha^v = 0$$

for $i = 1, \dots, n$. Let $\text{ord } \alpha_i = r_i$ and set $\beta_i = p^{-r_i} \alpha_i$, so that $\text{ord } \beta_i = 0$ for all i . Then

$$\sum_{v \in \sigma \cap \Gamma} g_v v_i \beta^v p^{r_1 v_1 + \dots + r_n v_n} = 0 \quad (4.1)$$

for $i = 1, \dots, n$. Let τ be the face of σ on which the linear form $r_1 x_1 + \dots + r_n x_n$ attains its minimum as function on σ and let c be that minimum. Dividing (4.1) by p^c gives

$$\sum_{v \in \tau \cap \Gamma} g_v v_i \beta^v = - \sum_{v \in (\sigma \setminus \tau) \cap \Gamma} g_v v_i \beta^v p^{r_1 v_1 + \dots + r_n v_n - c}$$

for all i . Reducing modulo the maximal ideal, we have

$$\sum_{v \in \tau \cap \Gamma} \bar{g}_v v_i \bar{\beta}^v = 0$$

for all i , where $\bar{g}_v, \bar{\beta}$ denote reductions modulo the maximal ideal. But this says that $\bar{\beta} \in (\bar{\mathbb{F}}_q^\times)^n$ is a common zero of $\partial \bar{g}_\tau / \partial x_1, \dots, \partial \bar{g}_\tau / \partial x_n$. $\square$

We use the notation of Section 3 and apply some of those results to the present situation. Let $R_K = K[x^u \mid u \in \mathbb{Z} \cap C(g)]$. As in section 3, the weight function

w defines a filtration on R_K , and we let $\text{gr}(R_K)$ be its associated graded. Let $g_i = x_i \partial g / \partial x_i \in (R_K)_1$ and let $\text{gr}(g_i) \in \text{gr}(R_K)^{(1)}$ denote the image of g_i in the associated graded. By Theorem 3.1 and Remark 3.2 we have the following.

Proposition 4.2. *If g is nondegenerate, then the Koszul complex*

$$\mathcal{K}_\bullet(\text{gr}(R_K), \{\text{gr}(g_i)\}_{i \in S})$$

is acyclic in positive dimension and

$$\dim_K \text{gr}(R_K) / \sum_{i \in S} \text{gr}(g_i) \text{gr}(R_K) = N_g.$$

Let $a \in K^n$ and define

$$D_{i,a} = x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + a_i + \pi g_i$$

for $i = 1, \dots, n$. Although we use the same notation as in sections 2 and 3, these differential operators generalize those of the earlier sections in that the Teichmüller lifting $\hat{f}$ of f is replaced by an arbitrary Laurent polynomial g .

Theorem 4.3. *If g is nondegenerate, the Koszul complex $\mathcal{K}_\bullet(R_K, \{D_{i,a}\}_{i \in S})$ is acyclic in positive dimension and*

$$\dim_K R_K / \sum_{i \in S} D_{i,a} R_K = N_g.$$

Proof. Relative to the filtration w on R_K , the associated graded of the complex $\mathcal{K}_\bullet(R_K, \{D_{i,a}\}_{i \in S})$ is the complex $\mathcal{K}_\bullet(\text{gr}(R_K), \{\pi \text{gr}(g_i)\}_{i \in S})$, so the assertions of the theorem follow from Proposition 4.2. $\square$

Remark 4.4. By standard facts in commutative algebra, it follows from the proof that any elements of R_K that form a basis for $\text{gr}(R_K) / \sum_{i \in S} \text{gr}(g_i) \text{gr}(R_K)$ also form a basis for $R_K / \sum_{i \in S} D_{i,a} R_K$.

Remark 4.5. If $a \in L_g \otimes_{\mathbb{Q}} K$, then as operators on R_K the $\{D_{i,a}\}_{i=1}^n$ are linear combinations of the $\{D_{i,a}\}_{i \in S}$. Hence when g is nondegenerate

$$\dim_K R_K / \sum_{i=1}^n D_{i,a} R_K = N_g.$$

Finally, we want to show that the spaces $R_K / \sum_{i=1}^n D_{i,a} R_K$ really generalize the spaces $L / \sum_{i=1}^n D_{i,a} L$ of Theorem 3.10. Suppose the hypothesis of Theorem 3.10 holds and take $g = \hat{f}$. The inclusion $R_K \hookrightarrow L$ induces a map

$$R_K / \sum_{i=1}^n D_{i,a} R_K \rightarrow L / \sum_{i=1}^n D_{i,a} L.$$

Proposition 4.6. *Under the hypothesis of Theorem 3.10, this map is an isomorphism.*

Proof. The proof of Theorem 3.7 shows that $L / \sum_{i=1}^n D_{i,a} L$ has a basis consisting of monomials (see Theorem 3.6(b)), hence the map is surjective. But by Theorem 3.10, Lemma 4.1, and Remark 4.5, both quotients have the same dimension. $\square$

5 Contiguity mapping

For the remainder of this article, we assume $a \in L_g \otimes_{\mathbb{Q}} K$ (see Remark 4.5). Set

$$\mathcal{W}_a = R_K / \sum_{i=1}^n D_{i,a} R_K.$$

Let $u \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$. Since multiplication by x^u maps R_K into itself and satisfies

$$D_{i,a-u} \circ x^u = x^u \circ D_{i,a},$$

it induces a map $x^u : \mathcal{W}_a \rightarrow \mathcal{W}_{a-u}$. We shall determine when this map is an isomorphism. For this, it is necessary to study the faces of $\Delta(g)$ and $C(g)$.

Let $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ be the codimension-one faces of $\Delta(g)$ that contain the origin. Then $C(\sigma_1), \dots, C(\sigma_s)$ are the codimension-one faces of $C(g)$. Define linear forms $l_1, \dots, l_s$ on L_g by the following conditions:

$$l_j = 0 \quad \text{on } L_{\sigma_j}, \tag{5.1}$$

$$l_j(\mathbb{Z}^n \cap L_g) = \mathbb{Z}, \tag{5.2}$$

$$l_j \geq 0 \quad \text{on } C(g). \tag{5.3}$$

Condition (5.1) determines l_j up to a scalar multiple, while conditions (5.1) and (5.2) together determine l_j up to sign. Equivalently, one may choose a basis $v_1, \dots, v_{d_g}$ for $\mathbb{Z}^n \cap L_g$ such that $v_1, \dots, v_{d_g-1}$ is a basis for $\mathbb{Z}^n \cap L_{\sigma_j}$ and such that v_{d_g} lies on the same side of L_{σ_j} as $C(g)$ and then define l_j by the conditions

$$l_j(v_1) = \dots = l_j(v_{d_g-1}) = 0 \tag{5.4}$$

$$l_j(v_{d_g}) = 1. \tag{5.5}$$

The following lemma is straightforward.

Lemma 5.1. *For $u \in L_g$, one has $u \in C(g)$ if and only if $l_j(u) \geq 0$ for $j = 1, \dots, s$. Furthermore, no proper subset of $\{l_1, \dots, l_s\}$ has this property.*

By abuse of notation, we shall also write l_j for any extension of l_j to a linear form on $\mathbb{R}^n$. Thus

$$l_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} x_i \tag{5.6}$$

with $\alpha_{ij} \in \mathbb{Q}$. Define differential operators $l_j(D_a)$ by

$$l_j(D_a) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} D_{i,a}. \quad (5.7)$$

As an operator on R_K , $l_j(D_a)$ is independent of the choice of extension of l_j . To see this, let $u \in \mathbb{Z}^n \cap L_g$. Then

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} D_{i,a}(x^u) &= \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} (u_i + a_i + \pi g_i) x^u \\ &= l_j(a + u) x^u + \sum_{v \in \Gamma} \pi g_v l_j(v) x^{u+v}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

This is independent of the extension of l_j to $\mathbb{R}^n$ because $a, u, v \in L_g \otimes_{\mathbb{Q}} K$.

Recall the Pochhammer notation (for j a nonnegative integer):

$$(a)_j = \begin{cases} 1 & \text{if } j = 0, \\ a(a+1) \dots (a+j-1) & \text{if } j > 0. \end{cases}$$

Theorem 5.2. *Suppose g is nondegenerate and let $u \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$. If*

$$\prod_{j=1}^s (l_j(a - u))_{l_j(u)} \neq 0,$$

then $x^u : \mathcal{W}_a \rightarrow \mathcal{W}_{a-u}$ is an isomorphism.

Proof. By Remark 4.5, $\mathcal{W}_a$ and $\mathcal{W}_{a-u}$ have the same dimension N_g , so it suffices to show the map is surjective. Since $\mathcal{W}_{a-u}$ has a basis of monomials, it suffices to show that, given $v \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$, there exists $\xi \in R_K$ such that

$$x^v \equiv x^u \xi \pmod{\sum_{i=1}^n D_{i,a-u} R_K}.$$

If $l_j(v) \geq l_j(u)$ for all j , then $v - u \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$ by Lemma 5.1 and we may take $\xi = x^{v-u}$. Otherwise, we may suppose, for example, that $l_1(u) > l_1(v)$. Then by (5.8)

$$l_1(D_{a-u})(x^v) = l_1(a - u + v) x^v + \sum_{v \in \Gamma} \pi g_v l_1(v) x^{v+v}. \quad (5.9)$$

Since x^v is a monomial appearing in g , we have $l_1(v) \geq 0$. Thus all monomials x^{v+v} appearing in the sum on the right-hand side of (5.9) with nonzero coefficient satisfy $l_1(v+v) > l_1(v)$. Since

$$l_1(a - u) \leq l_1(a - u + v) < l_1(a),$$

our hypothesis implies that $l_1(a - u + v) \neq 0$. Hence by (5.9),

$$x^v \equiv \sum_{l_1(w) > l_1(v)} b_w x^w \pmod{\sum_{i=1}^n D_{i,a-u} R_K} \quad (5.10)$$

where $b_w \in K$ and the sum is over a finite set of w . This argument may be reapplied to each x^w on the right-hand side of (5.10) for which $l_1(w) < l_1(u)$. After finitely many iterations, we will arrive at a relation

$$x^v \equiv \sum_{w'} c_{w'} x^{w'} \pmod{\sum_{i=1}^n D_{i,a-u} R_K}$$

where $l_1(w') \geq l_1(u)$ for all w' . Furthermore, it is straightforward to check that the w' produced by this procedure satisfy $l_j(w') \geq l_j(v)$ for $j = 2, \dots, s$. Applying the argument successively to $l_2, \dots, l_s$ establishes the theorem. $\square$

By Theorem 5.2, $x^u : \mathcal{W}_a \rightarrow \mathcal{W}_{a-u}$ is an isomorphism for all $u \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$ if $l_j(a)$ is not a positive integer for any $j = 1, \dots, s$. We give a geometric interpretation of this condition.

Proposition 5.3. *The value $l_j(a)$ is not a positive integer if and only if*

$$a \notin (\mathbb{Z}^n \cap (C(g) \setminus C(\sigma_j))) + L_{\sigma_j}. \quad (5.11)$$

Proof. Since l_j assumes positive integral values at all points lying in the right-hand side of (5.11), the “only if” part of the proposition is clear. So suppose $l_j(a)$ is a positive integer. By (5.2) there exists $u \in \mathbb{Z}^n \cap L_g$ such that $l_j(u) = l_j(a)$, i.e., $a - u \in L_{\sigma_j}$. Note that for $j' \neq j$, there exist elements v of $\mathbb{Z}^n \cap C(\sigma_j)$ for which $l_{j'}(v)$ is arbitrarily large. (Otherwise $l_{j'}$ would vanish on $C(\sigma_j)$, contradicting the construction of $l_1, \dots, l_s$.) By adding such elements of $\mathbb{Z}^n \cap C(\sigma_j)$ to u , we may assume that $u \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$. It follows that $a \in u + L_{\sigma_j}$, where $u \in \mathbb{Z}^n \cap (C(g) \setminus C(\sigma_j))$. $\square$

We shall call a *semi-nonresonant* if $l_j(a)$ is not a positive integer for $j = 1, \dots, s$.

Corollary 5.4. *If g is nondegenerate and a is semi-nonresonant, then the map $x^u : \mathcal{W}_a \rightarrow \mathcal{W}_{a-u}$ is an isomorphism for all $u \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$.*

Let $R'_K = K[x^u \mid u \in \mathbb{Z}^n \cap L_g]$. We want to describe $\mathcal{W}'_a = R'_K / \sum_{i=1}^n D_{i,a} R'_K$. Note that the approach of Theorem 4.3, namely, approximating $D_{i,a}$ by $\text{gr}(g_i)$ will not work. For example, if $g = x_1 + x_2$, then $R'_K / (g_1 R'_K + g_2 R'_K) = 0$, while we shall see that $\mathcal{W}'_a \neq 0$.

Lemma 5.5. *If g is nondegenerate and a is semi-nonresonant, then the natural map $\mathcal{W}_a \rightarrow \mathcal{W}'_a$ induced by the inclusion $R_K \hookrightarrow R'_K$ is an isomorphism.*

Proof. Let $\xi \in R'_K$. Then $x^u \xi \in R_K$ for some $u \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$. By Corollary 5.4, there exists $\eta \in R_K$ such that

$$x^u \eta \equiv x^u \xi \pmod{\sum_{i=1}^n D_{i,a-u} R_K}.$$

Dividing this equation by x^u gives

$$\eta \equiv \xi \pmod{\sum_{i=1}^n D_{i,a}(x^{-u} R_K)},$$

which proves the surjectivity of $\mathcal{W}_a \rightarrow \mathcal{W}'_a$.

Now let $\xi \in R_K$ and suppose $\xi = \sum_{i=1}^n D_{i,a}(\eta_i)$ with all $\eta_i \in R'_K$. There exists $u \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$ such that $\eta_i = x^{-u} \eta'_i$ with $\eta'_i \in R_K$ for all i . Then

$$\xi = \sum_{i=1}^n D_{i,a}(x^{-u} \eta'_i) = \sum_{i=1}^n x^{-u} D_{i,a-u}(\eta'_i),$$

i.e., $x^u \xi = \sum_{i=1}^n D_{i,a-u}(\eta'_i)$. This says that ξ lies in the kernel of the map $x^u : \mathcal{W}_a \rightarrow \mathcal{W}_{a-u}$, hence by Corollary 5.4 there exist $\eta''_i \in R_K$ such that $\xi = \sum_{i=1}^n D_{i,a}(\eta''_i)$, proving the injectivity of the map $\mathcal{W}_a \rightarrow \mathcal{W}'_a$. $\square$

Corollary 5.6. *If g is nondegenerate, then $\dim_K \mathcal{W}'_a = N_g$.*

Proof. For all $u \in \mathbb{Z}^n \cap L_g$, multiplication by x^u is an automorphism of R'_K , hence there is an induced isomorphism $x^u : \mathcal{W}'_a \rightarrow \mathcal{W}'_{a-u}$. In particular,

$$\dim_K \mathcal{W}'_a = \dim_K \mathcal{W}'_{a-u}. \quad (5.12)$$

Given $a \in L_g$, we can always choose $u \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$ such that $l_j(a-u)$ is not a positive integer for any j , i.e., such that $a-u$ is semi-nonresonant. (For example, pick u so that $a-u$ is in the relative interior of $-C(g)$.) Then by Lemma 5.5,

$$\dim_K \mathcal{W}_{a-u} = \dim_K \mathcal{W}'_{a-u}. \quad (5.13)$$

The assertion of the corollary now follows from (5.12), (5.13), and Remark 4.5. $\square$

For future reference we record some related results. If we shift the indexing so that $\mathcal{W}_a$ is the target of multiplication by x^u rather than the source, then the map $x^u : \mathcal{W}_{a+u} \rightarrow \mathcal{W}_a$ is an isomorphism if $\prod_{j=1}^s (l_j(a))_{l_j(u)} \neq 0$. Thus $x^u : \mathcal{W}_{a+u} \rightarrow \mathcal{W}_a$ is an isomorphism for all $u \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$ if $l_j(a)$ is not a nonpositive integer for any j . We call a *nonresonant* if $l_j(a) \notin \mathbb{Z}$ for any j .

Proposition 5.7. *The value $l_j(a)$ is not an integer if and only if*

$$a \notin (\mathbb{Z}^n \cap L_g) + L_{\sigma_j}.$$

Proof. Since l_j assumes integral values on $(\mathbb{Z}^n \cap L_g) + L_{\sigma_j}$, the “only if” part is obvious. Suppose $l_j(a) \in \mathbb{Z}$. By (5.2) there exists $u \in \mathbb{Z}^n \cap L_g$ such that $l_j(u) = l_j(a)$, i.e., $l_j(a - u) = 0$. Thus $a - u \in L_{\sigma_j}$ and

$$a = u + (a - u) \in (\mathbb{Z}^n \cap L_g) + L_{\sigma_j}. \quad \square$$

Remark 5.8. Suppose that g is nondegenerate and a is nonresonant. Then by Lemma 5.5, both $\mathcal{W}_a \rightarrow \mathcal{W}'_a$ and $\mathcal{W}_{a-u} \rightarrow \mathcal{W}'_{a-u}$ are isomorphisms for all $u \in \mathbb{Z}^n \cap L_g$. Thus when a is nonresonant we can define for all $u \in \mathbb{Z}^n \cap L_g$ an isomorphism $x^u : \mathcal{W}_a \rightarrow \mathcal{W}_{a-u}$ as the composition

$$\mathcal{W}_a \rightarrow \mathcal{W}'_a \xrightarrow{x^u} \mathcal{W}'_{a-u} \rightarrow \mathcal{W}_{a-u}, \quad (5.14)$$

where the first arrow is the isomorphism of Lemma 5.5 and the third arrow is the inverse of the isomorphism of Lemma 5.5. When $u \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$, this map coincides with the map induced by multiplication by x^u .

6 Cohomology with parameters

In this section, we consider what happens when the coefficients of our polynomial g vary with parameters. Let $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ be indeterminates over K and let

$$g(\lambda, x) = \sum_{v \in \Gamma} g_v(\lambda) x^v \in K[\lambda][x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}], \quad (6.1)$$

where we write λ for $\lambda_1, \dots, \lambda_N$. We also put $g_i(\lambda, x) = x_i \partial g / \partial x_i$ and set

$$D_{i,a,\lambda} = x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + a_i + \pi g_i(\lambda, x). \quad (6.2)$$

We shall study how

$$\mathcal{W}_{a,\lambda} = R_{K(\lambda)} / \sum_{i=1}^n D_{i,a,\lambda} R_{K(\lambda)}$$

varies with λ .

We introduce some notation. Let B be a subring of $K[\lambda]$ containing $\mathbb{Z}$ and the $g_v(\lambda)$. Set

$$R_B = B[x^u \mid u \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)].$$

Let $R_{B,m/M}$ be the B -submodule of R_B generated by all x^u with $w(u) \leq m/M$ and let $R_B^{(m/M)}$ be the B -submodule generated by all x^u with $w(u) = m/M$.

Choose a collection of monomials $\{x^{u_j}\}_{j=1}^{N_g}$. To insure the theory is not vacuous, we assume that for some specialization $\lambda^{(0)} \in \bar{K}^N$, $g(\lambda^{(0)}, x)$ is nondegenerate and

these monomials form a basis for $\text{gr}(R_{K(\lambda^{(0)})}) / \sum_{i=1}^n \text{gr}(g_i(\lambda^{(0)}, x)) \text{gr}(R_{K(\lambda^{(0)})})$. Let W_B be the B -submodule of R_B generated by the $\{x^{u_j}\}_{j=1}^{N_g}$, let $W_{B, m/M}$ be the B -submodule generated by those x^{u_j} with $w(u_j) \leq m/M$, and let $W_B^{(m/M)}$ be the B -submodule generated by those x^{u_j} with $w(u_j) = m/M$.

Remark 6.1. We observe that all the monomials $\{x^{u_j}\}_{j=1}^{N_g}$ satisfy $w(u_j) \leq d_g$. From Proposition 4.2 (acyclicity of the Koszul complex on $\text{gr}(R_{K(\lambda^{(0)})})$ defined by $\{\text{gr}(g_i(\lambda^{(0)}, x))\}_{i \in S}$, $|S| = d_g$), it follows that the dimension of the subspace of elements of degree m/M in $\text{gr}(R_{K(\lambda^{(0)})}) / \sum_{i=1}^n \text{gr}(g_i(\lambda^{(0)}, x)) \text{gr}(R_{K(\lambda^{(0)})})$ depends only on $\Delta(g)$. By induction on the dimension and simplicial subdivision, we can reduce to the case where $\Delta(g)$ is a simplex. Let $v_1, \dots, v_{d_g}$ be its vertices (in addition to the origin). Then $x^{v_1}, \dots, x^{v_{d_g}}$ can be written as linear combinations of $\{\text{gr}(g_i(\lambda^{(0)}, x))\}_{i \in S}$. If now $v \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$ with $w(v) \geq d_g$, write $v = \sum_{i=1}^{d_g} c_i v_i$ with $c_i \in \mathbb{Q}$, $c_i \geq 0$. Since $\sum_{i=1}^{d_g} c_i = w(v) \geq d_g$, we have $c_i \geq 1$ for some i , say, $i = 1$. Put

$$v' = (c_1 - 1)v_1 + \sum_{i=2}^{d_g} c_i v_i \in \mathbb{Z}^n \cap C(g).$$

Then $v = v_1 + v'$, hence

$$x^v = x^{v_1} x^{v'} \in \sum_{i \in S} \text{gr}(g_i(\lambda^{(0)}, x)) \text{gr}(R_{K(\lambda^{(0)})}).$$

Consider the map

$$\phi_m : (R_B^{(m/M-1)})^n \rightarrow R_B^{(m/M)}$$

defined by

$$\phi_m(\eta_1, \dots, \eta_n) = \text{terms of weight } m/M \text{ in } \sum_{i=1}^n g_i(\lambda, x) \eta_i.$$

Relative to monomial bases, this map is represented by a matrix A_m with entries in B . By Remark 6.1, we know that for some specialization $\lambda^{(0)}$ this map is surjective when $m/M > d_g$. It follows that in this case, A_m has a square submatrix A'_m (whose size is the number of monomials of weight m/M in R_B) such that $\mathfrak{b}_{m/M} := \det A'_m$ is not zero. By Cramer's Rule, we conclude that for $\xi \in R_B^{(m/M)}$ there exist $\zeta \in R_{B, (m-1)/M}$, $\eta_i \in R_B^{(m/M-1)}$, such that

$$\mathfrak{b}_{m/M} \xi = \zeta + \sum_{i=1}^n g_i(\lambda, x) \eta_i. \quad (6.3)$$

We show that (6.3) can be achieved using only finitely many of the $\mathfrak{b}_{m/M}$. For $m/M > d_g$, we can write uniquely

$$\frac{m}{M} = d_g + t + \frac{s}{M}, \quad (6.4)$$

where s, t are integers, $0 < s \leq M, t \geq 0$.

Proposition 6.2. *Let m, s, t be as in (6.4) and suppose $\xi \in R_B^{(d_g+t+s/M)}$. Then there exist $\zeta \in R_{B, d_g+t+(s-1)/M}$, $\eta_i \in R_B^{(d_g+t-1+s/M)}$ such that*

$$\mathfrak{b}_{d_g+s/M}\xi = \zeta + \sum_{i=1}^n g_i(\lambda, x)\eta_i.$$

Proof. The proof is by induction on t . For $t = 0$ the proposition holds by (6.3), so we assume that $t \geq 1$ and that the proposition is valid for $t - 1$. We may assume ξ is a monomial, say, $\xi = x^v$ with $w(v) = d_g + t + s/M$. The point v lies over some $(d_g - 1)$ -simplex on some $(d_g - 1)$ -dimensional face of $\Delta(g)$. Let $v_1, \dots, v_{d_g}$ be the vertices of this simplex. The argument of Remark 6.1 show that $x^v = x^{v_1}x^{v'}$, where $w(v_1) = 1, w(v') = w(v) - 1$, and $v_1, v' \in \mathbb{Z} \cap C(g)$. By the induction hypothesis,

$$\mathfrak{b}_{d_g+s/M}x^{v'} = \zeta + \sum_{i=1}^n g_i(\lambda, x)\eta_i, \quad (6.5)$$

where $\zeta \in R_{B, d_g+t-1+(s-1)/M}$, $\eta_i \in R_B^{(d_g+t-2+s/M)}$. Multiplying by x^{v_1} gives

$$\mathfrak{b}_{d_g+s/M}x^v = x^{v_1}\zeta + \sum_{i=1}^n g_i(\lambda, x)x^{v_1}\eta_i. \quad (6.6)$$

Write $x^{v_1}\eta_i = \eta'_i + \zeta'_i$, where $\eta'_i \in R_B^{(d_g+t-1+s/M)}$, $\zeta'_i \in R_{B, d_g+t-1+(s-1)/M}$. Then

$$\mathfrak{b}_{d_g+s/M}x^v = \left(x^{v_1}\zeta + \sum_{i=1}^n g_i(\lambda, x)\zeta'_i\right) + \sum_{i=1}^n g_i(\lambda, x)\eta'_i, \quad (6.7)$$

with $x^{v_1}\zeta + \sum_{i=1}^n g_i(\lambda, x)\zeta'_i \in R_{B, d_g+t+(s-1)/M}$. This establishes the proposition. $\square$

We now treat the case $m/M \leq d_g$. Consider the map

$$\phi_m : W_B^{(m/M)} \oplus (R_B^{(m/M-1)})^n \rightarrow R_B^{(m/M)}$$

defined by

$$\phi_m(\zeta, \eta_1, \dots, \eta_n) = \text{terms of weight } m/M \text{ in } \zeta + \sum_{i=1}^n g_i(\lambda, x)\eta_i.$$

Relative to monomial bases, it is represented by a matrix with entries in B . If we take $\mathfrak{b}_{m/M}$ to be the determinant of any square submatrix of maximal size, then we have by Cramer's Rule that for $\xi \in R_B^{(m/M)}$,

$$\mathfrak{b}_{m/M}\xi = \sum_{w(u_j)=m/M} A_j x^{u_j} + \zeta + \sum_{i=1}^n g_i(\lambda, x)\eta_i,$$

where $A_j \in B$, $\zeta \in R_{B, (m-1)/M}$, $\eta_i \in R_B^{(m/M-1)}$. Since we are assuming there exists a specialization $\lambda^{(0)}$ which makes ϕ_m surjective, there exists a choice of submatrix such that $\mathfrak{b}_{m/M} \neq 0$. We assume that this choice has been made. We have proved the following result.

Proposition 6.3. *For $0 \leq m \leq d_g M$, there exists a nonzero element $\mathfrak{b}_{m/M} \in B$ such that for $\xi \in R_B^{(m/M)}$,*

$$\mathfrak{b}_{m/M}\xi = \sum_{w(u_j)=m/M} A_j x^{u_j} + \zeta + \sum_{i=1}^n g_i(\lambda, x)\eta_i,$$

with $A_j \in B$, $\zeta \in R_{B, (m-1)/M}$, $\eta_i \in R_B^{(m/M-1)}$.

Remark 6.4. Since $B \subseteq K[\lambda]$, we may regard the $\mathfrak{b}_{m/M}$ as polynomials in λ . The proof shows that if $\lambda^{(0)} \in (\bar{K})^N$ is such that $g(\lambda^{(0)}, x)$ has the same Newton polyhedron as $g(\lambda, x)$ and $\prod_{m=0}^{M(d_g+1)} \mathfrak{b}_{m/M}(\lambda^{(0)}) \neq 0$, then $\{x^{u_j}\}_{j=1}^{N_g}$ is a basis for $R_{K(\lambda^{(0)})} / \sum_{i=1}^n g_i(\lambda^{(0)}, x) R_{K(\lambda^{(0)})}$ and hence also a basis for

$$\mathcal{W}_{a, \lambda^{(0)}} := R_{K(\lambda^{(0)})} / \sum_{i=1}^n D_{i, a, \lambda^{(0)}} R_{K(\lambda^{(0)})}.$$

We may also regard the A_j , ζ , and η_i in Propositions 6.2 and 6.3 as polynomials in λ . We shall need bounds for their degrees. Set

$$\kappa = \deg_\lambda g(\lambda, x) \cdot \max\{\dim_K R_K^{(m/M)}\}_{m=0}^{M(d_g+1)}.$$

Proposition 6.5. *For A_j , ζ , η_i as in Proposition 6.2 or 6.3,*

$$\deg_\lambda A_j, \deg_\lambda \zeta, \deg_\lambda \eta_i \leq \kappa + \deg_\lambda \xi.$$

Proof. The polynomials A_j , ζ , η_i were obtained by using Cramer's Rule to solve a certain system of equations. The coefficients of this system of equations are polynomials in λ of degree $\leq \deg_\lambda g(\lambda, x)$, so the desired bound follows immediately from Cramer's Rule. Since $\mathfrak{b}_{m/M}$ is the determinant of this coefficient matrix, we also have

$$\deg_\lambda \mathfrak{b}_{m/M} \leq \kappa \quad \text{for } m = 0, 1, \dots, M(d_g + 1). \quad (6.8)$$

□

We conclude this section with a result on the $\mathfrak{b}$ -invariant that will be used in section 8.

Proposition 6.6. *Suppose $\lambda^{(0)} \in \bar{K}^N$ satisfies $\prod_{m=0}^{M(d_g+1)} \mathfrak{b}_{m/M}(\lambda^{(0)}) \neq 0$. Then $g(\lambda^{(0)}, x)$ is nondegenerate relative to $\Delta(g)$ and $\dim_{K(\lambda^{(0)})} \mathcal{W}_{a, \lambda^{(0)}} = N_g$. In particular, $\{x^{u_j}\}_{j=1}^{N_g}$ is a basis for $\mathcal{W}_{a, \lambda^{(0)}}$.*

Proof. If $g(\lambda^{(0)}, x)$ is nondegenerate relative to $\Delta(g)$, then Theorem 4.3 implies that $\dim_{K(\lambda^{(0)})} \mathcal{W}_{a, \lambda^{(0)}} = N_g$. Furthermore, it follows immediately from Propositions 6.2 and 6.3 that if $\prod_{m=0}^{M(d_g+1)} \mathfrak{b}_{m/M}(\lambda^{(0)}) \neq 0$, then $\{x^{u_j}\}_{j=1}^{N_g}$ spans $\mathcal{W}_{a, \lambda^{(0)}}$, hence it is a basis for $\mathcal{W}_{a, \lambda^{(0)}}$. Thus it suffices to prove that the nonvanishing of $\prod_{m=0}^{M(d_g+1)} \mathfrak{b}_{m/M}(\lambda^{(0)})$ implies the nondegeneracy of $g(\lambda^{(0)}, x)$.

Let τ be a face of $\Delta(g)$ that does not contain the origin and let $\text{gr}(R_{K(\lambda^{(0)})})_\tau$ be the subring of $\text{gr}(R_{K(\lambda^{(0)})})$ generated by those monomials whose exponents lie in $C(\tau)$. Let $g_\tau = \sum_{v \in \tau \cap \Gamma} g_v(\lambda^{(0)}) x^v$, a homogeneous element of degree 1 in the graded ring $\text{gr}(R_{K(\lambda^{(0)})})_\tau$. If for every such τ we have

$$\dim_{K(\lambda^{(0)})} \text{gr}(R_{K(\lambda^{(0)})})_\tau / \sum_{i=1}^n g_{\tau, i} \text{gr}(R_{K(\lambda^{(0)})})_\tau < \infty \quad (6.9)$$

(where $g_{\tau, i} = x_i \partial g_\tau / \partial x_i$), then [5, Théorème 6.2] implies that $g(\lambda^{(0)}, x)$ is nondegenerate.

By Propositions 6.2 and 6.3, the nonvanishing of $\prod_{m=0}^{M(d_g+1)} \mathfrak{b}_{m/M}(\lambda^{(0)})$ implies that $\{x^{u_j}\}_{j=1}^{N_g}$ spans $\text{gr}(R_{K(\lambda^{(0)})}) / \sum_{i=1}^n \text{gr}(g_i(\lambda^{(0)}, x)) \text{gr}(R_{K(\lambda^{(0)})})$. We establish (6.9) by showing that the subset $\{x^{u_j}\}_{u_j \in C(\tau)}$ spans the quotient

$$\text{gr}(R_{K(\lambda^{(0)})})_\tau / \sum_{i=1}^n g_{\tau, i} \text{gr}(R_{K(\lambda^{(0)})})_\tau.$$

Let ξ be a homogeneous element of degree m/M in $\text{gr}(R_{K(\lambda^{(0)})})_\tau$. We have

$$\xi = \sum_{\substack{u_j \in C(\tau) \\ w(u_j) = m/M}} c_j x^{u_j} + \sum_{i=1}^n (\text{gr}(g_i(\lambda^{(0)}, x)) \eta_i)_\tau, \quad (6.10)$$

where $c_i \in K(\lambda^{(0)})$, $\eta_i \in \text{gr}(R_{K(\lambda^{(0)})})^{(m/M-1)}$, and the subscript τ appearing on the right-hand side means that we select only those terms from the product $\text{gr}(g_i(\lambda^{(0)}, x)) \eta_i$ that lie in $\text{gr}(R_{K(\lambda^{(0)})})_\tau$. Consider a monomial x^u appearing in $\text{gr}(g_i(\lambda^{(0)}, x))$ and a monomial x^v appearing in η_i . Their product in $\text{gr}(R_{K(\lambda^{(0)})})$ equals either 0 or x^{u+v} . If it equals x^{u+v} , then u and v lie over a common face τ_1 of $\Delta(g)$. If also $u+v \in C(\tau)$,

then

$$u + v \in C(\tau) \cap C(\tau_1) = C(\tau \cap \tau_1).$$

But since $\tau \cap \tau_1$ is a face of τ_1 , the conditions $u, v \in C(\tau_1)$ and $u + v \in C(\tau \cap \tau_1)$ imply $u, v \in C(\tau \cap \tau_1) (\subseteq C(\tau))$. It follows that

$$(\text{gr}(g_i(\lambda^{(0)}, x))\eta_i)_\tau = g_{\tau,i}(\eta_i)_\tau.$$

Substituting this into (6.10) gives (6.9). $\square$

7 Dual theory

We define spaces of formal series

$$R_{K(\lambda)}^* = \left\{ \sum_{u \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)} A_u x^{-u} \mid A_u \in K(\lambda) \right\}$$

$$R'_{K(\lambda)} = \left\{ \sum_{u \in \mathbb{Z}^n \cap L_g} A_u x^{-u} \mid A_u \in K(\lambda) \right\}.$$

Define a pairing $R_{K(\lambda)}'^* \times R'_{K(\lambda)} \rightarrow K(\lambda)$ by

$$\left\langle \sum_u A_u x^{-u}, \sum_v B_v x^v \right\rangle = \sum_u A_u B_u. \quad (7.1)$$

(This makes sense because the second sum on the left-hand side is finite.) This pairing induces identifications

$$R_{K(\lambda)}'^* = \text{Hom}_{K(\lambda)}(R'_{K(\lambda)}, K(\lambda)), \quad R_{K(\lambda)}^* = \text{Hom}_{K(\lambda)}(R_{K(\lambda)}, K(\lambda)).$$

For $i = 1, \dots, n$, let

$$D_{i,a,\lambda}^* = -x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + a_i + \pi g_i(\lambda, x).$$

For $\xi^* \in R_{K(\lambda)}'^*$, $\xi \in R'_{K(\lambda)}$, one checks that

$$\langle \xi^*, D_{i,a,\lambda}(\xi) \rangle = \langle D_{i,a,\lambda}^*(\xi^*), \xi \rangle. \quad (7.2)$$

Let $\gamma_- : R_{K(\lambda)}'^* \rightarrow R_{K(\lambda)}^*$ be the natural projection:

$$\gamma_- \left(\sum_{u \in \mathbb{Z}^n \cap L_g} A_u x^{-u} \right) = \sum_{u \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)} A_u x^{-u}. \quad (7.3)$$

For $\xi^* \in R_{K(\lambda)}^*$, $\xi \in R_{K(\lambda)}$, we have

$$\langle \xi^*, D_{i,a,\lambda}(\xi) \rangle = \langle \gamma_- D_{i,a,\lambda}^*(\xi^*), \xi \rangle. \quad (7.4)$$

We observe for future reference that if $\xi^* \in R_{K(\lambda)}^*$, $\xi \in R_{K(\lambda)}$, then

$$\langle (I - \gamma_-)(\xi^*), \xi \rangle = 0, \quad (7.5)$$

where I is the identity map.

It follows from (7.2) and (7.4) that the annihilators of $\sum_{i=1}^n D_{i,a,\lambda} R_{K(\lambda)}$ and $\sum_{i=1}^n D_{i,a,\lambda} R'_{K(\lambda)}$ are, respectively,

$$\mathcal{K}_{a,\lambda} = \{\xi^* \in R_{K(\lambda)}^* \mid \gamma_- D_{i,a,\lambda}^*(\xi^*) = 0 \text{ for } i = 1, \dots, n\}$$

$$\mathcal{K}'_{a,\lambda} = \{\xi^* \in R_{K(\lambda)}^* \mid D_{i,a,\lambda}^*(\xi^*) = 0 \text{ for } i = 1, \dots, n.\}$$

Thus there are identifications

$$\mathcal{K}_{a,\lambda} = \text{Hom}_{K(\lambda)}(\mathcal{W}_{a,\lambda}, K(\lambda)) \quad (7.6)$$

$$\mathcal{K}'_{a,\lambda} = \text{Hom}_{K(\lambda)}(\mathcal{W}'_{a,\lambda}, K(\lambda)). \quad (7.7)$$

Proposition 7.1. *If $g(\lambda, x)$ is nondegenerate (as polynomial in x with coefficients in $K(\lambda)$), then*

$$\dim_{K(\lambda)} \mathcal{K}_{a,\lambda} = \dim_{K(\lambda)} \mathcal{K}'_{a,\lambda} = N_g.$$

Proof. The proposition follows immediately from Remark 4.5, Corollary 5.6, (7.6), and (7.7). $\square$

One can check from the definitions that γ_- maps $\mathcal{K}'_{a,\lambda}$ into $\mathcal{K}_{a,\lambda}$. In fact, the projection $\gamma_- : R_{K(\lambda)}^* \rightarrow R_{K(\lambda)}^*$ is adjoint under the pairing (7.1) to the inclusion $R_{K(\lambda)} \hookrightarrow R'_{K(\lambda)}$, hence $\gamma_- : \mathcal{K}'_{a,\lambda} \rightarrow \mathcal{K}_{a,\lambda}$ is adjoint to the map $\mathcal{W}_{a,\lambda} \rightarrow \mathcal{W}'_{a,\lambda}$ induced by the inclusion. Lemma 5.5 then implies the following result.

Lemma 7.2. *If $g(\lambda, x)$ is nondegenerate and a is seminonresonant, then the induced map $\gamma_- : \mathcal{K}'_{a,\lambda} \rightarrow \mathcal{K}_{a,\lambda}$ is an isomorphism.*

Since $x^u \circ D_{i,a-u,\lambda}^* = D_{i,a,\lambda}^* \circ x^u$, multiplication by x^u induces an isomorphism $x^u : \mathcal{K}'_{a-u,\lambda} \rightarrow \mathcal{K}'_{a,\lambda}$ for all $u \in \mathbb{Z}^n \cap L_g$. If $u \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$, multiplication by x^u composed with γ_- induces a map $\gamma_- \circ x^u : \mathcal{K}_{a-u,\lambda} \rightarrow \mathcal{K}_{a,\lambda}$.

Lemma 7.3. *If $g(\lambda, x)$ is nondegenerate and a is seminonresonant, then $\gamma_- \circ x^u : \mathcal{K}_{a-u,\lambda} \rightarrow \mathcal{K}_{a,\lambda}$ is an isomorphism for all $u \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$.*

Proof. The lemma follows immediately from Corollary 5.4 and the fact that $\gamma_- \circ x^u$ acting on $R_{K(\lambda)}^*$ is adjoint to multiplication by x^u acting on $R_{K(\lambda)}$. $\square$

For $u \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$, we define $\mathfrak{b}^{w(u)}$ as follows. For $0 \leq w(u) \leq d_g$, put

$$\mathfrak{b}^{w(u)} = \prod_{i=0}^{Mw(u)} \mathfrak{b}_{i/M},$$

where the $\mathfrak{b}_{i/M}$ are as in Proposition 6.3. For $w(u) > d_g$, write $w(u) = d_g + t + s/M$, with $t \geq 0$ and $0 < s \leq M$. Then put

$$\mathfrak{b}^{w(u)} = \prod_{i=0}^{Md_g} \mathfrak{b}_{i/M} \cdot \left(\prod_{i=1}^M \mathfrak{b}_{d_g+i/M} \right)^t \cdot \prod_{i=1}^s \mathfrak{b}_{d_g+i/M},$$

where the $\mathfrak{b}_{i/M}$ are as in Propositions 6.2 and 6.3.

Theorem 7.4. *Suppose $g(\lambda, x)$ is nondegenerate. The basis $\{\xi_{i,a,\lambda}^*\}_{i=1}^{N_g}$ of $\mathcal{K}_{a,\lambda}$ dual to the basis $\{\xi_i = \pi^{w(u_i)} x^{u_i}\}_{i=1}^{N_g}$ of $\mathcal{W}_{a,\lambda}$ satisfies*

$$\xi_{i,a,\lambda}^* = \sum_{u \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)} \pi^{-w(u)} x^{-u} \frac{G_{i,u}(a, \lambda)}{\mathfrak{b}^{w(u)}},$$

where $G_{i,u} \in \mathbb{Z}[a, \lambda]$ and

$$\deg_a G_{i,u} \leq w(u) \tag{7.8}$$

$$\deg_\lambda G_{i,u} \leq \kappa M w(u). \tag{7.9}$$

Proof. We show that the coefficient of x^{-u} has the asserted form by induction on $w(u)$. If $w(u) = 0$, then $u = (0, \dots, 0)$ and $x^u = 1$ is one of the basis elements ξ_i , so the coefficient of x^{-u} is either 0 or 1. Thus the assertion is valid in this case.

If $0 < w(u) \leq d_g$, put $h = w(u)$. Otherwise, write $w(u) = d_g + t + s/M$ with $t \geq 0$, $0 < s \leq M$, and put $h = d_g + s/M$. By Propositions 6.2 and 6.3 we can write

$$\mathfrak{b}_h x^u = \sum_{w(u_j)=w(u)} A_{j,u} \pi^{-w(u)} \xi_j + \zeta + \sum_{i=1}^n g_i(\lambda, x) \eta_i, \tag{7.10}$$

where

$$A_{j,u} \in B, \quad \zeta \in R_{B, w(u)-1/M}, \quad \eta_i \in R_B^{(w(u)-1)}, \tag{7.11}$$

and

$$\deg_\lambda A_{j,u}, \deg_\lambda \zeta, \deg_\lambda \eta_i \leq \kappa. \tag{7.12}$$

It follows that

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_h \langle \xi_{i,a,\lambda}^*, x^u \rangle &= \pi^{-w(u)} A_{i,u} + \langle \xi_{i,a,\lambda}^*, \zeta \rangle + \sum_{k=1}^n \langle \xi_{i,a,\lambda}^*, g_k(\lambda, x) \eta_k \rangle \\ &= \pi^{-w(u)} A_{i,u} + \langle \xi_{i,a,\lambda}^*, \zeta \rangle - \pi^{-1} \sum_{k=1}^n \langle \xi_{i,a,\lambda}^*, (x_k \partial / \partial x_k + a_k)(\eta_k) \rangle, \end{aligned}$$

since $\xi_{i,a,\lambda}^*$ annihilates the image of $D_{k,a,\lambda} = x_k \partial / \partial x_k + a_k + \pi g_k(\lambda, x)$ under the pairing. Thus the coefficient of x^{-u} in $\xi_{i,a,\lambda}^*$ is

$$\pi^{-w(u)} \mathfrak{b}_h^{-1} A_{i,u} + \mathfrak{b}_h^{-1} \langle \xi_{i,a,\lambda}^*, \zeta \rangle - \pi^{-1} \mathfrak{b}_h^{-1} \sum_{k=1}^n \langle \xi_{i,a,\lambda}^*, (x_k \partial / \partial x_k + a_k)(\eta_k) \rangle.$$

The theorem follows from (7.11) and (7.12) by applying the induction hypothesis to each term in this expression. $\square$

If $g(\lambda, x)$ is nondegenerate, then $\{\xi_i = \pi^{w(u_i)} x^{u_i}\}_{i=1}^{N_g}$ is a basis for both $\mathcal{W}_{a,\lambda}$ and $\mathcal{W}_{a-u,\lambda}$. For $u \in \mathbb{Z}^n \cap L_g$ and a nonresonant, let $M(a, a-u, \lambda)$ be the matrix of $x^u : \mathcal{W}_{a,\lambda} \rightarrow \mathcal{W}_{a-u,\lambda}$ (or $x^u : \mathcal{W}'_{a,\lambda} \rightarrow \mathcal{W}'_{a-u,\lambda}$) relative to this basis (see Remark 5.8). When $u \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$, the contiguity mapping is defined for all a , so in this case we can define $M(a, a-u, \lambda)$ for all a as the matrix of $x^u : \mathcal{W}_{a,\lambda} \rightarrow \mathcal{W}_{a-u,\lambda}$ relative to this basis. By Corollary 5.4 we have the following result.

Proposition 7.5. *If $g(\lambda, x)$ is nondegenerate and a is seminonresonant, then $\det M(a, a-u, \lambda) \neq 0$ for all $u \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$.*

Using Theorem 7.4, we can give more precise information about this matrix.

Proposition 7.6. *For $u \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$, the entries of $M(a, a-u, \lambda)$ are polynomials in a and rational functions in λ . The irreducible factors of the denominators of these rational functions are factors of $\mathfrak{b}^{d_g+1}$.*

Proof. By definition,

$$x^u \xi_j \equiv \sum_{i=1}^{N_g} M(a, a-u, \lambda)_{ij} \xi_i \pmod{\sum_{k=1}^n D_{k,a-u,\lambda} R_K(\lambda)},$$

hence

$$M(a, a-u, \lambda)_{ij} = \langle \xi_{i,a-u,\lambda}^*, x^u \xi_j \rangle. \quad (7.13)$$

Thus if $\xi_j = \pi^{w(u_j)} x^{u_j}$, then

$$\begin{aligned} M(a, a-u, \lambda)_{ij} &= \langle \xi_{i,a-u,\lambda}^*, \pi^{w(u_j)} x^{u+u_j} \rangle \\ &= \pi^{w(u_j)-w(u+u_j)} G_{i,u+u_j}(a-u, \lambda) / \mathfrak{b}^{w(u+u_j)} \end{aligned} \quad (7.14)$$

by Theorem 7.4. $\square$

Proposition 7.7. *Suppose that $g(\lambda, x)$ is nondegenerate and a is nonresonant. The basis $\{\xi'_{i,a,\lambda}\}_{i=1}^{N_g}$ of $\mathcal{K}'_{a,\lambda}$ dual to the basis $\{\xi_i = \pi^{w(u_i)} x^{u_i}\}_{i=1}^{N_g}$ of $\mathcal{W}'_{a,\lambda}$ is given by*

$$\xi'_{i,a,\lambda} = \sum_{u \in \mathbb{Z}^n \cap L_g} x^{-u} H_{i,u}(a, \lambda),$$

where for $u \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$

$$H_{i,u}(a, \lambda) = \pi^{-w(u)} G_{i,u}(a, \lambda) / \mathfrak{b}^{w(u)}$$

and for $u, v \in \mathbb{Z}^n \cap L_g$

$$H_{i,u}(a, \lambda) = \sum_{j=1}^{N_g} M(a - v, a, \lambda)_{ij} H_{j,u+v}(a - v, \lambda).$$

Proof. When $u \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$, the formula for $H_{i,u}$ follows from Theorem 7.4 and the fact that $\gamma_- : \mathcal{K}'_{a,\lambda} \rightarrow \mathcal{K}_{a,\lambda}$ is adjoint to $\mathcal{W}_{a,\lambda} \rightarrow \mathcal{W}'_{a,\lambda}$.

Suppose $u, v \in \mathbb{Z}^n \cap L_g$. The map $x^{-v} : \mathcal{K}'_{a,\lambda} \rightarrow \mathcal{K}'_{a-v,\lambda}$ is dual to the map $x^{-v} : \mathcal{W}'_{a-v,\lambda} \rightarrow \mathcal{W}'_{a,\lambda}$, so the matrix of $x^{-v} : \mathcal{K}'_{a,\lambda} \rightarrow \mathcal{K}'_{a-v,\lambda}$ is the transpose of $M(a - v, a, \lambda)$. Thus

$$x^{-v} \xi'_{i,a,\lambda} = \sum_{j=1}^{N_g} M(a - v, a, \lambda)_{ij} \xi'_{j,a-v,\lambda}.$$

We have

$$\begin{aligned} H_{i,u}(a, \lambda) &= \langle \xi'_{i,a,\lambda}, x^u \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{N_g} M(a - v, a, \lambda)_{ij} \langle \xi'_{j,a-v,\lambda}, x^{u+v} \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{N_g} M(a - v, a, \lambda)_{ij} H_{j,u+v}(a - v, \lambda). \end{aligned}$$

□

Remark 7.8. For $v \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$, this gives a description of $H_{i,u}$ for all $u \in -v + (\mathbb{Z}^n \cap C(g))$ in terms of the $G_{i,u+v}$, $\mathfrak{b}^{w(u)}$, and $M(a - v, a, \lambda)$.

Remark 7.9. The proof shows that if we only assume a to be seminonresonant, then the conclusion of Proposition 7.7 is still true if we make the additional hypothesis that $v \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$.

8 Dual of the contiguity mapping

Throughout this section we assume $u \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$. The purpose of this section is to apply the dual theory to prove the converse of Theorem 5.2. More precisely, the dual of Theorem 5.2 is the assertion that, for $g(\lambda, x)$ nondegenerate, if $\prod_{i=1}^s (l_i(a))_{l_i(u)} \neq 0$,

then $\gamma_- \circ x^u : \mathcal{K}_{a,\lambda} \rightarrow \mathcal{K}_{a+u,\lambda}$ is an isomorphism. We shall prove the following result.

Theorem 8.1. *If $\prod_{i=1}^s (l_i(a))_{l_i(u)} = 0$, then $\ker(\gamma_- \circ x^u | \mathcal{K}_{a,\lambda}) \neq (0)$.*

Recall that $M(a+u, a, \lambda)$ is the matrix of $x^u : \mathcal{W}_{a+u,\lambda} \rightarrow \mathcal{W}_{a,\lambda}$ relative to the basis $\{\xi_i = \pi^{w(u_i)} x^{u_i}\}_{i=1}^{N_g}$. It follows that the transpose $M(a+u, a, \lambda)^t$ is the matrix of $\gamma_- \circ x^u : \mathcal{K}_{a,\lambda} \rightarrow \mathcal{K}_{a+u,\lambda}$ relative to the bases $\{\xi_{i,a,\lambda}^*\}_{i=1}^{N_g}$, $\{\xi_{i,a+u,\lambda}^*\}_{i=1}^{N_g}$. We shall prove Theorem 8.1 by establishing a series of lemmas that show the vanishing of $\prod_{i=1}^s (l_i(a))_{l_i(u)}$ implies the vanishing of $\det M(a+u, a, \lambda)$.

Let σ_i be the face of $\Delta(g)$ lying in the hyperplane $l_i = 0$ and let (as in section 3) $d_{\sigma_i} = \dim \sigma_i$, $N_{\sigma_i} = (d_{\sigma_i})! V(\sigma_i)$, a positive integer.

Remark 8.2. The following observation will be useful in the proof of the next lemma. Recall that in section 6 we chose a set of monomials $\{x^{u_j}\}_{j=1}^{N_g}$ which is a basis for

$$\text{gr}(R_{K(\lambda)}) / \sum_{i=1}^n \text{gr}(g_i(\lambda, x)) \text{gr}(R_{K(\lambda)}) \quad (8.1)$$

and hence also a basis for

$$\mathcal{W}_{a,\lambda} = R_{K(\lambda)} / \sum_{i=1}^n D_{i,a,\lambda} R_{K(\lambda)}. \quad (8.2)$$

The matrix $M(a+u, a, \lambda)$ is defined relative to (scalar multiples of) this basis. Consider what happens if we choose a different basis $\{x^{v_j}\}_{j=1}^{N_g}$. We get two change-of-basis matrices, one for each of the spaces (8.1) and (8.2):

$$x^{u_j} \equiv \sum_{i=1}^{N_g} \alpha_{ij} x^{v_i} \pmod{\sum_{i=1}^n \text{gr}(g_i(\lambda, x)) \text{gr}(R_{K(\lambda)})} \quad (8.3)$$

$$x^{u_j} \equiv \sum_{i=1}^{N_g} \beta_{ij} x^{v_i} \pmod{\sum_{i=1}^n D_{i,a,\lambda} R_{K(\lambda)}}, \quad (8.4)$$

where the α_{ij} depend only on λ but the β_{ij} depend on λ and a . Since the vector space (8.1) is graded, it follows that $\alpha_{ij} = 0$ if $w(v_i) \neq w(u_j)$. Furthermore, since (8.1) is the “associated graded” to (8.2), $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$ for $w(v_i) \geq w(u_j)$. Thus the matrix (α_{ij}) has “block diagonal” form (where each block corresponds to the basis elements of a given weight) and the matrix (β_{ij}) has “block triangular” form with the same diagonal blocks as (α_{ij}) . We conclude that $\det(\beta_{ij}) = \det(\alpha_{ij})$, and, in particular, $\det(\beta_{ij})$ depends only on λ , not on a .

Lemma 8.3. *Suppose that $l_i(u) > 0$ for some i . Then (as polynomials in a) $\det M(a+u, a, \lambda)$ is divisible by $l_i(a)^{N_{\sigma_i}}$.*

Proof. We prove a stronger statement, namely, that there are at least N_{σ_i} rows of $M(a + u, a, \lambda)$ with the property that all of their entries are divisible by $l_i(a)$. To establish this, we claim that it suffices to show that there are at least N_{σ_i} rows of $M(a + u, a, \lambda)$ with the property that all of their entries (as functions of a) vanish whenever $l_i(a) = 0$. For by Proposition 7.6, the entries of $M(a + u, a, \lambda)$ all have the form

$$\mathfrak{b}^{-t(d_g+1)} \sum_{i_1, \dots, i_N \geq 0} P_{i_1 \dots i_N}(a) \lambda_1^{i_1} \cdots \lambda_N^{i_N},$$

where t is a positive integer, the sum is finite, and each $P_{i_1 \dots i_N}(a)$ is a polynomial. If this expression vanishes whenever $l_i(a) = 0$, then each $P_{i_1 \dots i_N}(a)$ vanishes whenever $l_i(a) = 0$. But $l_i(a)$ is irreducible as polynomial in a , so the Nullstellensatz implies that each $P_{i_1 \dots i_N}(a)$ is divisible by $l_i(a)$.

So fix a with $l_i(a) = 0$. We denote by $\mathcal{K}_{\sigma_i, a, \lambda}$ (resp. $\mathcal{W}_{\sigma_i, a, \lambda}$) the $\mathcal{K}$ -space (resp. $\mathcal{W}$ -space) defined using g_{σ_i} in place of g . (It is here that we use the assumption $l_i(a) = 0$: the definitions of $\mathcal{K}_{\sigma_i, a, \lambda}$ and $\mathcal{W}_{\sigma_i, a, \lambda}$ require that $a \in L_{\sigma_i} \otimes_{\mathbb{Q}} K$.) We first show that $\mathcal{K}_{\sigma_i, a, \lambda} \subseteq \mathcal{K}_{a, \lambda}$. Let $\xi \in \mathcal{K}_{\sigma_i, a, \lambda}$, i.e.,

$$\gamma_{-}(x_j \partial / \partial x_j - a_j - \pi g_{\sigma_i, j}(\lambda, x))(\xi) = 0 \quad (8.5)$$

for $j = 1, \dots, n$. We need to show

$$\gamma_{-}(x_j \partial / \partial x_j - a_j - \pi g_j(\lambda, x))(\xi) = 0 \quad (8.6)$$

for $j = 1, \dots, n$. The difference between the left-hand sides of (8.5) and (8.6) is $\gamma_{-}(\pi g_j - \pi g_{\sigma_i, j})\xi$. But the exponents of all monomials appearing in $g_j - g_{\sigma_i, j}$ lie in the region $l_i > 0$ and the exponents of all monomials appearing in ξ lie in the hyperplane $l_i = 0$. Thus the exponents of all monomials appearing in $(\pi g_j - \pi g_{\sigma_i, j})\xi$ lie in the region $l_i > 0$. This implies

$$\gamma_{-}((\pi g_j - \pi g_{\sigma_i, j})\xi) = 0,$$

hence (8.5) implies (8.6).

We may assume that our monomial basis for $\mathcal{W}_{a, \lambda}$ contains a basis for $\mathcal{W}_{\sigma_i, a, \lambda}$. For if not, we can replace it by a new basis with this property and, by Remark 8.2, $\det M(a + u, a, \lambda)$ will be multiplied by a rational function in λ . This does not affect the conclusion of the lemma. Let $\{\xi_{\sigma_i, j, a, \lambda}^*\}_{j=1}^{N_{\sigma_i}}$ be the dual basis for $\mathcal{K}_{\sigma_i, a, \lambda}$. Then $\{\xi_{\sigma_i, j, a, \lambda}^*\}_{j=1}^{N_{\sigma_i}} \subseteq \{\xi_{j, a, \lambda}^*\}_{j=1}^{N_g}$, the dual basis for $\mathcal{K}_{a, \lambda}$. If $l_i(u) > 0$, then the exponents of all monomials in $x^u \xi_{\sigma_i, j, a, \lambda}^*$ lie in the region $l_i > 0$, hence

$$\gamma_{-}(x^u \xi_{\sigma_i, j, a, \lambda}^*) = 0$$

for $j = 1, \dots, N_{\sigma_i}$. This says that the N_{σ_i} columns of the matrix $M(a + u, a, \lambda)^t$ that correspond to $\{\xi_{\sigma_i, j, a, \lambda}^*\}_{j=1}^{N_{\sigma_i}}$ all vanish. $\square$

Let $\mathfrak{B}$ be the set of irreducible factors of $\mathfrak{b}^{d_g+1}$.

Lemma 8.4. *Let $u \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$. Then*

$$\det M(a + u, a, \lambda) = \prod_{\mathfrak{b}' \in \mathfrak{B}} \mathfrak{b}'^{\beta(\mathfrak{b}', u)} \prod_{i=1}^s \prod_{j=0}^{l_i(u)-1} (l_i(a) + j)^{\alpha_i(u, j)},$$

where the $\alpha_i(u, j)$ are nonnegative integers and the $\beta(\mathfrak{b}', u)$ are integers.

Proof. By Proposition 7.6 we have

$$\det M(a + u, a, \lambda) = \frac{P_u(a, \lambda)}{\mathfrak{b}^{(d_g+1)t}}$$

for some positive integer t , where $P_u(a, \lambda)$ is a polynomial in a and λ . Suppose $(\lambda^{(0)}, a^{(0)})$ is a specialization with $\mathfrak{b}^{d_g+1}(\lambda^{(0)}) \neq 0$ and $\prod_{i=1}^s (l_i(a^{(0)}))_{l_i(u)} \neq 0$. By Proposition 6.6, $g(\lambda^{(0)}, x)$ is nondegenerate, so we may apply Theorem 5.2 to conclude that $P_u(a^{(0)}, \lambda^{(0)}) \neq 0$. Equivalently, the vanishing of $P_u(a, \lambda)$ implies the vanishing of $\mathfrak{b}^{d_g+1} \prod_{i=1}^s (l_i(a))_{l_i(u)}$. Thus, by the Nullstellensatz, $P_u(a, \lambda)$ divides a power of $\mathfrak{b}^{d_g+1} \prod_{i=1}^s (l_i(a))_{l_i(u)}$. It follows that the irreducible factors of $P_u(a, \lambda)$ lie among the elements of $\mathfrak{B}$ and the $l_i(a) + j$, $i = 1, \dots, s$, $j = 0, \dots, l_i(u) - 1$. $\square$

Set

$$B_u(\lambda) = \prod_{\mathfrak{b}' \in \mathfrak{B}} \mathfrak{b}'^{\beta(\mathfrak{b}', u)},$$

$$\rho(a + u, a) = \prod_{i=1}^s \prod_{j=0}^{l_i(u)-1} (l_i(a) + j)^{\alpha_i(u, j)},$$

so Lemma 8.4 becomes

$$\det M(a + u, a, \lambda) = B_u(\lambda) \rho(a + u, a). \quad (8.7)$$

Since $x^{u+v} : \mathcal{W}_{a+u+v, \lambda} \rightarrow \mathcal{W}_{a, \lambda}$ is the composition of $x^v : \mathcal{W}_{a+u+v, \lambda} \rightarrow \mathcal{W}_{a+u, \lambda}$ and $x^u : \mathcal{W}_{a+u, \lambda} \rightarrow \mathcal{W}_{a, \lambda}$, we have

$$\det M(a + u + v, a, \lambda) = \det M(a + u + v, a + u, \lambda) \det M(a + u, a, \lambda),$$

which implies

$$B_{u+v}(\lambda) \rho(a + u + v, a) = B_v(\lambda) \rho(a + u + v, a + u) B_u(\lambda) \rho(a + u, a). \quad (8.8)$$

By unique factorization of polynomials, we have (up to a constant factor)

$$\prod_{i=1}^s \prod_{j=0}^{l_i(u+v)-1} (l_i(a) + j)^{\alpha_i(u+v, j)} =$$

$$\prod_{i=1}^s \prod_{j=0}^{l_i(v)-1} (l_i(a + u) + j)^{\alpha_i(v, j)} \cdot \prod_{i=1}^s \prod_{j=0}^{l_i(u)-1} (l_i(a) + j)^{\alpha_i(u, j)}. \quad (8.9)$$

Comparing exponents of common factors on the left-hand and right-hand sides of this equation, we see that we must have

$$\alpha_i(u + v, j) = \begin{cases} \alpha_i(u, j) & \text{for } 0 \leq j \leq l_i(u) - 1, \\ \alpha_i(v, j - l_i(u)) & \text{for } l_i(u) \leq j \leq l_i(u + v) - 1. \end{cases} \quad (8.10)$$

We extend the definition of $\alpha_i(u, j)$ to all $j \in \mathbb{Z}$ by defining $\alpha_i(u, j) = 0$ if $j < 0$ or $j \geq l_i(u)$. Let $\chi_{l_i(u)}$ be the characteristic function of the interval $[0, l_i(u) - 1]$.

Lemma 8.5. *There exists a function $\beta_i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ such that*

$$\alpha_i(u, j) = \beta_i(j) \chi_{l_i(u)}(j).$$

Proof. Fix $j \in \mathbb{Z}$. We must show that for all $u_1, u_2 \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$ with

$$0 \leq j \leq \min(l_i(u_1) - 1, l_i(u_2) - 1)$$

we have $\alpha_i(u_1, j) = \alpha_i(u_2, j)$. One then defines $\beta_i(j)$ to be this common value. Choose $v_1, v_2 \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$ such that $u_1 + v_1 = u_2 + v_2$. Then by (8.10),

$$\alpha_i(u_1, j) = \alpha_i(u_1 + v_1, j) = \alpha_i(u_2 + v_2, j) = \alpha_i(u_2, j),$$

which is the desired assertion. $\square$

We immediately sharpen Lemma 8.5 by showing that each β_i may be taken to be a constant function.

Lemma 8.6. *There exists $\delta_i \in \mathbb{Z}$ such that $\alpha_i(u, j) = \delta_i \chi_{l_i(u)}(j)$.*

Proof. We show that for all $j \geq 0$, one has $\beta_i(j) = \beta_i(j + 1)$, which implies the lemma. For $u, v \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$, we have by (8.10)

$$\alpha_i(u + v, j + l_i(u)) = \alpha_i(v, j)$$

for $0 \leq j \leq l_i(v) - 1$. By Lemma 8.5, this means that

$$\beta_i(j + l_i(u)) \chi_{l_i(u+v)}(j + l_i(u)) = \beta_i(j) \chi_{l_i(v)}(j). \quad (8.11)$$

It is not hard to check from the definitions that there exists $w \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$ with $l_i(w) = 1$. Let t be a positive integer. Replacing u by w and v by tw in (8.11) gives

$$\beta_i(j + 1) \chi_{t+1}(j + 1) = \beta_i(j) \chi_t(j).$$

For t sufficiently large we have $\chi_{t+1}(j + 1) = \chi_t(j) = 1$, which implies $\beta_i(j + 1) = \beta_i(j)$. $\square$

We summarize our analysis of $\det M(a + u, a, \lambda)$ in the following result.

Theorem 8.7. For $u \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$,

$$\det M(a + u, a, \lambda) = B_u(\lambda) \prod_{i=1}^s ((l_i(a))_{l_i(u)})^{\delta_i}.$$

Furthermore, the rational functions $B_u(\lambda)$ satisfy

$$B_{u+v}(\lambda) = B_u(\lambda) B_v(\lambda)$$

for $u, v \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$.

Proof. The first equation follows from equation (8.7) and Lemma 8.6. Lemma 8.6 also implies that the two sides of (8.9) are equal (not just equal up to a constant factor). The second equation then follows from equation (8.8). $\square$

Remark 8.8. Lemma 8.3 implies that $\delta_i \geq N_{\sigma_i} (> 0)$. Thus Theorem 8.7 implies Theorem 8.1. It would be interesting to know if $\delta_i = N_{\sigma_i}$ for all i .

9 Action of Frobenius

Instead of regarding λ as an indeterminate, in this section we regard it as a (variable) element of K^N . For $b \in \mathbb{R}, b > 0$, define

$$L^*(b, c) = \left\{ \sum_{u \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)} A_u x^{-u} \mid A_u \in K, \text{ ord } A_u \geq -bw(u) + c \right\}$$

$$L^*(b) = \bigcup_{c \in \mathbb{R}} L^*(b, c).$$

For $a \in K^n$, let $\text{ord } a = \inf_i \{\text{ord } a_i\}$, $\text{ord } \lambda = \inf_i \{\text{ord } \lambda_i\}$, and set

$$c_\lambda = -\kappa M \inf(0, \text{ord } \lambda) + M \sup(0, \{\text{ord } \mathfrak{b}_{m/M}(\lambda)\}_{m=0}^{M(d_g+1)})$$

$$c_a = \frac{1}{p-1} - \inf(0, \text{ord } a).$$

Previously we defined B to be a subring of K containing $\mathbb{Z}$ and the $g_v(\lambda)$. Here, we assume in addition that $B \subseteq \mathcal{O}_K$.

Lemma 9.1. If $\mathfrak{b}^{d_g+1}(\lambda) \neq 0$, then $\mathcal{K}_{a,\lambda} \subseteq L^*(c_a + c_\lambda)$.

Proof. By Theorem 7.4, it suffices to check that

$$\xi_{i,a,\lambda}^* = \sum_{u \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)} \pi^{-w(u)} x^{-u} G_{i,u}(a, \lambda) / \mathfrak{b}^{w(u)}(\lambda)$$

lies in $L^*(c_a + c_\lambda)$ for all i . But this is immediate from the definitions since (6.8), (7.8), and (7.9) imply

$$\text{ord } \frac{\pi^{-w(u)} G_{i,u}(a, \lambda)}{\mathfrak{b}^{w(u)}(\lambda)} \geq -(c_a + c_\lambda)w(u). \quad (9.1)$$

□

Define

$$L'^*(b) = \left\{ \xi^* = \sum_{u \in \mathbb{Z}^n \cap L_g} A_u x^{-u} \mid \text{for all } v \in \mathbb{Z}^n \cap L_g, \gamma_-(x^{-v} \xi^*) \in L^*(b) \right\}.$$

We derive some simpler conditions for checking whether a series lies in $L'^*(b)$.

Lemma 9.2. *Suppose that for every $v \in \mathbb{Z}^n \cap L_g$ there exists $v' \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$ such that $\gamma_-(x^{-v-v'} \xi^*) \in L^*(b)$. Then $\xi^* \in L'^*(b)$.*

Proof. Suppose $v \in \mathbb{Z}^n \cap L_g$ and $v' \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$ are such that $\gamma_-(x^{-v-v'} \xi^*) \in L^*(b)$. Write $\xi^* = \sum_{u \in \mathbb{Z}^n \cap L_g} A_u x^{-u}$. Then

$$\gamma_-(x^{-v-v'} \xi^*) = \sum_{\substack{u \in \mathbb{Z}^n \cap L_g \\ u+v+v' \in C(g)}} A_u x^{-u-v-v'} \in L^*(b),$$

so

$$\text{ord } A_u \geq -bw(u + v + v') + c. \quad (9.2)$$

One also has

$$\gamma_-(x^{-v} \xi^*) = \sum_{\substack{u \in \mathbb{Z}^n \cap L_g \\ u+v \in C(g)}} A_u x^{-u-v}.$$

By equation (9.2) and Lemma 2.1(b), if $u + v, v' \in C(g)$, then

$$\text{ord } A_u \geq -bw(u + v) - bw(v') + c,$$

hence $\gamma_-(x^{-v} \xi^*) \in L^*(b)$. Thus $\xi^* \in L'^*(b)$. □

Corollary 9.3. *If $\gamma_-(x^{-v} \xi^*) \in L^*(b)$ for all $v \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$, then $\xi^* \in L'^*(b)$.*

Proof. Given $v \in \mathbb{Z}^n \cap L_g$, one can always find $v' \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$ such that $v + v' \in C(g)$. □

By similar reasoning, one can prove the following result.

Corollary 9.4. *If $\gamma_-(x^{-v} \xi^*) \in L^*(b)$ for all $v \in p\mathbb{Z}^n \cap C(g)$, then $\xi^* \in L'^*(b)$.*

Corollary 9.5. *If $\mathfrak{b}^{d_g+1}(\lambda) \neq 0$, then $\mathcal{K}'_{a,\lambda} \subseteq L'^*(c_a + c_\lambda)$.*

Proof. Let $\xi^* \in \mathcal{K}'_{a,\lambda}$ and let $u \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$. Then $x^{-u}\xi^* \in \mathcal{K}'_{a-u,\lambda}$, so $\gamma_-(x^{-u}\xi^*) \in \mathcal{K}_{a-u,\lambda}$. By Lemma 9.1, $\mathcal{K}_{a-u,\lambda} \subseteq L^*(c_{a-u} + c_\lambda)$. Since $c_{a-u} = c_a$, this shows that $\gamma_-(x^{-u}\xi^*) \in L^*(c_a + c_\lambda)$. Hence by Corollary 9.3, $\xi^* \in L'^*(c_a + c_\lambda)$. $\square$

Define $\Phi : R'_K \rightarrow R'^*_K$ by

$$\Phi(\xi^*(x)) = \xi^*(x^p).$$

Lemma 9.6. (a) $\Phi(L'^*(b)) \subseteq L'^*(b/p)$.

(b) For $\eta \in L(b')$, $b' > b > 0$, multiplication by η defines an endomorphism of $L'^*(b)$.

Proof. Let $\xi^* = \sum_{u \in \mathbb{Z}^n \cap L_g} A_u x^{-u} \in L'^*(b)$. We show that $\Phi(\xi^*) \in L'^*(b/p)$. By Corollary 9.4 it suffices to show that $\gamma_-(x^{-pv}\Phi(\xi^*)) \in L^*(b/p)$ for all $v \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$, i.e., $\Phi(\gamma_-(x^{-v}\xi^*)) \in L^*(b/p)$. But $\xi^* \in L'^*(b)$ implies $\gamma_-(x^{-v}\xi^*) \in L^*(b)$, so we are reduced to proving $\Phi(L^*(b)) \subseteq L^*(b/p)$. This follows easily from the definitions.

To prove part (b), let $\eta = \sum_{v \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)} B_v x^v \in L(b')$ and choose $c \in \mathbb{R}$ such that $\text{ord } B_v \geq b'w(v) + c$ for all $v \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$. Let $\xi^* = \sum_{u \in \mathbb{Z}^n \cap L_g} A_u x^{-u} \in L'^*(b)$ and let $t \in \mathbb{Z}^n \cap L_g$. The coefficient of x^{-t} in $\eta\xi^*$ is

$$C_t = \sum_{v \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)} B_v A_{v+t}. \quad (9.3)$$

Since $\gamma_-(x^t\xi^*) \in L^*(b)$, there exists $c_t \in \mathbb{R}$ such that

$$\text{ord } A_{v+t} \geq -bw(v) + c_t$$

for all $v \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$, hence

$$\begin{aligned} \text{ord } B_v A_{v+t} &\geq b'w(v) + c - bw(v) + c_t \\ &= (b' - b)w(v) + c + c_t. \end{aligned}$$

Since $b' - b > 0$, this proves the series (9.3) converges, hence $\eta\xi^*$ is a well-defined element of R'^*_K . We now show that $\eta\xi^* = \sum_{t \in \mathbb{Z}^n \cap L_g} C_t x^{-t} \in L'^*(b)$. By Corollary 9.3, it suffices to prove that for all $s \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$ we have

$$\gamma_-\left(\sum_{t \in \mathbb{Z}^n \cap L_g} C_t x^{-s-t}\right) = \sum_{s+t \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)} C_t x^{-s-t} \in L^*(b).$$

Since

$$\gamma_-(x^{-s}\xi^*) = \sum_{\substack{u \in \mathbb{Z}^n \cap L_g \\ u+s \in C(g)}} A_u x^{-u-s} \in L^*(b),$$

there exists $c_s \in \mathbb{R}$ such that

$$\text{ord } A_u \geq -bw(u + s) + c_s \quad (9.4)$$

for $u + s \in C(g)$. Suppose $s + t \in C(g)$. Then $v + t + s \in C(g)$ for $v \in C(g)$, so we may put $u = v + t$ in (9.3). It follows from (9.3) that

$$\begin{aligned} \text{ord } C_t &\geq b'w(v) + c - bw(v + t + s) + c_s \\ &\geq b'w(v) + c - bw(v) - bw(s + t) + c_s \\ &\geq -bw(s + t) + c + c_s. \end{aligned}$$

But this says that $\sum_{s+t \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)} C_t x^{-s-t} \in L^*(b)$, which was the desired result. $\square$

For $g(\lambda, x) = \sum_{v \in \Gamma} g_v(\lambda) x^v \in K[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$, write

$$g_v(\lambda) = \sum_{\sigma \in S_v} g_{\sigma v} M_{\sigma v}(\lambda),$$

where $M_{\sigma v}(\lambda)$ is a monomial in $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ and define

$$F(\lambda, x) = \prod_{v \in \Gamma} \prod_{\sigma \in S_v} \theta(g_{\sigma v} M_{\sigma v}(\lambda) x^v) \in K[[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]].$$

It follows from (2.1) that this definition makes sense provided, for example, that $\text{ord } g_{\sigma v} \geq 0$ for all σ, v and that $(\deg_\lambda g)(\text{ord } \lambda) > -(p-1)/p^2$, in which case

$$F(\lambda, x) \in L\left(\frac{p-1}{p^2} + (\deg_\lambda g) \inf(0, \text{ord } \lambda)\right). \quad (9.5)$$

Lemma 9.7. *Let $\mu \in \mathbb{Z}^n \cap L_g$ and $\lambda \in K^N$ with*

$$0 < b < \frac{p-1}{p} + p(\deg_\lambda g) \inf(0, \text{ord } \lambda).$$

The map $\delta_{\lambda, \mu}$ defined by

$$\delta_{\lambda, \mu}(\xi^*(x)) = x^{-\mu} F(\lambda, x) \xi^*(x^p)$$

is an injection of $L'^(b)$ into $L'^*(b/p)$.*

Proof. It follows from (9.5) and our hypothesis that $F(\lambda, x) \in L(b/p)$, hence Lemma 9.6 implies that $\delta_{\lambda, \mu}$ maps $L'^*(b)$ into $L'^*(b/p)$. It is injective because it has a left inverse $\gamma_{\lambda, \mu} : L'^*(b/p) \rightarrow L'^*(b)$ defined by

$$\gamma_{\lambda, \mu}(\xi^*(x)) = \psi(F(\lambda, x)^{-1} x^\mu \xi^*(x)),$$

where $\psi : L'^*(b/p) \rightarrow L'^*(b)$ is defined by (2.8). $\square$

Define

$$e_\lambda = c_{\lambda p} - p(\deg_\lambda g) \inf(0, \text{ord } \lambda),$$

a nonnegative real number. Note that together the conditions $\text{ord } \lambda \geq 0$ and $\text{ord } b^{d_g+1}(\lambda) = 0$ imply $e_\lambda = 0$.

Theorem 9.8. *Let $a \in K^n$ and $\mu \in \mathbb{Z}^n \cap L_g$ be such that*

$$\inf(1, \text{ord}(a + \mu)) > e_\lambda + \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1}.$$

Put $a' = (a + \mu)/p$. Then the restriction of $\delta_{\lambda, \mu}$ to $\mathcal{K}'_{a', \lambda^p}$ defines an isomorphism

$$\alpha_{a', \lambda}^* : \mathcal{K}'_{a', \lambda^p} \rightarrow \mathcal{K}'_{a, \lambda}.$$

Proof. By Corollary 9.5, $\mathcal{K}'_{a', \lambda^p} \subseteq L'^*(c_{a'} + c_{\lambda^p})$. Thus by Lemma 9.7, $\delta_{\lambda, \mu}$ is injective on $\mathcal{K}'_{a', \lambda^p}$ provided

$$c_{a'} + c_{\lambda^p} < \frac{p-1}{p} + p(\deg_\lambda g) \inf(0, \text{ord } \lambda),$$

i.e., provided $(p-1)/p - c_{a'} > e_\lambda$. But

$$\begin{aligned} \frac{p-1}{p} - c_{a'} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1} &= 1 + \inf(0, \text{ord } a') \\ &= \inf(1, \text{ord}(a + \mu)), \end{aligned}$$

hence our hypothesis implies $\delta_{\lambda, \mu}$ is injective.

By Proposition 7.1, $\mathcal{K}'_{a', \lambda^p}$ and $\mathcal{K}'_{a, \lambda}$ have the same dimension, so to show that $\alpha_{a', \lambda}^*$ is an isomorphism it suffices to show that $\delta_{\lambda, \mu}(\mathcal{K}'_{a', \lambda^p}) \subseteq \mathcal{K}'_{a, \lambda}$. This follows immediately from the commutativity of the diagram

$$\begin{array}{ccc} L'^*(b) & \xrightarrow{\delta_{\lambda, \mu}} & L'^*(b/p) \\ \downarrow D_{i, a', \lambda^p}^* & & \downarrow D_{i, a, \lambda}^* \\ L'^*(b) & \xrightarrow{p\delta_{\lambda, \mu}} & L'^*(b/p) \end{array}$$

under the hypothesis that

$$b < \frac{p-1}{p} + p(\deg_\lambda g) \inf(0, \text{ord } \lambda).$$

The proof of this commutativity is completely analogous to the proof of Lemma 2.4: writing out both compositions, one reduces to showing that

$$\frac{x_i \partial F / \partial x_i}{F(\lambda, x)} = \pi g_i(\lambda, x) - p\pi g_i(\lambda^p, x^p),$$

which follows from the definition of $F(\lambda, x)$. □

Remark 9.9. We explain the connection between the maps $\alpha_{a', \lambda}^*$ and exponential sums. Let $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in k$ and let

$$f(\lambda, x) = \sum_{v \in \Gamma} f_v(\lambda) x^v \in \mathbb{F}_q[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}],$$

where $f_v(\lambda) = \sum_{\sigma \in S_v} f_{\sigma v} M_{\sigma v}(\lambda)$, $f_{\sigma v} \in \mathbb{F}_q$, and $M_{\sigma v}(\lambda)$ is a monomial in the λ_i . We assume that $f(\lambda, x)$ is nondegenerate as polynomial in x . Take the polynomial g to be the Teichmüller lifting of $f(\lambda, x)$:

$$g(\hat{\lambda}, x) = \sum_{v \in \Gamma} g_v(\hat{\lambda}) x^v,$$

where $g_v(\hat{\lambda}) = \sum_{\sigma \in S_v} \hat{f}_{\sigma v} M_{\sigma v}(\hat{\lambda})$. If $q = p^s$, then $\hat{\lambda}_i$ satisfies $\hat{\lambda}_i^{p^s} = \hat{\lambda}_i$ for $i = 1, \dots, N$. We abbreviate this by writing $\hat{\lambda}^{p^s} = \hat{\lambda}$. Let $a \in \mathbb{Q}$ with $(q-1)a \in \mathbb{Z}$. Then

$$a = (a_0 + a_1 p + \dots + a_{s-1} p^{s-1})(1 + p^s + p^{2s} + \dots),$$

where $0 \leq a_i \leq p-1$ for $i = 0, 1, \dots, s-1$. If we choose $\mu_0 = -a_0$, $\mu_1 = -a_1$, $\dots$, $\mu_{s-1} = -a_{s-1}$, then inductively

$$a^{(i)} = \frac{a^{(i-1)} + \mu_{i-1}}{p} = (a_i + a_{i+1} p + \dots + a_{s-1} p^{s-1})(1 + p^s + p^{2s} + \dots).$$

In particular, $a^{(s)} = a$. In this situation, the composition

$$\mathcal{K}'_{a^{(s)}, \hat{\lambda} p^s} \xrightarrow{\alpha^*_{a^{(s-1)}, a^{(s)}, \hat{\lambda} p^{s-1}}} \mathcal{K}'_{a^{(s-1)}, \hat{\lambda} p^{s-1}} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{K}'_{a', \hat{\lambda} p} \xrightarrow{\alpha^*_{a, a', \hat{\lambda}}} \mathcal{K}'_{a, \hat{\lambda}}$$

is an endomorphism of $\mathcal{K}'_{a, \hat{\lambda}}$. Denote it by $\beta^*_{a, \hat{\lambda}}$.

From the definitions, we see that

$$\begin{aligned} \beta^*_{a, \hat{\lambda}} &= \delta_{\hat{\lambda}, \mu_0} \circ \delta_{\hat{\lambda} p, \mu_1} \circ \dots \circ \delta_{\hat{\lambda} p^{s-1}, \mu_{s-1}} \\ &= (x^{-\mu_0} F(\hat{\lambda}, x) \circ \Phi) \circ (x^{-\mu_1} F(\hat{\lambda} p, x) \circ \Phi) \circ \dots \circ (x^{-\mu_{s-1}} F(\hat{\lambda} p^{s-1}, x) \circ \Phi) \\ &= x^{-\mu_0 - \mu_1 p - \dots - \mu_{s-1} p^{s-1}} F(\hat{\lambda}, x) F(\hat{\lambda} p, x^p) \dots F(\hat{\lambda} p^{s-1}, x^{p^{s-1}}) \circ \Phi^s \\ &= x^{(1-q)a} F_0(\hat{\lambda}, x) \circ \Phi^s, \end{aligned}$$

where $F_0(\hat{\lambda}, x) = \prod_{i=0}^{s-1} F(\hat{\lambda} p^i, x^{p^i})$ as in section 3. Under the pairing (7.1), Φ is dual to ψ and multiplication by $x^{(1-q)a} F_0(\hat{\lambda}, x)$ is self-dual. Equation (7.7) then implies that the dual of $\beta^*_{a, \hat{\lambda}}$ acting on $\mathcal{K}'_{a, \hat{\lambda}}$ is the operator $\psi^s \circ x^{(1-q)a} F_0(\hat{\lambda}, x)$ acting on $\mathcal{W}'_{a, \hat{\lambda}}$. In particular,

$$\det(I - t\beta^*_{a, \hat{\lambda}} \mid \mathcal{K}'_{a, \hat{\lambda}}) = \det(I - t\psi^s \circ x^{(1-q)a} F_0(\hat{\lambda}, x) \mid \mathcal{W}'_{a, \hat{\lambda}}).$$

If we assume also that a is seminonresonant, Lemma 5.5 implies that we can replace $\mathcal{W}'_{a, \hat{\lambda}}$ by $\mathcal{W}_{a, \hat{\lambda}}$:

$$\det(I - t\beta^*_{a, \hat{\lambda}} \mid \mathcal{K}'_{a, \hat{\lambda}}) = \det(I - t\psi^s \circ x^{(1-q)a} F_0(\hat{\lambda}, x) \mid \mathcal{W}_{a, \hat{\lambda}}).$$

By Proposition 4.6 we get

$$\det(I - t\beta_{a,\hat{\lambda}}^* \mid \mathcal{K}'_{a,\hat{\lambda}}) = \det\left(I - t\psi^s \circ x^{(1-q)a} F_0(\hat{\lambda}, x) \mid L / \sum_{i=1}^n D_{i,a,\hat{\lambda}} L\right).$$

In section 2, the operator $\psi^s \circ x^{(1-q)a} F_0(\hat{\lambda}, x)$ on L was denoted $\alpha_{(q-1)a}$. Corollary 3.11 thus implies

$$L(f, a; t)^{(-1)^{n-1}} = \det(I - t\beta_{a,\hat{\lambda}}^* \mid \mathcal{K}'_{a,\hat{\lambda}})^{(1-\phi)^{n-d_f}}. \quad (9.6)$$

This equation expresses the relation between the L -function of the exponential sum and the “Frobenius map” $\alpha_{a,a',\lambda}^*$.

From Corollary 9.5 we had $\mathcal{K}_{a,\lambda} \subseteq L'^*(c_a + c_\lambda)$. But under the hypothesis of Theorem 9.8 we have

$$\mathcal{K}'_{a,\lambda} \subseteq \delta_{\lambda,\mu}(L'^*(c_{a'} + c_{\lambda^p})) \subseteq L'^*((c_{a'} + c_{\lambda^p})/p),$$

which may be a stronger assertion. We make this precise.

Corollary 9.10. *Suppose that $B \subseteq \mathbb{Z}[\lambda]$, $c_\lambda = 0$, $\text{ord } a \geq 0$, and v is a nonnegative integer. If there exists $\mu \in \mathbb{Z}^n \cap L_g$ such that $\text{ord } (a + \mu)/p^v \geq 0$, then*

$$\mathcal{K}'_{a,\lambda} \subseteq L'^*(1/(p-1)p^v).$$

Proof. The proof is by induction on v . Our hypothesis implies $c_\lambda = 0$ and $c_a = 1/(p-1)$, so the case $v = 0$ follows from Corollary 9.5. Assume the result true for $v-1$ and put $a' = (a + \mu)/p$. Then

$$\text{ord } \frac{a' + (0, \dots, 0)}{p^{v-1}} \geq 0.$$

The hypothesis that $B \subseteq \mathbb{Z}[\lambda]$ implies that $c_{\lambda^p} = 0$ also. The induction hypothesis then implies that $\mathcal{K}'_{a',\lambda^p} \subseteq L'^*(1/(p-1)p^{v-1})$. Applying Theorem 9.8, we get

$$\mathcal{K}'_{a,\lambda} = \delta_{\lambda,\mu}(\mathcal{K}'_{a',\lambda^p}) \subseteq \delta_{\lambda,\mu}(L'^*(1/(p-1)p^{v-1})) \subseteq L'^*(1/(p-1)p^v). \quad \square$$

Proposition 9.11. *Suppose that $u, v, \mu \in \mathbb{Z}^n \cap L_g$ and*

$$\inf(1, \text{ord } (a + \mu)) > e_\lambda + \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1}.$$

Put $a' = (a + \mu)/p$. Then there is a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}'_{a',\lambda^p} & \xrightarrow{x^v} & \mathcal{K}'_{a'+v,\lambda^p} \\ \alpha_{a,a',\lambda}^* \downarrow & & \downarrow \alpha_{a+u,a'+v,\lambda}^* \\ \mathcal{K}'_{a,\lambda} & \xrightarrow{x^u} & \mathcal{K}'_{a+u,\lambda} \end{array}$$

Proof. Just compute both compositions:

$$\begin{aligned} x^u \circ \alpha_{a,a',\lambda}^* &= x^u \circ x^{-\mu} F(\lambda, x) \circ \Phi = x^{u+a-pa'} F(\lambda, x) \circ \Phi, \\ \alpha_{a+u,a'+v,\lambda}^* \circ x^v &= x^{a+u-p(a'+v)} F(\lambda, x) \circ \Phi \circ x^v = x^{u+a-pa'} F(\lambda, x) \circ \Phi. \quad \square \end{aligned}$$

When $\mathfrak{b}^{d_g+1}(\lambda) \neq 0$ and a is nonresonant, we constructed a basis $\{\xi'_{i,a,\lambda}\}_{i=1}^{N_g}$ of $\mathcal{K}'_{a,\lambda}$ (Proposition 7.7). Assume the hypothesis of Theorem 9.8 is satisfied. Then a' is also nonresonant so we get a basis $\{\xi'_{i,a',\lambda^p}\}_{i=1}^{N_g}$ of $\mathcal{K}'_{a',\lambda^p}$. We define $\gamma(a, a', \lambda)$ to be the transpose of the matrix of the isomorphism $\alpha_{a,a',\lambda}^*$ relative to these bases. Since $a - u$ is also nonresonant for all $u \in \mathbb{Z}^n \cap L(g)$, we also have bases $\{\xi'_{i,a-u,\lambda}\}_{i=1}^{N_g}$ for the $\mathcal{K}'_{a-u,\lambda}$. We recall that $M(a, a - u, \lambda)$ is the transpose of the matrix of $x^u : \mathcal{K}'_{a-u,\lambda} \rightarrow \mathcal{K}'_{a,\lambda}$ relative to these bases.

Theorem 9.12. *Assume $B \subseteq \mathbb{Z}[\lambda]$. For fixed $\mu \in \mathbb{Z}^n$, $\gamma(a, (a + \mu)/p, \lambda)$ extends to a function of (a, λ) meromorphic in the region*

$$\inf(1, \text{ord}(a + \mu)) > e_\lambda + \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1}$$

with polar factor $\det M(a', a' - u_0, \lambda^p)$, where $a' = (a + \mu)/p$ and u_0 is any element of $\mathbb{Z}^n \cap C(g)$ such that

$$\mathbb{Z}^n \cap \left(u_0 - \frac{\mu}{p} + C(g)\right) \subseteq C(g).$$

In particular, the polar factor is trivial if

$$\mathbb{Z}^n \cap \left(-\frac{\mu}{p} + C(g)\right) \subseteq C(g).$$

Proof. Write

$$F(\lambda, x) = \sum_{u \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)} A_u(\lambda) x^u.$$

We know that

$$\text{ord } A_u(\lambda) \geq \left(\frac{p-1}{p^2} + (\deg_\lambda g) \inf(0, \text{ord } \lambda)\right) w(u).$$

From the definitions we have

$$\gamma(a, a', \lambda)_{ij} = \langle \alpha_{a,a',\lambda}^*(\xi'_{i,a',\lambda^p}), \pi^{w(u_j)} x^{u_j} \rangle,$$

hence by Proposition 7.7

$$\begin{aligned}\pi^{-w(u_j)}\gamma(a, a', \lambda)_{ij} &= \langle x^{-\mu} F(\lambda, x) \sum_{v \in \mathbb{Z}^n \cap L_g} x^{-pv} H_{i,v}(a', \lambda^p), x^{u_j} \rangle \\ &= \sum' A_u(\lambda) H_{i,v}(a', \lambda^p),\end{aligned}$$

where $\sum'$ denotes a summation over all $u \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$ and $v \in \mathbb{Z}^n \cap L_g$ such that $-\mu + u - pv + u_j = 0$. This condition says that

$$v = -\frac{\mu}{p} + \frac{u + u_j}{p} \in \mathbb{Z}^n \cap \left(-\frac{\mu}{p} + C(g) \right).$$

Choose $u_0 \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$ such that

$$\mathbb{Z}^n \cap \left(u_0 - \frac{\mu}{p} + C(g) \right) \subseteq C(g).$$

Then for v occurring in the above summation, we have $u_0 + v \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$. By Proposition 7.7,

$$H_{i,v}(a', \lambda^p) = \sum_{k=1}^{N_g} M(a' - u_0, a', \lambda^p)_{ik} H_{k, u_0+v}(a' - u_0, \lambda^p).$$

Substituting in the above we get

$$\pi^{-w(u_j)}\gamma(a, a', \lambda)_{ij} = \sum_{k=1}^{N_g} M(a' - u_0, a', \lambda^p)_{ik} \sum' A_u(\lambda) H_{k, u_0+v}(a' - u_0, \lambda^p).$$

Since $u_0 + v \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$, we have by Proposition 7.7 and equation (9.1)

$$\begin{aligned}\text{ord } A_u(\lambda) H_{k, u_0+v}(a' - u_0, \lambda^p) &\geq \\ &\left(\frac{p-1}{p^2} + (\deg_\lambda g) \inf(0, \text{ord } \lambda) \right) w(u) - (c_{\lambda^p} + c_{a'}) w(u_0 + v).\end{aligned}$$

Write $v = (u_j - \mu)/p + u/p$. Note that the definition of u_0 does not imply that $u_0 + (u_j - \mu)/p \in C(g)$. However, we can choose $u_1 \in C(g)$ such that $u_0 + u_1 + (u_j - \mu)/p \in C(g)$. Then $w(u_0 + v) \leq w(u_0 + u_1 + v)$, so we may

conclude

$$\begin{aligned}
& \text{ord } A_u(\lambda) H_{k, u_0+v}(a' - u_0, \lambda^p) \\
& \geq \left(\frac{p-1}{p^2} + (\deg_\lambda g) \inf(0, \text{ord } \lambda) \right) w(u) - (c_{\lambda^p} + c_{a'}) w(u_0 + u_1 + v) \\
& \geq \left(\frac{p-1}{p^2} + (\deg_\lambda g) \inf(0, \text{ord } \lambda) \right) w(u) \\
& \quad - (c_{\lambda^p} + c_{a'}) \left(w(u_0 + u_1 + \frac{u_j - \mu}{p}) + w(\frac{u}{p}) \right) \\
& = \left(\frac{p-1}{p} + p(\deg_\lambda g) \inf(0, \text{ord } \lambda) - c_{\lambda^p} - c_{a'} \right) \frac{w(u)}{p} \\
& \quad - (c_{\lambda^p} + c_{a'}) w \left(u_0 + u_1 + \frac{u_j - \mu}{p} \right) \\
& = \left(\frac{p-1}{p} - c_{a'} - e_\lambda \right) \frac{w(u)}{p} - (c_{\lambda^p} + c_{a'}) w \left(u_0 + u_1 + \frac{u_j - \mu}{p} \right) \\
& = \left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{p-1} + \inf(0, \text{ord } a') - e_\lambda \right) \frac{w(u)}{p} \\
& \quad - (c_{\lambda^p} + c_{a'}) w \left(u_0 + u_1 + \frac{u_j - \mu}{p} \right) \\
& = \left(\inf(1, \text{ord } (a + \mu)) - e_\lambda - \frac{1}{p} - \frac{1}{p-1} \right) \frac{w(u)}{p} \\
& \quad - (c_{\lambda^p} + c_{a'}) w \left(u_0 + u_1 + \frac{u_j - \mu}{p} \right).
\end{aligned}$$

It follows that the series $\sum' A_u(\lambda) H_{k, u_0+v}(a' - u_0, \lambda^p)$ converges when

$$\inf(1, \text{ord } (a + \mu)) > e_\lambda + \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1}.$$

Since $M(a' - u_0, a', \lambda^p)$ is the inverse of $M(a', a' - u_0, \lambda^p)$, its polar locus is contained in the zero set of $\det M(a', a' - u_0, \lambda^p)$. (Note that the polar locus of $M(a', a' - u_0, \lambda^p)$ is excluded from the region of convergence by the hypothesis of the theorem.) $\square$

The matrix version of the commutative diagram of Proposition 9.11 is the following.

Proposition 9.13. *Assume $B \subseteq \mathbb{Z}[\lambda]$ and let $\mu, u, v \in \mathbb{Z}^n$, $a \in K^n$. Put $a' = (a + \mu)/p$. As meromorphic functions on the region*

$$\inf(1, \text{ord } (a + \mu)) > e_\lambda + \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1}$$

we have

$$\gamma(a + u, a' + v, \lambda) = M(a' + v, a', \lambda^p)^{-1} \gamma(a, a', \lambda) M(a + u, a, \lambda).$$

We now analyze the condition given in Theorem 9.12 for the polar factor to be trivial.

Proposition 9.14. *The condition*

$$\mathbb{Z}^n \cap \left(-\frac{\mu}{p} + C(g) \right) \subseteq C(g)$$

is equivalent to the condition

$$l_i(\mu) \leq p - 1 \quad \text{for } i = 1, \dots, s.$$

Proof. Note that the first condition is equivalent to

$$l_i(\mathbb{Z}^n \cap \left(-\frac{\mu}{p} + C(g) \right)) \geq 0 \quad \text{for } i = 1, \dots, s.$$

Suppose that $l_i(\mu) \leq p - 1$. Then $l_i(-\mu/p) \geq -(p - 1)/p$, so for all $v \in C(g)$

$$l_i\left(-\frac{\mu}{p} + v\right) = l_i\left(-\frac{\mu}{p}\right) + l_i(v) \geq -\frac{p-1}{p}.$$

But if $(-\mu/p) + v \in \mathbb{Z}^n$, then $l_i((-\mu/p) + v) \in \mathbb{Z}$, hence $l_i((-\mu/p) + v) \geq 0$.

Suppose conversely that $l_i(\mu) \geq p$ for some i . Choose $v \in \mathbb{Z}^n \cap C(g)$ such that $l_i(v) = 0$, $l_j(v) > 0$ for all $j \neq i$. Choose $w \in \mathbb{Z}^n \cap L_g$ with $l_i(w) = -1$ and consider

$$z = \mu + pw + ptv,$$

where t is a positive integer chosen large enough so that

$$l_j(z) = l_j(\mu + pw) + ptl_j(v) > 0$$

for all $j \neq i$. Then $z \in C(g)$. But

$$-\frac{\mu}{p} + \frac{z}{p} = w + tv \in \mathbb{Z}^n \cap \left(-\frac{\mu}{p} + C(g) \right)$$

and $l_i(-\mu/p + z/p) = l_i(w) + tl_i(v) = -1$, which shows that

$$\mathbb{Z}^n \cap \left(-\frac{\mu}{p} + C(g) \right) \not\subseteq C(g).$$

□

References

- [1] A. Adolphson, On the Dwork trace formula. *Pacific J. Math.* **113** (1984), 257–268.
- [2] A. Adolphson and S. Sperber, Exponential sums and Newton polyhedra: Cohomology and estimates. *Ann. Math.* **139** (1989), 367–406.
- [3] A. Adolphson and S. Sperber, Twisted exponential sums and Newton polyhedra. *J. Reine Angew. Math.* **443** (1993), 151–177.

- [4] B. Dwork, *Generalized Hypergeometric Functions*. Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 1990.
- [5] A. G. Kouchnirenko, Polyèdres de Newton et nombres de Milnor. *Invent. Math.* **32** (1976), 1–31.
- [6] P. Monsky, *p -Adic Analysis and Zeta Functions*. Lectures in Mathematics, Kyoto University, Kinokuniya Bookstore, Tokyo 1970.
- [7] J.-P. Serre, Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p -adiques. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **12** (1962), 69–85.

Alan Adolphson, Department of Mathematics, Oklahoma State University, Stillwater, OK 74078, U.S.A.

E-mail: adolphs@math.okstate.edu

Exponential sums and free hyperplane arrangements

Alan Adolphson and Steven Sperber*

Abstract. We consider exponential sums on $\mathbb{A}^n/\mathbb{F}_q$ defined by a polynomial $f(x) \in \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_n]$. Here we assume the leading form of f defines a hypersurface Z in $\mathbb{A}^n$ such that Z_{red} is a free hyperplane arrangement (or a 3-arrangement) and we assume also that the next-to-leading form of f is “generic with respect to Z ”. With a (mild) restriction on the characteristic of $\mathbb{F}_q$, we prove the vanishing of all but middle-dimensional p -adic cohomology for these exponential sums.

2000 Mathematics Subject Classification: Primary 11L07, 11T23, 14F20, 14F30

1 Introduction

We consider here certain exponential sums on $\mathbb{A}^n/\mathbb{F}_q$ where $\mathbb{F}_q$ is a finite field of characteristic p having $q = p^a$ elements. Let $f(x) \in \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_n]$ and let $\Psi : \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{C}^*$ be a nontrivial additive character. The exponential sums of concern are defined by

$$S_m(\mathbb{A}^n, f) = \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{F}_{q^m})^n} \Psi \circ \text{Tr}_{\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q}(f(x_1, \dots, x_n))$$

where Tr denotes the trace map. The associated L -function is

$$L(\mathbb{A}^n, f, T) = \exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} S_m(\mathbb{A}^n, f) \frac{T^m}{m} \right).$$

We write

$$f = f^{(\delta)} + f^{(\delta')} + \dots + f^{(0)}$$

*Partially supported by NSF Grant #DMS-0070510

Key words and phrases: exponential sums, hyperplane arrangements, p -adic cohomology, ℓ -adic cohomology

for the decomposition of f by degree into homogeneous forms. (Note that in our notation we are assuming $f^{(\delta-1)} = \dots = f^{(\delta'+1)} = 0$.) The case in which the vanishing of the leading form, $f^{(\delta)}(x) = 0$, defines a nonsingular projective hypersurface Z_δ in $\mathbb{P}^{n-1}$ has been studied using both ℓ -adic and p -adic methods ([4], [9], [1]) and is fairly well understood.

In [5], García López calculated ℓ -adic cohomology (under some mild restriction on the characteristic p) for the L -function above in the case in which $\delta' = \delta - 1$ and Z_δ has a finite number of quasi-homogeneous isolated singularities none of which lie on the projective hypersurface $Z_{\delta-1}$ (which is defined by the vanishing of the “next-to-leading” form $f^{(\delta-1)}$.)

In a series of papers [1], [2], [3], the authors have taken this point of view and studied (via p -adic cohomology) exponential sums on $\mathbb{A}^n$ in which Z_δ is a singular hypersurface with a very prescribed singular locus which behaves “well” in some sense when Z_δ and the next-to-leading hypersurface $Z_{\delta'}$ intersect. The present work is yet another case of this type.

We recall some of the definitions and main results of [2]. It will be convenient to work at first over an arbitrary field K . Let $\Omega_{K[x]}^k$ denote the module of differential k -forms of $K[x_1, \dots, x_n]$ over K . Every $\omega \in \Omega_{K[x]}^k$ can be written uniquely in the form

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega(i_1, \dots, i_k) dx_{i_1} \cdots dx_{i_k}$$

with $\omega(i_1, \dots, i_k) \in K[x_1, \dots, x_n]$. If each $\omega(i_1, \dots, i_k)$ in the form ω above is homogeneous of degree ℓ we say that ω is homogeneous and write

$$\deg_{\text{coeff}}(\omega) = \ell,$$

$$\deg(\omega) = \ell + (n - k)(\delta - 1).$$

We consider the complex $\Omega_{K[x]}^\bullet$ with coboundary ϕ_f where $\phi_f(\omega) = df \wedge \omega$. This complex has an increasing filtration by subcomplexes. Set

$$F_\ell \Omega_{K[x]}^k = K\text{-span of homogeneous } k\text{-forms } \omega \text{ with } \deg(\omega) \leq \ell.$$

Then $F_\ell \Omega_{K[x]}^\bullet$ is a subcomplex of $(\Omega_{K[x]}^\bullet, \phi_f)$ and $F_\ell^\bullet \subseteq F_{\ell+1}^\bullet$. The associated spectral sequence has E_1 -term

$$E_1^{r,s} = H^{r+s}(F_r/F_{r-1}, \phi_f) \Rightarrow H^{r+s}(\Omega_{K[x]}^\bullet, \phi_f).$$

Clearly, the complex $((F_r/F_{r-1})^\bullet, \phi_f)$ is isomorphic to the r -th graded piece of the graded complex $(\Omega_{K[x]}^\bullet, \phi_{f^{(\delta)}})$. In [2], we considered exponential sums with $f(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ in which this spectral sequence degenerates (i.e., there exists a positive integer e such that $E_e^{r,s} = 0$ for $r + s \neq n$).

We recall some of these results. Let $K = \mathbb{F}_q$ and $f \in \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_n]$. Following Dwork’s approach, we associate to f a complex $(\Omega_{C(b)}^\bullet, D)$ of length n depending on a rational parameter b satisfying $0 < b < p/(p - 1)$. Each $\Omega_{C(b)}^i$, $i = 0, \dots, n$, is a

p -adic Banach space over a field $\tilde{\Omega}_0$ (which itself is a finite extension of $\mathbb{Q}_p$, the field of p -adic numbers). Each $\Omega_{C(b)}^i$ is equipped with a Frobenius operator α_i commuting with the coboundary D of the complex. Dwork's trace formula then states

$$L(\mathbb{A}^n, f, T) = \prod_{i=0}^n \det(I - T\alpha_i \mid H^i(\Omega_{C(b)}^\bullet, D))^{(-1)^{n+1}}.$$

Among the results of [2] is

Theorem 1.1. *Suppose that there exist integers e and m such that $E_e^{r,s} = 0$ for all r, s such that $r + s = m$. Then for b in the range*

$$\frac{\delta}{(p-1)(\delta-e+1)} < b < \frac{p\delta}{(p-1)\delta+e-1}$$

we have

$$H^m(\Omega_{C(b)}^\bullet, D) = 0.$$

If there exists a positive integer e such that $E_e^{r,s} = 0$ for all $r + s \neq n$, then for b in the above range $H^i(\Omega_{C(b)}^\bullet, D) = 0$ for all $i \neq n$, and

$$\dim_{\tilde{\Omega}_0} H^n(\Omega_{C(b)}^\bullet, D) = M_f$$

($M_f :=$ sum of the Milnor numbers of the critical points of the map f .)

Furthermore, α_n is invertible on $H^n(\Omega_{C(b)}^\bullet, D)$, so that we get from the trace formula that $L(\mathbb{A}^n, f, T)^{(-1)^{n+1}}$ is a polynomial of degree M_f .

We note that the range for b is non-empty if and only if

$$\delta > \left(1 + \frac{p}{(p-1)^2}\right)(e-1).$$

In [2], we applied this result in the following case.

Theorem 1.2. *Suppose that $f^{(\delta)} = f_1^{a_1} \dots f_r^{a_r}$ where for each subset $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, r\}$, the system of equations*

$$f_{i_1} = f_{i_2} = \dots = f_{i_k} = 0$$

defines a smooth complete intersection of codimension k in $\mathbb{P}^{n-1}$. Assume that if either $k \geq 2$ or $k = 1$ and $a_{i_1} > 1$ then the system of equations

$$f^{(\delta')} = f_{i_1} = \dots = f_{i_k} = 0$$

defines a smooth complete intersection of codimension $k+1$ in $\mathbb{P}^{n-1}$. Assume also that $(p, \delta\delta'a_1a_2 \dots a_r) = 1$. Then for $e = \delta - \delta' + 1$, $E_e^{r,s} = 0$ for $r + s \neq n$; so the conclusions of Theorem 1.1 hold in this case.

2 Main results

We write $f = f^{(\delta)} + f^{(\delta')} + \dots + f^{(0)}$ with $\delta > \delta' > \dots > 0$ and each $f^{(i)}$ homogeneous of degree i . We assume

$$f^{(\delta)} = f_1^{a_1} \dots f_r^{a_r}$$

with each f_i a linear form in $K[x_1, \dots, x_n]$. Let $Q = \prod_{i=1}^r f_i$ and let A be the arrangement of hyperplanes defined by the vanishing of Q .

Let $\text{Der}_K K[x_1, \dots, x_n]$ be the $K[x]$ -module of derivations of $K[x]$ over K . Define the submodule of $\text{Der}_K K[x]$

$$\text{Der}(A) = \{\theta \in \text{Der}_K K[x] \mid \theta(Q) \in QK[x_1, \dots, x_n]\}$$

Recall that A is said to be a *free arrangement* if $\text{Der}(A)$ is a free $K[x]$ -module. Let (H_1) be the following hypothesis:

(H_1) The hyperplane arrangement A defined by $Q = 0$ is a free arrangement.

It is known, for example, that “generic” hyperplane arrangements and arrangements in 1 and 2 variables (so called 1- and 2-arrangements) are free.

Let $\bar{K}$ be an algebraic closure of K . Let C be the singular set of the affine variety Z_δ defined by $f^{(\delta)} = 0$:

$$C = \{c \in \bar{K}^n \mid f_i(c) = 0 \text{ for some } i \text{ with } a_i > 1 \text{ or } f_i(c) = f_j(c) \text{ for some } i \neq j\}.$$

Of course, the $\{f_i\}_{i=1}^r$ being linear forms, the singular locus C of Z_δ is the union of a finite number of linear subspaces of $\mathbb{A}^n$. For $c \in C$, denote by W_c the minimal linear subspace of Z_δ containing c .

Definition 2.1 (cf. [8, Definition 2.1]). A form $g(x) \in K[x_1, \dots, x_n]$ is *generic* with respect to Z_δ if for every $c \in C = \text{Sing}(Z_\delta)$, $c \neq (0, \dots, 0)$,

$$d(g|_{W_c})(c) \neq 0.$$

Let (H_2) be the following hypothesis:

(H_2) $f^{(\delta')}$ is generic with respect to Z_δ .

Theorem 2.2. Suppose f satisfies (H_1) and (H_2) above. Assume in addition that

(H_3) $\text{char } K > \delta$.

(Note that this implies in particular that $(\text{char } K, a_1 a_2 \dots a_r \delta \delta') = 1$). Then $E_e^{r,s} = 0$ for $e = \delta - \delta' + 1$ and $r + s \neq n$.

Corollary 2.3. If $f \in \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_n]$ and $p := \text{char } \mathbb{F}_q$ satisfy hypotheses (H_1) , (H_2) , and (H_3) above, then the hypotheses of Theorem 1.1 are satisfied. Hence

$$H^i(\Omega_{C(b)}^\bullet, D) = 0 \text{ for } i \neq n$$

and $L(f, \mathbb{A}^n, T)^{(-1)^{n+1}}$ is a polynomial of degree M_f .

We recall [7, Definition 5.22] that an arrangement A defined by the vanishing of $Q = \prod_{i=1}^r f_i \in K[x_1, \dots, x_n]$ is said to be *generic* if the hyperplanes of every subarrangement $\mathcal{B} \subseteq A$ with $|\mathcal{B}| \leq n$ are linearly independent. It is worth noting that if the hypothesis (H₁) in Theorem 2.2 and Corollary 2.3 is replaced by the stronger hypothesis that the arrangement is generic and the hypothesis (H₃) is replaced by the weaker hypothesis

$$(\text{char } K, \delta\delta' a_1 a_2 \dots a_r) = 1,$$

then the resulting modified versions of Theorem 2.2 and Corollary 2.3 are consequences of Theorem 1.2. (Note that in the case of generic hyperplane arrangements, the hypothesis (H₂) is equivalent to the hypothesis in Theorem 1.2 concerning $f^{(\delta')}$).

It remains to prove Theorem 2.2 (hence Corollary 2.3) above. Consider the complex $(\Omega_{K[x]}^\bullet, df^{(\delta)} \wedge)$. It is useful to denote the k -cocycles and k -coboundaries of this complex respectively by Z^k and B^k . Also, let $H^k = H^k(\Omega_{K[x]}^\bullet, df^{(\delta)} \wedge)$. We make $H^\bullet$ itself into a complex using $df^{(\delta')} \wedge$ as the coboundary. Let $\tilde{Z}^k$ and $\tilde{B}^k$ respectively denote the k -cocycles and k -coboundaries of the complex $(H^\bullet, df^{(\delta')} \wedge)$. Let $\tilde{H}^k = H^k(H^\bullet, df^{(\delta')} \wedge)$. To establish Theorem 2.2 it suffices (by the definition of a spectral sequence) to prove $\tilde{H}^k = 0$ for $k < n$. We recall the following result ([8, Theorem 5.8]).

Theorem 2.4. *Let*

$$C^\bullet : 0 \rightarrow C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} \dots$$

be a cochain complex of finite $K[x_1, \dots, x_n]$ -modules with each coboundary map d^i a $K[x]$ -linear map. Assume also that each $H^i(C^\bullet)$ is finite-dimensional over K . If i is a non-negative integer satisfying $\text{pd}(C^k) < n + k - i$ for all k , then $H^i(C^\bullet) = 0$. (Here “pd” denotes projective dimension).

We will apply this result to the complex $(H^\bullet, df^{(\delta')} \wedge)$. The coboundary map is clearly $K[x]$ -linear. First we note the following corollary.

Corollary 2.5. *Assume $\text{pd}(H^k) \leq k$ and $\dim_K \tilde{H}^k < \infty$ for all k . Then $\tilde{H}^k = 0$ for $k < n$.*

To establish Theorem 2.2, it thus suffices to show that the hypotheses of Corollary 2.5 are a consequence of the hypotheses of Theorem 2.2. The remainder of this article is devoted to this demonstration. It is useful to define the space of k -forms with logarithmic poles along A . Let $\Omega_{K(x)}^k$ denote rational k -forms with coefficients in $K(x_1, \dots, x_n)$. Then

$$\Omega_{\log}^k(A) = \{\omega \in \Omega_{K(x)}^k \mid Q\omega \in \Omega_{K[x]}^k \text{ and } Qd\omega \in \Omega_{K[x]}^{k+1}\}.$$

We recall that the $K[x]$ -modules $\Omega_{\log}^1(A)$ and $\text{Der}(A)$ are dual to each other ([7, Theorem 4.75]), so that A is a free arrangement if and only if $\Omega_{\log}^1(A)$ is a free $K[x_1, \dots, x_n]$ -module. Therefore, assuming (H_1) , $\Omega_{\log}^k(A)$ is a free $K[x_1, \dots, x_n]$ -module ([7, Proposition 4.81]). In particular, $\text{pd}(\Omega_{\log}^k(A)) = 0$ for all k if A is a free arrangement. In the following lemma we do not need to assume the f_i are linear nor do we assume the arrangement is free.

Lemma 2.6. *Let $f^{(\delta)} = f_1^{a_1} \dots f_r^{a_r}$ have degree δ . Assume the f_i are homogeneous, irreducible, and pairwise distinct. Assume $(\text{char } K, a_1 a_2 \dots a_r \delta) = 1$. As above, $Q = \prod_{i=1}^r f_i$ and*

$$\Omega_{\log}^k(Q) = \{\omega \in \Omega_{K(x)}^k \mid Q\omega \in \Omega_{K[x]}^k \text{ and } Qd\omega \in \Omega_{K[x]}^{k+1}\}.$$

If $\text{pd}(\Omega_{\log}^k(Q)) \leq k$ for all k , then $\text{pd}(H^k) \leq k$ for all k .

It is useful to recall the terminology of Terao–Yuzvinsky[10]. A hyperplane arrangement A is *tame* if

$$\text{pd}(\Omega_{\log}^k(A)) \leq k$$

for all k . It is natural to say that an arrangement of hypersurfaces defined by the vanishing of $Q = \prod f_i$ (where the f_i are no longer assumed to be linear) is tame if

$$\text{pd}(\Omega_{\log}^k(Q)) \leq k$$

for all k .

Proof. Set

$$\eta = \frac{df^{(\delta)}}{f^{(\delta)}} = \sum_{i=1}^r a_i \frac{df_i}{f_i}.$$

We consider the complex $(\Omega_{\log}^\bullet(Q), \eta \wedge)$ and denote its k -coboundaries and k -cocycles by $\hat{B}^k$ and $\hat{Z}^k$, respectively. Let $\hat{H}^k = H^k(\Omega_{\log}^\bullet(Q), \eta \wedge)$. By the argument of [7, Proposition 4.86], if $(\text{char } K, \delta) = 1$, then this complex is acyclic. We prove first (by induction on k) that

$$\text{pd}(\hat{Z}^k) \leq k - 1.$$

Clearly $\hat{Z}^0 = 0$. Suppose $k \geq 1$. In the short exact sequence

$$0 \rightarrow \hat{Z}^k \rightarrow \Omega_{\log}^k(Q) \xrightarrow{\eta \wedge} \hat{B}^{k+1} \rightarrow 0$$

we know $\text{pd}(\hat{Z}^k) \leq k - 1$ and by hypothesis $\text{pd}(\Omega_{\log}^k(Q)) \leq k$. But then $\text{pd}(\hat{B}^{k+1}) \leq k$ by standard properties of the projective dimension [6, Chapter VII, Proposition 1.8]. But $\hat{H}^{k+1} = 0$ then implies $\text{pd}(\hat{Z}^{k+1}) \leq k$ for $k \geq 0$ as desired.

Consider the injective map (multiplication by Q)

$$\hat{Z}^k \xrightarrow{Q} Z^k.$$

It is also surjective: If $\omega \in Z^k$ then $Q^{-1}\omega \in \hat{Z}^k$, which follows at once provided $Qd(Q^{-1}\omega) \in \Omega_{K[x]}^{k+1}$. But $df^{(\delta)} \wedge \omega = 0$ implies

$$\sum_{i=1}^r a_i \frac{df_i}{f_i} \wedge \omega = 0.$$

Then, for each i ,

$$\left(\prod_{j \neq i} f_j \right) df_i \wedge \omega \in f_i \Omega_{K[x]}^{k+1}$$

since $a_i \neq 0$ in K . But $K[x]$ is a UFD and the f_j 's are irreducible and pairwise distinct so

$$df_i \wedge \omega \in f_i \Omega_{K[x]}^{k+1}$$

for each i . In particular

$$Qd(Q^{-1}\omega) = - \sum_{i=1}^r \frac{df_i}{f_i} \wedge \omega + d\omega,$$

so it belongs to $\Omega_{K[x]}^{k+1}$.

The isomorphism $\hat{Z}^k \cong Z^k$ implies $\text{pd}(Z^k) \leq k - 1$. In the short exact sequence

$$0 \rightarrow Z^k \rightarrow \Omega_{K[x]}^k \rightarrow B^{k+1} \rightarrow 0,$$

we also know $\Omega_{K[x]}^k$ is a free $K[x_1, \dots, x_n]$ -module so $\text{pd}(\Omega_{K[x]}^k) = 0$. It follows that $\text{pd}(B^k) \leq k - 1$ for all k . Finally, in the short exact sequence

$$0 \rightarrow B^k \rightarrow Z^k \rightarrow H^k \rightarrow 0,$$

$\text{pd}(B^k) \leq k - 1$ and $\text{pd}(Z^k) \leq k - 1$, so that $\text{pd}(H^k) \leq k$ for all k as desired. $\square$

Lemma 2.6 shows that the first hypothesis of Corollary 2.5 is satisfied when (H_1) and (H_3) hold. It remains to show that the second hypothesis of Corollary 2.5, namely, the finite-dimensionality of $\tilde{H}^k$ for all k , is a consequence of (H_1) , (H_2) , and (H_3) .

Lemma 2.7. *Let $\theta \in \text{Der}_K(K[x_1, \dots, x_n])$ be such that $\theta(f^{(\delta)}) = 0$. Then $\theta(f^{(\delta')})$ annihilates $\tilde{H}^k$ for all k .*

Proof. A cohomology class in $\tilde{H}^k$ is represented by a differential form $\omega \in \Omega_{K[x]}^k$ satisfying

$$df^{(\delta)} \wedge \omega = 0 \quad (2.1)$$

$$df^{(\delta')} \wedge \omega = df^{(\delta)} \wedge \xi \quad (2.2)$$

for some homogeneous form $\xi \in \Omega_{K[x]}^k$. We will show

$$\theta(f^{(\delta')})\omega = df^{(\delta')} \wedge \zeta + df^{(\delta)} \wedge \gamma$$

for some homogeneous $(k-1)$ -forms ζ and γ with

$$df^{(\delta)} \wedge \zeta = 0.$$

Recall for every k there is a bilinear map of $K[x]$ -modules

$$\text{Der}_K K[x] \times \Omega_{K[x]}^k \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} \Omega_{K[x]}^{k-1}$$

which we denote $\langle \theta, \omega \rangle$. This “inner product” satisfies

$$\langle \theta, \omega_1 \wedge \omega_2 \rangle = \langle \theta, \omega_1 \rangle \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge \langle \theta, \omega_2 \rangle$$

for all $\omega_1 \in \Omega_{K[x]}^k$, $\omega_2 \in \Omega_{K[x]}^\ell$, and

$$\langle \theta, dh \rangle = \theta(h) \quad \text{for all } h \in K[x_1, \dots, x_n].$$

Now $df^{(\delta)} \wedge \omega = 0$, so

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \theta, df^{(\delta)} \wedge \omega \rangle \\ &= \langle \theta, df^{(\delta)} \rangle \wedge \omega - df^{(\delta)} \wedge \langle \theta, \omega \rangle \\ &= \theta(f^{(\delta)})\omega - df^{(\delta)} \wedge \langle \theta, \omega \rangle \\ &= -df^{(\delta)} \wedge \langle \theta, \omega \rangle. \end{aligned} \quad (2.3)$$

By a similar calculation,

$$\langle \theta, df^{(\delta')} \wedge \omega \rangle = \theta(f^{(\delta')})\omega - df^{(\delta')} \wedge \langle \theta, \omega \rangle,$$

so that

$$\theta(f^{(\delta')})\omega = df^{(\delta')} \wedge \langle \theta, \omega \rangle + \langle \theta, df^{(\delta')} \wedge \omega \rangle. \quad (2.4)$$

By (2.2) above,

$$\begin{aligned} \langle \theta, df^{(\delta')} \wedge \omega \rangle &= \langle \theta, df^{(\delta)} \wedge \xi \rangle \\ &= \langle \theta, df^{(\delta)} \rangle \wedge \xi - df^{(\delta)} \wedge \langle \theta, \xi \rangle \\ &= \theta(f^{(\delta)})\xi - df^{(\delta)} \wedge \langle \theta, \xi \rangle \\ &= -df^{(\delta)} \wedge \langle \theta, \xi \rangle. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Hence (2.4) and (2.5) yield

$$\theta(f^{(\delta')})\omega = df^{(\delta')} \wedge \langle \theta, \omega \rangle - df^{(\delta)} \wedge \langle \theta, \xi \rangle.$$

So taking $\zeta = \langle \theta, \omega \rangle$ and $\gamma = -\langle \theta, \xi \rangle$ (and observing that, by (2.3), $df^{(\delta)} \wedge \zeta = 0$) we obtain the desired result. $\square$

We now return to the case of interest in which the f_i are linear forms. We will need the following lemma.

Lemma 2.8. *Assume $\text{char } K > \delta$. For each $c \in C$, $c \neq (0, \dots, 0)$, there exists $\theta_c \in \text{Der}_K K[x]$ such that $\theta_c(f^{(\delta)}) = 0$ and $\theta_c(f^{(\delta')})(c) \neq 0$.*

Proof. Here we assume the f_i are linear forms. Let $c = (c_1, \dots, c_n) \in C$ with some $c_j \neq 0$. We assume that for some s , $1 \leq s \leq r$, s of the forms, say, $f_1, \dots, f_s$, vanish at c and $f_{s+1}(c), \dots, f_r(c)$ are all non-zero. The space W_c of Definition 2.1 is then the solution space of the linear equations

$$f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_s(x) = 0.$$

It is convenient to make a coordinate change so that W_c is defined by the vanishing of coordinates, say,

$$x_{k+1} = \dots = x_n = 0$$

for some k . Then $c_{k+1} = \dots = c_n = 0$ and $f_1, \dots, f_s$ are forms in $x_{k+1}, \dots, x_n$ alone. Since $c_j \neq 0$ for some j we have $k \geq 1$; since $s \geq 1$ and the f_i are non-trivial, we have $k \leq n - 1$. The differential of the restriction of $f^{(\delta')}$ to W_c is

$$\begin{aligned} d(f^{(\delta')}|_{W_c}) &= d(f^{(\delta')}(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)) \\ &= \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial f^{(\delta')}}{\partial x_i} \Big|_{x_{k+1}=\dots=x_n=0} \right) dx_i. \end{aligned}$$

Let $H = f_{s+1}^{a_{s+1}} \dots f_r^{a_r}$. By hypothesis (H₂) we have

$$H(c) \frac{\partial f^{(\delta')}}{\partial x_i}(c) \neq 0 \tag{2.6}$$

for some i , $1 \leq i \leq k$.

Consider the derivations

$$\varphi_{ij} = \frac{\partial f^{(\delta)}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial f^{(\delta')}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \in \text{Der}_K K[x], \tag{2.7}$$

where $1 \leq i \leq k$ and $k+1 \leq j \leq n$. Write $f^{(\delta)} = f_1^{a_1} \cdots f_s^{a_s} H$ and substitute into (2.7). Then

$$\varphi_{ij} = f_1^{a_1} \cdots f_s^{a_s} \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial H}{\partial x_j} + H \sum_{m=1}^s a_m \frac{\partial f_m / \partial x_j}{f_m} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \right), \quad (2.8)$$

where we have used the observation above that the f_ℓ , $1 \leq \ell \leq s$, do not depend on x_i for $1 \leq i \leq k$. Multiplying (2.8) by x_j and summing over $j \in \{k+1, \dots, n\}$, we obtain

$$\begin{aligned} \varphi_i &:= \sum_{j=k+1}^n x_j \varphi_{ij} \\ &= f_1^{a_1} \cdots f_s^{a_s} \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \sum_{j=k+1}^n x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \left(\sum_{j=k+1}^n x_j \frac{\partial H}{\partial x_j} + H \sum_{m=1}^s a_m \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \right), \end{aligned} \quad (2.9)$$

again using that the f_i for $1 \leq i \leq s$ are linear forms in $x_{k+1}, \dots, x_n$ alone. Finally, dividing φ_i by $f_1^{a_1} \cdots f_s^{a_s}$ we obtain derivations

$$\begin{aligned} \theta_i &= f_1^{-a_1} \cdots f_s^{-a_s} \varphi_i \\ &= \frac{\partial H}{\partial x_i} \sum_{j=k+1}^n x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \left(H \sum_{m=1}^s a_m + \sum_{j=k+1}^n x_j \frac{\partial H}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Since $\varphi_{ij}(f^{(\delta)}) = 0$ for all i, j , it follows that $\theta_i(f^{(\delta)}) = 0$ for all i , $1 \leq i \leq k$. Recall $c_j = 0$ for $k+1 \leq j \leq n$ so that

$$\theta_i(f^{(\delta')})(c) = - \left(\sum_{m=1}^s a_m \right) H(c) \frac{\partial(f^{(\delta')})}{\partial x_i}(c)$$

for each i , $1 \leq i \leq k$. Since $\text{char } K > \delta$, $\sum_{m=1}^s a_m \neq 0$ in K . It now follows from (2.6) that for at least one i , $1 \leq i \leq k$, $\theta_i(f^{(\delta')})(c) \neq 0$. This completes the proof of the lemma. $\square$

It remains to prove the finite dimensionality of $\tilde{H}^k$. If $c \notin C$ then the hypersurface Z_δ is nonsingular at c . In fact by the Euler relation and our hypothesis on $\text{char } K$, the set C is precisely the set of points where $df^{(\delta)}$ vanishes. In particular, at any point z at which $df^{(\delta)}$ does not vanish, at least one $\partial f^{(\delta)} / \partial x_i$ is a unit in the local ring $K[x]_z$ at z ; so the Koszul complex on $K[x]_z$ defined by $\{\partial f^{(\delta)} / \partial x_i\}_{i=1, \dots, n}$ is acyclic. But then H^k and a fortiori $\tilde{H}^k$ have their support in the set of points in $\tilde{K}^n$ where $df^{(\delta)}$ vanishes. If $c \in C$, $c \neq (0, \dots, 0)$, then by Lemmas 2.7 and 2.8 there exists a derivation $\theta_c \in \text{Der}_K K[x]$ such that $\theta_c(f^{(\delta')})$ annihilates $\tilde{H}^k$ for all k but $\theta_c(f^{(\delta')})(c) \neq 0$. This implies that c does not lie in the support of $\tilde{H}^k$ so that $\tilde{H}^k$ is supported only at $(0, \dots, 0)$. The $\tilde{H}^k$ are finitely generated $K[x]$ -modules with support only at the origin so the only prime associated ideal is $(x_1, \dots, x_n)$. So

$(x_1, \dots, x_n)$ is the radical of the module by primary decomposition. But then clearly the module $\tilde{H}^k$ is a finite-dimensional K -space.

It is worth noting that in Lemma 2.6 above we did not assume $\deg f_i = 1$ or that the hypersurface arrangement A defined by $\prod_{i=1}^r f_i = 0$ is free. We assumed only that A is a tame arrangement. Furthermore, in Lemma 2.7 no hypothesis at all is made concerning the arrangement A . In Lemma 2.8 again no hypothesis at all is made concerning the arrangement, but we do use in an essential way the hypothesis that the f_i are linear forms for $i = 1, 2, \dots, r$.

By [8, Lemma 5.14], 3-arrangements are tame. Recall that 3-arrangements need not be free (see [7, Example 4.34]).

Theorem 2.9. *Assume that $f(x) \in K[x_1, x_2, x_3]$ and that hypotheses (H_2) and (H_3) hold. Then $E_e^{r,s} = 0$ for $e = \delta - \delta' + 1$, $r + s \neq n$. Furthermore, if, in addition, $K = \mathbb{F}_q$ and $p = \text{char } \mathbb{F}_q$ satisfies (H_3) , then the conclusions of Theorem 1.1 apply here as well. In particular,*

$$H^i(\Omega_{C(b)}^\bullet, D) = 0 \quad \text{for } i \neq 3$$

and $L(f, \mathbb{A}^3, T)$ is a polynomial of degree M_f .

Remark 2.10. It is not unreasonable to expect that in the cases treated in Corollary 2.3 and Theorem 2.9 above, the only non-vanishing ℓ -adic cohomology is middle-dimensional and this cohomology is pure.

References

- [1] A. Adolphson and S. Sperber, Exponential sums on $\mathbb{A}^n$. *Israel J. Math.* **120** (2000), Part A, 3–21.
- [2] A. Adolphson and S. Sperber, Exponential sums on $\mathbb{A}^n$, II. *Trans. Amer. Math. Soc.* **356** (2004), 345–369.
- [3] A. Adolphson and S. Sperber, Exponential sums on $\mathbb{A}^n$, III. *Manuscripta Math.* **102** (2000), 429–446.
- [4] P. Deligne, Applications de la formule des traces aux sommes trigonometriques. In *SGA 4 1/2, Cohomologie Etale*, Lecture Notes in Math. 569, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [5] R. García-López, Exponential sums and singular hypersurfaces. *Manuscripta Math.* **97** (1998), 45–58.
- [6] E. Kunz, *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*. Birkhäuser, Boston, 1985.
- [7] P. Orlik and H. Terao, *Arrangements of Hyperplanes*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992.
- [8] P. Orlik and H. Terao, Arrangements and Milnor fibers. *Math. Ann.* **301** (1995), 211–235.

- [9] S. Sperber, On the p -adic theory of exponential sums. *Amer. J. Math.* **108** (1986), 255–296.
- [10] H. Terao and S. Yuzvinsky, Logarithmic forms on affine arrangements, *Nagoya Math. J.* **139** (1995), 129–149.

Alan Adolphson, Department of Mathematics, Oklahoma State University, Stillwater, Oklahoma 74078, U.S.A.

E-mail: adolphs@math.okstate.edu

Steven Sperber, School of Mathematics, University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota 55455, U.S.A.

E-mail: sperber@math.umn.edu

Sur la conjecture des p -courbures de Grothendieck–Katz et un problème de Dwork

Yves André

Table des matières

Introduction	56
I La propriété de Grothendieck–Katz. Application d’un critère d’algébricité	59
1 L’algèbre de Lie de Galois différentielle	59
2 p -courbures	63
3 L’algèbre de Lie des p -courbures	64
4 La propriété de Grothendieck–Katz	67
5 Un critère d’algébricité	70
6 Preuve de 4.3.4 et 4.3.6 (cas d’un corps de nombres)	79
II Analogue de la conjecture de Grothendieck en équicaractéristique nulle	82
7 Énoncé des résultats	82
8 Réduction au cas projectif	83
9 Espaces de modules de connexions (rappels)	85
10 Une application du théorème de Jordan	86
III Connexions d’origine géométrique	88
11 Isotrivialité, et horizontalité de la filtration de Hodge (rappels)	88
12 Cycles motivés	91
13 Anneaux semi-simples motiviques	94
14 Motifs et algèbre de Lie de Galois différentielle	97
15 Une application du théorème de Mazur–Ogus	102
16 Conjecture de Grothendieck–Katz et problème de Dwork pour les connexions d’origine géométrique	105
A Conjecture de Grothendieck et théorie des champs conformes	109
Références	110

Résumé. This is a study of the interplay between properties of an integrable algebraic connection in characteristic zero, and properties of its reductions modulo p for large primes p (with special emphasis on the case of connections of geometric origin).

1991 Mathematics Subject Classification: 12H25, 14C99, 14G99, 34M15

Introduction

0.1. Cet article traite des liens entre les propriétés d’une équation différentielle linéaire à coefficients dans $\mathbb{Q}(x)$ et celles de ses réductions modulo p .

L’origine de cette problématique est une question classique de Fuchs et Schwarz, reprise par Klein dans son livre sur l’icosaèdre : comment reconnaître si toutes les solutions d’une équation différentielle linéaire donnée à coefficients dans $\mathbb{Q}(x)$ sont des fonctions algébriques sur $\mathbb{Q}(x)$? Question à laquelle Schwarz a apporté une réponse complète dans le cas particulier des équations hypergéométriques de Gauss, via la classification des triangulations régulières de la sphère. Une approche arithmétique de cette classification a ensuite été inaugurée par Landau [L04]¹, qui a mis l’accent sur les dénominateurs des coefficients des solutions formelles.

Dans le cas général, Grothendieck a proposé une réponse “arithmétique” *conjecturale* à cette question : *une équation différentielle linéaire à coefficients dans $\mathbb{Q}(x)$ admet une base de solutions algébriques si et seulement si il en est de même par réduction modulo p pour presque tout p .*

Deux aspects remarquables de cette conjecture méritent d’être soulignés d’emblée :

1) une équation différentielle linéaire à coefficients dans $\mathbb{F}_p(x)$ admet une base de solutions algébriques si et seulement si elle admet une base de solutions rationnelles, et cela se vérifie par un algorithme très simple : nullité de la p -courbure,

2) la conjecture de Grothendieck peut être vue comme une généralisation “différentielle” d’un cas particulier, dû à Kronecker, du théorème de Chebotarev : les racines d’un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}$ sont dans $\mathbb{Q}$ si et seulement si les racines de ses réductions modulo p sont dans $\mathbb{F}_p$ pour presque tout p .

0.2. Cette conjecture a été étudiée en profondeur et popularisée par N. Katz [38]. Plus récemment [39], il a proposé une *conjecture* plus générale prédisant que la composante neutre du groupe de Galois différentiel est déterminée par les p -courbures : plus précisément, *l’algèbre de Lie de sa forme générique, qui est une algèbre de Lie algébrique sur $\mathbb{Q}(x)$ et contient modulo presque tout p les p -courbures, est minimale pour cette propriété.* On retrouve la conjecture de Grothendieck comme cas particulier où presque toutes les p -courbures sont nulles.

0.3. Toujours dans le même esprit, B. Dwork [29] a décrit très précisément le lien entre p -courbures et dénominateurs des solutions formelles, dans le cas des équations

¹référence communiquée par D. Bertrand

“d’origine géométrique” (ou plus généralement, dans le cadre de la théorie des G -fonctions). Dans ce cadre, il a posé le *problème* de décrire la *forme de l’ensemble des nombres premiers p pour lesquels la p -courbure s’annule*. Illustrons cela comme dans [29] par deux exemples :

1) L’équation différentielle hypergéométrique de Gauss à paramètres $a, b, c \in \mathbb{Q}$ (comme chez Schwarz) : les p -courbures sont alors nilpotentes pour tout p ne divisant pas le dénominateur commun N de a, b, c . Pour analyser leur nullité éventuelle, on ne perd pas de généralité (grâce aux relations de contiguïté) à supposer a, b, c dans $[0, 1[$, $c \neq a, c \neq b$. Alors la p -courbure est nulle si et seulement si $p \equiv u^{-1} \pmod{N}$ pour tout unité u de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ telle que les représentants $\langle ua \rangle, \langle ub \rangle, \langle uc \rangle$ de ua, ub, uc dans $[0, 1[$ vérifient $\langle ua \rangle \geq \langle uc \rangle > \langle ub \rangle$ ou bien $\langle ub \rangle \geq \langle uc \rangle > \langle ua \rangle$ ².

Peut-on s’attendre à ce que, pour des équations différentielles “d’origine géométrique” plus générales, l’ensemble des p pour lesquels la p -courbure s’annule ait une densité rationnelle, ou même soit un ensemble “de congruence généralisée” (à un nombre fini d’exceptions près) ? Comme le remarque Dwork, l’exemple suivant montre qu’il convient de prendre des précautions (imposer par exemple une hypothèse de semi-simplicité).

2) L’équation différentielle du logarithme d’une courbe elliptique X définie sur $\mathbb{Q}$: c’est une équation d’ordre deux provenant d’une équation inhomogène d’ordre 1. La p -courbure est nulle si et seulement si X est supersingulière modulo p . D’après [31], si X est sans multiplication complexe, cela arrive pour un ensemble infini de p de densité 0 (qui ne peut être un ensemble de congruence généralisé d’après Chebotarev).

0.4. Le présent article est consacré à l’étude de la conjecture de Grothendieck–Katz et au problème de Dwork, dans le cadre plus général des connexions intégrables sur une variété lisse géométriquement connexe S sur un corps k de *caractéristique nulle*. Il comprend trois chapitres. Les résultats principaux se trouvent aux paragraphes 4, 7, et 16.2.

0.5. Le leitmotiv du premier chapitre (et en partie aussi du troisième) est que dans l’étude de ces questions, il y a intérêt à remplacer le module à connexion intégrable donné $\mathcal{M}$ par un autre, $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})$, qui possède en outre un crochet de Lie horizontal, et dont les fibres sont les algèbres de Lie des groupes de Galois différentiels attachés aux points-base correspondants.

0.5.1 Théorème (cf. 4.3.1). *$\mathcal{M}$ vérifie la conjecture de Katz si et seulement si tout quotient de Lie simple non-abélien de $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})$ (dans la catégorie des modules à connexion) a une infinité de p -courbures non nulles.*

Nous nous ramènerons au cas particulier suivant : si l’algèbre de Lie de Galois différentielle est résoluble (de sorte qu’il n’y a aucun quotient de Lie simple non-abélien), $\mathcal{M}$ vérifie la conjecture de Katz. Ce cas particulier figurait déjà dans [2] et [3]

²Katz [38] a vérifié que cette condition est satisfaite pour presque tout p si et seulement si (a, b, c) est dans la liste de Schwarz, ce qui prouve la conjecture de Grothendieck dans ce cas

(dans le cas où k est un corps de nombres), en généralisant un résultat de Chudnovsky [18]. Nous présenterons une variante raffinée de l'argument de [3] tenant compte de résultats plus récents en théorie des G -fonctions, et basé sur un avatar du critère de rationalité de Borel–Dwork.

0.6. Dans ces questions, la réduction d'un corps de base k quelconque de caractéristique nulle à un corps de nombres n'est pas formelle. Ce qui est en jeu, c'est un analogue de la conjecture de Grothendieck en équicaractéristique nulle, traité au second chapitre :

0.6.1 Théorème (cf. 7.2.2). *Dans une famille de connexions intégrables $(\mathcal{M}_{(t)})_{t \in T}$ paramétrée par une k -variété T , si $\mathcal{M}_{(t)}$ est isotriviale pour tout point fermé t de T , alors il en est de même de la fibre générique $\mathcal{M}_{(\eta)}$.*

Rappelons qu'“isotrivial” veut dire trivialisé par un revêtement fini étale de la base. La difficulté est bien entendu de “borner” les groupes de Galois différentiels finis qui interviennent. Nous prouvons cet énoncé en utilisant les espaces de modules de connexions construits par C. Simpson, par un argument dont la clé est le théorème classique de Jordan sur les sous-groupes finis de GL_n .

Dans un manuscrit récent [34], E. Hrushovsky prouve un énoncé de ce type au moyen de la théorie des modèles.

0.7. Le troisième chapitre traite de la conjecture de Grothendieck–Katz et du problème de Dwork dans le cas d'une connexion d'origine géométrique $\mathcal{M}$, c'est à dire telle qu'il existe $S' \rightarrow S$ étale dominant tel que $\mathcal{M}_{S'}$ soit extension successive de sous-quotients de connexions de Gauss–Manin attachées à des morphismes lisses f de but S' .

Rappelons que dans le cas des connexions de Gauss–Manin (et de certains facteurs directs très particuliers), la conjecture de Grothendieck a été prouvée par Katz [38]. Sa méthode repose sur une formule remarquable reliant la p -courbure à l'application de Kodaira–Spencer.

Pour aborder la conjecture de Katz, nous mettons à profit le théorème 0.5.1 qui nous ramène à prouver la conjecture de Grothendieck pour les quotients simples de l'algèbre de Lie de Galois différentielle. Ceux-ci sont de nature “motivique”, ce qui permet d'utiliser la formule de Katz. Toutefois, en raison d'une lacune actuelle de la théorie motivique, nous n'obtenons de résultat définitif que sous une hypothèse technique de connexité (conjecturalement toujours satisfaite) :

0.7.1 Théorème (cf. 16.2.1 et corollaires). *Soit un morphisme projectif lisse $f : X \rightarrow S$, de base S une k -variété lisse géométriquement connexe. Supposons que le groupe de Galois motivique³ d'au moins une fibre géométrique de f soit connexe. Soit $\mathcal{H}_f$ la connexion de Gauss–Manin attachée à f , et soit $\mathcal{M}$ un module à connexion sous-quotient d'une construction tensorielle sur $\mathcal{H}_f$. Alors :*

- 1) $\mathcal{M}$ vérifie la conjecture de Katz,
- 2) Il existe un corps de nombres totalement réel E galoisien sur $\mathbb{Q}$ (ne dépendant que de f), et un ensemble $C(\mathcal{M})$ de classes de conjugaison de $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$, tels que

³voir 12.2 pour la définition

l'ensemble des p tels que les p -courbures de $\mathcal{M}$ s'annulent soit égal, à un nombre fini d'exceptions près, à l'ensemble des p tels que la classe de conjugaison de Frobenius en p soit dans $C(\mathcal{M})$. En particulier, cet ensemble a une densité rationnelle.

Le point 2) répond affirmativement, dans ce cas particulier, à la question de Dwork. Le mystérieux corps E apparaît comme clôture galoisienne d'un corps d'endomorphismes de motifs. Dans l'exemple hypergéométrique 0.3 1), c'est $\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{N})$.

Nous discutons brièvement en appendice d'une application intéressante de la conjecture de Grothendieck à la classification des théories des champs conformes : le problème de l'"algébricité" des blocs conformes dans les théories rationnelles.

0.8. Cet article est une version élaguée, corrigée, et entièrement réécrite du manuscrit [7]. Nous remercions D. Bertrand, J.-B. Bost, A. Chambert-Loir et L. Di Vizio de nous avoir encouragé, à maintes reprises, à entreprendre cette révision. Nous remercions aussi le referee de sa lecture vigilante.

Si l'article est directement inspiré par les travaux de N. Katz [38] [39] et (dans une moindre mesure) de D. et G. Chudnovsky [18], les travaux de B. Dwork touchent aussi par bien des points aux thèmes abordés ici : critère de Borel–Dwork, p -courbures et taille des G -connexions [29], lieu de nilpotence des p -courbures [28], structures de Frobenius, et bien sûr le problème auquel le titre fait allusion. Quant à l'appendice, il est né d'une conversation avec C. Itzykson, qui nous a fait découvrir la classification A.D.E.

I La propriété de Grothendieck–Katz. Application d'un critère d'algébricité

1 L'algèbre de Lie de Galois différentielle

1.1. Soit S une variété algébrique lisse géométriquement connexe sur un corps k . Soit $\mathcal{M} = (M, \nabla)$ la donnée d'un $\mathcal{O}_S$ -module M localement libre de rang $r < \infty$ et d'une connexion intégrable

$$\nabla : M \rightarrow \Omega_S^1 \otimes_{\mathcal{O}_S} M.$$

Sur un ouvert $U \subset S$ où M est libre, fixons des coordonnées locales $x_1, \dots, x_d$, et une base $e_1, \dots, e_r$ de $M(U)$. Notons $A_{(h)}$ la "matrice" de $\nabla \frac{\partial}{\partial x_h}$ dans cette base :

$$\nabla \frac{\partial}{\partial x_h}(e_j) = \sum_i A_{(h)ij} e_i,$$

de sorte que $\nabla(e_i) = \sum_{h,i} dx_h \otimes A_{(h)ij} e_i$.

1.2. On peut aussi exprimer la situation en termes de *solutions* de $\mathcal{M}$ à valeurs dans une extension différentielle R de $\mathcal{O}(U)$ ad libitum (par exemple un anneau de série

formelles, complété de l'anneau local en un point de U ; par “solution”, nous entendons un homomorphisme $\mathcal{O}(U)$ -linéaire commutant à la connexion.

Voici le dictionnaire. On sait que dans la base duale $e_1^\vee, \dots, e_r^\vee$, la connexion duale $\nabla^\vee$ contractée par $\frac{\partial}{\partial x_h}$ est représentée par $-{}^t A_{(h)}$. Écrivons alors notre solution y sous la forme $\sum y_j e_j^\vee$ où $y_j \in R$. La condition d'horizontalité

$$\nabla^\vee(y) = 0$$

se traduit alors par le système linéaire intégrable aux dérivées partielles

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_h} = \sum_i y_i A_{(h)ij},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial x_h} \vec{y} = \vec{y} A_{(h)},$$

en notant $\vec{y}$ le vecteur-ligne de composantes y_i .

1.2.1 Remarque. Cette façon, chère à B. Dwork, d'écrire les systèmes différentiels matriciels “à droite” semble plus naturelle que l'écriture “à gauche” (elle fait l'économie d'une transposition - ou d'un signe, si l'on compare à la connexion duale). Elle présente d'autre part l'avantage, dans la situation complexe, d'être compatible avec l'écriture à gauche usuelle de la monodromie.

1.3. Supposons car $k = 0$. Les modules cohérents à connexion intégrable sur S forment une catégorie tannakienne MIC_S sur k . À partir d'un module à connexion intégrable $\mathcal{M}$, on peut former ses puissances tensorielles mixtes $T_n^m \mathcal{M} = \mathcal{M}^{\otimes m} \otimes (\mathcal{M}^\vee)^{\otimes n}$. Les sous-quotients des sommes finies de $T_n^m \mathcal{M}$ (pour divers m, n) forment une sous-catégorie tannakienne de MIC_S , notée $\langle \mathcal{M} \rangle^\otimes$.

Tout point s de S définit un foncteur fibre

$$\omega_{\mathcal{M},s} : \langle \mathcal{M} \rangle^\otimes \rightarrow \text{Vec}_{\kappa(s)}$$

à valeurs dans les vectoriels sur le corps de définition de s . On pose

$$\text{Gal}(\mathcal{M}, s) := \text{Aut}^\otimes \omega_{\mathcal{M},s}.$$

C'est un $\kappa(s)$ -schéma en groupe affine, appelé groupe de Galois différentiel de $\mathcal{M}$, basé en s ([40], [8]). Si s est un point k -rationnel de S , i.e. si $\kappa(s) = k$, ce groupe peut se décrire à la Picard–Vessiot–Kolchin, et $\omega_{\mathcal{M},s}$ s'enrichit en une équivalence de catégories

$$\langle \mathcal{M} \rangle^\otimes \cong \text{Rep}_k \text{Gal}(\mathcal{M}, s).$$

Si $s = \eta$ est le point générique, $\text{Gal}(\mathcal{M}, s)$ coïncide avec le groupe de Galois “générique” ou “intrinsèque” considéré dans [39] (voir aussi [14]) : il se décrit comme stabilisateur dans $\text{GL}(M_\eta)$ des fibres génériques des sous-objets des sommes finies de $T_n^m \mathcal{M}$ (cf. [8, 3.2.2]).

1.3.1 Remarque. D’après [40, 1.3.2], la formation de $\text{Gal}(\mathcal{M}, s)$ commute à l’extension des scalaires k'/k .

1.4. Par ailleurs, on peut considérer le foncteur oubli de la connexion :

$$\omega_{\mathcal{M}} : \langle \mathcal{M} \rangle^{\otimes} \rightarrow \text{FibVec}_S$$

à valeurs dans les fibrés vectoriels sur S . On pose

$$\mathcal{G}(\mathcal{M}) := \text{Aut}^{\otimes} \omega_{\mathcal{M}}.$$

C’est un S -schéma en groupe affine et plat, *loc. cit.*. Sa fibre en s n’est autre que $\text{Gal}(\mathcal{M}, s)$. Compte tenu du fait que pour tout objet $\mathcal{N} = (N, \nabla) \in \langle \mathcal{M} \rangle^{\otimes}$ et tout sous-objet $\mathcal{N}'$ de $\mathcal{N}$, le fibré vectoriel sous-jacent N' est localement facteur direct de N , on montre aisément que $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ est le sous-schéma en groupe fermé de $\text{GL}(M)$ qui stabilise les (fibrés vectoriels sous-jacents aux) sous-objets des sommes finies de $T_n^m \mathcal{M}$ (voir [22, II.1.3.6] pour la définition d’un tel stabilisateur ; voir aussi [8, 2.1]). En prenant des puissances extérieures à la Chevalley, on montre en fait que $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ est le stabilisateur dans $\text{GL}(M)$ d’un sous-objet $\mathcal{D}$ de rang un dans une somme finie convenable $\oplus T_n^m \mathcal{M}$.

Nous n’aurons à considérer que son algèbre de Lie

$$\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M}) := \text{Lie } \mathcal{G}(\mathcal{M}),$$

qui est un objet de $\langle \mathcal{M} \rangle^{\otimes}$, que nous appellerons *algèbre de Lie⁴ de Galois différentielle de $\mathcal{M}$* . Pour un point quelconque $s \in S$, $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})$ est l’unique sous-objet de $T_1^1 \mathcal{M} = \text{End } \mathcal{M}$ (“End interne”) de fibre en s égale à $\text{LieGal}(\mathcal{M}, s) \subset \text{End } M_s$. Elle peut aussi se décrire comme la sous-algèbre de Lie maximale de $\mathfrak{gl}(M)$ qui stabilise les (fibrés vectoriels sous-jacents aux) sous-objets des sommes finies de $T_n^m \mathcal{M}$ (*resp.* qui stabilise D).

Bien entendu, il n’est pas vrai, réciproquement, que tout sous-fibré d’un $\oplus T_n^m \mathcal{M}$ stabilisé par $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})$ soit horizontal, *i.e.* sous-jacent à un sous-objet de $\oplus T_n^m \mathcal{M}$ (heuristiquement : l’horizontalité est une propriété k -linéaire, et non $\mathcal{O}_S$ -linéaire).

1.4.1 Lemme. 1) Pour tout objet $\mathcal{M}'$ de $\langle \mathcal{M} \rangle^{\otimes}$, on a un épimorphisme canonique $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M}) \twoheadrightarrow \mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M}')$.

2) Si $\text{LieGal}(\mathcal{M}, \eta)$ est semi-simple, l’épimorphisme $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M}) \twoheadrightarrow \mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M}))$ est un isomorphisme.

Démonstration. Puisqu’on a affaire à des objets de MIC_S , il suffit de le vérifier sur une fibre. Par la théorie tannakienne, on a un épimorphisme canonique $\text{Gal}(\mathcal{M}, s) \twoheadrightarrow \text{Gal}(\mathcal{M}', s)$, d’où 1). Pour 2), on remarque que $\text{Gal}(\mathcal{M}, s) \twoheadrightarrow \text{Gal}(\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M}), s) \subset \text{GL}(\text{LieGal}(\mathcal{M}, s))$ n’est autre que la représentation adjointe, qui induit un isomorphisme $\text{LieGal}(\mathcal{M}, s) \twoheadrightarrow \text{LieGal}(\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M}), s)$ puisque $\text{LieGal}(\mathcal{M}, s)$ est semi-simple. $\square$

⁴on trouvera plus bas (14.3) une discussion des algèbres de Lie dans une catégorie tannakienne

1.4.2 Lemme. *La formation de $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})$ est compatible aux changements de base dominants.*

Démonstration. Soient X une autre k -variété lisse géométriquement connexe, et $f : X \rightarrow S$ un morphisme dominant. Il suffit de prouver la propriété en la fibre générique, donc de montrer que $f^*(\mathrm{LieGal}(\mathcal{M}, \eta_S)) = \mathrm{LieGal}(f^*\mathcal{M}, \eta_X)$. On a l'inclusion $\mathrm{Gal}(f^*\mathcal{M}, \eta_X) \subset f^*\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \eta_S)$ (ce dernier étant le stabilisateur des images inverses sur X des sous-objets des $\oplus T_n^m(\mathcal{M})$), et il suffit de montrer qu'on a l'égalité des composantes neutres.

Comme l'énoncé ne dépend de f que via l'extension de corps $k(X)/k(S)$, on se ramène à traiter d'une part le cas d'un morphisme étale (qui est clair), et d'autre part le cas d'une projection $X = S \times S' \rightarrow S$. Par la remarque 1.3.1, on peut d'ailleurs supposer que S' possède un point k -rationnel, d'où une rétraction i de f . Comme les suites exactes courtes dans la catégorie tannakienne $\langle f^*\mathcal{M} \rangle^\otimes$ sont localement scindées eu égard aux fibrés sous-jacents, l'endofoncteur idempotent $(i \circ f)^*$ de $\langle f^*\mathcal{M} \rangle^\otimes$ est exact, donc finalement égal à l'identité puisque $(i \circ f)^*\mathcal{M} = \mathcal{M}$. Il s'ensuit que $f^* : \langle \mathcal{M} \rangle^\otimes \rightarrow \langle f^*\mathcal{M} \rangle^\otimes$ est une équivalence de catégories, ce qui implique que $\mathrm{Gal}(f^*\mathcal{M}, \eta_X) = f^*\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \eta_S)$ dans ce cas. $\square$

1.4.3 Lemme. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- a) $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M}) = 0$,
- b) pour tout $s \in S$, $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, s)$ est fini,
- c) localement pour la topologie étale, $\mathcal{M}$ est engendré par ses sections horizontales,
- d) $\mathcal{M}$ est isotrivial, i.e. il existe un revêtement étale fini $S' \rightarrow S$ au-dessus duquel $\mathcal{M}$ devient trivial (en tant que module à connexion).

Démonstration. Comme la fibre de $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})$ en s s'identifie à $\mathrm{LieGal}(\mathcal{M}, s)$, l'équivalence de a) et b) est claire. Celle de c) et d) est laissée au lecteur, de même que l'implication c) $\implies$ b) (qui est d'ailleurs un cas particulier du lemme précédent). L'implication b) $\implies$ c) découle de la théorie de Galois différentielle⁵ : en effet, on peut remplacer k par une extension finie et S par un voisinage affine $\mathrm{Spec} A$ d'un point k -rationnel s de S ; alors le tore $\mathrm{Isom}^\otimes(\omega_{\mathcal{M}}, \omega_{\mathcal{M},s} \otimes_k S)$ sous $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, s) \otimes_k S$ est un S -schéma fini étale (tout comme $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, s) \otimes_k S$), et l'image inverse de $\mathcal{M}$ sur ce tore est triviale, cf. [8, 3.4.2].

1.5. Nous aurons besoin de la notion de “radical de $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})$ ”. C'est l'unique sous-objet $\mathrm{Rad}\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})$ de $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})$ dont la fibre en un point s (ou en tout point s) est le radical de $\mathrm{LieGal}(\mathcal{M}, s)$ (noter que ce dernier est un idéal $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, s)$ -invariant). C'est donc automatiquement un idéal de Lie de $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})$.

⁵dans [39] on trouve un argument beaucoup plus indirect utilisant à la fois le passage à la caractéristique p et l'équivalence de Riemann–Hilbert

2 p -courbures

2.1. Supposons maintenant que car $k = p > 0$.

Alors les constantes différentielles ne se réduisent plus au corps de base k , mais forment le sous-faisceau $k.(\mathcal{O}_S)^p$ de $\mathcal{O}_S$.

Un autre fait nouveau est que $\text{Der } \mathcal{O}_S = (\Omega_S^1)^\vee$ est muni d’une p -structure, ce qui permet de définir l’opérateur de p -courbure $R_{\mathcal{M},p}$: pour toute section ∂ de $(\Omega_S^1)^\vee$ au-dessus d’un ouvert U ,

$$R_{\mathcal{M},p}(\partial) = (\nabla_\partial)^p - \nabla_{\partial^p}.$$

$R_{\mathcal{M},p}(\partial)$ est un endomorphisme $\mathcal{O}(U)$ -linéaire de $M(U)$, additif et p -linéaire en la dérivation ∂ [37] ; autrement dit, $R_p = R_{\mathcal{M},p}$ définit une section globale de $F_S^* \Omega_S^1 \otimes \text{End} M$, où F_S désigne l’endomorphisme de Frobenius de S .

2.2. Écrivons la connexion sous forme matricielle comme en 1.2, en remplaçant l’indice (h) par le d -uplet dont toutes les composantes sont nulles sauf la h -ième qui vaut 1.

Par dérivations “formelles” successives du système

$$\frac{\partial}{\partial x_h} \vec{y} = \vec{y} A_{(0,\dots,0,1,0,\dots,0)},$$

on obtient des équations

$$\frac{\partial^m}{\partial \underline{x}^m} \vec{y} = \vec{y} A^{[m]}$$

pour tout multi-indice $\underline{m}$ à d composantes (avec les conventions usuelles sur les multi-indices). La p -courbure $R_{\mathcal{M},p}(\frac{\partial}{\partial x_h})$ est alors représentée par la matrice $A^{[(0,\dots,0,p,0,\dots,0)]}$ (p en h -ème position).

2.3. Une autre particularité de la caractéristique p est qu’on dispose d’un moyen algorithmique simple de détecter si une connexion intégrable est Zariski-localement triviale : un théorème de P. Cartier affirme en effet que M est engendré sur $\mathcal{O}_S$ par $M^\nabla := \text{Ker } \nabla$ si et seulement si l’opérateur de p -courbure $R_{\mathcal{M},p}$ est nul (cf. [37]).

En particulier, cette propriété est locale pour la topologie étale sur S , ce qui contraste fortement avec le cas de caractéristique nulle.

2.4. La théorie de Galois différentielle en caractéristique p est décrite, sous deux points de vue différents (générique et local, respectivement), dans [50] et dans [8, 3.2.2.5]. Dans [50], on montre que la catégorie $\langle \mathcal{M}_\eta \rangle^\otimes$ est tannakienne neutre sur $k.(k(S))^p$; le groupe tannakien est infinitésimal abélien de hauteur 1, et de p -algèbre de Lie engendrée par les p -courbures $R_{\mathcal{M},p}(\partial)$.

Dans [8], on choisit un point $s \in S(k)$ (supposé exister), et on remplace S par le schéma local non réduit $S_{s,p} = \text{Spec } \mathcal{O}_{S,s}/(\mathfrak{m}_{S,s})^p$, où $\mathfrak{m}_{S,s}$ est l’idéal maximal de $\mathcal{O}_{S,s}$, de sorte que l’anneau des constantes différentielles redevienne k . On a un

foncteur fibre

$$\omega_{\mathcal{M},s,p} : \langle \mathcal{M}_{S_{s,p}} \rangle^{\otimes} \rightarrow \text{Vec}_k$$

donné par $N \mapsto (N \otimes \mathcal{O}_{S_{s,p}}^{pd})^{\nabla}$ où $\mathcal{O}_{S_{s,p}}^{pd}$ est le complété à puissances divisées de $\mathcal{O}_{S_{s,p}}$.

Le k -groupe affine $\text{Aut}^{\otimes} \omega_{\mathcal{M},s,p}$ est infinitésimal abélien de hauteur 1, et de p -algèbre de Lie engendrée sur k par les p -courbures $R_{\mathcal{M},p}(\partial)$.

Par ailleurs, on peut considérer comme plus haut le foncteur oubli de la connexion :

$$\omega_{\mathcal{M}_{S_{s,p}}} : \langle \mathcal{M}_{S_{s,p}} \rangle^{\otimes} \rightarrow \text{FibVec}_{S_{s,p}}.$$

Le $S_{s,p}$ -schéma en groupe $\text{Aut}^{\otimes} \omega_{\mathcal{M}}$ est en fait constant :

$$\text{Aut}^{\otimes} \omega_{\mathcal{M}} \cong (\text{Aut}^{\otimes} \omega_{\mathcal{M},s,p}) \otimes_k S_{s,p},$$

cf. [8, 3.2.2.6]. Sa p -algèbre de Lie, qui est un objet de $\langle \mathcal{M}_{S_{s,p}} \rangle^{\otimes}$, est donc engendrée (en tant que p -algèbre de Lie) par les $R_{\mathcal{M},p}(\partial)$.

3 L'algèbre de Lie des p -courbures

3.1. Revenons au cas d'un corps de base k de caractéristique nulle. Comme dans [37] et [39], "épaississons" la situation en choisissant un sous-anneau $\mathfrak{o}$ de k de type fini sur $\mathbb{Z}$, un $\mathfrak{o}$ -schéma connexe $\mathfrak{S}$ à fibres géométriquement connexes, et un $\mathcal{O}_{\mathfrak{S}}$ -module localement libre à connexion intégrable $\mathfrak{M}$, tels que S et $\mathcal{M}$ se déduisent de $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{M}$ par extension des scalaires $\mathfrak{o} \hookrightarrow k$.

On suppose aussi que l'objet $\mathcal{D}$ de $\langle \mathcal{M} \rangle^{\otimes}$ considéré en 1.3.1 provient d'un sous-objet $\mathfrak{D}$ de $\bigoplus T_n^m \mathfrak{M}$, et que le fibré sous-jacent à $\mathfrak{D}$ est localement facteur direct.

Dans ces conditions, $\mathcal{L}\mathfrak{g}(\mathcal{M})$ provient d'une sous-algèbre de Lie $\mathcal{L}\mathfrak{G}(\mathfrak{M})$ de $\text{gl}(\mathfrak{M})$ (le stabilisateur de $\mathfrak{D}$), dont la fibre en tout point fermé v de $\text{Spec } \mathfrak{o}$ contient les p -courbures $R_{\mathfrak{M} \otimes_{\kappa(v),p}}(\partial)$ de la fibre de $\mathfrak{M}$ en v (ici p désigne la caractéristique résiduelle de v), cf. [39, 9.3]. On notera que tous les nombres premiers sauf un nombre fini interviennent ici.

Comme dans *loc. cit.*, nous dirons abusivement que "LieGal($\mathcal{M}, \eta$) contient les p -courbures modulo presque tout p ".

3.1.1 Remarque. On appellera parfois abusivement v -courbures de $\mathcal{M}$ les $R_{\mathfrak{M} \otimes_{\kappa(v),p}}(\partial)$ (surtout lorsque k est un corps de nombres). Elles dépendent bien sûr de $\mathfrak{o}$ et des modèles, mais cette dépendance est "innocente" : étant donné deux ensembles de données $(\mathfrak{o}_1, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{D}_1)$ et $(\mathfrak{o}_2, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{D}_2)$, il en existe un troisième $(\mathfrak{o}_3, \mathfrak{S}_3, \mathfrak{M}_3, \mathfrak{D}_3)$ tel que $\mathfrak{o}_3$ contienne $\mathfrak{o}_1$ et $\mathfrak{o}_2$, et que $(\mathfrak{S}_3, \mathfrak{M}_3, \mathfrak{D}_3)$ s'obtienne à partir de $(\mathfrak{S}_i, \mathfrak{M}_i, \mathfrak{D}_i)$ par extension des scalaires $\mathfrak{o}_i \hookrightarrow \mathfrak{o}_3$, $i = 1, 2$.

On a par ailleurs $\mathfrak{o}_i \otimes \mathbb{F}_p \hookrightarrow \mathfrak{o}_3 \otimes \mathbb{F}_p$, $i = 1, 2$, pour presque tout p , cf. [39, 6.1].

3.2. Soit $\mathbf{P}$ un ensemble de nombres premiers, et soit $\mathcal{L} \subset \mathfrak{gl}(M_\eta)$ une sous-algèbre de Lie. Nous dirons que $\mathcal{L}$ *contient les p -courbures modulo presque tout $p \in \mathbf{P}$* si pour un choix (ou pour tout choix - cela revient au même par la remarque ci-dessus) de données $(\mathfrak{o}, \mathfrak{S}, \mathfrak{M}, \mathfrak{D})$ comme ci-dessus et d’une $\mathcal{O}_{\mathfrak{S}}$ -sous-algèbre de Lie $\mathcal{L} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{M})$ étendant L , et pour tout $p \in \mathbf{P}$ sauf un nombre fini, la fibre de $\mathcal{L}$ en tout point fermé v de $\text{Spec } \mathfrak{o}$ de caractéristique résiduelle p contient les p -courbures $R_{\mathfrak{M} \otimes \kappa(v), p}(\partial)$ de la fibre de $\mathfrak{M}$ en v .

De même, si $F \subset N = \bigoplus T_n^m M$ est un sous-fibré localement facteur direct d’une somme finie de puissances tensorielles mixtes sur M , nous dirons que F *est stable sous les p -courbures modulo presque tout $p \in \mathbf{P}$* si pour un choix (ou pour tout choix) de données $(\mathfrak{o}, \mathfrak{S}, \mathfrak{M})$ comme ci-dessus et d’un sous-fibré $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{N} = \bigoplus T_n^m \mathfrak{M}$ localement facteur direct étendant F , et pour tout $p \in \mathbf{P}$ sauf un nombre fini, la fibre de $\mathfrak{F}$ en tout point fermé v de $\text{Spec } \mathfrak{o}$ de caractéristique résiduelle p est stable sous les p -courbures $R_{\mathfrak{N} \otimes \kappa(v), p}(\partial)$ de la fibre de $\mathfrak{N}$ en v .

Nous appellerons *algèbre de Lie des $\mathbf{P}$ -courbures de $\mathcal{M}$* et noterons $\mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}, \eta)$ la plus petite sous-algèbre de Lie algébrique de $\mathfrak{gl}(M_\eta)$ “contenant les p -courbures modulo presque tout $p \in \mathbf{P}$ ”.

3.2.1 Proposition. $\mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}, \eta)$ est fibre générique d’une unique sous-module horizontal de $\mathcal{L}\mathfrak{g}(\mathcal{M})$ (noté $\mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M})$).

3.2.2 Corollaire. $\mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M})$ est un idéal de Lie de $\mathcal{L}\mathfrak{g}(\mathcal{M})$.

Démonstration. Il suffit de faire voir que $\mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}, \eta)$ est un sous- $k(S)$ -espace horizontal de $T_1^1 M_\eta$. Par le lemme de Chevalley, $\mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}, \eta)$ peut se décrire comme la sous-algèbre de Lie de $\text{End } M_\eta$ qui stabilise une certaine droite D'_η dans un espace de tenseurs mixtes sur M_η . Soit N_η le plus petit sous- $k(S)$ -espace horizontal de M_η contenant D'_η . Ainsi N_η est la fibre générique d’un objet $\mathcal{N}$ de $\langle \mathcal{M} \rangle^\otimes$, et quitte à remplacer S par un ouvert dense, D'_η est la fibre générique d’un fibré en droite D' localement facteur direct de N . Alors D' est stable sous les p -courbures modulo presque tout $p \in \mathbf{P}$. Bien plus, l’argument de [K82]10.2, basé sur l’horizontalité des p -courbures, montre que les p -courbures agissent par multiplication par une fonction à dérivée nulle sur N modulo presque tout $p \in \mathbf{P}$. Ceci entraîne que le sous-espace $\mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}, \eta)$ de $\text{End } M_\eta$ est formé des éléments qui agissent par homothéties sur N_η (en d’autres termes, on a $\mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}, \eta) = \text{Ker}(\text{LieGal}(\mathcal{M}, \eta) \rightarrow \text{End}(\text{End}(N_\eta)))$). Il est alors clair que ce sous-espace est stable sous les $\nabla(\partial)$. $\square$

3.2.3 Remarque. L’idéal $\mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M})$ croît avec $\mathbf{P}$, et si $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}'$ sont deux ensembles de nombres premiers, on a $(\mathbf{P} \cup \mathbf{P}')\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}) = \mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}) + \mathbf{P}'\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M})$.

3.2.4 Lemme. 1) Pour tout objet $\mathcal{M}'$ de $\langle \mathcal{M} \rangle^\otimes$, l’épimorphisme canonique $\mathcal{L}\mathfrak{g}(\mathcal{M}) \twoheadrightarrow \mathcal{L}\mathfrak{g}(\mathcal{M}')$ induit un épimorphisme $\mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}) \twoheadrightarrow \mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}')$.

2) Si $\text{LieGal}(\mathcal{M}, \eta)$ est semi-simple, alors l'homomorphisme

$$\mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M}))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Par 3.2.1, il suffit de le vérifier sur les fibres génériques.

1) Il est immédiat que $\mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}', \eta)$ est contenue dans l'image de $\mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}, \eta)$. Réciproquement, il est clair que l'image inverse de $\mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}', \eta)$ dans $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M}, \eta)$ contient les p -courbures modulo presque tout $p \in \mathbf{P}$.

2) découle de 1) (surjectivité) et de 1.4.1 (injectivité). $\square$

3.2.5 Remarque. En général $\mathfrak{o} \otimes \mathbb{F}_p$ n'est pas connexe, et on peut vouloir préciser la composante connexe des points v dont les v -courbures nous intéressent. Par exemple, si la fermeture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathfrak{o}_{\mathbb{Q}}$ contient un corps de nombres E , on peut introduire des variantes de $\mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M})$ en considérant les v -courbures pour tout v au-dessus d'un ensemble fixé $\mathbf{P}_E$ de places finies de E (à un ensemble fini près). Ces variantes $\mathbf{P}_E\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M})$ vérifient les mêmes propriétés 3.2.1 à 3.2.4. Elles nous seront utiles en 16.2.1.

3.2.6 Lemme. *La formation de $\mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M})$ est compatible aux changements de base dominants.*

Démonstration. On raisonne comme dans la preuve du lemme 1.4.2, dont on reprend les notations. Il suffit de montrer que $f^*(\mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}, \eta_S)) = \mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(f^*\mathcal{M}, \eta_X)$. On a l'inclusion $\supset$, en raison de la formule de changement de base pour les p -courbures (O. Gabber, cf. [39, app.]). L'inclusion opposée se démontre exactement comme dans *loc. cit.* $\square$

3.2.7 Proposition ([37]). *Supposons que $\mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}) = 0$.*

1) *Si $\mathbf{P}$ est infini, alors $\mathcal{M}$ est régulier (i.e. à singularités régulières "à l'infini").*

2) *Si en outre $\mathbf{P}$ est de densité 1, alors il existe un revêtement fini étale $S' \rightarrow S$ tel $\mathcal{M}_{S'}$ s'étende en un module à connexion sur toute compactification lisse $\tilde{S}'$ telle que $\tilde{S}' \setminus \tilde{S}$ soit un diviseur à croisements normaux.*

3.3. Si $\mathcal{M}$ est isotrivial (i.e. s'il existe un revêtement étale fini $S' \rightarrow S$ au-dessus duquel $\mathcal{M}$ devient trivial), on a $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M}) = 0$, d'où $\mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}) = 0$ pour tout $\mathbf{P}$.

La conjecture de Grothendieck prédit la réciproque :

3.3.1 Conjecture. *Soit $\mathbf{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Si $\mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}) = 0$, alors $\mathcal{M}$ est isotrivial.*

3.3.2 Remarque. Par 3.2.7.2, on peut supposer dans cette conjecture que S est projectif (en passant à une compactification d'un revêtement fini étale convenable).

Compte tenu du théorème de Cartier, cf. 2.3, il est facile de voir que cette conjecture s'exprime aussi comme suit, en prenant un modèle $(\mathfrak{o}, \mathfrak{S}, \mathfrak{M})$ de $(k, S, \mathcal{M})$ comme en 3.1 (l'énoncé ne dépend pas du choix du modèle) :

3.3.3 Conjecture (équivalente). *Si pour tout point fermé v d'un ouvert dense de $\mathrm{Spec} \mathfrak{o}$, la fibre de $\mathfrak{M}$ en v est (iso)triviale⁶, alors $\mathcal{M}$ est isotrivial.*

Cette conjecture est encore largement ouverte (en revanche, un analogue pour les équations aux q -différences est démontré dans [25]).

4 La propriété de Grothendieck–Katz

Dans tout ce paragraphe, $\mathbf{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.

4.1. Dans [39], Katz conjecture que pour tout module à connexion intégrable sur S , la plus petite sous-algèbre de Lie algébrique de $\mathrm{LieGal}(\mathcal{M}, \eta)$ qui contient les p -courbures pour presque tout p est $\mathrm{LieGal}(\mathcal{M}, \eta)$ elle-même. Dans le langage précédent, cela se traduit alors par :

4.1.1 Conjecture. *Pour tout $\mathcal{M} \in \mathrm{MIC}_S$, $\mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})$.*

Cette conjecture entraîne, via 1.4.3, la précédente (cas où $\mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}) = 0$). Réciproquement :

4.1.2 Proposition ([39]). $\mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M}) \iff$ tout objet de $\langle \mathcal{M} \rangle^{\otimes}$ vérifie 3.3.1.

4.2. Dans la suite, nous dirons que $\mathcal{M}$ a la propriété de Grothendieck–Katz si $\mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})$.

4.2.1 Lemme. *La propriété de Grothendieck–Katz est stable par changement de base dominant.*

Cela découle de 1.4.2 et 3.2.6. Nous ignorons en revanche si la propriété de Grothendieck–Katz est stable par restriction à un fermé (lisse géométriquement connexe).

L'étude de la stabilité de la propriété de Grothendieck–Katz par images directes supérieures (cohomologie de de Rham à coefficients) est délicate, et ne sera abordée au chapitre III que dans le cas de la connexion triviale (cohomologie de de Rham à coefficients constants).

⁶rappelons que “trivial” équivaut à “isotrivial” en caractéristique $p > 0$

4.3. L'énoncé suivante précise 4.1.2 :

4.3.1 Théorème. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1) $\mathcal{M}$ a la propriété de Grothendieck–Katz,
- 2) Pour toute algèbre de Lie simple non-abélienne $\mathcal{L}$ dans $\langle \mathcal{M} \rangle^{\otimes}$ qui est quotient de $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})$ par un idéal de Lie, on a $\mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{L}) \neq 0$.

4.3.2 Corollaire. $\mathcal{M}$ a la propriété de Grothendieck–Katz si et seulement si il en est de même de son semi-simplifié $\mathcal{M}^{ss}$.

En effet, la théorie de Galois différentielle montre que $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})$ est extension de $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M}^{ss})$ par un idéal nilpotent, donc $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})$ et $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M}^{ss})$ ont mêmes quotients simples (non abéliens).

4.3.3 Corollaire. *La sous-catégorie pleine de MIC_S formée des objets ayant la propriété de Grothendieck–Katz est tannakienne et stable par extension.*

Le fait qu'elle soit tannakienne est clair, compte tenu de 3.2.4. Qu'elle soit stable par extension découle du corollaire précédent.

Un cas très particulier, qui résout une question posée dans [45, 2.5], est le suivant :

4.3.4 Corollaire. *Supposons que $\mathcal{N} \in MIC_S$ s'inscrive dans une suite exacte*

$$0 \rightarrow \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}'' \rightarrow 0$$

où $\mathcal{N}'$ et $\mathcal{N}''$ sont isotriviaux, et que $\mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{N}) = 0$. Alors $\mathcal{N}$ est isotrivial.

Voici des exemples où la condition 2) de 4.3.1 est facile à vérifier.

4.3.5 Corollaire. *Tout $\mathcal{M} \in MIC_S$ tel que $\text{LieGal}(\mathcal{M}, \eta)$ soit résoluble a la propriété de Grothendieck–Katz.*

En effet, $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})$ n'a alors aucun quotient de Lie simple non-abélien. Un cas très particulier (essentiellement dû à Chudnovsky–Chudnovsky [18]) est le suivant :

4.3.6 Corollaire. *Tout objet $\mathcal{N} \in MIC_S$ de rang 1 vérifie la conjecture de Grothendieck 3.3.1.*

4.3.7 Corollaire. *Supposons que tout sous-objet simple de $\text{End}\mathcal{M}$ soit ou bien isotrivial, ou bien irrégulier (i.e. à singularités irrégulières “à l'infini”). Alors $\mathcal{M}$ a la propriété de Grothendieck–Katz.*

(Utiliser 3.2.7.1).

4.3.8 Corollaire. *Supposons que S soit le complémentaire d'une réunion de diviseurs D_i dans l'espace projectif, que $\mathcal{M}$ soit régulier, et que les différences des exposants⁷ de $\mathcal{M}$ autour de chaque D_i soit irrationnelles ou entières. Alors $\mathcal{M}$ a la propriété de Grothendieck–Katz.*

(Utiliser 3.2.7.2 ; la monodromie de $\mathcal{L}$ autour de chaque D_i est triviale, donc $\mathcal{L}$ est trivial sous nos hypothèses).

C'est par exemple le cas, pour un paramètre t suffisamment général, de la connexion de Knizhnik–Zamolodchikov donnée par la 1-forme

$$t \sum_{i < j} A_{(i,j)} \frac{d(x_i - x_j)}{x_i - x_j}$$

sur le fibré trivial sur $(\mathbb{A}^1)^d \setminus$ diagonales, où les matrices constantes $A_{(i,j)}$ vérifient les conditions d'intégrabilité usuelles (cf. [43]).

4.4 Réduction de 4.3.1 à 4.3.4 + 4.3.6. Remarquons que 1) $\implies$ 2) dans 4.3.1 découle immédiatement de l'implication directe $\implies$ dans 4.1.2, compte tenu de ce que dans le diagramme commutatif d'épimorphismes canoniques

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \mathcal{L} \\ \downarrow & & \downarrow \iota \\ \mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})) & \longrightarrow & \mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{L}) \end{array}$$

ι est un isomorphisme puisque $\mathcal{L}$ est simple.

Nous allons déduire l'implication réciproque 2) $\implies$ 1) de 4.3.1 des corollaires 4.3.4 et 4.3.6, qui seront prouvés ultérieurement (et simultanément, cf. §6 complété par 7.1.3).

Considérons l'algèbre de Lie $\mathcal{J} = \mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})/\mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M})$ dans la catégorie tannakienne $\langle \mathcal{M} \rangle^\otimes$ (qu'on peut supposer neutre quitte à remplacer k par une extension finie). Il est clair que les p -courbures de $\mathcal{J}$ s'annulent pour presque tout p , i.e. que $\mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{J}) = 0$.

Par ailleurs, considérons le quotient $\mathcal{Q} = \mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})/(\mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}) + \text{Rad}\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M}))$ de $\mathcal{J}$ par l'idéal $\text{Rad}\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})/(\mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M}) \cap \text{Rad}\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M}))$. Cette algèbre de Lie de $\langle \mathcal{M} \rangle^\otimes$ est produit de ses idéaux simples non-abéliens dans $\langle \mathcal{M} \rangle^\otimes$ (voir plus bas, 14.3, pour les détails sur la notion d'"algèbre de Lie semi-simple" dans une catégorie tannakienne).

Or par hypothèse, toute algèbre de Lie simple non-abélienne $\mathcal{L}$ dans $\langle \mathcal{M} \rangle^\otimes$ qui est quotient de $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})$ par un idéal de Lie (en particulier, tout facteur simple de $\mathcal{Q}$), on a $\mathbf{P}\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{L}) \neq 0$. On a donc $\mathcal{Q} = 0$. A fortiori, les fibres de $\mathcal{J}$ sont des algèbres de Lie résolubles.

Considérons à nouveau l'objet $\mathcal{N}$ de $\langle \mathcal{M} \rangle^\otimes$ introduit dans la preuve de 3.2.1 : $\mathcal{J}$ n'est autre que l'image de $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M})$ dans $\mathcal{N}' := \underline{\text{End}}(\underline{\text{End}}\mathcal{N})$, qui s'identifie aussi à $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{N}')$. Donc la composante neutre du groupe de Galois différentiel de $\mathcal{N}'$ (en n'importe quel

⁷on trouvera une discussion détaillée des exposants dans [9, I.6.5]

point) est résoluble. La théorie de Galois différentielle montre que, quitte à remplacer S par un revêtement étale fini (ce qui est loisible), $\mathcal{N}'$ est extension itérée d'objets de rang 1 dans MIC_S . Puisque $P\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{N}')) = 0$, on conclut de 4.3.4 et 4.3.6 que $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{N}') = \mathcal{J} = 0$, d'où $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{M}) = P\text{-}\mathcal{C}(\mathcal{M})$. $\square$

5 Un critère d'algébricité

Nous démontrons, dans le cadre de la théorie des G -fonctions (cf. [3]), un critère d'algébricité dont la formulation est proche du critère de rationalité bien connu de Borel–Dwork [26], et qui s'avère particulièrement adapté à l'étude de la conjecture de Grothendieck.

5.1 Densités. Soit k un corps de nombres. Pour toute place finie v de k , on note p_v sa caractéristique résiduelle, k_v le complété de k en v . On pose $\varepsilon_v = \frac{[k_v:\mathbb{Q}_{p_v}]}{[k:\mathbb{Q}]}$ et on normalise la valeur absolue v -adique par $|p_v| = p_v^{-\varepsilon_v}$; on note $\mathbf{N}(v)$ le degré résiduel. On a $\sum_{v|p} \varepsilon_v = 1$.

Soit V un ensemble de places finies de k . On introduit les “densités” inférieure et supérieure

$$\underline{\delta}(V) = \liminf_n \frac{\sum_{p_v \leq n, v \in V} \varepsilon_v}{\sum_{p_v \leq n} \varepsilon_v}, \quad \bar{\delta}(V) = \limsup_n \frac{\sum_{p_v \leq n, v \in V} \varepsilon_v}{\sum_{p_v \leq n} \varepsilon_v}.$$

En notant V^c le complémentaire de V dans l'ensemble des places finies de k , on a $\underline{\delta}(V) = 1 - \bar{\delta}(V^c)$. Pour $k = \mathbb{Q}$ (et seulement dans ce cas), on retrouve les notions usuelles de densités naturelles inférieure et supérieure; plus généralement, si V est l'ensemble des places du corps de nombres k au-dessus d'un ensemble $\mathcal{P}$ de nombres premiers rationnels, on retrouve les densités naturelles inférieures et supérieures de $\mathcal{P}$. Les densités $\underline{\delta}$ et $\bar{\delta}$ sont adaptées à la théorie des G -fonctions, notamment sous l'expression “logarithmique” que leur donne le lemme suivant :

5.1.1 Lemme.

$$\underline{\delta}(V) = \liminf_n \frac{1}{n} \sum_{p_v \leq n, v \in V} \log |p_v|^{-1}, \quad \bar{\delta}(V) = \limsup_n \frac{1}{n} \sum_{p_v \leq n, v \in V} \log |p_v|^{-1}.$$

Démonstration. On a

$$\frac{1}{n} \sum_{p_v \leq n, v \in V} \log |p_v|^{-1} \leq \frac{\log n}{n} \sum_{p_v \leq n, v \in V} \varepsilon_v,$$

et

$$\frac{\log n}{n} \sum_{p_v \leq n, v \in V} \varepsilon_v \sim \frac{\sum_{p_v \leq n, v \in V} \varepsilon_v}{\sum_{p_v \leq n} \varepsilon_v}$$

d'après le théorème des nombres premiers. Dans l'autre sens, on a, pour tout $\eta \in]0, 1[$ et tout $n > 1/\eta$,

$$\frac{1}{n} \sum_{\eta n \leq p_v \leq n, v \in V} \log |p_v|^{-1} \geq \frac{\log \eta n}{n} \sum_{\eta n \leq p_v \leq n, v \in V} \varepsilon_v \sim \frac{\sum_{\eta n \leq p_v \leq n, v \in V} \varepsilon_v}{\sum_{p_v \leq n} \varepsilon_v}$$

toujours d'après le théorème des nombres premiers. Le lemme s'ensuit en faisant $\eta \rightarrow 0$. $\square$

5.1.2 Lemme. Si $\sum_{v \in V} \frac{\log |p_v|^{-1}}{p_v - 1} < \infty$, alors $\bar{\delta}(V) = 0$ (ce qui équivaut à dire que l'ensemble des premiers résiduels de v est de densité nulle).

En effet, pour tout $\eta > 0$, il existe n' tel que $\sum_{n' \leq p_v, v \in V} \frac{\log |p_v|^{-1}}{p_v - 1} < \eta$, d'où $\frac{1}{n} \sum_{n' \leq p_v \leq n, v \in V} \log |p_v|^{-1} \leq \sum_{n' \leq p_v \leq n, v \in V} \frac{\log |p_v|^{-1}}{p_v - 1} < \eta$. Grâce au lemme précédent, on obtient alors $\bar{\delta}(V) = \limsup_n \frac{1}{n} \sum_{p_v \leq n, v \in V} \log |p_v|^{-1} < \eta$. $\square$

Un lien entre ces densités et les densités naturelles usuelles définies par

$$\underline{d}(V) = \liminf_n \frac{\sum_{\mathbf{N}(v) \leq n, v \in V} 1}{\sum_{\mathbf{N}(v) \leq n} 1}, \quad \bar{d}(V) = \limsup_n \frac{\sum_{\mathbf{N}(v) \leq n, v \in V} 1}{\sum_{\mathbf{N}(v) \leq n} 1}$$

est donné par :

5.1.3 Lemme. Soit $V^{\text{déc}}$ le sous-ensemble de V formé des places décomposées sur $\mathbb{Q}$, i.e. telles que $\varepsilon_v = \frac{1}{[k:\mathbb{Q}]}$. Alors

$$\underline{d}(V^{\text{déc}}) = \frac{\underline{d}(V)}{[k:\mathbb{Q}]}, \quad \bar{d}(V^{\text{déc}}) = \frac{\bar{d}(V)}{[k:\mathbb{Q}]}.$$

Démonstration. Quand $n \rightarrow \infty$, on a

$$\sum_{v|\mathbf{N}(v) \leq n} 1 \sim \sum_{v \text{ décomposée} | \mathbf{N}(v) \leq n} 1 = [k:\mathbb{Q}] \sum_{v \text{ décomposée} | p_v \leq n} \varepsilon_v.$$

Par la relation $\sum_{v|p} \varepsilon_v = 1$, et compte tenu de ce que la densité des premiers p décomposés dans k est $1/[k:\mathbb{Q}]$ (cas particulier du théorème de Chebotarev qui se ramène immédiatement au cas galoisien), on voit que $[k:\mathbb{Q}] \sum_{v \text{ décomposée} | p_v \leq n} \varepsilon_v \sim \sum_{v|p_v \leq n} \varepsilon_v$. Le lemme s'ensuit, compte tenu de ce que $\underline{d}(V^{\text{déc}}) = \underline{d}(V)$, $\bar{d}(V^{\text{déc}}) = \bar{d}(V)$. $\square$

On obtient alors une *variante du théorème de Chebotarev* (cas où le corps de base est $\mathbb{Q}$) qui distingue entre les éléments d'une même classe de conjugaison :

5.1.4 Proposition. Supposons l'extension $k/\mathbb{Q}$ galoisienne, et soit $\sigma \in \text{Gal}(k/\mathbb{Q})$. Soit V_σ l'ensemble des places finies de k non ramifiées sur $\mathbb{Q}$ telles que l'automorphisme

de Frobenius $(v, k/\mathbb{Q})$ en v soit σ . Alors

$$\underline{\delta}(V_\sigma) = \overline{\delta}(V_\sigma) = \frac{1}{[k : \mathbb{Q}]}.$$

Démonstration. On reprend l'argument de Deuring usuel pour se ramener au cas cyclique. Soit W_σ l'ensemble des places finies w de k^σ non ramifiées sur $\mathbb{Q}$ telles que l'élément de Frobenius en w dans k/k^σ soit σ . Alors V_σ est l'ensemble des places de k au-dessus de $W_\sigma^{\text{d\'ec}}$. On en déduit que $\underline{\delta}(V_\sigma) = \underline{\delta}(W_\sigma^{\text{d\'ec}})$ qui est aussi $\frac{d(W_\sigma)}{[k^\sigma : \mathbb{Q}]}$ par le lemme précédent. De même avec les densités supérieures. Or par le théorème de Chebotarev (dans le cas cyclique), $\underline{d}(W_\sigma) = \overline{d}(W_\sigma) = \frac{1}{[k : k^\sigma]}$. $\square$

5.2 Les invariants ρ, σ, τ . Soit S une variété lisse géométriquement connexe sur un corps de nombres k . Considérons un module à connexion intégrable $\mathcal{M} = (M, \nabla)$ sur ouvert U non vide de S . Dans un repère, et en termes de coordonnées locales x_h , la connexion correspond par le dictionnaire 1.2 à un système linéaire intégrable aux dérivées partielles⁸. Par dérivations successives du système

$$\frac{\partial}{\partial x_h} \vec{y} = \vec{y} A_{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)},$$

on obtient des équations

$$\frac{1}{\underline{m}!} \frac{\partial^{\underline{m}}}{\partial \underline{x}^{\underline{m}}} \vec{y} = \vec{y} A_{\underline{m}}$$

pour tout multi-indice $\underline{m}$ à d composantes, $A_{\underline{m}} \in \text{GL}_r(k(S))$.

Choisissons un modèle plat $\mathfrak{S}$ de S sur $\mathcal{O}_k$. Pour toute place finie v de k de bonne réduction (*i.e.* telle que $\mathfrak{S} \otimes \mathcal{O}_{k_v}$ soit lisse au-dessus de $\mathcal{O}_{k_v}$), on définit la norme de Gauss v -adique sur $k(S)$ comme étant la valeur absolue étendant $|\cdot|_v$ sur k , associée à l'anneau local du point générique de la fibre spéciale de $\mathfrak{S} \otimes \mathcal{O}_{k_v}$, qui est un anneau de valuation discrète. Elle dépend du choix du modèle, mais étant donné deux modèles, il n'y a qu'un nombre fini de places v pour lesquelles les normes de Gauss v -adiques associées à chaque modèle diffèrent.

On pose

$$h(n, v) = \sup_{\underline{m}, |\underline{m}| \leq n} \log^+ \|A_{\underline{m}}\|_v,$$

où $\|\cdot\|_v$ désigne le maximum des normes de Gauss des coefficients, et $\log^+ = \max(0, \log)$. On montre que $\frac{h(n, v)}{n}$ admet une limite quand n tend vers l'infini, qui n'est autre que le $\log^+$ de l'inverse du rayon de solubilité v -adique générique de la

⁸la situation que nous considérons est toutefois un peu plus générale que celle de 1.2, en ce que $\mathcal{M}$ n'est pas supposé défini au point de coordonnées 0 (qui n'est pas supposé appartenir à U), ce qui est la cause des pôles apparaissant dans les matrices

connexion ([3, p. 230], [24]). On définit alors les invariants

$$\rho(\mathcal{M}) = \sum_{v \text{ finie}} \limsup_n \frac{h(n, v)}{n}, \quad \sigma(\mathcal{M}) = \limsup_n \sum_{v \text{ finie}} \frac{h(n, v)}{n},$$

$$\tau(\mathcal{M}) = \inf_p \limsup_n \sum_{v, p_v \geq p} \frac{h(n, v)}{n},$$

qui ne dépendent pas du choix du repère auxiliaire ni du modèle de S choisi, et sont invariants par extension finie du corps de base k et par remplacement de S par un ouvert dense. Si l'un de ces trois invariants est fini, les deux autres le sont aussi, et on a $\sigma(\mathcal{M}) = \rho(\mathcal{M}) + \tau(\mathcal{M})$; on dit alors que l'on a affaire à une G -connexion ([9], [24]).

5.2.1 Remarque. Dans ce cas, les p -courbures sont toujours nilpotentes au moins pour un ensemble de p de densité égale à 1; en effet, on a $\lim_n \frac{h(n, v)}{n} \geq \frac{\log |p_v|^{-1}}{p_v - 1}$ si la v -courbure n'est pas nilpotente, et on conclut grâce au lemme 5.1.2. On montre que toute connexion d'origine géométrique (cf. ci-dessous, 16.1) est une G -connexion (cf. [3, IV], [9]). *On conjecture en fait qu'être une G -connexion, avoir ses p -courbures nilpotentes pour un ensemble de p de densité 1, et être d'origine géométrique, sont des notions équivalentes*⁹. Rappelons aussi qu'une connexion dont presque toutes les p -courbures sont nulles est une G -connexion; c'est une question ouverte de savoir s'il en est de même en supposant seulement les p -courbures nulles pour un ensemble de premiers de densité 1.

Comme l'a démontré B. Dwork, la quantité $\tau(\mathcal{M})$ est intimement liée à la distribution de l'ordre de nilpotence des p -courbures de $\mathcal{M}$, lorsque p parcourt les nombres premiers [29]:

5.2.2 Proposition. *On se place dans le cas d'une G -connexion. Soit $V(\mathcal{M})$ l'ensemble des places finies v telles que la réduction de $\mathcal{M}$ modulo v soit non triviale (ou, ce qui revient au même, telles que les v -courbures soient non nulles). Alors*

$$\bar{\delta}(V(\mathcal{M})) \leq \tau(\mathcal{M}) \leq \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{r-1}\right) \bar{\delta}(V(\mathcal{M})).$$

A fortiori, les p -courbures de $\mathcal{M}$ s'annulent pour un ensemble de premiers de densité 1 si et seulement si $\tau(\mathcal{M}) = 0$.

Via 2.1.1, c'est démontré dans [29]. Dwork se limite au cas $d = 1$ et $k = \mathbb{Q}$, mais on trouvera la généralisation au cas de plusieurs variables et d'un corps de nombres arbitraire dans [24]. □

⁹cette conjecture remplace depuis les années 1980 la croyance opposée, le point d'oscillation se trouvant dans l'article de Dwork [27], au cours duquel l'opinion de l'auteur semble évoluer. Rappelons toutefois que Dwork a toujours préféré, semble-t-il, s'abstenir de proposer une définition formelle des systèmes différentiels d'origine géométrique

5.2.3 Remarque. Dwork établit aussi (*loc. cit.*, cor. 6) la minoration suivante. Soit $V_i(\mathcal{M})$ l'ensemble des places finies v de k où les v -courbures sont nilpotentes d'échelon exact i . Alors

$$\tau(\mathcal{M}) \geq \sum_{i=2, \dots, r} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{i-1}\right) \underline{\delta}(V_i(\mathcal{M})).$$

Est-ce une égalité ? Il serait intéressant d'autre part de savoir si $\underline{\delta}(V_i(\mathcal{M})) = \bar{\delta}(V_i(\mathcal{M}))$, et si ces densités sont rationnelles. En ce sens, la conjecture suivante précise des suggestions de [3] et [29] :

5.2.4 Conjecture. Soit $\mathcal{M}$ une G -connexion. Alors

i) l'ensemble des places finies v de k telles que les v -courbures soient nilpotentes d'échelon fixé a une “densité” (au sens de 5.1) qui est un nombre rationnel,

ii) $\tau(\mathcal{M}) \in \mathbb{Q}$.

iii) (conjecture de Grothendieck légèrement renforcée)¹⁰. $\tau(\mathcal{M}) = 0$ si et seulement si $\mathcal{M}$ est isotriviale.

Voir §16 pour un résultat partiel.

5.3 Invariants ρ, σ, τ de séries. Normalisons les valeurs absolues archimédiennes w de k comme suit : $|\xi|_w = |\xi|_\infty^{\varepsilon_w}$, où $\varepsilon_w = \frac{[k_w : \mathbb{R}]}{[k : \mathbb{Q}]}$ et où $|\cdot|_\infty$ est la valeur absolue euclidienne. La “formule du produit” s'écrit alors $\prod_{v \text{ place de } k} |\xi|_v = 1$ (pour $x \in k^*$).

Soit $\vec{y} = \sum \vec{a}_m x^m \in k^r[[x_1, \dots, x_d]]$ un vecteur-ligne de séries formelles. On définit

$$\rho(\vec{y}) = \sum_{v \text{ place de } k} \limsup_n \frac{1}{n} \sup_{|\underline{m}| \leq n} \log^+ \|\vec{a}_{\underline{m}}\|_v,$$

$$\sigma(\vec{y}) = \limsup_n \sum_{v \text{ place de } k} \frac{1}{n} \sup_{|\underline{m}| \leq n} \log^+ \|\vec{a}_{\underline{m}}\|_v,$$

$$\tau(\vec{y}) = \inf_p \limsup_n \sum_{v, p_v \geq p} \frac{1}{n} \sup_{|\underline{m}| \leq n} \log^+ \|\vec{a}_{\underline{m}}\|_v,$$

quantités invariantes par extension finie du corps de base, et liées par l'inégalité $\sigma(\vec{y}) \leq \rho(\vec{y}) + \tau(\vec{y})$.

5.3.1 Corollaire. Supposons que $\vec{y} \in k^r[[x]]$ soit solution d'une G -connexion, et supposons que le point 0 ne soit pas sur le lieu singulier (i.e. soit dans U). Alors on a $\tau(\vec{y}) \leq (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r-1}) \bar{\delta}(V(\mathcal{M}))$. En particulier, si les p -courbures s'annulent pour un ensemble de premiers p de densité 1, alors $\tau(\vec{y}) = 0$.

¹⁰“pour presque tout p ” étant remplacé par “pour une infinité de p de densité 1”

Démonstration. Pour toute place finie v , on a l'inégalité

$$\sup_{|\underline{m}| \leq n} \log^+ \|\vec{a}_{\underline{m}}\|_v \leq h(n, v) + c_v,$$

où c_v est une constante nulle pour presque tout v , d'où $\tau(\vec{y}) \leq \tau(\mathcal{M})$, et on applique la proposition précédente. $\square$

5.3.2 Remarque. Il est immédiat que $\tau(\vec{y}) = 0$ si les coefficients des composantes de $\vec{y}$ sont entiers, ou plus généralement “S-entiers” (pour un ensemble fini convenable S de places de k). Dans le cas où $\vec{y}$ est solution d'un système différentiel comme ci-dessus, *sans singularité en 0*, une (variante d'une) *conjecture de G. Christol prédit que si $\tau(\vec{y}) = 0$, alors $\vec{y}$ est algébrique sur $k(x)$* .

Le corollaire précédent montre que cette conjecture entraîne la conjecture de Grothendieck (sur le corps de base k).

Voici une réciproque partielle à 5.3.1 (qui sera utilisée dans l'appendice) :

5.3.3 Proposition. *Plaçons-nous dans le cas d'une seule variable. Supposons que $\mathcal{M}$ admette une k -base de solutions $\vec{y}_i$ dont les coefficients de chaque composante sont des S-entiers. Alors les p -courbures de $\mathcal{M}$ s'annulent pour presque tout p .*

Démonstration. Choisissons un vecteur cyclique pour $\mathcal{M}$ sur $k(x)$, ce qui nous permet de traiter d'un opérateur différentiel L , et de remplacer les vecteurs $\vec{y}_i$ par des solutions y_i de L dans $\mathcal{O}[\frac{1}{N}][[x]]$ (pour N convenable), linéairement indépendantes sur le corps de constantes k de $k((x))$. Leur wronskien $W(y_1, \dots, y_r)$ est non nul, et le reste par réduction modulo v pour presque toute place finie v . Le lemme du wronskien – valable en toute caractéristique¹¹ – permet de conclure que pour presque tout v , les réductions modulo v des y_i sont linéairement indépendantes sur le corps des constantes $\kappa(v)((x^P))$ de $\kappa(v)((x))$, ce qui entraîne la nullité de la p -courbure d'après [38, 6.0.7]. $\square$

Considérons à présent le vecteur $\vec{y}^{\text{sym } n}$ dont les composantes sont les monômes de degré n en les composantes de $\vec{y}$ (écrits dans l'ordre lexicographique).

5.3.4 Lemme.

$$\rho(\vec{y}^{\text{sym } n}) \leq \rho(\vec{y}), \quad \tau(\vec{y}^{\text{sym } n}) \leq \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \tau(\vec{y}),$$

$$\sigma(\vec{y}^{\text{sym } n}) \leq \rho(\vec{y}) + \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \tau(\vec{y}).$$

Démonstration. $\limsup_n \frac{1}{n} \sup_{|\underline{m}| \leq n} \log^+ \|\vec{a}_{\underline{m}}\|_v$ n'est autre que le $\log^+$ de l'inverse du rayon de convergence de $\vec{y}$, ce qui rend immédiate la première inégalité. Pour la seconde, écrivons une composante arbitraire $\sum \underline{b}_{\underline{m}} x^{\underline{m}} \in k^r[[x_1, \dots, x_d]]$ de

¹¹ voir par exemple [23, App. B] qui traite même le cas de plusieurs variables

$\vec{y}^{\text{sym } n}$ comme monôme $y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_n}$. On a donc $b_{\underline{m}} = \sum_{\sum m_j = \underline{m}} \prod_{j=1}^{j=n} a_{i_j, m_j}$, et $\log^+ |b_{\underline{m}}|_v \leq \max_{\sum m_j = \underline{m}} \sum_{j=1}^{j=n} \log^+ |a_{i_j, m_j}|_v$ (plus un terme $O(\log |\underline{m}|)$ si v est archimédienne). Notons $(\dots, \underline{m}'_j, \dots)$ le n -uplet qui réalise le maximum. Quitte à permuter les facteurs y_{i_j} , on peut supposer que $|\underline{m}'_j|$ décroît avec j , de sorte que $|\underline{m}'_j| \leq |\underline{m}|/j$. On obtient $\log^+ |b_{\underline{m}}|_v \leq \sum_{j=1}^{j=n} \max_{|\underline{m}'_j| \leq |\underline{m}|/j} \log^+ |a_{i_j, m_j}|_v$ (plus un terme $O(\log |\underline{m}|)$ si v est archimédienne), et il n'est alors pas difficile d'en déduire la deuxième inégalité. La troisième découle des deux précédentes.

5.3.5 Remarque. La borne pour $\tau(\vec{y}^{\text{sym } n})$ est souvent optimale. Par exemple, on peut montrer que c'est le cas pour $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ \log(1+x) \end{pmatrix}$ en suivant [3, p.150].

5.4 Le critère. Il s'agit d'un critère d'algébricité inspiré à la fois de celui de Chudnovsky [18] (lui-même inspiré du critère de transcendance bien connu de Schneider–Lang), et du critère de rationalité de Borel–Dwork. Ce critère figurait sous une forme plus générale dans [3, VIII 1.2]; nous en reproduisons ci-dessous le cas particulier (légèrement raffiné) qui nous intéresse, pour la commodité du lecteur. Pour une réécriture de ce critère dans le style arakelovien de J.-B. Bost [15][16], voir [17].

Rappelons le critère de rationalité Borel–Dwork, sous forme légèrement généralisée : une série $y \in k[[x]]$ est rationnelle si (et seulement si) $\tau(y) = 0$ et $\prod_{v \text{ finie}} M_v(y) > 1$ (où M_v désigne le rayon de méromorphie de y vue comme fonction v -adique).

Notre critère d'algébricité est d'aspect semblable, mais remplace le rayon de méromorphie de $y(x)$ par le rayon de méromorphie d'une uniformisation simultanée de y et x par une nouvelle variable z .

5.4.1 Définition. Soit $y \in k[[x_1, \dots, x_d]]$ et soit v une place de k . Une *uniformisation v -adique simultanée* de y et $\underline{x}$ dans le polydisque non-circonférencié $D(0, R_v)^d$ est la donnée de $d+1$ fonctions méromorphes v -adiques $h_v(z_v), h_{v,i}(z_v)$ ($i = 1, \dots, d$) de d variables $z_{1,v}, \dots, z_{d,v}$ dans le polydisque non circonférencié $D(0, R_v)^d$, vérifiant :

- 1) $h_{v,i}(0) = 0$ pour $i = 1, \dots, d$,
- 2) la matrice jacobienne à l'origine $\left(\frac{\partial h_{v,i}}{\partial z_{v,j}}(0) \right)$ est la matrice identité,
- 3) $y(h_{v,1}(z_v), \dots, h_{v,d}(z_v))$ est le germe en l'origine de la fonction méromorphe $h_v(z_v)$.

5.4.2 Exemple. $z_{i,v} = x_i, h_v = y$ est une uniformisation v -adique simultanée (dite triviale) de y et $\underline{x}$ dans le polydisque $D(0, R_v(y))^d$.

5.4.3 Théorème. Soit $y \in k[[\underline{x}]]$ telle que $\tau(y) = 0$ et $\rho(y) < \infty$. Supposons que pour toute place v de k , il existe une uniformisation v -adique simultanée de y et $\underline{x}$ dans un polydisque $D(0, R_v)^d$, et que $\prod R_v > 1$.

Alors y est algébrique sur $k(\underline{x})$.

5.4.4 Remarques. 1) Le cas où l'uniformisation v -adique est l'uniformisation triviale pour tout v correspond au critère de Borel–Dwork ; on obtient dans ce cas la conclusion plus forte que $y \in k(\underline{x})$.

L'hypothèse est à rapprocher de la notion d'uniformisation adélique simultanée introduite en transcendance dans [5], où la condition $\prod R_v > 1$ était affaiblie en $\prod R_v \geq 1$. Nous y reviendrons dans l'appendice.

2) Le théorème admet une réciproque partielle (qui justifie notamment la généralisation à plusieurs variables) : si $y \in k[[x]]$ est algébrique sur $k(x)$ (une seule variable), alors pour d convenable, et pour toute place complexe de k , il existe une uniformisation simultanée de $x_1, \dots, x_d$ et de toute fonction symétrique de $y(x_1), \dots, y(x_d)$ sur $\mathbb{C}^d$ (uniformisation d'Abel–Jacobi). L'idée (dûe à Chudnovsky [18]) d'utiliser l'uniformisation d'Abel–Jacobi dans ce contexte apparaîtra en 6.4.

Démonstration. Nous procéderons en plusieurs étapes (en suivant [3, VIII]).

1er pas. Fixons un entier $r > 0$ (destiné à tendre ultérieurement vers ∞) et un paramètre $\eta \in]0, 1[$ (destiné à tendre ultérieurement vers 0).

Notons $\vec{y} = \sum \vec{a}_m x^{\vec{m}}$ le vecteur de composantes $(1, y, \dots, y^{r-1})$. La finitude de $\tau(y)$ et $\rho(y)$ entraîne celle de $\sigma(\vec{y})$. On construit une suite de vecteurs-polynômes $\vec{p}_N \in k^r[\underline{x}]$, vérifiant :

- a) $M := \text{ord}_0 \vec{p}_N \cdot \vec{y} \geq N$,
- b) $\deg \vec{p}_N \leq (\frac{1}{r}(1 + \frac{1}{\eta}))^{1/d} N + o(N)$,
- c) $h(\vec{p}_N) \leq \eta \sigma(\vec{y}) N + o(N)$ (où $h(\vec{p}_N)$ désigne la hauteur logarithmique invariante des coefficients de p_N).

La construction est standard : la condition a) définit un système linéaire homogène à $r \binom{\deg \vec{p}_N + d}{d}$ inconnues (les coefficients des composantes de $\vec{p}_N$) et $\binom{N-1+d}{d}$ équations, et on applique le lemme de Siegel).

2ème pas. On suppose $\vec{p}_N \cdot \vec{y}$ non identiquement nul (i.e. M fini, autrement le problème est résolu). On choisit alors un multi-indice $\underline{m}$, avec $|\underline{m}| = M$, tel que

$$\alpha := \frac{1}{\underline{m}!} \frac{d^{\underline{m}}}{dx^{\underline{m}}} (\vec{p}_N \cdot \vec{y}) \neq 0.$$

Pour toute place finie v de k , on a l'estimation

$$(b) \quad \log |\alpha|_v \leq \log^+ |\vec{p}_N|_v + \sup_{|\underline{m}| \leq M} \log^+ \|\vec{a}_{\underline{m}}\|_v.$$

3ème pas. On considère un ensemble fini V (destiné à augmenter) de places de k contenant les places archimédiennes. Pour chaque v dans V , on considère les uniformisations v -adiques simultanées de y et $\underline{x}$ dans le polydisque $D(0, R_v)^d$; on écrit $h_v(z_v) = f_v(z_v)/g_v(z_v)$, $h_{v,i}(z_v) = f_{v,i}(z_v)/e_v(z_v)$, quotients de fonctions analytiques dans $D(0, R_v)^d$ avec $g_v(z_v), e_v(z_v)$ sans zéros dans $D(0, R_v)^d$ et valant 1 en l'origine. En notant $\vec{Z}_v(z_v)$ le vecteur de composantes $(f_v(z_v)^{r-1}, f_v(z_v)^{r-2}, \dots, 1)$, et $\psi(z_v)$ la fonction analytique v -adique $e_v(z_v)^{\deg \vec{p}_N} \cdot \vec{p}_N(f_{v,1}(z_v)/e_v(z_v), \dots, f_{v,s}(z_v)/e_v(z_v)) \cdot \vec{Z}_v(z_v)$, on voit que

$\vec{p}_N \cdot \vec{y}(h_{v,1}(z_v), \dots, h_{v,s}(z_v))$ est le germe en l'origine de la fonction méromorphe $g_v(z_v)^{1-r} \cdot e_v(z_v)^{-\deg \vec{p}_N} \psi(z_v)$ dans $D(0, R_v)^d$. Comme $\left(\frac{\partial h_{v,i}}{\partial z_{v,j}}(0)\right) = \text{Id}$, et que $g_v(0) = e_v(0) = 1$, on a $\alpha = \frac{1}{m!} \frac{d^m}{dx^m} \psi(0)$.

4ème pas. Pour chaque v dans V , choisissons R'_v assez proche de R_v par défaut. Les estimations de Cauchy donnent

$$\left| \frac{1}{m!} \frac{d^m}{dx^m} \psi(0) \right|_v \leq R_v'^{-M} \sup_{|z|_v=R'_v} |\psi(z)|_v,$$

d'où

$$(\sharp) \quad \log |\alpha|_v \leq -M \log R'_v + \log^+ |\vec{p}_N|_v + \deg \vec{p}_N \cdot \chi_v + o(N),$$

où l'on a posé

$$\chi_v = \max(\log \sup_{|z|_v=R'_v} |f_{i,v}(z_v)|_v, \dots, \log \sup_{|z|_v=R'_v} |e_v(z_v)|_v).$$

5ème pas. On additionne les inégalités (b) pour $v \notin V$ et $(\sharp)$ pour $v \in V$, et on applique la formule du produit, ce qui donne

$$M \sum_{v \in V} \log R'_v \leq h(\vec{p}_N) + \sup_{|\underline{m}| \leq m} \log^+ \|\vec{a}_{\underline{m}}\|_v + \deg \vec{p}_N \sum_{v \in V} \chi_v + o(N).$$

On divise cette inégalité par $M(\geq N)$ et on fait tendre N vers l'infini, ce qui donne, compte tenu des estimations pour la hauteur et le degré de $\vec{p}_N$

$$\sum_{v \in V} \log R'_v \leq \eta \sigma(\vec{y}) + \limsup_M \sum_{v \in V} \frac{1}{M} \sup_{|\underline{m}| \leq M} \log^+ \|\vec{a}_{\underline{m}}\|_v + \left(\frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{\eta} \right) \right)^{1/d} \sum_{v \in V} \chi_v.$$

6ème pas. Comme $\tau(y) = 0$, on peut remplacer $\sigma(\vec{y})$ par $\rho(y)$, et

$$\limsup_M \sum_{v \in V} \frac{1}{M} \sup_{|\underline{m}| \leq M} \log^+ \|\vec{a}_{\underline{m}}\|_v$$

par $\sum_{v \notin V} \log^+ R_v(y)^{-1}$ (par l'argument de 5.3.4 ; cette dernière série converge puisque $\rho(y) < \infty$). Ceci permet de faire tendre r vers l'infini, puis η vers 0, et enfin R'_v vers R_v , ce qui donne

$$\sum_{v \in V} \log R_v \leq \sum_{v \notin V} \log^+ R_v(y)^{-1}.$$

En prenant V assez grand, ceci contredit l'hypothèse $\prod R_v > 1$. On conclut de là que pour N assez grand, $\vec{p}_N \cdot \vec{y} = 0$, donc y est algébrique. $\square$

5.4.5 Corollaire. Supposons que $\vec{y} \in k'[[x]]$ soit solution d'une G -connexion de rang r dont les p -courbures s'annulent pour un ensemble de premiers p de densité 1. Supposons en outre que pour toute place v de k , il existe une uniformisation v -adique

simultanée d'une certaine composante y de $\vec{y}$ et $\underline{x}$ dans un polydisque $D(0, R_v)^d$, et que $\prod R_v > 1$. Alors y est algébrique sur $k(\underline{x})$.

Démonstration. Puisque les p -courbures de $\mathcal{M}$ s'annulent pour un ensemble de premiers p de densité 1, on peut, d'après 3.2.7, après passage de U à un revêtement fini étale U' , supposer que $\mathcal{M}_{U'}$ s'étend en un module à connexion sur une compactification lisse $\bar{S}'$, donc n'ait pas de singularité "à l'infini". On peut alors appliquer 5.3.1 et 5.4.3 pour conclure. $\square$

5.4.6 Remarque. Dans la situation où $\prod R_v > 0$ et où R_v est infini pour l'une au moins des places archimédiennes de k , ce critère devient un cas particulier du critère de J.-B. Bost formulé dans le cadre beaucoup plus général des feuilletages algébriques.

6 Preuve de 4.3.4 et 4.3.6 (cas d'un corps de nombres)

6.1. Il s'agit de prouver les énoncés suivants (le premier étant légèrement plus fort que 4.3.4), dans le cas où k est un corps de nombres¹² (voir aussi [3, VIII], et [18] pour le second énoncé).

6.1.1 Proposition. *Supposons que $\mathcal{N} \in \text{MIC}_S$ s'inscrive dans une suite exacte*

$$0 \rightarrow \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}'' \rightarrow 0$$

où $\mathcal{N}'$ et $\mathcal{N}''$ sont isotriviaux, et supposons que les p -courbures de $\mathcal{N}$ s'annulent pour une infinité de p de densité 1. Alors $\mathcal{N}$ est isotrivial.

6.1.2 Proposition. *Tout objet $\mathcal{N} \in \text{MIC}_S$ de rang 1 vérifie la conjecture de Grothendieck 3.3.1.*

Il est commode de se ramener au cas où S est une courbe. Comme dans les deux cas, il suit de l'hypothèse sur les p -courbures que $\mathcal{N}$ est régulier (3.2.7), tout est affaire de montrer la finitude de la monodromie (k étant plongé dans $\mathbb{C}$). Or on sait d'après Lefschetz que pour une courbe affine lisse "assez générale" C tracée sur S (quitte à remplacer k par une extension finie), $\pi_1(C(\mathbb{C})) \rightarrow \pi_1(S(\mathbb{C}))$ est surjectif.

6.1.3 Remarque. Par ailleurs, l'hypothèse sur les p -courbures implique que $\mathcal{N}$ s'étend à la complétion projective lisse de C (3.2.7), ce qui permet de supposer que S est une courbe projective lisse. Nous n'aurons pas à nous en servir.

¹²le cas d'un corps de base de caractéristique nulle quelconque sera ramené au cas d'un corps de nombres au chapitre suivant ; du reste le fragment 10.2 suffirait à effectuer cette réduction

6.2. Il est suggestif et utile de traduire 6.1.1 et 6.1.2 en termes de différentielles (en nous plaçant de nouveau dans la situation d’une variété lisse géométriquement connexe quelconque S définie sur un corps de nombres¹³ k). Comme l’isotrivialité est une propriété locale pour la topologie étale sur S , de même que l’hypothèse sur les p -courbures, on se ramène à supposer dans 6.1.1 que $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}''$ sont des connexions triviales, puis que $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'' = (\mathcal{O}_S, d)$. L’extension $\mathcal{N}$ correspond alors à un élément $[\omega]$ de $H_{\text{DR}}^1(S)$ dont la nullité équivaut à la trivialité (et à l’isotrivialité) de $\mathcal{M}$ (cf. [45, 2.5]). Quitte à localiser S , on peut supposer que $[\omega]$ est la classe d’un élément ω de $H^0(S, \Omega_S^1)$. Ceci ramène 6.1.1 à ceci :

6.2.1 Proposition. *Soit ω une 1-forme fermée sur S telle que ω modulo v soit localement exacte (ou, ce qui revient au même, annulée par l’opérateur de Cartier [38, §7]) pour tout place finie v de k au-dessus d’un ensemble de premiers rationnels p de densité 1. Alors ω est exacte.*

Quant à 6.1.2, l’énoncé se ramène au suivant, dans le cas où le fibré de rang 1 sous-jacent M est isomorphe à $\mathcal{O}_S$ (ce qu’on peut supposer en localisant), cf. [38, introduction, et 7.4] :

6.2.2 Proposition. *Soit ω une 1-forme fermée sur S telle que ω modulo v soit localement logarithmiquement exacte (ou, ce qui revient au même, fixée par l’opérateur de Cartier) pour toute place finie v de k au-dessus d’un ensemble de premiers rationnels p de densité 1. Alors il existe n entier non nul tel que $n\omega$ soit logarithmiquement exacte (i.e. de la forme df/f).*

Cette proposition donne une réponse positive au problème étudié dans [38, §7] sous divers avatars.

6.3 Réduction au cas où S est un schéma en groupe commutatif. Comme on l’a vu plus haut, on peut supposer que S est une courbe lisse, et il s’agit de prouver 6.1.1 et 6.1.2. On peut aussi supposer que $S(k) \neq \emptyset$ et on fixe un point base $s_0 \in S(k)$.

Soit $\bar{S}$ la complétion projective lisse de S , et étendons ω en une section (encore notée ω) de $\Omega_{\bar{S}}^1(-D)$ pour un diviseur effectif convenable de S (par exemple, le “diviseur des pôles” de ω). On attache à $(\bar{S}, D)$ la jacobienne généralisée J_D de $\bar{S}$ de module D , qui paramètre les fibrés inversibles sur $\bar{S}$ “rigidifiés” au-dessus de D . On a un morphisme

$$\varphi_{s_0} : S \rightarrow J_D, \quad s \mapsto [\mathcal{O}_{\bar{S}}(s) \otimes \mathcal{O}_{\bar{S}}(s_0)^\vee],$$

et il existe une unique forme différentielle invariante ω_{J_D} telle que $\omega = \varphi_{s_0}^* \omega_{J_D}$, cf. [46, p. 97]. Pour tout entier $n > 0$, φ_{s_0} induit un morphisme

$$\varphi_{s_0}^{(n)} : S^{(n)} \rightarrow J_D, \quad s_1 + \cdots + s_n \mapsto [\otimes (\mathcal{O}_{\bar{S}}(s_i) \otimes \mathcal{O}_{\bar{S}}(s_0)^\vee)]$$

¹³on verra au chapitre suivant comment généraliser au cas d’un corps de base de caractéristique nulle quelconque

où $S^{(n)}$ désigne la puissance symétrique n -ième de S , et $(\varphi_{s_0}^{(n)})^*(\omega_{J_D})$ n'est autre que $\sum \text{pr}_i^* \omega$.

Pour $n \geq \dim J_D$, on sait que $\varphi_{s_0}^{(n)}$ est dominante¹⁴. Il suit que la condition que l'opérateur de Cartier annule (*resp.* fixe) ω - donc aussi $\sum \text{pr}_i^* \omega$ - modulo v , implique la condition analogue pour $(\varphi_{s_0}^{(n)})^*(\omega_{J_D})$. Par ailleurs, si ω_{J_D} est exacte (*resp.* logarithmiquement exacte) il en est de même de $\omega = \varphi_{s_0}^* \omega_{J_D}$. On peut donc remplacer, dans 6.1.1 et 6.1.2, S par le schéma en groupe commutatif J_D .

6.4 Cas où S est un schéma en groupe commutatif. Supposons donc que S soit un schéma en groupe commutatif.

6.1.1 (*resp.* 6.1.2) équivaut à l'existence, sous l'hypothèse d'annulation des p -courbures, d'une solution $y_1 \in H^0(S, \mathcal{O}_S)$ (*resp.* de la forme $y_2^{1/n}$ avec $y_2 \in H^0(S, \mathcal{O}_S)$) du système différentiel

$$(*)_1 \quad dy = \omega \otimes 1, \quad \text{resp.} \quad (*)_2 \quad dy = \omega \otimes y.$$

En fait, il est équivalent de trouver une solution algébrique sur $k(S)$ de $(*)_1$ (*resp.* $(*)_2$) : cela vient de ce que le groupe de Galois différentiel attaché à $(*)_1$ est a priori un sous-groupe de $\mathbb{G}_a$ (*resp.* $\mathbb{G}_m$), donc il est équivalent de dire que ce groupe est fini ou qu'il est trivial (*resp.* cyclique).

Choisissant des coordonnées locales $x_1, \dots, x_d$ au voisinage de l'origine de S , il s'agit donc de montrer que toute solution formelle $y \in k[[x_1, \dots, x_d]]$ de $(*)_1$ (*resp.* $(*)_2$) est algébrique, sous l'hypothèse d'annulation des p -courbures.

Pour appliquer le critère 5.4.5, il nous faut savoir que

- i) la connexion sous-jacente est une G -connexion,
- ii) pour toute place v de k , il existe une uniformisation v -adique simultanée de y et $\underline{x}$ dans un polydisque $D(0, R_v)^d$, et que $\prod R_v > 1$.

Pour i), c'est clair dans le cas de $(*)_1$ puisque la connexion sous-jacente est extension de connexions triviales. Dans le cas de $(*)_2$, cela découle de l'hypothèse d'annulation des p -courbures pour presque tout p (et non seulement pour une infinité de densité 1, cf. 5.2.3). A fortiori, l'invariant ρ de la connexion est fini.

Pour ii), il suffit de prendre l'uniformisation triviale pour toute place finie, et pour tout plongement complexe $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, l'uniformisation donnée par l'exponentielle du groupe de Lie complexe $S(\mathbb{C})$

$$\exp_{S(\mathbb{C})} : \text{Lie } S(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^d \longrightarrow S(\mathbb{C}) \cong \text{Lie } S(\mathbb{C}) / \pi_1(S(\mathbb{C}), 0)$$

qui donne un rayon d'uniformisation simultanée infini. La finitude de l'invariant ρ de la connexion implique, par spécialisation, la finitude de $\rho(y)$, donc que $\prod_{v \text{ finie}} R_v > 0$. On a finalement $\prod_{v \text{ place de } k} R_v = \infty$. $\square$

¹⁴et d'ailleurs birationnelle pour $n = \dim J_D$

II Analogue de la conjecture de Grothendieck en équicaractéristique nulle

7 Énoncé des résultats

7.1. Soit $\mathcal{M} \in MIC_S$. En 3.1, nous avons “épaissi” la situation en choisissant un sous-anneau $\mathfrak{o}$ de k de type fini sur $\mathbb{Z}$, un $\mathfrak{o}$ -schéma connexe $\mathfrak{S}$ à fibres géométriquement connexes, et un $\mathcal{O}_{\mathfrak{S}}$ -module localement libre à connexion intégrable $\mathfrak{M}$, tels que S et $\mathcal{M}$ se déduisent de $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{M}$ par extension des scalaires $\mathfrak{o} \hookrightarrow k$.

Il est facile de voir que si $\mathcal{M}$ est isotrivial, alors pour tout point fermé t d’un ouvert dense de $\text{Spec } \mathfrak{o}_{\mathbb{Q}}$, la fibre de $\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}}$ en t est isotriviale.

Nous nous proposons de démontrer la réciproque¹⁵, analogue en équicaractéristique nulle de la conjecture de Grothendieck 3.3.3 :

7.1.1 Proposition. *Si pour tout point fermé t d’un ouvert dense de $\text{Spec } \mathfrak{o}_{\mathbb{Q}}$, la fibre de $\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}}$ en t est isotriviale, alors $\mathcal{M}$ est isotrivial.*

7.1.2 Remarque. Dans un manuscrit récent [34], E. Hrushovsky propose une autre approche de ce résultat par la théorie des modèles.

7.1.3 Corollaire. *$\mathcal{M}$ vérifie la conjecture de Grothendieck si et seulement si $(\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}})_t$ vérifie la conjecture de Grothendieck pour tout point fermé t d’un ouvert dense de $\text{Spec } \mathfrak{o}_{\mathbb{Q}}$.*

Comme $\kappa(t)$ est un corps de nombres, cela ramène l’étude de la conjecture de Grothendieck au cas où le corps de base k est un corps de nombres, démontrant ainsi une assertion non justifiée de [38, Intro.], et complétant la preuve de 4.3.4 et 4.3.6 dans le cas général.

7.1.4 Remarque. On peut se limiter, dans l’étude de la conjecture de Grothendieck, au cas où S est une courbe affine sur un corps de nombres k . D’après le théorème de Belyi [12], il existe un revêtement étale $\pi : S \rightarrow \mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$. Au lieu de $\mathcal{M}$, il suffit de traiter $\pi_*(\mathcal{M})$, ou même d’après ce qui précède, les quotients de Lie simples horizontaux de $\mathcal{L}\mathcal{G}(\pi_*(\mathcal{M}))$. On est donc ramené au cas d’un fibré à connexion irréductible $\mathcal{N}$ sur $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ (muni d’un crochet de Lie horizontal si l’on veut). Les hypothèses sur les p -courbures impliquent la régularité de $\mathcal{N}$ en $0, 1, \infty$. Or il est connu que tout fibré à connexion régulière irréductible sur $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ admet une base de sections e_j telle que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}(e_j) = \sum_i \left(\frac{A_{ij}}{x} + \frac{B_{ij}}{x-1} \right) e_i$, où A et B sont des matrices constantes (cf. [11, §5]). Dans le cas “universel” où A et B sont vues comme des indéterminées non-commutatives, la condition d’annulation des p -courbures se traduit par des identités polynômiales universelles en A et B modulo p .

¹⁵qui était implicite dans [7, §5]

7.2. Soient k un corps de caractéristique nulle, T un k -schéma séparé de type fini, $f : S \rightarrow T$ un T -schéma lisse à fibres géométriquement connexes. Soit $\mathcal{M} = (M, \nabla)$ la donnée d'un $\mathcal{O}_S$ -module M localement libre de rang $r < \infty$ et d'une connexion relative intégrable

$$\nabla : M \rightarrow \Omega_{S/T}^1 \otimes_{\mathcal{O}_S} M,$$

qu'on voit comme une famille de connexions intégrables paramétrées par T .

Dans ce cadre relatif, diverses difficultés se présentent :

– la catégorie des fibrés à connexion relative intégrable n'est pas abélienne si $\dim T > 0$,

– la notion de connexion triviale soulève divers problèmes, cf. [8, 3.1.1]. Suivant *loc. cit.*, on dit que $\mathcal{M}$ est trivial (du point de vue de la connexion, pas du fibré sous-jacent) s'il est de la forme $(\mathcal{O}_S, d_{S/T}) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_T} f^{-1}N$, où N est un $\mathcal{O}_T$ -module localement libre. Du fait que les anneaux locaux de S soient “différentiellement simples par couches” au sens de *loc. cit.*, on a (cf. [8, 3.1.2.3, 3.1.3.2]) :

7.2.1 Lemme (non utilisé par la suite). *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) $\mathcal{M}$ est trivial,
- ii) $\mathcal{M}$ est Zariski-localement engendré par ses sections horizontales,
- iii) l'homomorphisme canonique $M^\nabla \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_T} \mathcal{O}_S \rightarrow M$ est un isomorphisme,

En fait, nous éviterons ces difficultés en supposant T intègre et en travaillant au point générique de T .

7.2.2 Théorème. $\mathcal{M}_{\eta_T}$ est isotrivial si et seulement si pour tout point fermé t d'un ouvert dense de T , $\mathcal{M}_{(t)}$ est isotrivial.

La proposition 7.1.1 s'en déduit immédiatement, en localisant $\mathfrak{o}$ et en prenant $T = \text{Spec } \mathfrak{o}_{\mathbb{Q}}$, $S = \mathbb{S}_{\mathbb{Q}}$, $\mathcal{M} = \mathfrak{M}_{\mathbb{Q}}$.

7.2.3 Remarque. Il ne suffirait pas, dans 7.2.2, de demander l'existence d'une ensemble Zariski-dense de points fermés t tels que $\mathcal{M}_{(t)}$ est isotrivial, comme le montre l'exemple de la connexion $\nabla(1) = t \frac{dx}{x}$ sur $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1 \times \mathbb{G}_m}$ relative à $T = \mathbb{A}^1$ (coordonnée t sur $\mathbb{A}^1$), dont la fibre est isotriviale pour tout $t \in \mathbb{Q}$.

7.3. L'implication directe de 7.2.2 est facile. Occupons-nous de la réciproque. Nous commencerons par nous ramener au cas où S est projectif sur T .

8 Réduction au cas projectif

8.1. Comme $\mathcal{M}_{\eta_T}$ est isotrivial si et seulement si $\mathcal{M}_{\bar{\eta}_T}$ l'est, il est loisible de remplacer T par T' génériquement fini et dominant sur T . En particulier, on se ramène à supposer k algébriquement clos, et T géométriquement connexe.

Il est aussi loisible de remplacer S par S' étale dominant sur S , ce qui permet de supposer S_{η} quasiprojectif.

8.1.1 Lemme. *Si $\mathcal{M}_{(t)}$ est régulier pour un ensemble dense de points $t \in T$, il en est de même pour tout point d'un ouvert dense de T .*

Pour le voir, on peut par exemple utiliser le critère de régularité par restriction à des courbes (relatives dans S/T) [10, I.5], puis, en appliquant le lemme du vecteur cyclique, d'utiliser le critère de régularité en termes de valuation des coefficients de l'opérateur différentiel associé, voir par exemple [10, II. 4.2] pour des détails.

8.1.2 Remarque. On ne peut remplacer “pour tout point d'un ouvert dense” par “pour tout point” à cause du phénomène de confluence.

8.2. Comme toute connexion isotriviale est régulière, on déduit de l'hypothèse de 7.2.2 et du lemme que $\mathcal{M}_{\eta_T}$ est régulière.

Quitte à remplacer T par un ouvert dense, on peut trouver une compactification projective lisse relative $\bar{S} \rightarrow T$ de $S \rightarrow T$, où $\partial S/T := \bar{S} \setminus S$ est un diviseur à croisements normaux strict relatif à T (Hironaka). La méthode algébrique de [10, I.4]¹⁶ permet d'étendre $\mathcal{M}$, quitte à remplacer T par un ouvert étale, en un module à connexion $\bar{\mathcal{M}}$ à pôles logarithmiques le long de $\partial S/T$.

Pour chaque composante D_i de $\partial S/T$, on a alors la notion de résidu de ∇ le long de D_i : c'est un endomorphisme de $\bar{\mathcal{M}}_{D_i}$, dont les valeurs propres appartiennent à l'image d'une section fixée : $\tau : k(S) \rightarrow \overline{k(S)}/\mathbb{Z}$.

Si $\mathcal{M}_{(t)}$ est isotrivial pour tout point fermé $t \in T$, la fibre en t de $\text{Res}_{D_i}(\nabla)$ est semi-simple, et de valeurs propres $\in \tau(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Il s'ensuit que $\text{Res}_{D_i}(\nabla)$ est lui-même semi-simple, de valeurs propres “constantes” $\in \tau(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. En particulier, pour tout point $t \in T$ et tout plongement $\kappa(t) \hookrightarrow \mathbb{C}$ (s'il en est), la monodromie locale de $\mathcal{M}_{(t)} \otimes \mathbb{C}$ autour de $(D_i)_t \otimes \mathbb{C}$ est d'ordre fini indépendant de t .

8.2.1 Lemme. *Il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccc} \bar{S}' & \xleftarrow{\quad} & S' & \xrightarrow{\quad} & S \\ & \searrow & & & \downarrow \\ & & T' & \xrightarrow{\quad} & T \end{array}$$

où T' est étale dominant sur T , S' est étale dominant sur S , $S' \rightarrow T'$ est lisse à fibres géométriquement connexes, $\bar{S}' \rightarrow T'$ est projectif lisse, $\bar{S}' \setminus S'$ est un diviseur de $\bar{S}'$ à croisements normaux relatifs sur T' , et $\mathcal{M}_{S'}$ s'étend en un fibré à connexion intégrable sur $\bar{S}'$ relativement à T' .

Démonstration. On peut supposer k de cardinal inférieur ou égal à celui du continu, ce qui permet de plonger $\bar{k}(T)$ dans $\mathbb{C}$. Par une descente standard, il suffit de montrer l'existence d'un revêtement étale fini connexe $S'_\mathbb{C}$ de $S_\mathbb{C} = S \otimes_T \text{Spec } \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{M}_{S'_\mathbb{C}}$ s'étende en un fibré à connexion intégrable sur une compactification projective lisse $\bar{S}'_\mathbb{C}$ de $S'_\mathbb{C}$ telle que $\bar{S}'_\mathbb{C} \setminus S'_\mathbb{C}$ soit à croisements normaux. L'existence d'extensions à

¹⁶appliquée en prenant pour corps de base K une clôture algébrique $\overline{k(S)}$ de $k(S)$

pôles logarithmiques ramène la question à trouver un revêtement étale fini $S'_\mathbb{C}$ de $S_\mathbb{C}$ tel que les monodromies locales autour des images inverses des $D_{i,\mathbb{C}}$ dans $S'_\mathbb{C}$, qui sont d'ordre fini, soient en fait triviales.

Fixant un point base fermé $s \in S_\mathbb{C}$, il suffit de définir $S'_\mathbb{C}$ par un sous-groupe d'indice fini de $\pi_1(S_\mathbb{C}, s)$ dont l'image par la représentation de monodromie est un sous-groupe sans torsion de $\mathrm{GL}((\mathcal{M}_{S_\mathbb{C}})_s)$. L'existence d'un tel sous-groupe est garantie par le lemme classique de Selberg. $\square$

8.3. Ce lemme ramène la preuve de 7.2.2 au cas où S est projectif lisse sur T . Quitte à remplacer T par T' étale dominant sur T , on peut supposer par ailleurs qu'il existe une section $T \rightarrow S$.

9 Espaces de modules de connexions (rappels)

9.1. Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, T un k -schéma séparé de type fini, $f : S \rightarrow T$ un T -schéma projectif lisse à fibres géométriquement connexes. Soit $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}^\natural(S/T, r)$ le foncteur contravariant qui associe à tout T -schéma séparé de type fini T' l'ensemble des classes d'isomorphismes de $\mathcal{O}_{S \times_T T'}$ -modules localement libres de rang r munis d'une connexion intégrable relative à T' .

Dans [49], C. Simpson construit un T -schéma quasi-projectif $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S/T, r)$ qui coreprésente $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}^\natural(S/T, r)$: il existe un morphisme canonique de foncteurs $\varphi : \mathbf{M}_{\mathrm{DR}}^\natural(S/T, r) \rightarrow \mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S/T, r)$ tel que si Y est un T -schéma séparé de type fini, tout morphisme de foncteurs $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}^\natural(S/T, r) \rightarrow Y$ se factorise de manière unique à travers φ . Cette propriété détermine $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S/T, r)$ à isomorphisme unique près.

Simpson décrit beaucoup de propriétés intéressantes de $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S/T, r)$ (voir *loc. cit.*, II, 6.13¹⁷). Notamment, c'est un schéma de modules grossier : les points géométriques de $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S/T, r)$ représentent les classes d'équivalences de modules à connexion intégrable de rang r sur les fibres géométriques de f - deux modules à connexion étant décrétés équivalents si leur semi-simplifiés sont isomorphes.

La fibre de $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S/T, r)$ en tout point $t \in T$ s'identifie canoniquement à $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S_t, r)$.

9.2. Le fibré à connexion $(\mathcal{O}_S, d_{S/T})^r$ correspond à une section, dite neutre, du morphisme structural $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S/T, r) \rightarrow T$. D'ailleurs, toute connexion relative triviale¹⁸ de rang r donne lieu à la même section, comme on le voit sur les points géométriques.

Le morphisme $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}^\natural(S/T, 1)^{\times_T r} \rightarrow \mathbf{M}_{\mathrm{DR}}^\natural(S/T, r)$ “somme directe de r connexions de rang 1” donne lieu à un morphisme de schémas $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S/T, 1)^{\times_T r} \rightarrow \mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S/T, r)$ qui nous sera utile ($\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S/T, 1)^{\times_T r}$ désigne la puissance r -ième fibrée sur T).

9.3. Pour $r = 1$, ces espaces de modules sont classiques : le produit tensoriel des connexions munit $\mathbf{M}_{\mathrm{DR}}(S/T, 1)$ d'une structure de schéma en groupe commutatif

¹⁷ Simpson énonce ses résultats avec $k = \mathbb{C}$, mais la construction est purement algébrique et vaut sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle quelconque

¹⁸voire “nilpotente”

sur T (la section neutre s'identifiant dans ce cas à la section nulle), et l'oubli de la connexion induit un homomorphisme de $\mathbf{M}_{\text{DR}}(S/T, 1)$ vers le schéma de Picard relatif $\mathbf{Pic}^0(S/T)$. Cet homomorphisme est fidèlement plat, de noyau le schéma en groupe vectoriel attaché à $\Omega_{S/T}^1$, de sorte que $\mathbf{M}_{\text{DR}}(S/T, 1)$ s'identifie à l'extension vectorielle universelle de $\mathbf{Pic}^0(S/T)$. Les connexions isotriviales de rang 1 sur les fibres géométriques S_t correspondent aux points de torsion de $\mathbf{M}_{\text{DR}}(S/T, 1)_t = \mathbf{M}_{\text{DR}}(S_t, 1)$.

10 Une application du théorème de Jordan

10.1. On se place de nouveau dans le cadre de 7.2.2, en supposant désormais que f est projectif lisse et admet une section σ .

10.1.1 Lemme. *Il existe un revêtement étale fini S'/S tel que les fibres de $S' \rightarrow T$ soient géométriquement connexes, et tel que pour tout $t \in T(k)$ et tout objet $\mathcal{M}(t) \in \text{MIC}_{S_t}$ isotrivial, le point de $\mathbf{M}_{\text{DR}}(S'/T, r)$ au-dessus de t représentant $\mathcal{M}(t)_{S'_t}$ est l'image d'un point de torsion du k -groupe $\mathbf{M}_{\text{DR}}(S'_t, 1)^r$.*

Démonstration. Plongeons k dans $\mathbb{C}$, et fixons $t \in T(k)$. Pour tout objet $\mathcal{M}(t) \in \text{MIC}_{S_t}$ isotrivial, l'image de $\pi_1(S_t(\mathbb{C}), \sigma(t))$ par représentation de monodromie attachée à $\mathcal{M}(t)$ est un sous-groupe fini de $\text{GL}_r(\mathbb{C})$, bien défini à conjugaison près. D'après un résultat classique de Jordan (cf. e.g. [19] pour un exposé "moderne"), un tel sous-groupe admet un sous-groupe normal abélien d'indice fini borné par une fonction $j(r)$ de r seul. Comme $\pi_1(S_t(\mathbb{C}), \sigma(t))$ est finiment engendré, l'intersection Γ de ses sous-groupes normaux d'indice $\leq j(r)$ est un sous-groupe caractéristique d'indice fini.

Considérons la suite exacte de groupes fondamentaux

$$\{1\} \rightarrow \pi_1(S_t(\mathbb{C}), \sigma(t)) \rightarrow \pi_1(S(\mathbb{C}), \sigma(t)) \rightarrow \pi_1(T(\mathbb{C}), t) \rightarrow \{1\}$$

qui est d'ailleurs scindée par σ_* . Le sous-ensemble $\Gamma \cdot \sigma_*(\pi_1(T(\mathbb{C}), t))$ de $\pi_1(S(\mathbb{C}), \sigma(t))$ est en fait un sous-groupe, qui définit un revêtement étale fini $S'_\mathbb{C}/S_\mathbb{C}$ tel que les fibres de $S'_\mathbb{C} \rightarrow T_\mathbb{C}$ soient géométriquement connexes, revêtement qui descend automatiquement de $\mathbb{C}$ à k .

On a alors pour tout $t' \in T(k)$ la suite exacte

$$\{1\} \rightarrow \pi_1(S'_{t'}(\mathbb{C}), \sigma(t')) \rightarrow \pi_1(S'(\mathbb{C}), \sigma(t')) \rightarrow \pi_1(T(\mathbb{C}), t') \rightarrow \{1\}$$

et l'intersection de tout sous-groupe fini G de $\pi_1(S(\mathbb{C}), \sigma(t'))$ avec $\pi_1(S'_{t'}(\mathbb{C}), \sigma(t'))$ est abélien.

Ceci montre que pour tout objet $\mathcal{M}(t') \in \text{MIC}_{S'_{t'}}$ isotrivial, le groupe de Galois différentiel de $\mathcal{M}(t')_{S'_{t'}}$ est fini abélien, donc $\mathcal{M}(t')_{S'_{t'}}$ est somme directe d'objets de rang 1, nécessairement isotriviaux. D'où le lemme. $\square$

10.2. Terminons la preuve de 7.2.2. On peut remplacer S par S' comme dans 10.1.1, et $\mathcal{M}$ par son image inverse sur S' . Cette connexion définit une section τ de

$\mathbf{M}_{\text{DR}}(S/T, r) \rightarrow T$. D'après l'hypothèse de 7.2.2 et 10.1.1, pour tout point $t \in S(k)$, $\tau(t)$ est dans l'image de $\mathbf{M}_{\text{DR}}(S'/T, 1)$.

Considérons le produit fibré $\mathbf{M}_{\text{DR}}(S'/T, 1)^{\times_{T'} r} \times_{\mathbf{M}_{\text{DR}}(S'/T, r)} T$ (construit via τ). Il existe un morphisme $h : T' \rightarrow T$ étale dominant tel que la seconde projection $\mathbf{M}_{\text{DR}}(S'/T, 1)^{\times_{T'} r} \times_{\mathbf{M}_{\text{DR}}(S'/T, r)} T'$ admette une section τ' . La composée de τ' et de la projection sur $\mathbf{M}_{\text{DR}}(S'/T, r)$ n'est autre que $\tau \circ h$. Quitte à remplacer T par T' , $\mathbf{M}_{\text{DR}}(S'/T, r)$ par $\mathbf{M}_{\text{DR}}(S' \times_T T'/T', r)$ etc..., on peut donc supposer que τ se relève en une section τ' de $\mathbf{M}_{\text{DR}}(S'/T, 1)^{\times_{T'} r} \rightarrow T$. Il découle du lemme précédent qu'en fait $\tau(t) \in ((\mathbf{M}_{\text{DR}}(S'/T, 1)^{\times_{T'} r})_{\text{tors}})_t$ pour tout $t \in T(k)$.

On en déduit que τ' est une section de torsion de $\mathbf{M}_{\text{DR}}(S'/T, 1)^{\times_{T'} r}$. Le semi-simplifié de $\mathcal{M}_{\eta_T}$ est donc une connexion isotriviale. Pour terminer, on remarque que $\mathcal{M}_{\eta_T}$ est semi-simple en vertu du lemme suivant :

10.2.1 Lemme. *Si $\mathcal{M}_{(t)}$ est semi-simple pour un ensemble dense de points $t \in T$, il en est de même pour tout point d'un ouvert dense de T .*

Démonstration. Il suffit de prouver que si $\mathcal{M}$ s'inscrit dans une suite exacte

$$(*) \quad 0 \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow 0,$$

dont la fibre en un ensemble dense de points est scindée, alors cette suite est scindée sur un ouvert dense de T . L'extension $(*)$ définit une section λ de $H_{\text{DR}}^1(S/T, \underline{\text{Hom}}(\mathcal{M}'', \mathcal{M}'))$. Comme S est projective lisse sur T , on sait qu'en remplaçant derechef T par un ouvert dense si nécessaire, $H_{\text{DR}}^1(S/T, \underline{\text{Hom}}(\mathcal{M}'', \mathcal{M}')) = \mathbf{R}^1 f_*(\Omega_{S/T}^*(\underline{\text{Hom}}(\mathcal{M}'', \mathcal{M}')))$ est localement libre de type fini et commute à tout changement de base (cf. [37, 8.0]). De plus, la fibre de λ en tout point t est la classe de l'extension $(*)_{(t)}$. L'hypothèse se traduit par le fait que la section λ s'annule sur un sous-ensemble dense de T , donc $\lambda = 0$. $\square$

10.2.2 Remarques. 1) On pourrait raffiner 7.2.2, en affaiblissant l'hypothèse sur l'ensemble Δ considéré de points fermés t tels que $\mathcal{M}_{(t)}$ soit supposé isotrivial. Par exemple si $\dim T = 1$, $\dim S = 2$, l'argument des exposants de 8.2 vaut dès que Δ n'est pas image de $\mathbb{Q}$ par une fonction algébrique (qu'on peut préciser). L'argument de la section de torsion de 10.2 vaut sous des hypothèses de hauteurs bien étudiées en géométrie diophantienne.

La méthode alternative de Hrushovsky le conduit à proposer d'autres types de conditions, dans l'esprit de l'élimination des quantificateurs.

2) Même pour $r = 1$, cas où l'on dispose de $\mathbf{M}_{\text{DR}}(S/T, r)$ en inégales caractéristiques (l'extension vectorielle universelle de la composante neutre du schéma de Picard), une approche dans la veine ci-dessus ne fournirait pas une preuve alternative de la conjecture de Grothendieck en rang 1. En effet, il n'est plus vrai, en caractéristique $p > 0$, que les connexions isotriviales de rang 1 correspondent aux points de torsion de $\mathbf{M}_{\text{DR}}(S/T, 1)$.

3) Comme nous l'a signalé J.-B. Bost, c'est précisément pour établir un résultat sur les équations différentielles à solutions algébriques dans la veine du lemme 10.1.1

ci-dessus¹⁹ que Jordan a démontré son théorème sur les sous-groupes finis du groupe linéaire [36].

III Connexions d'origine géométrique

N. Katz a démontré la conjecture de Grothendieck pour la connexion de Gauss–Manin attachée à un morphisme lisse quelconque $f : X \rightarrow S$, ainsi que pour certains de ses facteurs directs découpés par un groupe fini de S -automorphismes de X . Sa méthode repose sur une formule remarquable reliant la p -courbure à l'application de Kodaira–Spencer [38].

Nous allons généraliser ce résultat à tout sous-quotient d'une telle connexion de Gauss–Manin, du moins sous une hypothèse (conjecturalement toujours vérifiée) de connexité des groupes de Galois motiviques. Par les résultats du chapitre I, cela suffira à établir la conjecture de Grothendieck–Katz pour toute connexion d'origine géométrique (sous une hypothèse analogue).

Outre la formule de Katz, les ingrédients essentiels de la démonstration sont le théorème de Mazur–Ogus [13], et la théorie des motifs purs, sous la forme inconditionnelle présentée dans [6].

La stratégie est de remplacer, dans l'esprit du chapitre I, les facteurs arbitraires de la connexion de Gauss–Manin attachée à un morphisme projectif lisse, qui ont “peu de structure” en général, par les facteurs de l'algèbre de Lie de Galois différentielle, qui ont une certaine interprétation motivique. Si la démonstration s'avère un peu technique, cela tient en grande partie, comme nous le verrons, à une lacune dans la théorie des motifs : on ne sait pas prouver que les groupes de Galois motiviques sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle sont connexes.

11 Isotrivialité, et horizontalité de la filtration de Hodge (rappels)

11.1 Rappels sur la filtration de Hodge et l'application de Kodaira–Spencer. Soient k un corps, S une k -variété lisse géométriquement connexe, et $f : X \rightarrow S$ un k -morphisme *projectif* et lisse. Pour alléger quelques notations, et sans perte de généralité, nous supposons S affine.

Le $\mathcal{O}_S$ -module localement libre gradué $\mathcal{H}_f = \bigoplus_q \mathbb{R}^q f_* \Omega_{X/S}^*$ est muni de sa connexion de Gauss–Manin ∇ . La filtration de Hodge de $\mathcal{H}_f$ est la filtration décroissante donnée par $\mathrm{Fil}^i \mathcal{H}_f = \mathrm{Im}(\mathbb{R} f_* \Omega_{X/S}^{\geq i} \rightarrow \mathcal{H}_f)$. Elle n'est pas horizontale, mais on a la “transversalité de Griffiths” : $\nabla \mathrm{Fil}^i \mathcal{H}_f \subset \Omega_S^1 \otimes \mathrm{Fil}^{i-1} \mathcal{H}_f$. Pour tout i et tout champ de vecteurs D sur S , on a donc une application $\mathcal{O}_S$ -linéaire $Gr^i \nabla(D) : Gr^i \mathcal{H}_f \rightarrow Gr^{i-1} \mathcal{H}_f$, dite de Kodaira–Spencer.

¹⁹mais formulé de manière assez imprécise, cf. [32, p. 142]

Considérons l'hypothèse suivante :

(*)_f la suite spectrale de Hodge–De Rham $E_1^{ij} = R^j f_* \Omega_{X/S}^{\geq i} \implies \mathbb{R}^{i+j} f_* \Omega_{X/S}^*$ dégénère en E_1 (i.e. $\oplus_j E_1^{ij} = Gr^i \mathcal{H}_f$ pour tout i), et les $Gr^i \mathcal{H}$ sont localement libres sur S .

Elle entraîne que

i) pour tout sous-module à connexion $\mathcal{M}$ de $\mathcal{H}_f$, la filtration de $\mathcal{M}$ induite par la filtration de Hodge est horizontale (i.e. les $Fil^i \mathcal{M}$ sont des sous-modules à connexion) si et seulement si pour tout i et tout champ de vecteurs D , les applications de Kodaira–Spencer $Gr^i \nabla(D)$ sont nulles [38, 1.4.1.9];

ii) (*)_{f^m} est vérifiée, en notant f^m la puissance fibrée m -ième de f au-dessus de S , et l'isomorphisme de Künneth $\mathcal{H}_f^{\otimes m} \cong \mathcal{H}_{f^m}$ est compatible aux connexions et filtrations de Hodge (en munissant le membre de gauche de la connexion, resp. filtration, puissance tensorielle). Par ailleurs, la dualité de Poincaré identifie le dual de $\mathcal{H}_f$ à $\mathcal{H}_f$ comme module à connexion, et cette identification est compatible aux filtrations à un décalage près (par la dimension relative de f).

11.2 Isotrivialité et filtration de Hodge : le cas de caractéristique nulle. L'hypothèse (*)_f est satisfaite lorsque $\text{car } k = 0$ en vertu de la théorie de Hodge.

11.2.1 Proposition. i) Soit $\mathcal{M}$ un sous-module à connexion isotrivial²⁰ de $\mathcal{H}_f$. Alors la filtration de Hodge induite sur $\mathcal{M}$ est horizontale. De plus, si k est un sous-corps algébriquement fermé de $\mathbb{C}$, il existe un sous-module à connexion isotrivial $\mathcal{N}$ de $\mathcal{H}_f$ contenant $\mathcal{M}$ et provenant d'une sous-variation de structures de Hodge rationnelles de $\bigoplus_q R^q f_*^{\text{an}} \mathbb{Q}$.

ii) Réciproquement, supposons (avec $k \subset \mathbb{C}$) que $\mathcal{M}$ soit un sous-module à connexion de $\mathcal{H}$ provenant d'une sous-variation de structures de Hodge rationnelles de $\bigoplus_q R^q f_*^{\text{an}} \mathbb{Q}$, et que la filtration $Fil^* \mathcal{M}$ soit horizontale. Alors $\mathcal{M}$ est isotrivial.

Démonstration. i) Comme la condition de nullité de l'application de Kodaira–Spencer est invariante par revêtement étale fini de S , on peut supposer $\mathcal{M}$ trivial. Alors d'après le théorème de la partie fixe [20, 4.1], le plus grand sous-module à connexion trivial de $\mathcal{H}_f$ provient d'une sous-variation de structures de Hodge rationnelles de $R^q f_*^{\text{an}} \mathbb{Q}$.

ii) Voir [38, 4.2.1.3]. Le point est que la monodromie en $s \in S(\mathbb{C})$ de $\mathcal{M}_s \cap H^*(X_s(\mathbb{C}), \mathbb{R})$ est compacte par un argument de polarisation, mais aussi contenue dans le groupe discret $\text{Aut}(\mathcal{M}_s \cap H^*(X_s(\mathbb{C}), \mathbb{Z})/\text{torsion})$, donc finie. Dans ii), l'hypothèse de rationalité est essentielle (cf. [4] app.).

11.3 Rappels sur la filtration conjuguée et l'isomorphisme de Cartier. On suppose maintenant $\text{car } k = p > 0$. La filtration conjuguée de $\mathcal{H}_f$ est la filtration croissante donnée par $Fil_i \mathcal{H}_f = \text{Im}(\mathbb{R} f_*(\tau_{\leq i} \Omega_{X/S}^* \rightarrow \mathcal{H}_f)$. C'est la filtration sur l'aboutissement de la suite spectrale conjuguée

$${}_c E_2^{ij} = R^i f_* H^j(\Omega_{X/S}^*) \implies \mathbb{R}^{i+j} f_* \Omega_{X/S}^*.$$

²⁰i.e. qui devient constant sur un revêtement étale fini de S

La connexion de Gauss–Manin agit sur cette suite spectrale, et le terme ${}_cE_2^{ij}$ est de p -courbure nulle. En particulier, les p -courbures $\psi_p(D)$ envoient $\text{Fil}_i \mathcal{H}_f$ dans $\text{Fil}_{i-1} \mathcal{H}_f$. On note $Gr_i \psi_p(D) : Gr_i \mathcal{H}_f \rightarrow Gr_{i-1} \mathcal{H}_f$ l'application $\mathcal{O}_S$ -linéaire induite sur les gradués.

Soit $F_{X/S} : X \rightarrow X^{(p)}$ le morphisme de Frobenius relatif. On dispose de l'isomorphisme de Cartier inverse $C^{-1} : \Omega_{X^{(p)}/S}^i \rightarrow H^i(F_{X/S*} \Omega_{X/S}^*)$, caractérisé par sa multiplicativité et la formule locale suivante : si $x^{(p)}$ est la coordonnée locale sur $X^{(p)}$ correspondant à x sur X , $C^{-1}(dx^{(p)}) = x^{p-1}dx$. Il induit un isomorphisme $C^{-1} : F_S^* E_1^{ji} \cong {}_cE_2^{ij}$ (cf. ([38, 2.3.1.2])).

Sous l'hypothèse $(*)_f$, la suite spectrale conjuguée dégénère en E_2 ([38, 2.3.2]), d'où un isomorphisme $C^{-1} : F_S^* Gr^i \mathcal{H}_f \cong Gr_i \mathcal{H}_f$.

11.4 (Iso)trivialité et filtration de Hodge : le cas de caractéristique > 0 . Rappelons qu'en caractéristique $p > 0$, l'isotrivialité d'un module à connexion équivaut à sa trivialité, ou encore à la nullité des p -courbures.

Comme l'a montré N. Katz, la trivialité d'un sous-module à connexion $\mathcal{M}$ de $\mathcal{H}_f$ est reliée à l'horizontalité de la filtration de Hodge non de $\mathcal{M}$ lui-même, mais d'un certain “tordu par Cartier”. Son résultat technique principal [38, 3] peut se formuler de la manière suivante (cf. aussi [44]).

11.4.1 Théorème. *Outre $(*)_f$, supposons qu'il existe un sous-module à connexion $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{H}_f$ tel que pour tout i , C^{-1} envoie $F_S^* Gr^i \mathcal{M}'$ isomorphiquement sur $Gr_i \mathcal{M}$. Alors le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} F_S^* Gr^i \mathcal{M}' & \xrightarrow{F_S^* Gr^i \nabla(D)} & F_S^* Gr^{i-1} \mathcal{M}' \\ C^{-1} \downarrow & & \downarrow C^{-1} \\ Gr_i \mathcal{M} & \xrightarrow{Gr_i \psi_p(D)} & Gr_{i-1} \mathcal{M} \end{array}$$

est anticommutatif : $C^{-1} \circ F_S^ Gr^i \nabla(D) = -Gr_i R_p(D) \circ C^{-1}$.*

En particulier, si $\mathcal{M}$ est un module à connexion trivial, la filtration de Hodge de $\mathcal{M}'$ est horizontale.

Réciproquement, si la filtration de Hodge de $\mathcal{M}'$ est horizontale, on voit que les $R_p(D)$ envoient $\text{Fil}_i \mathcal{M}$ dans $\text{Fil}_{i-2} \mathcal{M}$, mais il n'est pas clair que les $R_p(D)$ s'annulent. Nous verrons en 15.5.2 un résultat partiel dans cette direction.

Katz remarque que l'existence de $\mathcal{M}'$ est vérifiée pour certains facteurs $\mathcal{M}$ découpés sur $\mathcal{H}_f$ par l'action d'un groupe fini d'automorphismes de f . En général, c'est une hypothèse difficile à satisfaire. Notre fil conducteur sera de remplacer (en caractéristique nulle) $\mathcal{H}_f$ par la connexion $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{H}_f)$ dont les fibres sont les algèbres de Lie des groupes de Galois différentiels de $\mathcal{H}_f$, et de montrer l'existence de $\mathcal{M}'$ lorsque $\mathcal{M}$ est la réduction modulo p d'un quelconque facteur direct de $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{H}_f)$.

11.4.2 Remarque (Question de signe). La preuve “cristalline” de 11.4.1 que donne A. Ogus (via le théorème de Mazur) est plus dans le fil de la suite du présent chapitre. Elle donne bien l’anticommutativité, comme énoncé ci-dessus ([44, 2.9]). Chez Katz, on trouve l’affirmation que le diagramme ci-dessus commute au signe $(-)^{i-1}$ près, au lieu du signe $-$ ([38, 3.4.1.6], [44, rem. 2.12]) ; il semble que l’erreur de [38] soit l’interprétation 3.4.3 du calcul de cocycles (3.4.3.0) : le calcul (3.4.3.0) démontre en fait l’anticommutativité du diagramme ci-dessus.

12 Cycles motivés

12.1 Introduction. Dans tout ce paragraphe, on suppose de nouveau que k est de caractéristique nulle, et même plongeable dans $\mathbb{C}$ pour simplifier.

Les motifs interviennent dans notre contexte par le biais suivant : il s’avère que l’algèbre de Lie du groupe de Galois différentiel générique $(\mathrm{LieGal}\mathcal{H}_f)_{|k(S)}$ est la réalisation de De Rham d’un motif sur $k(S)$ au sens de [6].

Parmi les diverses définitions des motifs purs dont on dispose et qui mènent à une théorie non conjecturale, celle de [6], très proche de la définition originale de Grothendieck, est la plus algébrique et se prête à la réduction modulo p . Nous commencerons par quelques rappels sur cette théorie.

Nous supposons le lecteur familier avec la construction et les propriétés élémentaires de la catégorie monoïdale $\mathbb{Q}$ -linéaire des motifs de Grothendieck, définis en termes de correspondances algébriques modulo l’équivalence homologique. L’équivalence homologique des cycles algébriques se définit par la nullité des classes de cohomologie associées dans une cohomologie de Weil classique (Betti, De Rham, étale), et ne dépend pas du choix de cette dernière en vertu des isomorphismes de comparaison.

Chaque cohomologie classique définit un foncteur fibre, appelé réalisation, sur cette catégorie des motifs homologiques. Le problème est que faute de savoir démontrer les conjectures standard, on ignore si c’est une catégorie abélienne. Le remède proposé dans [6] consiste à inverser formellement certains morphismes de la catégorie dont les réalisations sont des isomorphismes. Les morphismes de cette catégorie sont appelés correspondances motivées dans *loc. cit.*

12.2 Cycles et correspondances motivées. On fixe une classe $\mathcal{V}$ de k -schémas projectifs lisses, stable par produit, somme disjointe. Soit $X \in \mathcal{V}$. On introduit dans *loc. cit.* le $\mathbb{Q}$ -espace gradué $A_{\mathrm{mot}}^*(X)$ des cycles motivés sur X (modélisés sur $\mathcal{V}$), et pour toute cohomologie classique H , un homomorphisme gradué $A_{\mathrm{mot}}^*(X) \rightarrow H^{2*}(X)(*)$, dont l’image s’explique ainsi : c’est l’ensemble des sommes finies de classes de cohomologie de la forme $\mathrm{pr}_{X*}^{XY}(\alpha \cap \mathrm{Lef}_{XY}^{-1}(\beta))$, où $Y \in \mathcal{V}$ (arbitraire), α et β sont des cycles algébriques sur $X \times Y$, et Lef_{XY}^{-1} est l’inverse de l’isomorphisme de Lefschetz attaché à des polarisations de X et Y :

$$\mathrm{Lef}_{XY} \in \oplus_r \mathrm{Hom}(H^{2r}(X \times Y)(r), H^{2(d+\dim Y-r)}(X \times Y)(d + \dim Y - r)).$$

Étant donné un plongement $\iota : k \hookrightarrow \mathbb{C}$, les images des cycles motivés dans les différentes cohomologies classiques se correspondent par les isomorphismes de comparaison canoniques

$$\text{comp}_{\text{B,DR}} : H(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}) = H_{\text{B}}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \rightarrow H_{\text{DR}}(X) \otimes_k \mathbb{C} ,$$

$$\text{comp}_{\text{B,ét},p,\bar{\iota}} : H_{\text{B}}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \rightarrow H_{\text{ét}}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_p) =: H_{\text{ét},p}(X)$$

(qui dépend du choix d'un plongement $\bar{\iota} : \bar{k} \hookrightarrow \mathbb{C}$ d'une clôture algébrique fixée de k , compatible à ι).

Les images des cycles motivés en cohomologie de Betti sont des cycles de Hodge, les images en cohomologie étale sont invariants par $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ (cela découle de la propriété analogue pour les cycles algébriques, *cf. loc. cit.* 2.5).

On définit à partir des cycles motivés la notion de correspondance motivée (exemple : les projecteurs de Künneth), et leur composition. Cela permet de bâtir la catégorie monoïdale $\mathbb{Q}$ -linéaire des motifs $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$ modelés sur $\mathcal{V}$ en suivant la procédure usuelle, mais en remplaçant correspondances algébriques par correspondances motivées. On note $h(X)$ le motif attaché à X .

12.2.1 Proposition ([6]). *Cette catégorie $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$ est tannakienne neutre, semi-simple, graduée, polarisée. Toute cohomologie classique (Betti, De Rham, étale) donne lieu à un foncteur fibre (réalisation).*

Pour tout plongement $\iota : k \subset \mathbb{C}$, la sous-catégorie tannakienne $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}(M)$ de $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$ engendrée par un objet M arbitraire est donc équivalente, via la réalisation de Betti, à la catégorie tannakienne des représentations d'un sous- $\mathbb{Q}$ -groupe réductif $G_{\text{mot}}(M)$ de $\text{GL}(H_{\text{B}}(M_{\mathbb{C}}))$, le groupe de Galois motivique de M (relatif à ι).

La catégorie des motifs d'Artin est la sous-catégorie abélienne (qui est tannakienne) engendrée par les $h(\text{Spec } k')$, où est une extension finie de k .

Tout comme pour la catégorie des motifs homologiques de Grothendieck, les réalisations de $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$ s'enrichissent naturellement en des foncteurs fibres à valeurs dans des catégories d'espaces vectoriels munis de structures supplémentaires :

- la réalisation de Betti s'enrichit en un foncteur à valeurs dans les structures de Hodge rationnelles polarisables,
- la réalisation de De Rham s'enrichit en un foncteur à valeurs dans les k -vectoriels filtrés (filtration de Hodge),
- la réalisation étale p -adique s'enrichit en un foncteur à valeurs dans les $\mathbb{Q}_p$ -vectoriels munis d'une action continue de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$.

12.3 Frobenius cristallin. Supposons à présent k de type fini sur $\mathbb{Q}$. Pour $X \in \mathcal{V}$ fixé, soit σ une $\mathbb{Z}$ -algèbre lisse intègre (donc de type fini), de corps des fractions k , telle que X provienne d'un σ -schéma projectif lisse $\mathfrak{X}$ (il en existe). Pour tout $m \geq 0$, X^m provient alors du σ -schéma projectif lisse m -ième puissance fibrée de $\mathfrak{X}$ sur $\text{Spec } \sigma$. Si M est un motif découpé sur une puissance de X , on dira alors abusivement que M “a bonne réduction” sur σ .

Soit v un idéal maximal de $\mathfrak{o}$, de caractéristique résiduelle $p = p_v$. Soient W_v l’anneau de Witt du corps résiduel κ_v , K_v son corps de fractions, σ_v son automorphisme de Frobenius, $\bar{K}_v$ une clôture algébrique fixée de K_v .

Comme $\mathfrak{o}$ est lisse sur $\mathbb{Z}$, l’homomorphisme $\mathfrak{o} \rightarrow \kappa_v$ se relève en un homomorphisme injectif $\iota_v : \mathfrak{o} \hookrightarrow W_v$ (non unique).

La cohomologie cristalline de $H_{\text{cris}}(\mathfrak{X} \otimes \kappa_v, W_v)$ est munie d’une action σ_v -linéaire de Frobenius (Frobenius cristallin). Le K_v -espace qui s’en déduit en inversant p , muni de Frobenius, dépend de v et de X mais est indépendant du choix du modèle $\mathfrak{X}$ (et de ι) ; on le note $(H_{\text{cris},v}(X), \varphi_{X,v})$ ($\varphi_{X,v}$ est d’ailleurs bijectif).

Pour tout choix de ι_v , l’isomorphisme de Berthelot

$$H_{\text{DR}}(\mathfrak{X}) \otimes_{\mathfrak{o}} W_v \rightarrow H_{\text{cris}}(\mathfrak{X} \otimes \kappa_v, W_v),$$

munit $H_{\text{DR}}(\mathfrak{X}) \otimes_{\mathfrak{o}} W_v$ d’une action σ_v -linéaire par transport de structure. On note

$$\text{comp}_{\text{DR}, \text{cris}, \iota_v} : H_{\text{DR}}(X) \otimes_k K_v \cong H_{\text{cris},v}(X)$$

l’isomorphisme qui s’en déduit, et φ_{X, ι_v} l’endomorphisme σ_v -linéaire de $H_{\text{DR}}(X) \otimes_k K_v$ déduit de $\varphi_{X,v}$ (il dépend de ι_v et de X , mais pas du modèle $\mathfrak{X}$).

12.3.1 Proposition ([6, 2.5.2]). *Pour tout cycle motivé $\xi \in A_{\text{mot}}^r(X)$ et pour tout ι_v comme ci-dessus, l’image de ξ dans $H_{\text{DR}}^{2r}(X)(r) \otimes_k K_v$ est invariante sous φ_{X, ι_v} (on rappelle que le “twist” (r) multiplie φ_{X, ι_v} par un facteur p^{-r}).*

La difficulté réside dans l’éventualité²¹ où les variétés auxiliaires $Y \in \mathcal{V}$ intervenant dans la définition de ξ n’ont pas bonne réduction en $\mathfrak{o}$. La preuve de *loc. cit.* utilise la K_v -algèbre de Fontaine B_{cris, K_v} (muni de son action de $\text{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$, de son Frobenius et de sa filtration canonique), et l’isomorphisme de comparaison compatible à ces structures

$$\text{comp}_{\text{ét}, \text{DR}, \bar{\iota}_v} : H_{\text{ét}}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{cris}, K_v} \rightarrow H_{\text{DR}}(X) \otimes_k B_{\text{cris}, K_v}$$

qui dépend du choix d’un plongement $\bar{\iota}_v : \bar{k} \hookrightarrow \bar{K}_v$ au-dessus de ι_v . Au paragraphe suivant, on utilisera le fait que $\text{comp}_{\text{ét}, \text{DR}, \bar{\iota}_v}$ envoie le $\mathbb{Q}_p$ -espace

$$(H_{\text{ét}}^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_p)(r))^{\text{Gal}(\bar{K}_v/K_v)}$$

bijectivement sur

$$(\text{Fil}^0(H_{\text{DR}}^{2r}(X)(r)) \otimes_k K_v)^{\varphi_{X, \iota_v}}.$$

12.3.2 Corollaire. *Sur la sous-catégorie de $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$ formée des motifs à bonne réduction sur $\mathfrak{o}$, on peut définir pour tout idéal maximal v de $\mathfrak{o}$ un foncteur fibre²² $H_{\text{cris},v}$ à valeurs dans les K_v -vectoriels munis d’un endomorphisme σ_v -linéaire, vérifiant $H_{\text{cris},v}(h(X)) = H_{\text{cris},v}(X)$ (pour tout X à bonne réduction sur $\mathfrak{o}$). $\square$*

²¹pour nos applications, on peut l’éviter car ces variétés auxiliaires interviendront en nombre fini, et on peut toujours rétrécir $\mathfrak{o}$ en conséquence

²²bien défini à isomorphisme canonique près

13 Anneaux semi-simples motiviques

13.1 Digression sur les anneaux semi-simples dans une catégorie tannakienne neutre. Soit $\mathcal{T}$ une catégorie tannakienne neutre sur un corps K de caractéristique nulle. Soit A un anneau de $\mathcal{T}$. Il est automatiquement artinien. De même, l'anneau ordinaire $F(A)$ est artinien, pour tout foncteur fibre F (à valeurs dans les vectoriels sur une extension de K). Un idéal simple de A est un idéal (bilatère) I qui, en tant qu'anneau de $\mathcal{T}$, n'admet pas d'idéal non nul distinct de I .

13.1.1 Lemme. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- a) A n'a pas d'idéal nilpotent non nul,
- b) A est produit de ses idéaux simples,
- c) $F(A)$ est semi-simple pour un (resp. pour tout) foncteur fibre F .

Si ces conditions sont vérifiées, on dit alors que A est semi-simple.

Démonstration. Notons $a)_F$ et $b)_F$ les propriétés analogues à a) et b) respectivement, avec $F(A)$ au lieu de A . Il est bien connu que $a)_F \iff b)_F \iff F(A)$ est semi-simple. Cette dernière condition est indépendante de F : deux foncteurs fibres deviennent isomorphes après extension des corps des coefficients, et la semi-simplicité des algèbres est insensible à l'extension des scalaires puisque $K = 0$.

Fixons donc un F neutralisant $\mathcal{T}$, de sorte que les idéaux de A correspondent aux idéaux de $F(A)$ stables sous le groupe tannakien $\mathbf{Aut}^{\otimes} F$. Il est clair que a) $\iff$ $a)_F$, du fait que le radical nilpotent de $F(A)$ est stable sous $\mathbf{Aut}^{\otimes} F$.

Par ailleurs, $b)_F \implies b)$: en effet $\mathbf{Aut}^{\otimes} F$ permute les idéaux simples de A . Donc tout idéal J de $F(A)$ stable sous $\mathbf{Aut}^{\otimes} F$ et minimal pour cette propriété est produit d'idéaux simples, et $F(A)$ est produit de ces idéaux J .

Enfin, $b) \implies a)$ est clair. □

On prendra garde toutefois à ce qu'un idéal simple de $F(A)$ n'est pas nécessairement égal à l'image par F d'un idéal simple de A (même si F neutralise $\mathcal{T}$).

13.1.2 Remarques. 1) Si A est commutative, le groupe tannakien $\mathbf{Aut}^{\otimes} F$ agit nécessairement à travers un quotient fini G (un groupe fini étale non nécessairement constant) sur la K -algèbre $F(A)$, qui est un produit fini d'extensions finies de K : pour toute extension K'/K , on a $G(K') \subset \mathbf{Aut}_{K'\text{-alg}}(F(A) \otimes_K K')$.

En particulier, A est un objet semi-simple de $\mathcal{T}$, et cet objet est isomorphe à $\mathbf{1}^n$ si $\mathbf{Aut}^{\otimes} F$ est connexe ($\mathbf{1}$ désignant l'unité de $\mathcal{T}$).

2) Sans supposer A commutative, il n'est plus vrai qu'un anneau semi-simple dans $\mathcal{T}$ soit un objet semi-simple de $\mathcal{T}$ (considérer par exemple le End interne de la représentation standard de dimension 2 du groupe additif $\mathbb{G}_a$).

3) Un cas particulier intéressant d'anneau commutatif semi-simple se présente lorsque $\mathbf{Aut}^{\otimes} F$ est fini : à savoir $A = \mathcal{O}(\pi(\mathcal{T}))$, l'anneau correspondant au groupe fondamental "interne" $\pi(\mathcal{T})$ [21]. On a $F(A) = \mathcal{O}(\mathbf{Aut}^{\otimes} F)$, sur lequel $\mathbf{Aut}^{\otimes} F$ agit par conjugaison (*loc. cit.*). En particulier, $A \cong \mathbf{1}^n$ (en tant qu'objet de $\mathcal{T}$) si et seulement si $\mathbf{Aut}^{\otimes} F$ est abélien.

13.2 Anneaux commutatifs semi-simples dans $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$. Soit A un anneau commutatif semi-simple dans la catégorie tannakienne neutre $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$. D’après ce qui précède, la réalisation de Betti A_B relative à un plongement $k \hookrightarrow \mathbb{C}$ (resp. de De Rham A_{DR} , resp. étale p -adique $A_{\text{ét},p}$, resp. cristalline $A_{\text{cris},v}$) est une algèbre commutative semi-simple de dimension finie sur $\mathbb{Q}$ (resp. k , resp. $\mathbb{Q}_p$, resp. K_v).

On choisit $\mathfrak{o}$ intègre de type fini sur $\mathbb{Z}$, de corps des fractions k , tel que A ait bonne réduction sur $\mathfrak{o}$ (cf. 12.3). plus précisément, représentons A comme découpé par une correspondance motivée e sur une variété $Y \in \mathcal{V}$ admettant un modèle projectif lisse $\mathfrak{Y}$ sur $\mathfrak{o}$.

Comme on l’a vu, A_B est un produit de corps de nombres. On note E le compositum des clôtures galoisiennes dans $\mathbb{C}$ des facteurs de A_B (relatives à $\mathbb{Q}$).

13.2.1 Proposition. *On suppose que k contient E . Alors :*

- 1) $A_{DR} = \text{Fil}^0 A_{DR}$.
- 2) *Tout idempotent de la k -algèbre commutative semi-simple A_{DR} est, pour tout $k \xrightarrow{\iota_v} K_v$ comme ci-dessus, combinaison linéaire à coefficients ²³ dans E d’invariants sous le Frobenius cristallin φ_{A,ι_v} dans $A_{DR} \otimes_k K_v$.*
- 3) *Si en outre A_{DR} est scindé, i.e. $A_{DR} \cong k^n$, alors le complété E_v de E (pour la place induite par le plongement dans K_v) scinde la $\mathbb{Q}_p$ -algèbre $(A_{DR} \otimes_k K_v)^{\varphi_{A,\iota_v}}$, et φ_{A,ι_v} permute les idempotents minimaux de A_{DR} .*
- 4) *Si les idempotents minimaux de A_{DR} s’étendent en des endomorphismes de $H_{DR}(\mathfrak{Y})$ (ce qui se produit toujours après localisation convenable de $\mathfrak{o}$), et si ce dernier est sans torsion, alors dans 3), la permutation induite par φ_{A,ι_v} ne dépend que de v (et de A , mais pas de ι_v).*

Démonstration. Prouvons d’abord 2). L’action de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ sur $A_{\text{ét},p}$ respecte la structure de $\mathbb{Q}_p$ -algèbre, donc se factorise à travers un sous-groupe du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ (avec $n = [A_B : \mathbb{Q}]$). Par Hermite–Minkowski, les homomorphismes $\pi_1^{\text{alg}}(\text{Spec } \mathfrak{o}) \rightarrow \mathfrak{S}_n$ sont en nombre fini. Il est loisible de remplacer $k = \text{Frac}(\mathfrak{o})$ par l’extension finie correspondant à l’intersection des noyaux de ces homomorphismes. Cela nous ramène au cas où $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ agit trivialement sur chaque $A_{\text{ét},p}$. En particulier, pour tout plongement $\iota_v : k \hookrightarrow K_v$ comme ci-dessus, et pour tout plongement $\bar{\iota}_v : \bar{k} \hookrightarrow \bar{K}_v$ au-dessus de ι_v , le groupe de Galois local $\text{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$ agit trivialement sur $A_{\text{ét},p}$.

Considérons les isomorphismes de comparaison

$$A_B \otimes_{\mathbb{Q}} B_{\text{cris},K_v} \xrightarrow{\text{comp}_{B,\text{ét},p,\bar{\iota}} \otimes 1} A_{\text{ét},p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{cris},K_v} \xrightarrow{\text{comp}_{\text{ét},DR,\bar{\iota}_v}} A_{DR} \otimes_k B_{\text{cris},K_v}.$$

Comme ceux-ci respectent la structure d’algèbre, l’inverse du composé envoie tout idempotent e de A_{DR} sur un idempotent de $A_B \otimes_{\mathbb{Q}} B_{\text{cris},K_v}$ qui se trouve nécessairement déjà dans $A_{B,\iota} \otimes_{\mathbb{Q}} E$ (E étant plongé dans K_v via ι_v). On conclut que e est dans le E -sous-espace de $A_{DR} \otimes_k B_{\text{cris},K_v}$ engendrée par l’image de A_B . Comme

²³dépendant, a priori, de ι_v

$\text{comp}_{B,et,p,\bar{\iota}}(A_B) \subset (A_{\text{ét},p})^{\text{Gal}(\bar{K}_v/K_v)}$, cette image est contenue dans $\text{Fil}^0(A_{\text{DR}}) \otimes K_v$ et est fixe sous φ_{A,ι_v} .

Prouvons 1). On peut supposer, quitte à remplacer k par une extension finie, que $A_{\text{DR}} \cong k^{[A_B:\mathbb{Q}]}$. Les idempotents de A_{DR} engendrent alors A_{DR} sur k , et sont dans Fil^0 d'après la première assertion²⁴.

Prouvons 3). Si k scinde A_{DR} , les idempotents de A_{DR} engendrent A_{DR} comme k -vectoriel, donc $A_{\text{DR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E_v$ comme E_v -vectoriel. Or par le point 2), ces idempotents sont dans $(A_{\text{DR}} \otimes_k K_v)^{\varphi_{A,\iota_v}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E_v$. On a un isomorphisme canonique de E_v -algèbres

$$(A_{\text{DR}} \otimes_k K_v)^{\varphi_{A,\iota_v}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E_v = E_v^{\text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(A_{\text{DR}} \otimes_k K_v)^{\varphi_{A,\iota_v}}, E_v}$$

et l'assertion en découle.

Prouvons enfin 4). Il suffit de montrer que la bijection

$$\text{Hom}_{k\text{-alg}}(A_{\text{DR}}, k) \rightarrow \text{Hom}_{K_v\text{-alg}}(A_{\text{cris},v}, K_v)$$

induite par $\text{comp}_{DR,\text{cris},\iota_v}$ ne dépend que de v , et non de ι_v . Pour cela, on remarque que cette dernière se factorise comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_k(A_{\text{DR}}, k) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{o}}(eH_{\text{DR}}(\mathfrak{Y}), \mathfrak{o}) \rightarrow \text{Hom}_{\kappa_v}(eH_{\text{DR}}(\mathfrak{Y}) \otimes \kappa_v, \kappa_v) \rightarrow \\ &\text{Hom}_{\kappa_v}(eH_{\text{cris},v}(\mathfrak{Y}) \otimes \kappa_v, \kappa_v) \rightarrow \text{Hom}_{W_v}(eH_{\text{cris},v}(\mathfrak{Y}), W_v) \rightarrow \text{Hom}_{K_v}(A_{\text{cris},v}, K_v), \end{aligned}$$

et que chacune de ces bijections ne dépend que de v . □

Ces résultats sont malheureusement insuffisants pour nos applications. Pour aller plus loin dans l'étude des Frobenius cristallins d'un anneau commutatif semi-simple A dans $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$, nous sommes amenés à supposer que A est un *motif d'Artin*. C'est conjecturalement²⁵ toujours le cas (quitte à agrandir $\mathcal{V}$), puisque le groupe de Galois motivique $G_{\text{mot}}(A)$ est fini.

Supposons que A_{DR} soit scindé, d'où un isomorphisme canonique d'algèbres $A_{\text{DR}} = k^{\text{Hom}(A_{\text{DR}}, k)}$. Via $\text{comp}_{B,\text{DR}}$, $\text{Hom}(A_B, E)$ s'identifie alors à $\text{Hom}_k(A_{\text{DR}}, k)$, donc $A_{\text{DR}} = k^{\text{Hom}(A_B, E)}$.

On indexera en conséquence²⁶ les idempotents minimaux e_{χ} de A_{DR} par $\chi \in \text{Hom}(A_B, E) : e_{\chi}(\chi') = \delta_{\chi, \chi'}$. On a une action canonique à droite de $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ sur ces idempotents, donnée par $(e_{\chi})^{\sigma} := e_{\sigma^{-1} \circ \chi}$.

13.2.2 Proposition. *Supposons que A soit un motif d'Artin. Alors ni A_B ni E ne dépendent du plongement $\iota : k \hookrightarrow \mathbb{C}$ choisi. Pour tout idéal maximal v de $\mathfrak{o}$, notons $\mathfrak{p}_v$ le premier de E correspondant.*

²⁴on peut aussi déduire la seconde assertion de la connexité des groupes de Mumford-Tate

²⁵cela découlerait tant de la conjecture de Hodge que de la conjecture de Tate

²⁶la motivation pour cette indexation qui privilégie la réalisation de Betti est l'application ultérieure de 11.2.1 ii), qui fait appel à la rationalité en réalisation de Betti

Alors pour tout $\iota_v : \mathfrak{o} \hookrightarrow W_v$ comme ci-dessus, la permutation des e_χ induite par le Frobenius cristallin φ_{A, ι_v} est donnée par

$$\varphi_{A, \iota_v}(e_\chi) = e_{(\mathfrak{p}_v, E/\mathbb{Q})_\chi},$$

où $(\mathfrak{p}_v, E/\mathbb{Q}) \in \text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ est le symbole d'Artin. En particulier, φ_{A, ι_v} respecte les $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ -orbites parmi les e_χ .

Démonstration. Quitte à remplacer k par une extension finie, on peut supposer que A - et par suite tout objet de $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}(A)$ - est isomorphe à une somme de copies de $\mathbf{1}$ en tant qu'objet de $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$, donc que $G_{\text{mot}}(A) = \{1\}$. Pour tout autre plongement $\iota' : k \hookrightarrow \mathbb{C}$, les foncteurs fibres $H_{B, \iota}$ et $H_{B, \iota'}$ sur $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}(A)$ sont alors isomorphes (via un unique isomorphisme), donc $A_B = H_B(\iota^* A)$ ne dépend pas de ι (ni a fortiori E).

Sur $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}(A)$, on a par ailleurs une suite d'isomorphismes de foncteurs fibres

$$H_B \otimes_{\mathbb{Q}} K_v \xrightarrow{\text{comp}_{B, \text{DR}}} H_{\text{DR}} \otimes_k K_v \xrightarrow{\text{comp}_{\text{DR}, \text{ét}, p, \bar{\iota}_v}} H_{\text{ét}, p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} K_v \xrightarrow{\text{comp}_{B, \text{ét}, p, \bar{\iota}}^{-1}} H_B \otimes_{\mathbb{Q}} K_v$$

dont la composée est $G_{\text{mot}}(A)(K_v)$, donc égale à l'identité. La composée des deux derniers isomorphismes, appliquée à A , identifie $(A_{\text{DR}} \otimes_k K_v)^{\varphi_{A, \iota_v}}$ à $A_B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$.

Or par le point 3) de la proposition précédente, on a un isomorphisme canonique de E_v -algèbres

$$(A_{\text{DR}} \otimes_k K_v)^{\varphi_{A, \iota_v}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E_v = E_v^{\text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(A_{\text{DR}} \otimes_k K_v)^{\varphi_{A, \iota_v}}, E_v)}$$

qu'on peut aussi écrire (via $\text{comp}_{\text{DR}, \text{cris}, \iota_v}$)

$$A_{\text{cris}, v}^{\varphi_{A, v}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E_v = E_v^{\text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(A_{\text{cris}, v}^{\varphi_{A, v}}, E_v)},$$

et sur $A_{\text{cris}, v}^{\varphi_{A, v}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E_v$, l'action de $\varphi_{A, v}$ est celle de $(\mathfrak{p}_v, E/\mathbb{Q})$ sur les coefficients (le facteur $\otimes E_v$). D'où l'assertion. $\square$

14 Motifs et algèbre de Lie de Galois différentielle

14.1 Groupe de monodromie et groupe de Galois motivique. On reprend la situation et les notations $f : X \rightarrow S$, $\mathcal{H}_f$ de 11.1, en supposant k plongeable dans $\mathbb{C}$.

Soit $s \in S(\mathbb{C})$. On note $G_{\text{mono}}(\mathcal{H}_f, s)$ l'adhérence de Zariski de la représentation de monodromie (rationnelle) en s :

$$\pi_1(S(\mathbb{C}), s) \rightarrow \text{GL}(H_B(X_s)) = \text{GL}(H(X_s, \mathbb{Q})).$$

Sa composante neutre $G_{\text{mono}}^0(\mathcal{H}_f, s)$ est un groupe *semi-simple* d'après [20, 4.4] (voir aussi [4]).

14.1.1 Théorème ([6, 5.2]). *Supposons $k = \mathbb{C}$. Quitte à agrandir la classe $\mathcal{V}$, il existe un système local $(\Gamma_s)_{s \in S(\mathbb{C})}$ de sous-groupes algébriques réductifs de $\text{GL}(H_B(X_s))$, tel que*

- a) pour tout s , $G_{\text{mono}}^0(\mathcal{H}_f, s)$ est un sous-groupe normal de Γ_s ,
- b) pour tout s , Γ_s contient $G_{\text{mot}}(X_s)$,
- c) pour tout s hors d'une partie maigre de $S(\mathbb{C})$, $\Gamma_s = G_{\text{mot}}(X_s)$.

C'est l'élaboration du fait que si un cycle motivé est invariant par monodromie, son transport parallèle en tout autre point est encore un cycle motivé (*loc. cit.*). (Le point c) ne sera utilisé qu'en 14.4.2 3)).

14.1.2 Corollaire. Pour tout $s \in S(\mathbb{C})$, $\text{Lie}G_{\text{mono}}(\mathcal{H}_f, s)$ est normalisée par $G_{\text{mot}}(X_s)$, donc est la réalisation de Betti d'un facteur direct LG_s du motif $\underline{\text{End}}h(X_s)$. Ce motif LG_s est une algèbre de Lie dans la catégorie tannakienne $\mathcal{M}_Y$.

L'existence de ce motif LG_s jouera un rôle fondamental dans la suite. Il provient en fait d'un motif défini sur une extension finie du corps de rationalité de s (cf. [6, 2.5, scolie]).

14.2 Réalisation de De Rham de LG_s . La réalisation de De Rham du motif $h(X_s)$ n'est autre que la fibre en s de $\mathcal{H}_f$. Du fait de la régularité de la connexion de Gauss–Manin, l'isomorphisme de comparaison $\text{comp}_{\text{B,DR}}$ induit un isomorphisme

$$G_{\text{mono}}(\mathcal{H}_f, s) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \cong \text{Gal}(\mathcal{H}_f, s)$$

entre le groupe de monodromie complexe en s et le groupe de Galois différentiel pointé en s de $\mathcal{H}_f$ (c'est un avatar de l'équivalence de Riemann–Hilbert de Deligne, cf. [39]). Comme $G_{\text{mono}}(\mathcal{H}_f, s)$ est réductif, il suit que $\mathcal{H}_f$ est un module à connexion (intégrable) semi-simple.

De même, $\text{comp}_{\text{B,DR}}$ induit un isomorphisme entre $\text{Lie}G_{\text{mono}}(\mathcal{H}_f, s)_{\mathbb{C}}$ et la fibre en s de l'algèbre de Lie de Galois différentielle $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{H}_f)$ bâtie sur $\mathcal{H}_f$. Avec la notation du théorème précédent, on a en fait

$$\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{H}_f)_s = H_{\text{DR}}(LG_s).$$

(Ceci vaut encore sur le sous-corps de $\mathbb{C}$ sur lequel le motif LG_s est défini).

14.3 Digression : algèbres de Lie semi-simples dans une catégorie tannakienne neutre. Soit $\mathcal{T}$ une catégorie tannakienne neutre sur un corps K de caractéristique nulle. On note $\mathbf{1}$ l'objet unité. Soit L une algèbre de Lie dans $\mathcal{T}$. Le crochet de Lie $L \otimes L \rightarrow L$ correspond à un morphisme $L \rightarrow L^{\vee} \otimes L = \underline{\text{End}}(L)$ (représentation adjointe). La composition des endomorphismes “internes” $\underline{\text{End}}(L) \otimes \underline{\text{End}}(L) \xrightarrow{\circ} \underline{\text{End}}(L)$ induit alors un morphisme $L \otimes L \rightarrow \underline{\text{End}}(L) \cong L \otimes L^{\vee}$, d'où finalement, en composant avec l'évaluation $L \otimes L^{\vee} \rightarrow \mathbf{1}$, une forme bilinéaire $\beta : L \otimes L \rightarrow \mathbf{1}$. Pour tout foncteur fibre F (à valeurs dans les vectoriels sur une extension de K), $F(\beta)$ n'est autre que la forme de Killing de $F(L)$.

Un idéal simple de L est un idéal (de Lie) I qui, en tant qu'algèbre de Lie de $\mathcal{T}$, est non-commutative et n'admet pas de d'idéal non nul distinct de I . L'orthogonal de I eu égard à β est alors un idéal de L dont l'intersection avec I est réduite à 0 (cela se vérifie au moyen d'une foncteur fibre F).

14.3.1 Lemme. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- a) β est non-dégénérée (i.e. identifie L à $L^\vee$),
- b) L est le produit de ses idéaux simples,
- c) $F(L)$ est une algèbre de Lie semi-simple pour un (resp. pour tout) foncteur fibre F .

Si ces conditions sont vérifiées, on dit alors que L est semi-simple.

Démonstration. Même principe de démonstration que pour le lemme 13.1.1. On vient de voir que b) $\implies$ a). La condition c) est indépendante de F , ce qui permet de choisir F neutralisant $\mathcal{T}$. On a a) $\iff$ a) $_F \iff$ b) $_F \iff F(L)$ est semi-simple. Enfin b) $_f \implies$ b) se voit comme en 13.1.1. $\square$

On prendra garde toutefois à ce qu'un idéal simple de $F(L)$ n'est pas nécessairement l'image par F d'un idéal simple de L (même si F neutralise $\mathcal{T}$).

14.3.2 Remarques. 1) On pourrait aussi définir la notion de radical d'une algèbre de Lie L de $\mathcal{T}$ (plus grand idéal R tel que le dérivé n -ième $D^n R = 0$ pour $n \gg 0$) et montrer que L est semi-simple si et seulement si $R = 0$.

2) En général, une algèbre de Lie semi-simple L n'est pas un objet semi-simple de $\mathcal{T}$. Par exemple, l'algèbre de Lie semi-simple sl_2 , vue comme représentation de $\mathbb{G}_a \subset SL_2$ par l'action adjointe, est un objet indécomposable, mais non semi-simple, dans la catégorie des représentations de $\mathbb{G}_a$.

3) Voici un cas particulier intéressant : si $\mathcal{T}$ est algébrique, on peut considérer l'algèbre de Lie du groupe fondamental "interne" $\pi(\mathcal{T})$ (cf. [21]). Si c'est une algèbre de Lie semi-simple de $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}$ est semi-simple, et tout idéal simple de $\text{Lie}\pi(\mathcal{T})$ est un objet irréductible de $\mathcal{T}$.

Réciproquement, si $\mathcal{T}$ est semi-simple, alors $\text{Lie}\pi(\mathcal{T})$ est une algèbre de Lie semi-simple si et seulement si pour un (ou pour tout) foncteur fibre F , $F(\text{Lie}\pi(\mathcal{T}))$ est une algèbre de Lie semi-simple au sens usuel. En revanche, si $\text{Lie}\pi(\mathcal{T})$ est simple, $F(\text{Lie}\pi(\mathcal{T}))$ n'est pas nécessairement une algèbre de Lie simple au sens usuel.

Soit L une algèbre de Lie semi-simple. On note $\text{End}_{\text{Lie}} L$ le sous-anneau de $L^\vee \otimes L = \text{End}(L)$ respectant le crochet de Lie. L opère sur $\text{End}_{\text{Lie}} L$ (action adjointe).

14.3.3 Définition. On définit l'anneau $A(L)$ de $\mathcal{T}$ comme le commutant de L dans $\text{End}_{\text{Lie}}(L)$.

14.3.4 Lemme. *Soit L une algèbre de Lie semi-simple (resp. simple) dans $\mathcal{T}$. Alors $A(L)$ est un anneau commutatif semi-simple (resp. simple) dans $\mathcal{T}$. Pour tout foncteur fibre F , $F(A(L)) = A(F(L))$.*

Démonstration. La seconde assertion est immédiate. Via 13.1.1, elle ramène la première assertion (cas semi-simple) à l'assertion correspondante pour l'algèbre de Lie ordinaire $F(L)$. Quitte à étendre le corps K' des coefficients de F , on peut supposer que dans la

décomposition en idéaux simples de la K' -algèbre de Lie ordinaire $F(L) = \bigoplus_{j=1}^{j=n} L^{(j)}$, les $L^{(j)}$ sont absolument simples. Alors $F(A(L)) = A(F(L)) = \bigoplus A(F(L^{(j)})) \cong K'^n$.

Enfin, comme L est produit de ses idéaux de Lie simples et A est produit de ses idéaux simples, il est clair que “ L simple” équivaut à “ A simple”. $\square$

14.4 L’anneau semi-simple motivique $A(LG_s)$. Appliquons ce qui précède à la catégorie tannakienne $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$ sur $\mathbb{Q}$. Il suit de 14.2 et du lemme précédent que LG_s est une algèbre de Lie semi-simple de $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$, et que $A(LG_s)$ est un anneau commutatif semi-simple de $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$.

14.4.1 Remarque. Il n’est pas difficile de montrer, à l’aide du théorème 14.1.1, que l’anneau motivique $A(LG_s)$ est indépendant de s à isomorphisme près. Nous n’en aurons pas besoin.

Avant d’appliquer les résultats de 13.2, il nous faut redescendre du corps de base $\mathbb{C}$ à un sous-corps k de type fini sur $\mathbb{Q}$. Quitte à passer à une extension finie d’un corps de définition pour f et à remplacer S par un revêtement étale fini, on peut supposer, et nous supposons que

(*)_{f,1} il existe un point $s \in S(k)$ tel que $\text{Gal}(\mathcal{H}_f, s)$ soit connexe (ou, ce qui revient au même, que $G_{\text{mono}}(\mathcal{H}_f, s)$ soit connexe, condition qui ne dépend pas de s).

On fixe alors $s \in S(k)$. Quitte à remplacer derechef k par une extension finie, et à agrandir $\mathcal{V}$, on peut supposer, et nous supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

(*)_{f,2} LG_s est un motif défini sur k , i.e. un objet de $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$; donc $A(LG_s)$ aussi,

(*)_{f,3} les idéaux simples de la k -algèbre de Lie $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{H}_f)_s = H_{\text{DR}}(LG_s)$ sont absolument simples (ou, ce qui revient au même, $H_{\text{DR}}(A(LG_s)) \cong k^n$),

(*)_{f,4} k contient le compositum E des clôtures galoisiennes²⁷ des facteurs de la $\mathbb{Q}$ -algèbre semi-simple $A(LG_s)_{\mathbb{B}} := H_{\mathbb{B}}(A(LG_s))$.

(*)_{f,5} le groupe de Galois motivique $G_{\text{mot}}(X_s, \mathbb{C})$ est connexe.

Sous ces hypothèses, $A(LG_s)_{\text{DR}} = (\text{End}_{\nabla} \mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{H}_f))_s \cong k^n$, et s’identifie canoniquement à $\text{End}_{\nabla} \mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{H}_f)$. Les idempotents minimaux e_{χ} de $A(LG_s)_{\text{DR}}$ découpent les idéaux de Lie simples de $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{H}_f)$ (en tant qu’algèbre de Lie semi-simple dans la catégorie tannakienne - neutralisée par le foncteur fibre en s - des modules à connexion intégrables sur S).

En outre, comme $G_{\text{mot}}(X_s, \mathbb{C})$ agit sur $A(LG_s, \mathbb{C})$ à travers un quotient fini, il agit trivialement, i.e. $G_{\text{mot}}(A(LG_s, \mathbb{C})) = \{1\}$; il en est alors de même en remplaçant $\mathbb{C}$ par une extension finie de k convenable, et il s’ensuit que $A(LG_s)$ est un motif d’Artin. A fortiori, lorsque Ξ parcourt les $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ -orbites d’idempotents e_{χ} , les idempotents

²⁷dans $\mathbb{C}$, relativement à $\mathbb{Q}$

$e_{\Xi} := \sum_{\sigma \in \Xi} e_{\sigma\chi}$ sont des correspondances motivées, qui découpent les idéaux simples de LG_s (en tant qu’algèbre de Lie semi-simple dans la catégorie tannakienne neutre de motifs $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$).

La proposition suivante résume les propriétés qui nous serviront par la suite.

14.4.2 Proposition. 1) Les endomorphismes horizontaux de $\mathcal{L}\mathcal{G}(\mathcal{H}_f)$ préservent la filtration de Hodge.

2) Soit $\mathfrak{o}$ une $\mathbb{Z}$ -algèbre lisse intègre de corps de fractions k telle que X_s provienne d’un $\mathfrak{o}$ -schéma projectif lisse $\mathfrak{X}_{\mathfrak{s}}$.

Alors pour tout idéal maximal v de $\mathfrak{o}$ et tout Ξ , tout plongement $\iota_v : \mathfrak{o} \hookrightarrow W_v = W(\kappa_v)$ relevant l’application canonique $\mathfrak{o} \rightarrow \kappa_v$, et tout $\chi \in \Xi$, le Frobenius cristallin de $e_{\Xi}(LG_s)$ vérifie la formule

$$e_{(\mathfrak{p}_v, E/\mathbb{Q})\chi} \circ \varphi_{e_{\Xi}(LG_s), \iota_v} = \varphi_{e_{\Xi}(LG_s), \iota_v} \circ e_{\chi},$$

où $\mathfrak{p}_v$ est le premier de E induit par v .

3) Le compositum E est un corps de nombres totalement réel.

Démonstration. 1) découle de 13.2.1.1), ou plus simplement, du fait que $A(LG_s)_{\text{DR}} = \text{Fil}^0 A(LG_s)_{\text{DR}}$ puisque $A(LG_s)$ est un motif d’Artin.

2) La formule s’écrit aussi $e_{(\mathfrak{p}_v, E/\mathbb{Q})\chi} = \varphi_{e_{\Xi}A(LG_s), \iota_v}(e_{\chi})$, ce qui résulte de 13.2.2.3) (appliqué à l’anneau simple $A = e_{\Xi}A(LG_s)$, et $Y = X_s \times_k X_s$).

3) On a $H_B(LG_s) = \text{Lie}G_{\text{mono}}(\mathcal{H}_f, s)$, et

$$A(LG_s)_B = \text{End}_{G_{\text{mono}}(\mathcal{H}_f, s)} H_B(LG_s).$$

Lorsque s varie, il forment des systèmes locaux de $\mathbb{Q}$ -algèbres de Lie et de $\mathbb{Q}$ -algèbres respectivement. Ils ne changent donc pas, à isomorphisme près, lorsqu’on change s . Quitte à changer s , on peut alors supposer par le point c) de 14.1.1 que $\text{Lie}G_{\text{mono}}(\mathcal{H}_f, s)$ est un idéal de l’algèbre de Lie dérivée (semi-simple) $\text{Lie}G_{\text{mot}}(X_s, \mathbb{C})^{\text{der}}$. Comme $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}(X_s)$ est polarisée, tout idéal de Lie simple de $\text{Lie}G_{\text{mot}}(X_s, \mathbb{C})_{\mathbb{C}}^{\text{der}}$ est défini sur $\mathbb{R}$ ²⁸. Il en est donc de même des idéaux simples de $H_B(LG_s)_{\mathbb{C}}$, ce qui entraîne que tout homomorphisme (d’anneaux unitaires) $A(LG_s)_B \rightarrow \mathbb{C}$ se factorise à travers $\mathbb{R}$, donc que E est totalement réel. $\square$

14.4.3 Remarque. Il n’est pas difficile de montrer, à l’aide du théorème 14.1.1, que si la condition $(*)_{f,5}$ est satisfaite pour s , elle l’est aussi pour tout point de $S(\mathbb{C})$ hors d’une partie maigre. Nous n’en aurons pas besoin.

Le point est le suivant : soit $\pi_0(\Gamma_s)$ le schéma en groupe fini des composantes connexes de Γ_s , pour $s \in S(\mathbb{C})$. Alors l’action de $G_{\text{mot}}(X_s) \subset \Gamma_s$ sur $\mathcal{O}(\pi_0(\Gamma_s))$ est l’action par conjugaison, qui se factorise par $\pi_0 G_{\text{mot}}(X_s)$. Sous $(*)_{f,1}$ (qu’il est loisible de supposer), il découle de 14.1.1 que l’anneau semi-simple de $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$ dont $\mathcal{O}(\pi_0(\Gamma_s))$ est la réalisation de Betti est indépendant de $s \in S(\mathbb{C})$, à isomorphisme près.

²⁸cela découle par exemple du fait que la conjugaison complexe agit sur le graphe de Dynkin de $\text{Lie}G_{\text{mot}}(X_s, \mathbb{C})^{\text{der}}$ par l’involution d’opposition, cf. [47, 8.5]