

APOLLONII PERGAEI

QVAE GRAECE EXSTANT

CVM COMMENTARIIS ANTIQVIS

EDIDIT ET LATINE INTERPRETATVS EST

I. L. HEIBERG

I

EDITIO STEREOTYPA EDITIONIS

ANNI MDCCCXCI



STVTGARDIAE IN AEDIBVS B. G. TEVBNERI MCMLXXIV

ISBN 3-519-01051-8

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei Verwertung von Teilen des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an den Verlag gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit dem Verlag zu vereinbaren ist.

© B. G. Teubner, Stuttgart 1974

Printed in Germany

Druck: Julius Beltz, Hemsbach/Bergstr.

PRAEFATIO.

Conica Apollonii Pergaei, quae mathematicorum consensu summis iustissimisque efferuntur laudibus, post Halleium neminem editorem inuenerunt. et fortasse mathematicis, qui res solas spectant, aliquatenus interpretationibus satis fit; sed ne de iis dicam, quorum interest scire, quibus uerbis Apollonius ipse usus sit, et qua ratione formulas signaque nostrorum mathematicorum aequare potuerit, ipsis illis interpretationibus fundamentum certum tandem aliquando iactum esse oportet; quod Halleius, qui adhuc solus Conica Graece edidit, neque uoluit facere neque potuit, quae erat illis temporibus ratio artis criticae. itaque nouam editionem Conicorum codicibus Graecis perlustratis et collatis parare decreui, praesertim cum uiderem, editionem Halleii tam raram esse, ut etiam immodico pretio uix ac ne uix quidem posset comparari. sed ab initio mihi constabat, eos tantum libros, qui Graece exstarent, mihi tractandos esse. nam quamquam me non fugiebat, editionem ita mancam et quasi detruncatam fore, tamen a me impetrare non potui, ut interpretationem librorum V—VII, quam ex Arabico fecerat Halleius, nullis subsidiis criticis adiutus repeterem. et codices Arabicos propter linguae illius ignorantiam ipse adire non potui. imperfectum igitur maneat opus, donec aliquis linguae Arabicae

peritus codicibus Arabicis collatis nouam recensionem illorum librorum instituerit. et ut sperare possimus, hoc breui futurum esse, effecit L. L. M. Nixius edita dissertatione, quae inscribitur *Das fünfte Buch der Conica des Apollonius von Perga in der arabischen Uebersetzung des Thabit Ibn Corrah* (Lipsiae 1889). qui ut opus bene et utiliter inceptum ad finem perducatur, mecum optabunt, quicumque scripta mathematica Graecorum nouerunt coluntque.

Quattuor libris Conicorum, qui Graece supersunt, in uolumine altero adiungam fragmenta et Conicorum et reliquorum operum Apollonii, quae Graece habemus, et praeterea lemmata Pappi et commentaria Eutocii. constat, huius uiri recensionem librorum I—IV solam relictam esse; quare id primum mihi agendum erat, ut ea e codicibus restitueretur. quantum de pristina Conicorum forma ueri similiter statui potest, in prolegomenis criticis uoluminis alterius colligam; ibidem de cognatione codicum uberius exponam. hic breuiter indicabo, quibus codicibus nitatur recensio mea, et quanti quisque aestimandus sit. sunt igitur hi:

V — cod. Vatican. Gr. 206 bombyc. saec. XII—XIII, fol., duobus uoluminibus constans; continet fol. 1—160 Conicorum libros I—IV, fol. 161—239 Sereni opuscula. in fine mutilus est et omnino pessime habitus; singula folia plerumque charta pellucida inducta sunt. manus recentior (m. 2) lacunas quasdam (in Sereno) expleuit et in Apollonio nonnulla addidit et emendauit, manus recentissima (m. rec.) in margine nonnulla adscripsit. contuli Romae 1887.

- v — cod. Vatic. Gr. 203, bombyc. saec. XIII, fol.; inter alia Conica continet fol. 56—84 e V descripta. cum e V descriptus sit, antequam is tempore et situ male habitus est, utilis est ad eos locos supplendos, qui in V euanuerunt uel correcti sunt; etiam figurae, quae interdum in V cum marginibus sublatae uel detruncatae sunt, saepe e v restitui potuerunt. inspexi codicem Romae 1887 et enotaui, quae opus esse uidebantur.
- c — cod. Constantinopolitanus palatii ueteris nr. 40 bombyc. saec. XIII—XIV, fol., situ et madore paene pessumdatus, ceterum codicis V gemellus. is, cum a Fr. Blassio protractus esset et descriptus (Hermes XXIII p. 622 sq.), intercedente Ministerio nostro, quod res rationesque externas moderatur, Hauniam missus est et totus a me collatus 1889, sed cum plerumque cum V consentiat, scripturam plenam in adparatu non dedi, sed ea tantum, quae meliora praebet, sane paucissima; reliquam scripturae discrepantiam in prolegomenis criticis notabo. Conica habet fol. 349—516.
- p — cod. Paris. Gr. 2342 chartac. saec. XIII, fol. totum contuli Hauniae 1888, sed cum ab homine sermonis mathematicorum Graecorum peritissimo impudenter interpolatus sit, in adparatum eas tantum scripturas recepi, quae ad uerba Apollonii emendanda facerent; reliquas prolegomenis seruau. quae meliora habet, sine dubio pleraque coniectura inuenta sunt.

ceterorum codicum nullum prorsus usum esse, in prolegomenis demonstrabo, nisi quod e cod. Paris. 2356 chartac. saec. XVI unam et alteram coniecturam probam recepi.

itaque recensio Conicorum tota codice V nititur, cuius scripturas omnes in adparatu indicaui. sicubi eius scriptura retineri non poterat, auctorem scripturae receptae nominaui („corr.“). qua in re praeter codices mihi praesto fuere:

Memus — Apollonii Pergaei philosophi mathematicique excellentissimi Opera per Doctissimum Philosophum Ioannem Baptistam Memum Patri-tium Venetum Mathematicarumque Artium in Vrbe Veneta Lectorem Publicum De Graeco in Latinum Traducta et nouiter impressa. Venet. MDXXXVII fol.

Comm. uel Command. — Apollonii Pergaei conicorum libri quattuor... F. Commandinus Vrbinas mendis quamplurimis expurgata e Graeco conuertit et commentariis illustrauit. Bononiae MDLXVI fol.

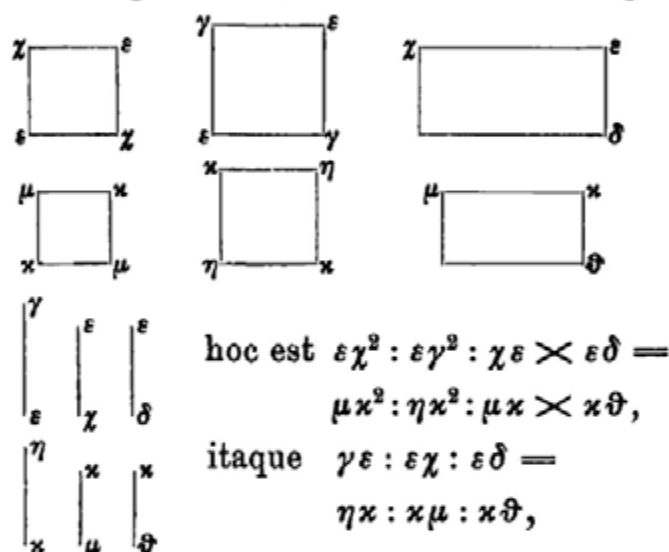
Halley — Apollonii Pergaei Conicorum libri octo et Sereni Antissensis de sectione cylindri et conii libri duo, ed. E. Halleius. Oxoniae MDCCX fol.

de fontibus horum librorum in prolegomenis uidebimus. Memo et Commandino emendationem tum quoque tribui, ubi tacite ueram scripturam interpretantur, nisi etiam errore non perspecto eodem modo interpretati essent.

in interpretatione mea propositiones Apollonii citaui libro et propositionis numero, ubi eiusdem

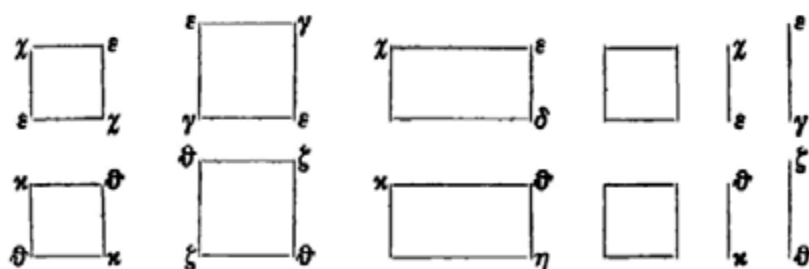
libri sunt, solo numero propositionis indicato; „Eucl.“ Elementa, „dat.“ Data Euclidis significat; lemmata Pappi numeris in Graeco ab Hultschio positis citantur.

Dixi infra p. 293 et alibi, in V interdum rectangula rectasque descripta esse; quae figurae quid significant, hic exponam. explicandi uiam mihi monstrauit Hieronymus G. Zeuthen, uir de Apollonio optime meritis. primum igitur in II, 50 inueniuntur hae figurae*):



quae est ratiocinatio Apollonii p. 292, 27—294, 9. ergo figuras illas aliquis adscripsit ad ratiocinationem Apollonii illustrandam oculisque subiiciendam.

eodem modo paullo infra:



*) Ubi V mutilus est, figuras e v supplendi; c eadem fere habet

quae figurarum series ad p. 296, 17 sq. pertinet, sed tam mutila est, ut difficile sit dictu, quo modo ordinanda sit. nam in V sola secunda series rectangulorum exstat, quorum unum litteris caret; reliqua e v petita sunt. omnia ordine decurrent, si quattuor illae rectae primo loco ponentur et pro duobus quadratis litteris * carentibus describentur hae rectae

$$\begin{array}{ccc|ccc} \delta & & & \delta & & \\ | & & & | & & \\ \varepsilon & \chi & \varepsilon & \varepsilon & \chi & \\ | & | & | & | & | & \\ \gamma & & & & & \end{array} \quad \text{uel} \quad \begin{array}{ccc|ccc} \eta & & & \eta & & \\ | & & & | & & \\ \vartheta & \kappa & \xi & \vartheta & \kappa & \\ | & | & | & | & | & \\ \vartheta & & & \vartheta & & \end{array}$$

tum enim habebimus: quoniam $\chi\varepsilon : \gamma\varepsilon = \kappa\vartheta : \vartheta\xi$, erit $\chi\varepsilon^2 : \varepsilon\gamma^2 : \chi\varepsilon \times \varepsilon\delta = \kappa\vartheta^2 : \vartheta\xi^2 : \kappa\vartheta \times \vartheta\eta$; quare $\delta\varepsilon : \chi\varepsilon : \varepsilon\gamma = \eta\vartheta : \kappa\vartheta : \xi\vartheta$ (uel $\delta\varepsilon : \chi\varepsilon = \eta\vartheta : \kappa\vartheta$).

Ad II, 51:

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & \xi & & \\ & & & | & & \\ & \varepsilon & & & \kappa & \\ & | & \eta & & | & \\ & \eta & \gamma & \lambda & \lambda & \\ \hline \varepsilon & \eta & \gamma & \xi & \lambda & \kappa \\ | & | & | & | & | & | \\ \delta & \gamma & \eta & \vartheta & \lambda & \kappa \end{array}$$

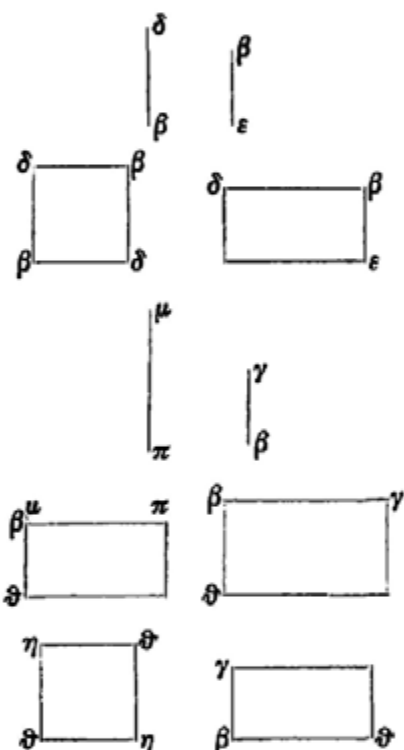
haec Vv, nisi quod V in $\xi\lambda$ pro λ habet κ . praeterea in vc post quattuor rectas adduntur hae

$\begin{array}{ccc|ccc} \eta & \eta & \lambda & \kappa & & \\ | & | & | & | & & \\ \delta & \gamma & \vartheta & \lambda & & \end{array}$ (in $\lambda\vartheta$ littera ϑ in solo c seruata est).
has rectas si cum Zeuthenio ultimo loco ponemus, habebimus

$\varepsilon\eta : \eta\gamma = \xi\lambda : \kappa\lambda$ et $\varepsilon\eta \times \eta\delta : \eta\gamma^2 = \xi\lambda \times \lambda\vartheta : \kappa\lambda^2$;

quare $\eta\delta : \eta\gamma = \lambda\vartheta : \kappa\lambda$, h. e. demonstrationem ab Apollonio omissam, triangulos $\kappa\vartheta\lambda$, $\gamma\eta\delta$ similes esse, u. p. 304, 17—19 et conf. Pappi lemma VII.

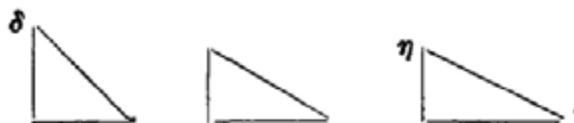
III, 15:



haec series figurarum illustrat, quae habet Apollonius p. 344, 14—24. in codicibus Vvc hae sunt discrepantiae: ante primas rectas habet V



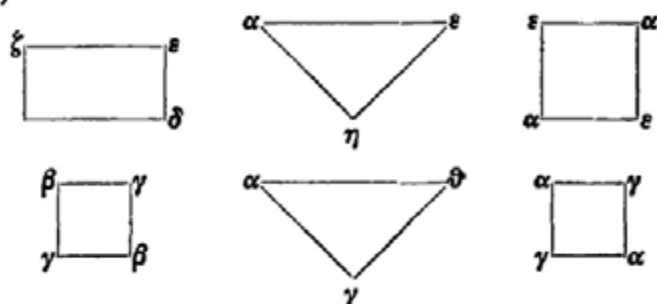
in quadrato $\delta\beta^2$ inferius β hab. vc, om. V, pro inferiore δ hab. ϵ Vvc; rectam $\gamma\beta$ solus c habet; in rectangulo $\beta\vartheta \times \mu\pi$ in latere inferiore add. litt. $\eta - \vartheta$ Vvc; rectangulum $\beta\gamma \times \beta\vartheta$ solus habet c; in quadrato $\eta\vartheta^2$ omnes litteras om. V, superiores η , ϑ vc; pro rectangulo $\gamma\beta \times \beta\vartheta$, quod omisit V, triangulum $\gamma\beta\vartheta$ habent vc; deinde v solus addit



erroribus emendatis hoc efficitur:

$$\begin{aligned} \delta\beta : \beta\epsilon &= \delta\beta^2 : \delta\beta \times \beta\epsilon = \mu\pi : \gamma\beta \\ &= \mu\pi \times \beta\vartheta : \beta\gamma \times \beta\vartheta = \vartheta\eta^2 : \beta\gamma \times \beta\vartheta. \end{aligned}$$

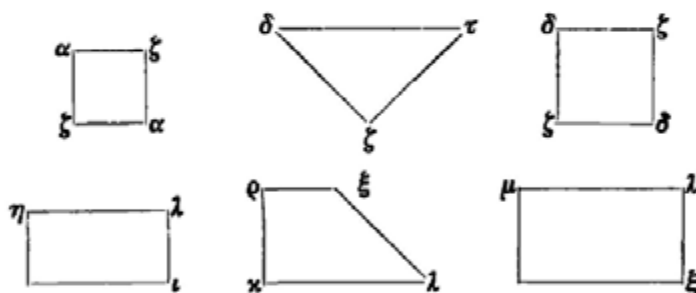
III, 16:



hunc ordinem praebet c, in V binae figurae componuntur. in primo rectangulo δ om. V; in priore triangulo ε et η permutat c, in altero γ om. V; in quadrato αγ² litteras inferiores om. V, α inferius c. illustrantur uerba Apollonii p. 350, 5 sq.

$$\xi \varepsilon \times \varepsilon \delta : \alpha \varepsilon \eta : \alpha \varepsilon^2 = \gamma \beta^2 : \alpha \vartheta \gamma : \alpha \gamma^2.$$

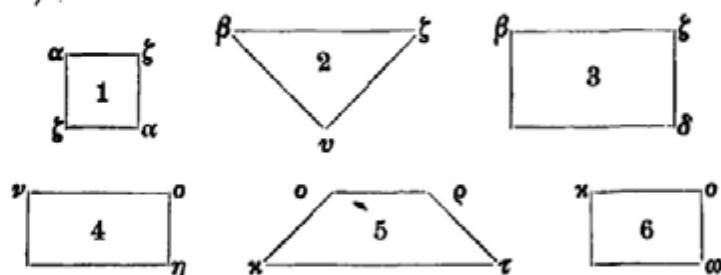
III, 19 (in extrema prop. 17 leguntur):



hanc seriem om. c, primas tres figuras hab. v, om. V; in αξ² litteras inferiores om. v; in ηλ × λι litteras η, λ om. V, μ et α earum loco hab. v; in ρxλξ litt. ξ om. V, pro ea ξ hab. v; in μλ × λξ litt. μ, λ hab. v, om. V. illustratur, ut uidit Zeuthen, locus p. 358, 2 sq.

$$\alpha \xi^2 : \delta \tau \xi : \delta \xi^2 = \eta \lambda \times \lambda \iota : \rho \xi \lambda x : \mu \lambda \times \lambda \xi.$$

III, 21:

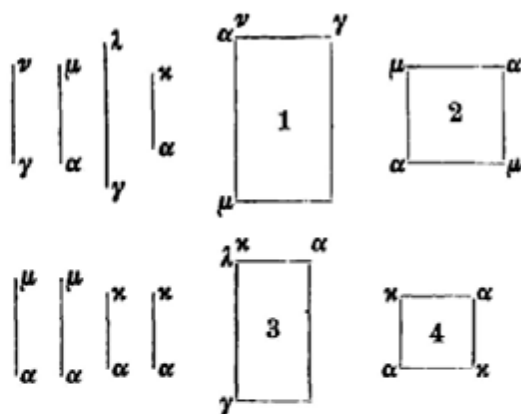


ordinem restituit Zeuthen; in c est $\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ & 3 \end{smallmatrix}$, fig. 6 hab. v,

om. Vc. in fig. 1 pro inferiore α litt. δ hab. Vvc; in fig. 2 β om. Vvc, ξ om. Vv, hab. c; in fig. 3 δ om. V; in fig. 4 pro o hab. ϑ v; in fig. 5 o hab. c, ϑ v, om. V, ρ om. V, τ hab. c, om. Vv; in fig. 6 ω om. v, pro κ , o hab. β , ϑ . illustratur p. 362, 11 sq.

$$\alpha\xi^2 : \beta\xi v : \beta\xi \times \xi\delta = v o \times o\eta : \kappa o\rho\tau : \kappa o \times o\omega.$$

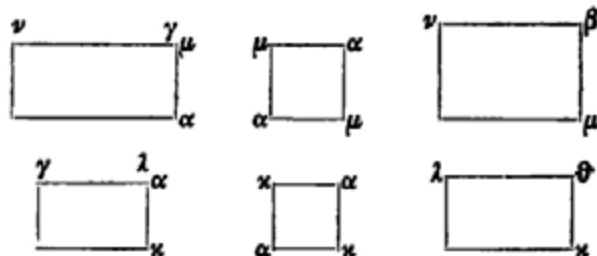
III, 54:



has om. c; in prima recta $\kappa\alpha$ litt. κ om. V, hab. v; in fig. 2 α , μ ad partes dextras om. V, hab. v; fig. 3 om. V, α om. v, pro γ hab. α . demonstratio

est proportionis p. 442, 12—13 ab Apollonio usurpatae; legenda enim

$\nu\gamma:\mu\alpha=\lambda\gamma:\kappa\alpha$ itaque $\nu\gamma\times\mu\alpha:\mu\alpha^2=\lambda\gamma\times\kappa\alpha:\kappa\alpha^2$.
 $\mu\alpha:\mu\alpha=\kappa\alpha:\kappa\alpha$



has om. c, posteriores tres om. V, hab. v; in $\nu\beta\times\beta\mu$ pro μ hab. ν uel α V; in $\lambda\theta\kappa$ pro λ litt. α hab. v. legenda

$\nu\gamma\times\mu\alpha:\mu\alpha^2:\nu\beta\times\beta\mu=\gamma\lambda\times\alpha\kappa:\alpha\kappa^2:\lambda\theta\times\theta\kappa$,
 quae illustrent uerba Apollonii p. 442, 14—15.

Praefandi finem faciam gratias quam maximas agens et praefectis bibliothecarum Parisiensis, cuius liberalitatem non semel expertus sum, et imperatoris Turcici, qui permisit, ut codex Constantinopolitanus hucusque peregrinaretur, et iis uiris, quibus intercedentibus mihi licuit codices illos Hauniam transmissos commode peruoluere, Christiano Bruun, bibliothecae regiae Hauniensis praefecto, et Petro A. F. S. Vedel, praeposito nostris cum populis externis rationibus.

Scr. Hauniae mense Octobri a. MDCCCXC.

I. L. Heiberg.

APOLLONII CONICA.

ΚΩΝΙΚΩΝ α'.

Ἀπολλώνιος Εὐδήμῳ χαίρειν.

Εἰ τῷ τε σώματι εὖ ἐπανάγεις καὶ τὰ ἄλλα κατὰ
 γνώμην ἐστί σοι, καλῶς ἂν ἔχοι, μετρίως δὲ ἔχομεν
 5 καὶ αὐτοί. καθ' ὃν δὲ καιρὸν ἤμην μετὰ σου ἐν
 Περγᾷ, ἐθεώρουν σε σπεύδοντα μετασχεῖν τῶν πε-
 πραγμένων ἡμῖν κωνικῶν· πέπομφα οὖν σοι τὸ πρῶτον
 βιβλίον διορθωσάμενος, τὰ δὲ λοιπά, ὅταν εὐαρεστή-
 σωμεν, ἐξαποστελοῦμεν· οὐκ ἀμνημονεῖν γὰρ οἶομαί
 10 σε παρ' ἐμοῦ ἀκηκοότα, διότι τὴν περὶ ταῦτα ἔφοδον
 ἐποιησάμην ἀξιοθελὲς ὑπὸ Ναυκράτους τοῦ γεωμέτρου,
 καθ' ὃν καιρὸν ἐσχόλαζε παρ' ἡμῖν παραγενηθεὶς εἰς
 Ἀλεξάνδρειαν, καὶ διότι πραγματεύσαντες αὐτὰ ἐν ὀκτώ
 βιβλίοις ἐξ αὐτῆς μεταδεδώκαμεν αὐτὰ εἰς τὸ σπου-
 15 δαιότερον διὰ τὸ πρὸς ἑκπλῶ αὐτὸν εἶναι οὐ διακαθά-
 ραντες, ἀλλὰ πάντα τὰ ὑποπίπτοντα ἡμῖν θέντες ὡς
 ἔσχατον ἐπελευσόμενοι. ὅθεν καιρὸν νῦν λαβόντες ἀεὶ
 τὸ τυγχάνον διορθώσεως ἐκδίδομεν. καὶ ἐπεὶ συμ-
 βέβηκε καὶ ἄλλους τινὰς τῶν συμμεμιχότων ἡμῖν
 20 μετεिल्φέναι τὸ πρῶτον καὶ τὸ δεύτερον βιβλίον πρὶν
 ἢ διορθωθῆναι, μὴ θαυμάσης, εἰς περιπίπτῃς αὐτοῖς
 ἐτέρως ἔχουσιν. ἀπὸ δὲ τῶν ὀκτὼ βιβλίων τὰ πρῶτα

1. Ἀπολλωνίου Περγαίου κωνικῶν α' V. 8. εὐαρεστήσωμεν]
 in V est litterae ita coniunctae, ut similes fiant ετ. 15. διὰ
 — 16. τὰ] rep. mg. m. rec. V (15. εὐπλῶ) addito M ἐξ ἀπογράφου

CONICORUM LIBER I.

Apollonius Eudemo s.

Si corpore conualescis ceteraque tibi ex sententia sunt, bene est, equidem satis ualeo. quo autem tempore tecum Pergami eram, uidebam te cupidum esse conica a me elaborata cognoscendi. quare primum librum ad te misi, postquam eum emendaui, reliquos autem, quando iis contenti erimus, mittemus. neque enim credo, te oblitum esse, quod a me audisti, me ad haec adcessisse rogatu Naucratis geometrae, quo tempore Alexandriam profectus nobiscum degeret, nosque ea in octo libris elaborata statim festinantius paullo cum eo communicasse, quod in eo esset, ut discederet, ita ut ea non perpurgaremus, sed omnia, quae nobis in mentem uenirent, poneremus sperantes fore, ut postea perpoliremus. quare iam occasionem nacti, prout correcta sunt, ea edimus. et quoniam accidit, ut etiam alii quidam eorum, qui nobiscum uersati sunt, primum alterumque libros nacti sint, priusquam correcti essent, miratus ne sis, si in eos aliam habentes formam incideris. horum uero octo librorum quattuor priores ad institutionem elementarem

εἰκονικοῦ. γρ., quia magna ex parte euan.; sed quae dedimus, hab. cv. 15. *ἐκπλουν* cp, fort. recte. 16. *ὡς* — 17. *ἐπελευσόμενοι*] cv; euan. V., rep. mg. m. rec.

τέσσαρα πέπτωκεν εἰς ἀγωγὴν στοιχειώδη, περιέχει δὲ
τὸ μὲν πρῶτον τὰς γενέσεις τῶν τριῶν τομῶν καὶ τῶν
ἀντικειμένων καὶ τὰ ἐν αὐταῖς ἀρχικὰ συμπτώματα ἐπὶ
πλέον καὶ καθόλου μᾶλλον ἐξεργασμένα παρὰ τὰ ὑπὸ
5 τῶν ἄλλων γεγραμμένα, τὸ δὲ δεύτερον τὰ περὶ τὰς
διαμέτρους καὶ τοὺς ἄξονας τῶν τομῶν συμβαίνοντα
καὶ τὰς ἀσυμπτώτους καὶ ἄλλα γενικὴν καὶ ἀναγκαίαν
χρεῖαν παρεχόμενα πρὸς τοὺς διορισμούς· τίνας δὲ
διαμέτρους καὶ τίνας ἄξονας καλῶ, εἰδήσεις ἐκ τούτου
10 τοῦ βιβλίου. τὸ δὲ τρίτον πολλὰ καὶ παράδοξα θεω-
ρήματα χρήσιμα πρὸς τε τὰς συνθέσεις τῶν στερεῶν
τόπων καὶ τοὺς διορισμούς, ὧν τὰ πλεῖστα καὶ κάλλιστα
ξένα, ἃ καὶ κατανοήσαντες συνειδομεν μὴ συντιθέμενον
ὑπὸ Εὐκλείδου τὸν ἐπὶ τρεῖς καὶ τέσσαρας γραμμὰς
15 τόπον, ἀλλὰ μόριον τὸ τυχὸν αὐτοῦ καὶ τοῦτο οὐκ
εὐτυχῶς· οὐ γὰρ ἦν δυνατόν ἄνευ τῶν προσευρη-
μένων ἡμῖν τελειωθῆναι τὴν σύνθεσιν. τὸ δὲ τέταρτον,
ποσαχῶς αἱ τῶν κώνων τομαὶ ἀλλήλαις τε καὶ τῇ τοῦ
κύκλου περιφερείᾳ συμβάλλουσι, καὶ ἄλλα ἐκ περισσοῦ,
20 ὧν οὐδέτερον ὑπὸ τῶν πρὸ ἡμῶν γέγραπται, κώνου
τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια κατὰ πόσα σημεῖα συμ-
βάλλουσι. τὰ δὲ λοιπά ἐστι περιουσιαστικώτερα· ἔστι
γὰρ τὸ μὲν περὶ ἐλαχίστων καὶ μεγίστων ἐπὶ πλέον,
τὸ δὲ περὶ ἴσων καὶ ὁμοίων κώνου τομῶν, τὸ δὲ περὶ
25 διοριστικῶν θεωρημάτων, τὸ δὲ προβλημάτων κωνικῶν
διορισμένων. οὐ μὲν ἀλλὰ καὶ πάντων ἐκδοθέντων
ἔξεστι τοῖς περιτυγχάνουσι κρίνειν αὐτά, ὥς ἂν αὐτῶν
ἕκαστος αἰρῇται. εὐτύχει.

1. πέπτωκεν] cp, πέπτωκε V. 5. τὰς] τοὺς V, corr. p.
9. καί] scripsi, ἢ V. 13. συνειδομεν V (fort. recte; cfr.
εἰπα); corr. v. 17. -ων ἡμῖν — τό] cv; euan. V, rep. mg. m.

pertinent, continet autem primus origines trium sectionum oppositarumque et proprietates earum principales latius uniuersaliusque expositas, quam quae ceteri de iis scripserunt, alter, quae diametri axesque sectionum et asymptotae propria habent aliaque, quae usum generalem necessariumque ad determinationes praebent; quas autem diametros quosque axes adpellem, ex hoc libro comperies. tertius uero plurima et mira continet theoremata et ad compositionem locorum solidorum et ad determinationes utilia, quorum pleraque et pulcherrima noua sunt; quibus inuentis cognoui, locum ad tres et quattuor lineas minime ab Euclide componi, sed partem tantum fortuitam eius, et id quidem non optime; neque enim fieri potuit, ut compositio sine propositionibus a nobis adiectis perficeretur. quartus autem continet, quot modis sectiones conorum et inter se et cum ambitu circuli concurrant, et praeterea alia quaedam, quorum neutrum genus a prioribus tractatum est, in quot punctis sectio coni uel ambitus circuli concurrant [cum oppositis sectionibus]. reliqui autem libri ulterius progrediuntur. primus enim eorum de minimis et maximis latius tractat, secundus de coni sectionibus aequalibus et similibus, tertius de theorematis ad determinationem pertinentibus, quartus problemata conica habet determinata. uerum enimuero omnibus editis iis, qui legent, licet, eos pro cuiusque uoluntate aestimare. uale.

rec. (add. γρά). 18. κώνων] cv; euan. V, rep. mg. m. rec.
21. κατά] scr. ταῖς ἀντικειμέναις κατά; cfr. IV praef.

Ὅροι πρώτοι.

Ἐὰν ἀπό τινος σημείου πρὸς κύκλου περιφέρειαν, ὅς οὐκ ἔστιν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ σημείῳ, εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα ἐφ' ἑκάτερα προσεκβληθῇ, καὶ μένοντος
 5 τοῦ σημείου ἢ εὐθεῖα περιενεχθεῖσα περὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὴν γραφεῖσαν ὑπὸ τῆς εὐθείας ἐπιφάνειαν, ἢ σύγκειται ἐκ δύο ἐπιφανειῶν κατὰ κορυφὴν ἀλλήλαις κειμένων, ὧν ἑκάτερα εἰς ἄπειρον
 10 αὖξεται τῆς γραφούσης εὐθείας εἰς ἄπειρον προσεκβαλλομένης, καλῶ κωνικὴν ἐπιφάνειαν, κορυφὴν δὲ αὐτῆς τὸ μεμενηκὸς σημεῖον, ἄξονα δὲ τὴν διὰ τοῦ σημείου καὶ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀγομένην εὐθεῖαν.

κῶνον δὲ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε τοῦ κύκλου
 15 καὶ τῆς μεταξὺ τῆς τε κορυφῆς καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας κωνικῆς ἐπιφανείας, κορυφὴν δὲ τοῦ κῶνου τὸ σημεῖον, ὃ καὶ τῆς ἐπιφανείας ἐστὶ κορυφή, ἄξονα δὲ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἀγομένην εὐθεῖαν, βάσιν δὲ τὸν κύκλον.

20 τῶν δὲ κῶνων ὀρθοὺς μὲν καλῶ τοὺς πρὸς ὀρθὰς ἔχοντας ταῖς βάσεσι τοὺς ἄξονας, σκαληνοὺς δὲ τοὺς μὴ πρὸς ὀρθὰς ἔχοντας ταῖς βάσεσι τοὺς ἄξονας.

πάσης καμπύλης γραμμῆς, ἥτις ἐστὶν ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ, διάμετρον μὲν καλῶ εὐθεῖαν, ἥτις ἡγμένη ἀπὸ
 25 τῆς καμπύλης γραμμῆς πάσας τὰς ἀγομένας ἐν τῇ γραμμῇ εὐθείας εὐθεῖα τινὶ παραλλήλους δίχα διαιρεῖ, κορυφὴν δὲ τῆς γραμμῆς τὸ πέρας τῆς εὐθείας τὸ πρὸς τῇ γραμμῇ, τεταγμένως δὲ ἐπὶ τὴν διάμετρον κατῆχθαι ἐκάστην τῶν παραλλήλων.

29. κατῆχθαι] syll. αι comp. V, mg. m. rec. „χθαι ... 17“.

Definitiones I.

1. Si a puncto aliquo ad ambitum circuli, qui in eodem plano, in quo punctum, positus non est, ducta recta in utramque partem producit, et manente puncto recta per ambitum circuli circumacta in eundem rursus locum restituitur, unde ferri coepta est, superficiem recta descriptam, ex duabus superficiebus ad uerticem inter se positis compositam, quarum utraque in infinitum crescit recta describente in infinitum producta, superficiem conicam adpello, uerticem autem eius punctum manens, axem autem rectam per punctum et centrum circuli ductam.

2. Conum autem figuram comprehensam circulo et superficie conica inter uerticem ambitumque circuli posita, uerticem autem coni punctum, quod idem est uertex superficiei, axem autem rectam a uertice ad centrum circuli ductam, basim autem circulum.

3. Conorum uero rectos adpello, qui axes ad bases perpendiculares habent, obliquos autem, qui axes ad bases perpendiculares non habent.

4. Omnis lineae curuae, quae in uno plano posita est, diametrum adpello rectam, quae a linea curua ducta omnes rectas in linea illa rectae alicui parallelas ductas in binas partes aequales secat, uerticem autem lineae terminum huius rectae in linea, singulas autem rectas parallelas ad diametrum ordinate ductas esse.

ὁμοίως δὲ καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν ἐν ἐνὶ ἐπι-
πέδῳ κειμένων διάμετρον καλῶ πλαγίαν μὲν, ἣτις
εὐθεῖα τέμνουσα τὰς δύο γραμμὰς πάσας τὰς ἀγομένας
ἐν ἑκατέρᾳ τῶν γραμμῶν παρὰ τινὰ εὐθεῖαν δίχα
5 τέμνει, κορυφὰς δὲ τῶν γραμμῶν τὰ πρὸς ταῖς γραμ-
μαῖς πέρατα τῆς διαμέτρου, ὀρθίαν δέ, ἣτις κειμένη
μεταξὺ τῶν δύο γραμμῶν πάσας τὰς ἀγομένας παρ-
αλλήλους εὐθείας εὐθεῖα τινὶ καὶ ἀπολαμβανομένης
μεταξὺ τῶν γραμμῶν δίχα τέμνει, τεταγμένως δὲ ἐπὶ
10 τὴν διάμετρον κατῆχθαι ἑκάστην τῶν παραλλήλων.

συζυγεῖς καλῶ διαμέτρους [δύο] καμπύλης γραμμῆς
καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν εὐθείας, ὧν ἑκατέρα διά-
μετρος οὖσα τὰς τῇ ἑτέρᾳ παραλλήλους δίχα διαιρεῖ.

ἄξονα δὲ καλῶ καμπύλης γραμμῆς καὶ δύο καμ-
15 πύλων γραμμῶν εὐθεῖαν, ἣτις διάμετρος οὖσα τῆς
γραμμῆς ἢ τῶν γραμμῶν πρὸς ὀρθὰς τέμνει τὰς παρ-
αλλήλους.

συζυγεῖς καλῶ ἄξονας καμπύλης γραμμῆς καὶ δύο
καμπύλων γραμμῶν εὐθείας, αἵτινες διάμετροι οὖσαι
20 συζυγεῖς πρὸς ὀρθὰς τέμνουσι τὰς ἀλλήλων παραλλήλους.

α'.

Αὶ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας ἀγό-
μεναι εὐθεῖαι ἐπὶ τὰ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ σημεῖα ἐν τῇ
ἐπιφανείᾳ εἰσὶν.

25 ἔστω κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἥς κορυφὴ τὸ *A* σημεῖον,
καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας
τὸ *B*, καὶ ἐπεξεύχθω τις εὐθεῖα ἡ *ΑΓΒ*. λέγω, ὅτι
ἡ *ΑΓΒ* εὐθεῖα ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστίν.

5. πρὸς] προσ' seq. lineola fortuita V. 6. ὀρθίαν] p; ὀρ-
θείαν V, mg. m. rec. „ὀρθίαν ut infra“. 9. τέμνει] p, τέμνη V.

11. δύο] om. Halley cum Comm. 21. α'] c v, om. V.

5. Similiter uero etiam duarum linearum curuarum in uno plano positarum diametrum transuersam adpello rectam, quae duas illas lineas secans omnes rectas in utraque linea rectae alicui parallelas ductas in binas partes aequales secat, uertices autem linearum terminos diametri in linea positos, rectam autem, quae inter duas lineas posita omnes rectas rectae alicui parallelas ductas et inter lineas abscisas in binas partes aequales secat, singulas autem parallelas ad diametrum ordinate ductas esse.

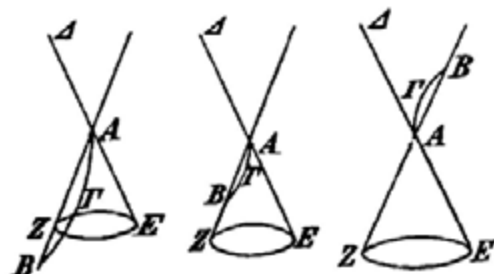
6. Coniugatas diametros adpello lineae curuae duarumque linearum curuarum rectas, quarum utraque diametrus est et rectas alteri parallelas in binas partes aequales secat.

7. Axem uero lineae curuae duarumque linearum curuarum rectam adpello, quae diametrus est lineae linearumue et parallelas ad angulos rectos secat.

8. Axes coniugatos adpello lineae curuae duarumque linearum curuarum rectas, quae diametri coniugatae sunt et altera alterius parallelas ad rectos angulos secant.

I.

Rectae a uertice superficiei conicae ad puncta superficiei ductae in superficie sunt.



sit superficies conica, cuius uertex sit A punctum, et sumatur in superficie conica punctum aliquod B , et

ducatur recta aliqua $A\Gamma B$. dico, rectam $A\Gamma B$ in superficie esse.

εἰ γὰρ δυνατόν, μὴ ἔστω, καὶ ἔστω ἡ γεγραφεῖσα
τὴν ἐπιφάνειαν εὐθεῖα ἡ ΔE , ὁ δὲ κύκλος, καθ' οὗ
φέρεται ἡ $E\Delta$, ὁ EZ . ἐὰν δὲ μένοντος τοῦ A σημείου
ἡ ΔE εὐθεῖα φέρεται κατὰ τῆς τοῦ EZ κύκλου περι-
5 φερείας, ἥξει καὶ διὰ τοῦ B σημείου, καὶ ἔσται δύο
εὐθειῶν τὰ αὐτὰ πέρατα· ὅπερ ἄτοπον.

οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὸ B ἐπιξεννυμένη
εὐθεῖα οὐκ ἔστιν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ· ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ
ἄρα ἐστί.

10 πόρισμα.

καὶ φανερόν, ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τι
σημεῖον τῶν ἐντὸς τῆς ἐπιφανείας ἐπιξεννυθῇ εὐθεῖα,
ἐντὸς πεσεῖται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, καὶ ἐὰν ἐπὶ τι
τῶν ἐκτὸς ἐπιξεννυθῇ, ἐκτὸς ἔσται τῆς ἐπιφανείας.

15 β'.

Ἐὰν ἐφ' ὅποτεραςοῦν τῶν κατὰ κορυφὴν ἐπιφανειῶν
δύο σημεῖα ληφθῇ, ἡ δὲ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιξεννυμένη
εὐθεῖα μὴ νεύῃ ἐπὶ τὴν κορυφὴν, ἐντὸς πεσεῖται τῆς
ἐπιφανείας, ἡ δὲ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ ἐκτός.

20 ἔστω κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἥς κορυφὴ μὲν τὸ A ση-
μεῖον, ὁ δὲ κύκλος, καθ' οὗ φέρεται ἡ τὴν ἐπιφάνειαν
γράφουσα εὐθεῖα, ὁ $B\Gamma$, καὶ εἰλήφθω ἐφ' ὅποτεραςοῦν
τῶν κατὰ κορυφὴν ἐπιφανειῶν δύο σημεῖα τὰ Δ , E ,
καὶ ἐπιξεννυθεῖσα ἡ ΔE μὴ νεύετω ἐπὶ τὸ A σημεῖον.
25 λέγω, ὅτι ἡ ΔE ἐντὸς ἔσται τῆς ἐπιφανείας καὶ ἡ
ἐπ' εὐθείας αὐτῇ ἐκτός.

ἐπεξεννυθῶσαν αἱ AE , AD καὶ ἐκβεβλήσθωσαν·
πεσοῦνται δὲ ἐπὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν. πιπτέ-

2. καθ'] εν; κα- euan. V, rep. mg. m. rec. 10. πόρισμα]
om. V.

nam si fieri potest, ne sit, et ΔE sit recta superficiem describens, circulus autem, per quem fertur, sit EZ . itaque, si manente puncto A recta ΔE per ambitum circuli EZ fertur, etiam per punctum B ueniet, et duae rectae eosdem terminos habebunt; quod fieri non potest.

ergo fieri non potest, ut recta ab A ad B ducta in superficie non sit. ergo est in superficie.

Corollarium.

et manifestum est, si a uertice ad punctum aliquod eorum, quae intra superficiem sunt, recta ducatur, eam intra superficiem conicam casuram esse, et si ad aliquod eorum ducatur, quae extra sunt, extra superficiem casuram.

II.

Si in utralibet superficie earum, quae ad uerticem inter se positae sunt, duo puncta sumuntur, et recta puncta illa coniungens ad uerticem non cadit, intra superficiem cadet, producta uero in directum extra.

sit superficies conica, cuius uertex sit A , circulus autem, per quem recta superficiem describens fertur, sit $B\Gamma$, et in utralibet superficie earum, quae ad uerticem sunt inter se, duo puncta sumantur Δ , E , et ducta ΔE ne cadat ad punctum A . dico, ΔE intra superficiem esse, productam autem in directum extra.

ducantur AE , $A\Delta$ et producantur; cadent igitur ad ambitum circuli [prop. I]. cadant in B , Γ , et ducatur $B\Gamma$; $B\Gamma$ igitur intra circulum erit; quare etiam intra superficiem conicam. iam in ΔE sumatur punctum aliquod Z , et ducta AZ producat; cadet igitur

τωσαν κατὰ τὰ B, Γ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $B\Gamma$. ἔσται ἄρα ἡ $B\Gamma$ ἐντὸς τοῦ κύκλου· ὥστε καὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. εἰλήφθω δὲ ἐπὶ τῆς ΔE τυχὸν σημεῖον τὸ Z , καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ AZ ἐκβεβλήσθω. πεσεῖται δὲ ἐπὶ
 5 τὴν $B\Gamma$ εὐθεῖαν· τὸ γὰρ $B\Gamma A$ τρίγωνον ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. πιπτέτω κατὰ τὸ H . ἐπεὶ οὖν τὸ H ἐντὸς ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, καὶ ἡ AH ἄρα ἐντὸς ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας· ὥστε καὶ τὸ Z ἐντὸς ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι
 10 καὶ πάντα τὰ ἐπὶ τῆς ΔE σημεία ἐντὸς ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας· ἡ ἄρα ΔE ἐντὸς ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας.

ἐκβεβλήσθω δὲ ἡ ΔE ἐπὶ τὸ Θ . λέγω δὴ, ὅτι ἐκτὸς πεσεῖται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τι αὐτῆς τὸ Θ μὴ ἐκτὸς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας,
 15 καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ $A\Theta$ ἐκβεβλήσθω· πεσεῖται δὲ ἡ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ἢ ἐντὸς· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· πίπτει γὰρ ἐπὶ τὴν $B\Gamma$ ἐκβαλλομένην ὡς κατὰ τὸ K . ἡ $E\Theta$ ἄρα ἐκτὸς ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας.

ἡ ἄρα ΔE ἐντὸς ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, καὶ
 20 ἡ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ ἐκτὸς.

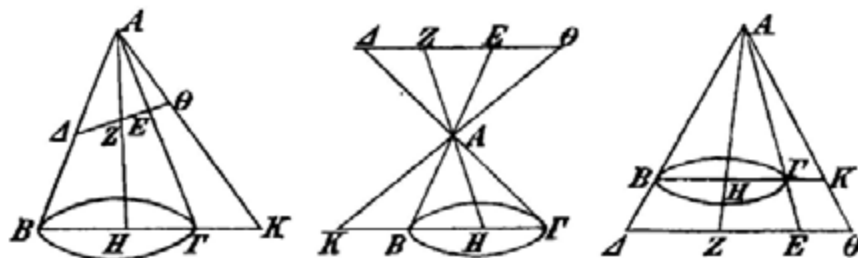
γ'.

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τῆς κορυφῆς, ἡ τομὴ τρίγωνόν ἐστὶν.

ἔστω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ A σημεῖον, βάσις
 25 δὲ ὁ $B\Gamma$ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ τινὶ διὰ τοῦ A σημείου, καὶ ποιείτω τομὰς ἐπὶ μὲν τῆς ἐπιφανείας τὰς $AB, A\Gamma$ γραμμάς, ἐν δὲ τῇ βάσει τὴν $B\Gamma$ εὐθεῖαν. λέγω, ὅτι τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνόν ἐστὶν.

1. ἄρα] cv; euan. V, rep. mg. m. rec. 16. περιφέρειαν V (in alt. φ inc. fol. 3^u), corr. m. rec. ἀδύνατον] cv, -τον euan. V. 20. ἐκτός] ἐκτός:— V. 28. $AB\Gamma$] p, $A\Gamma V$, corr. m. 2 v.

ad rectam $B\Gamma$; triangulus enim $B\Gamma A$ in uno plano positus est [Eucl. XI, 2]. cadat in H . iam quoniam H intra superficiem conicam est, etiam AH intra superficiem conicam est [prop. I coroll.]; quare etiam Z intra superficiem conicam est. similiter igitur demonstrabimus, etiam omnia puncta rectae ΔE intra superficiem esse; itaque ΔE intra superficiem est.



iam ΔE ad Θ producat. dico, eam extra superficiem conicam cadere. nam si fieri potest, pars eius aliqua uelut Θ extra superficiem conicam ne sit, et ducta $A\Theta$ producat. cadet igitur aut in ambitum circuli aut intra [prop. I et coroll.]; quod fieri non potest. cadit enim in $B\Gamma$ productam ut in K . itaque $E\Theta$ extra superficiem est.

ergo ΔE intra superficiem conicam est, producta autem in directum extra.

III.

Si conus per uerticem plano secatur, sectio triangulus est.

sit conus, cuius uertex sit A punctum, basis autem circulus $B\Gamma$, et secetur plano aliquo per A punctum, et hoc sectiones efficiat in superficie lineas AB , $A\Gamma$, in basi autem rectam $B\Gamma$. dico, $AB\Gamma$ triangulum esse.

ἐπεὶ γὰρ ἡ ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὸ B ἐπιζευγνυμένη κοινὴ τομὴ ἐστὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας, εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ AB · ὁμοίως δὲ καὶ ἡ AG . ἔστι δὲ καὶ ἡ $BΓ$ εὐθεῖα. τρίγωνον
 5 ἄρα ἐστὶ τὸ $ABΓ$.

ἐὰν ἄρα κώνος ἐπιπέδῳ τινὶ τμηθῇ διὰ τῆς κορυφῆς, ἡ τομὴ τρίγωνόν ἐστιν.

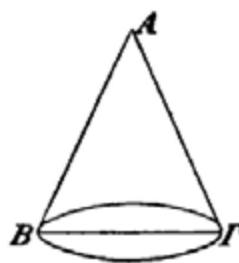
δ'.

Ἐὰν ὁποιοῦν τῶν κατὰ κορυφὴν ἐπιφανειῶν
 10 ἐπιπέδῳ τινὶ τμηθῇ παραλλήλῳ τῷ κύκλῳ, καθ' οὗ φέρεται ἡ γράφουσα τὴν ἐπιφάνειαν εὐθεῖα, τὸ ἐναπολαμβανόμενον ἐπίπεδον μεταξὺ τῆς ἐπιφανείας κύκλος ἐστὶ τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος, τὸ δὲ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε τοῦ κύκλου καὶ τῆς ἀπολαμβανο-
 15 μένης ὑπὸ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου κωνικῆς ἐπιφανείας πρὸς τῇ κορυφῇ κώνος ἐστὶ.

ἔστω κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἥς κορυφὴ μὲν τὸ A σημείον, ὃ δὲ κύκλος, καθ' οὗ φέρεται ἡ τὴν ἐπιφάνειαν γράφουσα εὐθεῖα, ὃ $BΓ$, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ τινὶ
 20 παραλλήλῳ τῷ $BΓ$ κύκλῳ, καὶ ποιείτω ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τομὴν τὴν $ΔE$ γραμμὴν. λέγω, ὅτι ἡ $ΔE$ γραμμὴ κύκλος ἐστὶν ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἔχων τὸ κέντρον.

εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ $BΓ$ κύκλου τὸ Z , καὶ ἐπέξέχθω ἡ AZ . ἄξων ἄρα ἐστὶ καὶ συμβάλλει
 25 τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ. συμβαλλέτω κατὰ τὸ H , καὶ ἐκβεβλήσθω τι διὰ τῆς AZ ἐπίπεδον. ἐστὶ δὲ ἡ τομὴ τρίγωνον τὸ $ABΓ$. καὶ ἐπεὶ τὰ $Δ$, H , E σημεῖα ἐν τῷ τέμνοντι ἐστὶν ἐπιπέδῳ, ἐστὶ δὲ καὶ ἐν τῷ τοῦ

7. ἐστίν] ἐστὶ :— V.



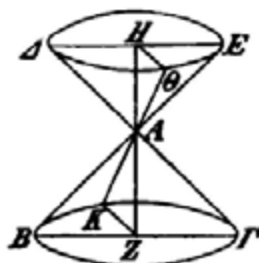
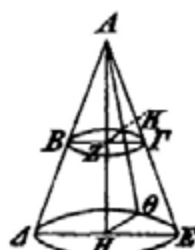
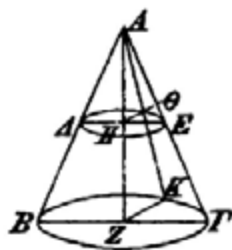
nam quoniam linea ab A ad B ducta communis est sectio plani secantis et superficiei conicae, recta est AB . et eadem de causa $A\Gamma$. uerum etiam $B\Gamma$ recta est. itaque $AB\Gamma$ triangulus est.

ergo si conus plano per uerticem secatur, sectio triangulus est.

IV.

Si utralibet superficies earum, quae ad uerticem sunt inter se, plano secatur aliquo ei circulo parallelo, per quem fertur recta superficiem describens, planum intra superficiem comprehensum circulus erit centrum in axe habens, figura autem a circulo et superficie conica plano secante abscisa ad uerticem comprehensa conus erit.

sit superficies conica, cuius uertex sit A punctum, circulus autem, per quem fertur recta superficiem



describens, $B\Gamma$, et secetur plano aliquo circulo $B\Gamma$ parallelo, et hoc in superficie sectionem efficiat lineam AE . dico, lineam AE circulum esse centrum in axe habentem.

sumatur enim Z centrum circuli $B\Gamma$, et ducatur AZ . axis igitur est [def. 1] et cum plano secante

$ABΓ$ ἐπιπέδῳ, εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ $ΔΗΕ$. εἰλήφθω
 δὴ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς $ΔΕ$ γραμμῆς τὸ $Θ$, καὶ ἐπι-
 ζευχθεῖσα ἡ $ΑΘ$ ἐκβεβλήσθω. συμβαλεῖ δὲ τῇ $ΒΓ$
 περιφερείᾳ. συμβαλλέτω κατὰ τὸ $Κ$, καὶ ἐπεξεύχθωσαν
 5 αἱ $ΗΘ$, $ΖΚ$. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ
 $ΔΕ$, $ΒΓ$ ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς τέμνεται τοῦ $ΑΒΓ$, αἱ
 κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα
 ἐστὶν ἡ $ΔΕ$ τῇ $ΒΓ$. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ $ΗΘ$ τῇ
 $ΚΖ$ παράλληλος. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $ΖΑ$ πρὸς τὴν $ΑΗ$,
 10 οὕτως ἡ τε $ΖΒ$ πρὸς $ΔΗ$ καὶ ἡ $ΖΓ$ πρὸς $ΗΕ$ καὶ
 ἡ $ΖΚ$ πρὸς $ΗΘ$. καὶ εἰσιν αἱ τρεῖς αἱ $ΒΖ$, $ΚΖ$, $ΖΓ$
 ἴσαι ἀλλήλαις· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αἱ $ΔΗ$, $ΗΘ$, $ΗΕ$ ἴσαι
 εἰσὶν ἀλλήλαις. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ παῖσαι αἱ
 ἀπὸ τοῦ $Η$ σημείου πρὸς τὴν $ΔΕ$ γραμμὴν προσ-
 15 πίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΔΕ$ γραμμὴ τὸ κέντρον ἔχων
 ἐπὶ τοῦ ἄξονος.

καὶ φανερόν, ὅτι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε
 τοῦ $ΔΕ$ κύκλου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτοῦ
 20 πρὸς τῷ $Α$ σημείῳ κωνικῆς ἐπιφανείας κῶνός ἐστι.

καὶ συναποδέδεικται, ὅτι ἡ κοινὴ τομὴ τοῦ τέμνον-
 τος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου διά-
 μετρός ἐστι τοῦ κύκλου.

ε'.

25 Ἐὰν κῶνος σκαληνὸς ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος
 πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ
 πρὸς ὀρθὰς μὲν τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ, ἀφαιροῦντι
 δὲ πρὸς τῇ κορυφῇ τριγώνον ὅμοιον μὲν τῷ διὰ τοῦ

6. τέμνεται τοῦ] bis (in extr. et pr. fol.) V, corr. m. 1.
 11. αἱ] (alt.) p, om. V, corr. m. 2 v. 20. τῷ $Α$ σημείῳ]
 sine causa rep. mg. m. rec. V.

concidit. concidat in H , et per AZ planum ducatur. sectio igitur $AB\Gamma$ triangulus erit [prop. III]. et quoniam puncta A, H, E in plano secanti sunt, uerum etiam in plano $AB\Gamma$, AHE recta est [Eucl. XI, 3]. sumatur igitur in linea AE punctum aliquod Θ , et ducta $A\Theta$ producatur. concidet igitur cum ambitu $B\Gamma$. concidat in K , et ducantur $H\Theta, ZK$. et quoniam duo plana parallela $AE, B\Gamma$ plano $AB\Gamma$ secantur, communes eorum sectiones parallelae sunt [Eucl. XI, 16]. itaque AE rectae $B\Gamma$ parallela est. eadem de causa etiam $H\Theta$ rectae KZ parallela est. itaque [Eucl. VI, 4] $ZA : AH = ZB : AH = Z\Gamma : HE = ZK : H\Theta$. et $BZ = KZ = Z\Gamma$. quare etiam $AH = H\Theta = HE$ [Eucl. V, 9]. iam similiter demonstrabimus, etiam omnes rectas ab H puncto ad lineam AE adcentes inter se aequales esse.

ergo linea AE circulus est centrum in axe habens.

et manifestum est, figuram circulo AE et superficie conica ab eo abscisa ad A punctum comprehensam conum esse.

et simul demonstratum est, sectionem communem plani secantis triangulique per axem positi diametrum circuli esse.

V.

Si conus obliquus per axem plano ad basim perpendiculari secatur et simul alio plano secatur ad triangulum per axem positum perpendiculari, quod ad uerticem triangulum abscindat triangulo per axem posito similem, sed e contrario positum, sectio circulus erit; adpelletur autem talis sectio contraria.

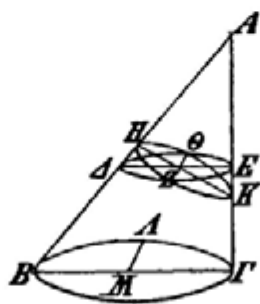
ἄξονος τριγώνῳ, ὑπεναντίως δὲ κείμενον, ἡ τομὴ κύκλος ἐστὶ, καλεῖσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ ὑπεναντία.

ἔστω κῶνος σκαληνός, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ A σημείον, βάσις δὲ ὁ $B\Gamma$ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ
 5 διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῶς πρὸς τὸν $B\Gamma$ κύκλον, καὶ ποιεῖται τομὴν τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον. τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὄντι τῷ $AB\Gamma$ τριγώνῳ, ἀφαιροῦντι δὲ τρίγωνον πρὸς τῷ A σημείῳ τὸ AKH ὅμοιον μὲν τῷ $AB\Gamma$ τριγώνῳ, ὑπεναντίως δὲ κείμενον, τουτέστιν
 10 ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ AKH γωνίαν τῇ ὑπὸ $AB\Gamma$. καὶ ποιεῖται τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τὴν $H\Theta K$ γραμμὴν. λέγω, ὅτι κύκλος ἐστὶν ἡ $H\Theta K$ γραμμὴ.

εἰλήφθω γάρ τινα σημεῖα ἐπὶ τῶν $H\Theta K$, $B\Gamma$ γραμμῶν τὰ Θ , Λ , καὶ ἀπὸ τῶν Θ , Λ σημείων ἐπὶ τὸ διὰ
 15 τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου ἐπίπεδον κάθετοι ἤχθωσαν· πεσοῦνται δὲ ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων. πιπτέτωσαν ὥς αἱ $Z\Theta$, ΛM . παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $Z\Theta$ τῇ ΛM . ἤχθω δὲ διὰ τοῦ Z τῇ $B\Gamma$ παράλληλος ἡ ΔZE . ἐστὶ δὲ καὶ ἡ $Z\Theta$ τῇ ΛM παράλληλος· τὸ
 20 ἄρα διὰ τῶν $Z\Theta$, ΔE ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῇ βάσει τοῦ κώνου. κύκλος ἄρα ἐστὶν, οὗ διάμετρος ἡ ΔE . ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΔZ , ZE τῷ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστὶν ἡ $E\Delta$ τῇ $B\Gamma$, ἡ ὑπὸ $\Delta \Delta E$ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ $AB\Gamma$. ἡ δὲ ὑπὸ AKH τῇ
 25 ὑπὸ $AB\Gamma$ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ AKH ἄρα τῇ ὑπὸ $\Delta \Delta E$ ἐστὶν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τῷ Z σημείῳ ἴσαι [κατὰ κορυφὴν]. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔZH τρίγωνον τῷ KZE τριγώνῳ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ EZ πρὸς τὴν ZK , οὕτως ἡ HZ πρὸς $Z\Delta$. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν

6. δῆ] δέ Eutocius. 8. AKH] p , KH V. 27. κατὰ κορυφὴν] deleo; κατὰ κορυφὴν γάρ p , in ras. m. 2 v.

sit conus obliquus, cuius uertex sit A punctum, basis autem circulus $B\Gamma$, et per axem secetur plano ad circulum $B\Gamma$ perpendiculari, et hoc sectionem efficiat triangulum $AB\Gamma$ [prop. III]. iam etiam alio plano secetur ad triangulum $AB\Gamma$ perpendiculari, quod ad A punctum abscindat triangulum AKH similem triangulo $AB\Gamma$, sed e contrario positum, h. e. ita ut sit



$$\angle AKH = \angle AB\Gamma.$$

et in superficie efficiat sectionem lineam $H\Theta K$. dico, lineam $H\Theta K$ circulum esse.

sumantur enim in lineis $H\Theta K$, $B\Gamma$ puncta aliqua Θ , A , et a punctis Θ , A ad planum trianguli $AB\Gamma$ perpendiculares ducantur; cadent igitur ad communes sectiones planorum [Eucl. XI def. 6]. cadant ut $Z\Theta$, AM . itaque $Z\Theta$, AM parallelae sunt [Eucl. XI, 6]. ducatur igitur per Z rectae $B\Gamma$ parallela AZE . uerum etiam $Z\Theta$ rectae AM parallela est. itaque planum rectarum $Z\Theta$, AZE basi coni parallelum est [Eucl. XI, 15]. quare circulus est, cuius diametrus est AE [prop. IV]. itaque est [Eucl. VI, 8] $AZ \times ZE = Z\Theta^2$. et quoniam EA , $B\Gamma$ parallelae sunt, erit $\angle AAE = \angle AB\Gamma$ [Eucl. I, 29]. uerum supposuimus, esse $\angle AKH = \angle AB\Gamma$; quare etiam $\angle AKH = \angle AAE$. uerum etiam anguli ad Z punctum positi aequales sunt [Eucl. I, 15]. itaque $AZH \sim KZE$. quare [Eucl. VI, 4]

$$EZ : ZK = HZ : ZA.$$

itaque $EZ \times ZA = KZ \times ZH$ [Eucl. VI, 17].

$EZ\Delta$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν KZH . ἀλλὰ τῷ ὑπὸ τῶν $EZ\Delta$ ἴσον ἐδείχθη τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$ · καὶ τὸ ὑπὸ τῶν KZ , ZH ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$. ὁμοίως δὴ δειχθήσονται καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τῆς $H\Theta K$ γραμμῆς ἐπὶ τὴν HK ἡγμέναι κάθετοι ἴσον δυνάμεναι τῷ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς HK .

κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ τομὴ, οὗ διάμετρος ἡ HK .

ς'.

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ληφθῇ
 10 δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας, ὃ μὴ
 ἐστὶν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου,
 καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἄχθῃ παράλληλος εὐθεία τινί, ἥ ἐστι
 κάθετος ἀπὸ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν βάσιν
 τοῦ τριγώνου, συμβαλεῖ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ
 15 καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς ἐπι-
 φανείας δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ τριγώνου.

ἔστω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ A σημεῖον, βάσις
 δὲ ὁ $B\Gamma$ κύκλος, καὶ τετμήσθω ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ διὰ
 τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω κοινὴν τομὴν τὸ $AB\Gamma$ τρι-
 20 γωνον, καὶ ἀπὸ τίνος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς $B\Gamma$ περι-
 φερείας τοῦ M κάθετος ἦχθω ἐπὶ τὴν $B\Gamma$ ἢ MN .
 εἰλήφθω δὲ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου σημεῖόν τι
 τὸ Δ , καὶ διὰ τοῦ Δ τῇ MN παράλληλος ἦχθω ἡ ΔE .
 λέγω, ὅτι ἡ ΔE ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῷ ἐπιπέδῳ
 25 τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου καὶ προσεκβαλλομένη ἐπὶ τὸ ἕτερον
 μέρος τοῦ κώνου, ἄχρῃς ἂν συμπέσῃ τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ,
 δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου.

1. ἐστὶ — 2. ἴσον] om. V, corr. p (KZ , ZH et EZ , $Z\Delta$). 2.
 $Z\Theta$] $E\Theta$ V; corr. p. 5. HK] p, $H\Gamma$ V, corr. m. 2 v. 12.
 εὐθεία] rep. mg. m. rec. V. 14. συμβαλεῖ V, sed corr.

demonstrauimus autem, esse $EZ \times ZA = ZO^2$. quare etiam $KZ \times ZH = ZO^2$.

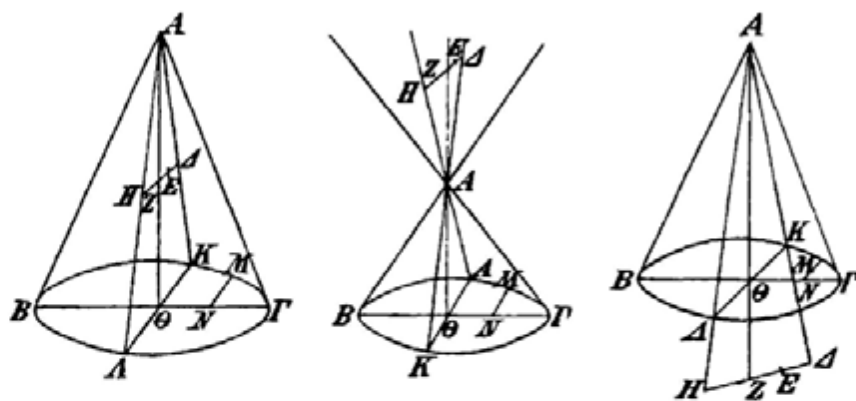
iam similiter demonstrabimus, etiam omnes rectas a linea HOK ad HK perpendiculares ductas quadratas aequales esse rectangulo partium rectae HK .

ergo sectio circulus est, cuius diameter est HK .

VI.

Si conus plano per axem secatur, et in superficie conij punctum aliquod sumitur, quod in latere trianguli per axem positi non est, et ab eo recta ducitur parallela rectae ab ambitu circuli ad basim trianguli perpendiculari, ea cum triangulo per axem posito concurrent et usque ad alteram partem superficiei producta a triangulo in duas partes aequales secabitur.

sit conus, cuius uertex sit A punctum, basis autem $B\Gamma$ circulus, et secetur conus plano per axem, et hoc communem sectionem efficiat $AB\Gamma$ triangulum, et a



puncto M ambitus $B\Gamma$ ad $B\Gamma$ perpendicularis ducatur MN . iam in superficie conij punctum aliquod sumatur Δ , et per Δ rectae MN parallela ducatur ΔE . dico, rectam ΔE productam cum plano trianguli $AB\Gamma$

ἐπεξεύχθω ἡ $ΑΔ$ καὶ ἐκβεβλήσθω· συμπεσεῖται ἄρα
 τῇ περιφερείᾳ τοῦ $ΒΓ$ κύκλου. συμπιπτέτω κατὰ τὸ K ,
 καὶ ἀπὸ τοῦ K ἐπὶ τὴν $ΒΓ$ κάθετος ἡχθω ἡ $KΘΑ$ ·
 παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $KΘ$ τῇ MN · καὶ τῇ $ΔΕ$ ἄρα.
 5 ἐπεξεύχθω ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὸ $Θ$ ἡ $AΘ$. ἐπεὶ οὖν ἐν
 τριγώνῳ τῷ $AΘK$ τῇ $ΘK$ παράλληλός ἐστὶν ἡ $ΔΕ$,
 ἡ $ΔΕ$ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ $AΘ$. ἡ δὲ $AΘ$
 ἐν τῷ τοῦ $ΑΒΓ$ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· συμπεσεῖται ἄρα ἡ $ΔΕ$
 τῷ τοῦ $ΑΒΓ$ τριγώνου ἐπιπέδῳ. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ τῇ
 10 $AΘ$ συμπίπτει· συμπιπτέτω κατὰ τὸ Z , καὶ ἐκβεβλήσθω
 ἡ $ΔZ$ ἐπ' εὐθείας, ἄχρις ἂν συμπέσῃ τῇ τοῦ κώνου
 ἐπιφανείᾳ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ H . λέγω, ὅτι ἴση
 ἐστὶν ἡ $ΔZ$ τῇ ZH .

ἐπεὶ γὰρ τὰ $A, H, Δ$ σημεῖα ἐν τῇ τοῦ κώνου
 15 ἐστὶν ἐπιφανείᾳ, ἀλλὰ καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῷ διὰ τῶν
 $AΘ, AK, ΔH, KA$ ἐκβαλλομένῳ, ὅπερ διὰ τῆς κορυφῆς
 τοῦ κώνου τρίγωνόν ἐστι, τὰ $A, H, Δ$ ἄρα σημεῖα ἐπὶ
 τῆς κοινῆς ἐστὶ τομῆς τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας καὶ
 τοῦ τριγώνου. εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν $A, H, Δ$.
 20 ἐπεὶ οἷον ἐν τριγώνῳ τῷ $ΑΔK$ τῇ $KΘΑ$ βάσει παρ-
 ἀλληλος ἡκται ἡ $ΔH$, καὶ διῆκται τις ἀπὸ τοῦ A ἡ
 $AZΘ$, ἐστὶν ὡς ἡ $KΘ$ πρὸς $ΘΑ$, ἡ $ΔZ$ πρὸς ZH .
 ἴση δὲ ἡ $KΘ$ τῇ $ΘΑ$, ἐπεὶ περ ἐν κύκλῳ τῷ $ΒΓ$ κάθ-
 ετός ἐστὶν ἐπὶ τὴν διάμετρον ἡ KA . ἴση ἄρα καὶ
 25 ἡ $ΔZ$ τῇ ZH .

ξ'.

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ
 δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστὶν
 ἡ βάσις τοῦ κώνου, κατ' εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν

21. ἀπὸ τοῦ] cp, ἀποῦ V. 23. ἐν] ἐκ V; corr. p.

concurrere et ad alteram partem conï productam, donec cum superficie eius concurrat, a plano trianguli $AB\Gamma$ in duas partes aequales secari.

ducatur AA et producat; concurrent igitur cum ambitu circuli $B\Gamma$ [prop. I]. concurrat in K , et a K ad $B\Gamma$ perpendicularis ducatur $K\Theta A$; itaque $K\Theta$ rectae MN parallela est [Eucl. I, 28]; quare etiam rectae AE [Eucl. XI, 9]. ducatur ab A ad Θ recta $A\Theta$. iam quoniam in triangulo $A\Theta K$ rectae ΘK parallela est AE , AE producta cum $A\Theta$ concurrent [Eucl. VI, 2]. uerum $A\Theta$ in plano trianguli $AB\Gamma$ posita est. itaque AE cum plano trianguli $AB\Gamma$ concurrent.

simul demonstrauius, eam etiam cum $A\Theta$ concurrere. concurrat in Z , et AZ in directum producat, donec cum superficie conï concurrat. concurrat in H . dico, esse $AZ = ZH$.

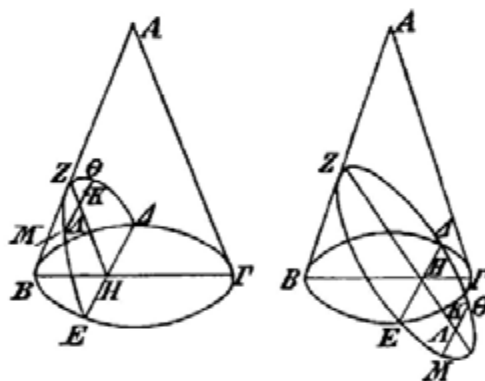
nam quoniam puncta A , H , A in superficie conï sunt, uerum etiam in plano per $A\Theta$, AK , AH , KA ducto, quod triangulus est per uerticem conï [prop. III], puncta A , H , A in communi sectione superficie conï triangulique sunt. itaque linea per A , H , A ducta recta est. iam quoniam in triangulo AAK basi $K\Theta A$ parallela ducta est AH , et ab A producta est $AZ\Theta$, erit $K\Theta : \Theta A = AZ : ZH$. est autem $K\Theta = \Theta A$, quoniam in circulo $B\Gamma$ ad diametrum perpendicularis est KA [Eucl. III, 3]. ergo etiam $AZ = ZH$.

VII.

Si conus per axem plano secatur et alio quoque plano secatur, quod id planum, in quo est basis conï, secundum rectam secat aut ad basim trianguli per

ἤτοι τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ, αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἀπὸ τῆς γενηθείσης τομῆς ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ, ἣν ἐποίησε τὸ τέμνον ἐπίπεδον, παράλληλοι τῇ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τοῦ
 5 τριγώνου εὐθείᾳ ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν πεσοῦνται τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου καὶ προσεκβαλλόμεναι ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς τομῆς δίχα τμηθήσονται ὑπ' αὐτῆς, καὶ ἐὰν μὲν ὀρθὸς ᾖ ὁ κῶνος, ἡ ἐν τῇ βάσει εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῇ
 10 κοινῇ τομῇ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἐὰν δὲ σκαληνός, οὐκ αἰεὶ πρὸς ὀρθὰς ἔσται, ἀλλ' ὅταν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῇ βάσει τοῦ κώνου.

ἔστω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ A σημεῖον, βάσις
 15 δὲ ὁ $B\Gamma$ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον. τε-
 τμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὸ
 20 ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἔστιν ὁ $B\Gamma$ κύκλος, κατ' εὐθείαν τὴν ΔE ἥτοι πρὸς ὀρθὰς οὕσαν τῇ $B\Gamma$ ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας
 25 αὐτῇ, καὶ ποιείτω το-
 μὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τὴν ΔZE . κοινὴ δὲ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ $AB\Gamma$ τρι-
 γώνου ἡ ZH . καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΔZE

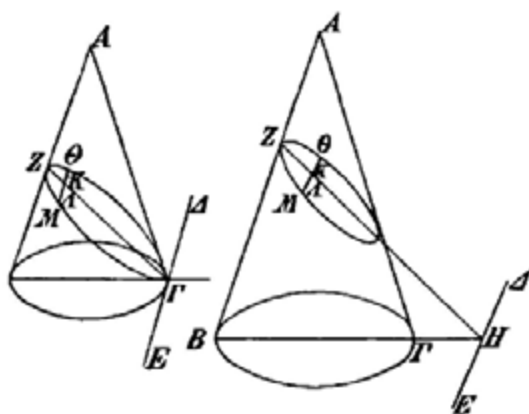


1. τοῦ] τῇ V; corr. p.
 27. δῆ] scripsi; δέ V.

22. ἤτοι] ἡτ V, ἤτοι mg. m. rec.

axem positi aut ad eandem productam perpendicularem, rectae a sectione in superficie conï orta, quam planum secans effecit, parallelæ ductæ rectæ ad basim trianguli perpendiculari cadent in communem sectionem plani secantis triangulique per axem positi et ad alteram partem sectionis productæ in binas partes æquales ab ea secabuntur, et si conus rectus est, recta in basi posita perpendicularis erit ad communem sectionem plani secantis triangulique per axem positi, sin obliquus est, non semper perpendicularis erit, sed ita tantum, si planum per axem ductum ad basim conï perpendiculare est.

sit conus, cuius uertex sit A punctum, basis autem $B\Gamma$ circulus, et plano per axem secetur, et hoc sectionem faciat triangulum $AB\Gamma$. secetur autem etiam



alio plano, quod planum, in quo est circulus $B\Gamma$, secundum rectam ΔE secat aut ad $B\Gamma$ aut ad eandem productam perpendicularem, et hoc in superficie conï sectionem efficiat ΔZE ; communis igitur

sectio plani secantis triangulique $AB\Gamma$ est ZH . et sumatur in sectione ΔZE punctum aliquod Θ , ducaturque per Θ rectæ ΔE parallela ΘK . dico, ΘK cum recta ZH concurrere et ad alteram partem sectionis ΔZE productam a recta ZH in duas partes æquales secari.

τομῆς τὸ Θ , καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ τῇ ΔE παράλληλος ἢ ΘK . λέγω, ὅτι ἡ ΘK συμβαλεῖ τῇ ZH καὶ ἐκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς ΔZE τομῆς δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ZH εὐθείας.

- 5 ἐπεὶ γὰρ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ A σημεῖον, βάσις δὲ ὁ $B\Gamma$ κύκλος, τέτμηται ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιεῖ τομὴν τὸ $AB\Gamma$ τριγώνον, εἴληπται δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπὶ πλευρᾶς τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου, τὸ Θ , καὶ ἐστὶ κάθετος ἡ ΔH
 10 ἐπὶ τὴν $B\Gamma$, ἡ ἄρα διὰ τοῦ Θ τῇ ΔH παράλληλος ἀγομένη, τουτέστιν ἡ ΘK , συμβαλεῖ τῷ $AB\Gamma$ τριγώνῳ καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς ἐπιφανείας δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ τριγώνου. ἐπεὶ οὖν ἡ διὰ τοῦ Θ τῇ ΔE παράλληλος ἀγομένη συμβάλλει
 15 τῷ $AB\Gamma$ τριγώνῳ καὶ ἐστὶν ἐν τῷ διὰ τῆς ΔZE τομῆς ἐπιπέδῳ, ἐπὶ τὴν κοινὴν ἄρα τομὴν πεσεῖται τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου. κοινὴ δὲ τομὴ ἐστὶ τῶν ἐπιπέδων $\epsilon\ \dot{Z}H$. ἡ ἄρα διὰ τοῦ Θ τῇ ΔE παράλληλος ἀγομένη πεσεῖται ἐπὶ τὴν ZH .
 20 καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς ΔZE τομῆς δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ZH εὐθείας.

ἦτοι δὴ ὁ κῶνος ὀρθός ἐστίν, ἢ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνον τὸ $AB\Gamma$ ὀρθόν ἐστὶ πρὸς τὸν $B\Gamma$ κύκλον, ἢ οὐδέτερον.

- 25 ἔστω πρότερον ὁ κῶνος ὀρθός· εἴη ἂν οὖν καὶ τὸ $AB\Gamma$ τριγώνον ὀρθὸν πρὸς τὸν $B\Gamma$ κύκλον. ἐπεὶ οὖν ἐπίπεδον τὸ $AB\Gamma$ πρὸς ἐπίπεδον τὸ $B\Gamma$ ὀρθόν ἐστὶ, καὶ τῇ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ $B\Gamma$ ἐν ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ $B\Gamma$ πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ ΔE , ἡ ΔE ἄρα τῷ $AB\Gamma$
 30 τριγώνῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπομένους αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ $AB\Gamma$

nam quoniam conus, cuius uertex est A punctum, basis autem circulus $B\Gamma$, plano per axem secatur, et hoc sectionem efficit triangulum $AB\Gamma$, in superficie autem sumptum est punctum Θ , quod in latere trianguli $AB\Gamma$ non est, et ΔH ad $B\Gamma$ perpendicularis est, recta per Θ rectae ΔH parallela ducta, hoc est ΘK , cum triangulo $AB\Gamma$ concurret et ad alteram partem superficiei producta a triangulo in duas partes aequales secabitur [prop. VI]. iam quoniam recta per Θ rectae ΔE parallela ducta cum triangulo $AB\Gamma$ concurret et in plano sectionis ΔZE est, in communem sectionem plani secantis triangulique $AB\Gamma$ cadet, communis autem planorum sectio est ZH ; itaque recta per Θ rectae ΔE parallela ducta in ZH cadet; et ad alteram partem sectionis ΔZE producta a recta ZH in duas partes aequales secabitur.

iam igitur aut rectus est conus, aut triangulus $AB\Gamma$ per axem positus ad circulum $B\Gamma$ perpendicularis est, aut neutrum.

prius conus rectus sit. itaque etiam triangulus $AB\Gamma$ ad circulum $B\Gamma$ perpendicularis est [def. 3; Eucl. XI, 18]. quoniam igitur planum $AB\Gamma$ ad planum $B\Gamma$ perpendiculare est, et in plano altero $B\Gamma$ ad communem eorum sectionem $B\Gamma$ perpendicularis ducta est ΔE , ΔE ad triangulum $AB\Gamma$ perpendicularis est [Eucl. XI def. 4]. quare etiam ad omnes rectas eam tangentes et in triangulo $AB\Gamma$ positas perpendicularis est [Eucl. XI def. 3]. ergo etiam ad ZH perpendicularis est.

τριγώνω ὀρθή ἐστίν. ὥστε καὶ πρὸς τὴν ZH ἐστὶ πρὸς ὀρθάς.

μὴ ἔστω δὴ ὁ κῶνος ὀρθός. εἰ μὲν οὖν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον ὀρθόν ἐστὶ πρὸς τὸν $BΓ$ κύκλον, ὁμοίως δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΔE τῇ ZH ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. μὴ ἔστω δὴ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ $ABΓ$ ὀρθὸν πρὸς τὸν $BΓ$ κύκλον. λέγω, ὅτι οὐδὲ ἡ ΔE τῇ ZH ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· ἔστι δὲ καὶ τῇ $BΓ$ πρὸς ὀρθάς· ἡ ἄρα ΔE ἑκατέρω τῶν $BΓ, ZH$ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. καὶ τῷ διὰ τῶν $BΓ, ZH$ ἐπιπέδῳ ἄρα πρὸς ὀρθάς ἐστὶ. τὸ δὲ διὰ τῶν $BΓ, HZ$ ἐπίπεδόν ἐστὶ τὸ $ABΓ$ · καὶ ἡ ΔE ἄρα τῷ $ABΓ$ τριγώνῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. καὶ πάντα ἄρα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ $ABΓ$ τριγώνῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. ἐν δέ τι $\tau\omega$ διὰ τῆς ΔE ἐπιπέδων ἐστὶν ὁ $BΓ$ κύκλος· ὁ $BΓ$ ἄρα κύκλος πρὸς ὀρθάς ἐστὶ τῷ $ABΓ$ τριγώνῳ. ὥστε καὶ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον ὀρθὸν ἐστὶ πρὸς τὸν $BΓ$ κύκλον· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οὐκ ἄρα ἡ ΔE τῇ ZH ἐστὶ πρὸς ὀρθάς.

20 πόρισμα.

ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι τῆς ΔZE τομῆς διάμετρος ἐστὶν ἡ ZH , ἐπεὶ περ τὰς ἀγομένας παραλλήλους εὐθείας τινὲ τῇ ΔE δίχα τέμνει, καὶ ὅτι δυνατόν ἐστὶν ὑπὸ τῆς διαμέτρου τῆς ZH παραλλήλους τινὰς δίχα $\tau\omega$ τέμνεσθαι καὶ μὴ πρὸς ὀρθάς.

η'.

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ δια τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου

1. ὥστε] ὥστ V. 3. τό] bis V in extr. et init. pag.; corr. cnp. 16. ὥστε] ὥστ V, ὥστε mg. m. rec. 20. πόρισμα] p, om. V.

ne sit igitur rectus conus. iam si triangulus per axem positus ad circulum $B\Gamma$ perpendicularis est, eodem modo demonstrabimus, etiam ΔE ad ZH perpendicularem esse. ne sit igitur triangulus per axem positus $AB\Gamma$ ad circulum $B\Gamma$ perpendicularis. dico, ne ΔE quidem ad ZH perpendicularem esse. nam si fieri potest, sit. uerum etiam ad $B\Gamma$ perpendicularis est. ΔE igitur ad utramque $B\Gamma$, ZH perpendicularis est; quare etiam ad planum per $B\Gamma$, ZH ductum perpendicularis erit [Eucl. XI, 4]. planum autem rectarum $B\Gamma$, HZ est $AB\Gamma$; quare ΔE etiam ad triangulum $AB\Gamma$ perpendicularis est. itaque etiam omnia plana per eam ducta ad triangulum $AB\Gamma$ perpendicularia sunt [Eucl. XI, 18]. uerum inter plana per ΔE ducta est circulus $B\Gamma$; quare circulus $B\Gamma$ ad triangulum $AB\Gamma$ perpendicularis est. itaque etiam triangulus $AB\Gamma$ ad circulum $B\Gamma$ perpendicularis erit; quod contra hypothesim est. ergo ΔE ad ZH perpendicularis non est.

Corollarium.

hinc manifestum est, ZH diametrum esse sectionis ΔZE [def. 4], quoniam rectas rectae alicui ΔE parallelas ductas in binas partes aequales secat, et fieri posse, ut parallelae a diametro ZH in binas partes aequales secantur, etiam si ad angulos rectos non fiat.

VIII.

Si conus per axem plano secatur et alio quoque plano secatur, quod basim coni secundum rectam secat ad basim trianguli per axem positi perpendicularem,

κατ' εὐθείαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ
 ἄξονος τριγώνου, ἣ δὲ διάμετρος τῆς γινομένης ἐν τῇ
 ἐπιφανείᾳ τομῆς ἦτοι παρὰ μίαν ἢ τῶν τοῦ τριγώνου
 πλευρῶν ἢ συμπίπτει αὐτῇ ἐκτὸς τῆς κορυφῆς τοῦ
 5 κώνου, προσεκβάλλεται δὲ ἢ τε τοῦ κώνου ἐπιφάνεια
 καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον εἰς ἄπειρον, καὶ ἡ τομὴ εἰς
 ἄπειρον ἀνέξηθήσεται, καὶ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς
 πρὸς τῇ κορυφῇ πάσῃ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην ἀπο-
 λήψεται τις εὐθεῖα ἀγομένη ἀπὸ τῆς τοῦ κώνου τομῆς
 10 παρὰ τὴν ἐν τῇ βάσει τοῦ κώνου εὐθεῖαν.

ἔστω κώνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ A σημεῖον, βάσις
 δὲ ὁ $B\Gamma$ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος,
 καὶ ποιείτω τομὴν τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον· τετμήσθω δὲ
 καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὸν $B\Gamma$ κύκλον κατ'
 15 εὐθεῖαν τὴν ΔE πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ $B\Gamma$, καὶ ποιείτω
 τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τὴν ΔZE γραμμὴν· ἡ δὲ διά-
 μετρος τῆς ΔZE τομῆς ἡ ZH ἦτοι παράλληλος ἔστω
 τῇ AG ἢ ἐκβαλλομένη συμπίπτει αὐτῇ ἐκτὸς τοῦ A
 σημείου. λέγω, ὅτι καί, ἐὰν ἢ τε τοῦ κώνου ἐπιφάνεια
 20 καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἐκβάλλεται εἰς ἄπειρον, καὶ ἡ
 ΔZE τομὴ εἰς ἄπειρον ἀνέξηθήσεται.

ἐκβεβλήσθω γὰρ ἢ τε τοῦ κώνου ἐπιφάνεια καὶ το
 τέμνον ἐπίπεδον· φανερὸν δὲ, ὅτι καὶ αἱ AB , AG , ZH
 συνεκβληθήσονται. ἐπεὶ ἡ ZH τῇ AG ἦτοι παράλλη-
 25 λός ἐστιν ἢ ἐκβαλλομένη συμπίπτει αὐτῇ ἐκτὸς τοῦ A
 σημείου, αἱ ZH , AG ἄρα ἐκβαλλόμεναι ὡς ἐπὶ τὰ Γ , H
 μέρη οὐδέποτε συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν οὖν, καὶ
 εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ZH τυχόν τὸ Θ , καὶ διὰ

4. συμπίπτει] p; συμπίπτει V. 5. προσεκβάλλεται] scripsi;
 προσεκβαλῆται V. 20. ἐκβαλῆται V, corr. Halley. 28. τῆς]
 cp; τῇ V.

τοῦ Θ σημείου τῇ μὲν $B\Gamma$ παράλληλος ἤχθω ἡ $K\Theta A$,
 τῇ δὲ ΔE παράλληλος ἡ $M\Theta N$. τὸ ἄρα διὰ τῶν $K A, MN$
 ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν $B\Gamma, \Delta E$. κύκλος
 ἄρα ἐστὶ τὸ $KAMN$ ἐπίπεδον. καὶ ἐπεὶ τὰ Δ, E, M, N
 5 σημεῖα ἐν τῷ τέμνοντί ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἐστὶ δὲ καὶ ἐν
 τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, ἐπὶ τῆς κοινῆς ἄρα τομῆς
 ἐστὶν· ἡῤῥηται ἄρα ἡ ΔZE μέχρι τῶν M, N σημείων.
 ἀνέξηθείσης ἄρα τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ τοῦ
 τέμνοντος ἐπιπέδου μέχρι τοῦ $KAMN$ κύκλου ἡῤῥηται
 10 καὶ ἡ ΔZE τομὴ μέχρι τῶν M, N σημείων. ὁμοίως
 δὴ δείξομεν, ὅτι καί, ἐὰν εἰς ἄπειρον ἐκβάλληται ἢ τε
 τοῦ κώνου ἐπιφάνεια καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, καὶ ἡ
 $M\Delta ZEN$ τομὴ εἰς ἄπειρον ἀνέξηθήσεται.

καὶ φανερόν, ὅτι πάσῃ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην
 15 ἀπολήψεται τις ἀπὸ τῆς $Z\Theta$ εὐθείας πρὸς τῷ Z σημείῳ.
 ἐὰν γὰρ τῇ δοθείσῃ ἴσην θῶμεν τὴν $Z\Xi$ καὶ διὰ τοῦ Ξ
 τῇ ΔE παράλληλον ἀγάγωμεν, συμπεσεῖται τῇ τομῇ,
 ὥσπερ καὶ ἡ διὰ τοῦ Θ ἀπεδείχθη συμπίπτουσα τῇ
 τομῇ κατὰ τὰ M, N σημεῖα· ὥστε ἄγεται τις εὐθεῖα
 20 συμπίπτουσα τῇ τομῇ παράλληλος οὖσα τῇ ΔE ἀπο-
 λαμβάνουσα ἀπὸ τῆς ZH εὐθεΐαν ἴσην τῇ δοθείσῃ
 πρὸς τῷ Z σημείῳ.

θ'.

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ συμπίπτοντι μὲν ἑκατέρᾳ
 25 πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, μήτε δὲ παρὰ
 τὴν βάσιν ἡγμένῳ μήτε ὑπεναντίως, ἡ τομὴ οὐκ ἔσται
 κύκλος.

ἔστω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ A σημεῖον, βάσις
 δὲ ὁ $B\Gamma$ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ τινὶ μήτε

2. $M\Theta N$] p, ΘMN V. 6. τομῆς] cp, τομῇ V.

$B\Gamma$ parallela ducatur $K\Theta A$, rectae autem ΔE parallela $M\Theta N$; itaque planum rectarum KA , MN plano rectarum $B\Gamma$, ΔE parallelum est [Eucl. XI, 15]. itaque planum $KAMN$ circulus est [prop. IV]. et quoniam puncta Δ , E , M , N in plano secanti sunt, uerum etiam in superficie conici, in communi sectione sunt; quare ΔZE ad puncta M , N creuit. itaque crescente superficie conici planoque secanti ad circulum $KAMN$ etiam sectio ΔZE ad puncta M , N creuit. similiter igitur demonstrabimus, si et superficies conici et planum secans in infinitum producantur, etiam sectionem $M\Delta ZEN$ in infinitum crescere.

et manifestum est, rectam quandam a $Z\Theta$ recta ad Z punctum rectam cuius datae rectae aequalem abscisuram esse. nam si $Z\Xi$ rectae datae aequalem ponimus et per Ξ rectae ΔE parallelam ducimus, cum sectione concurret, sicut etiam rectam per Θ ductam cum sectione in punctis M , N concurrere demonstrauimus. ergo recta quaedam cum sectione concurrens rectae ΔE parallela ducitur, quae a ZH ad punctum Z rectam datae aequalem abscindat.

IX.

Si conus plano secatur cum utroque latere trianguli per axem positi concurrenti, sed neque basi parallelo neque e contrario ducto, sectio circulus non erit.

sit conus, cuius uertex sit A punctum, basis autem circulus $B\Gamma$, et secetur plano neque basi parallelo neque e contrario posito, quod in superficie sectionem efficiat lineam ΔKE . dico, lineam ΔKE circulum non esse.

παραλλήλῳ ὄντι τῇ βάσει μήτε ὑπεναντίως, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τὴν $\triangle KE$ γραμμὴν. λέγω, ὅτι ἡ $\triangle KE$ γραμμὴ οὐκ ἔσται κύκλος.

εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω, καὶ συμπιπτέτω τὸ τέμνον
 5 ἐπίπεδον τῇ βάσει, καὶ ἔστω τῶν ἐπιπέδων κοινὴ τομὴ ἡ ZH , τὸ δὲ κέντρον τοῦ $B\Gamma$ κύκλου ἔστω τὸ Θ , καὶ ἀπ' αὐτοῦ κάθετος ἤχθω ἐπὶ τὴν ZH ἢ ΘH , καὶ ἐκβεβλήσθω διὰ τῆς $H\Theta$ καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον καὶ ποιείτω τομὰς ἐν τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ τὰς BA , AG
 10 εὐθείας. ἐπεὶ οὖν τὰ A , E , H σημεῖα ἐν τε τῷ διὰ τῆς $\triangle KE$ ἐπιπέδῳ ἐστίν, ἔστι δὲ καὶ ἐν τῷ διὰ τῶν A , B , Γ , τὰ ἄρα A , E , H σημεῖα ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων ἐστίν· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ HEA . εἰλήφθω δὴ τι ἐπὶ τῆς $\triangle KE$ γραμμῆς σημεῖον τὸ K , καὶ διὰ
 15 τοῦ K τῇ ZH παράλληλος ἤχθω ἡ KA . ἔσται δὴ ἴση ἡ KM τῇ MA . ἡ ἄρα AE διάμετρος ἐστὶ τοῦ $\triangle KAE$ κύκλου. ἤχθω δὴ διὰ τοῦ M τῇ $B\Gamma$ παράλληλος ἡ $NM\Xi$. ἔστι δὲ καὶ ἡ KA τῇ ZH παράλληλος· ὥστε τὸ διὰ τῶν $N\Xi$, KM ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστὶ τῷ
 20 διὰ τῶν $B\Gamma$, ZH , τουτέστι τῇ βάσει, καὶ ἔσται ἡ τομὴ κύκλος. ἔστω ὁ $NK\Xi$. καὶ ἐπεὶ ἡ ZH τῇ BH πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ, καὶ ἡ KM τῇ $N\Xi$ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν· ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν $NM\Xi$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς KM . ἔστι δὲ τὸ ὑπὸ τῶν $\triangle ME$ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς KM · κύκλος
 25 γὰρ ὑπόκειται ἡ $\triangle KEA$ γραμμὴ, καὶ διάμετρος αὐτοῦ ἡ AE . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $NM\Xi$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ $\triangle ME$. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ MN πρὸς MA , οὕτως ἡ EM πρὸς $M\Xi$. ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $\triangle MN$ τρίγωνον τῷ $\triangle ME\Xi$ τριγώνῳ, καὶ ἡ ὑπὸ $\triangle NM$ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ $ME\Xi$.

16. $\triangle KAE$] $\triangle KEA$ p. 20. $B\Gamma$] p, corr. ex B m. 2 V.
 21. ὁ] cp; om. V. 23. ἐστὶ] c, ἐστίν V.

