de Gruyter Lehrbuch

Kahmen · Angewandte Geodäsie: Vermessungskunde

Heribert Kahmen

Angewandte Geodäsie: Vermessungskunde

20., völlig neu bearbeitete Auflage

Walter de Gruyter
Berlin · New York

O. Univ. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Heribert Kahmen
Forschungsgruppe Ingenieurgeodäsie
Institut für Geodäsie und Geophysik
der Technischen Universität Wien
Gußhausstr. 27–29/128
1040 Wien · Österreich

Auflagen

1. Auflage 1910
2. Auflage 1920
3. Auflage 1922
4. Auflage 1926
5. Auflage 1932
6. Auflage 1938
7. Auflage 1942
8. Auflage 1943
9. Auflage 1949
10. Auflage 1958
11. Auflage 1962
12. Auflage 1965
13. Auflage 1969
14. Auflage 1972
15. Auflage 1976
16. Auflage 1985
17. Auflage 1988
18. Auflage 1993
19. Auflage 1997

∞ Gedruckt auf säurefreiem Papier, das die US-ANSI-Norm über Haltbarkeit erfüllt.

ISBN-13: 978-3-11-018464-8
ISBN-10: 3-11-018464-8

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Printed in Germany.
Umschlaggestaltung: Hansbernd Lindemann, Berlin.
Konvertierung von LaTeX-Dateien des Autors: I. Zimmermann, Freiburg.
Druck und Bindung: Hubert & Co. GmbH & Co. KG, Göttingen.

Vorwort zur 20. Auflage

Dieses Werk hat seinen Ursprung in den in der „Sammlung Göschen“ erschienenen Bänden *Vermessungskunde* I, II und III. Verfasser der 1. bis 9. Auflage des Bandes I, der 1. bis 7. Auflage des Bandes II und der 1. bis 6. Auflage des Bandes III (1910 – 1949) war Prof. Dr.-Ing. Paul Werkmeister. Von 1959 – 1982 setzte Prof. Dr.-Ing. Walter Großmann die Neubearbeitung fort, für den Band I bis zur 15. Auflage, den Band II bis zur 12. Auflage und den Band III bis zur 11. Auflage. Seit 1983 übernahm Prof. Dr.-Ing. Heribert Kahmen die Weiterbearbeitung der Bände, die zu diesem Zeitpunkt schon eine Geschichte und Tradition von mehr als siebzig Jahren aufweisen konnten. Er bearbeitete den Band I bis zur 17., den Band II bis zur 14. und den Band III bis zur 12. Auflage.

Ab 1993 wurden die drei Bände zu einem gemeinsamen Werk zusammengefasst, das 1993 als 18. Auflage und 1997 als 19. Auflage erschienen ist. Die nun neu vorgelegte 20. Auflage umfasst 19 Kapitel. Weitgehende Neuorientierungen und Schwerpunktverschiebungen machten erneut eine Neugliederung des Stoffgebietes notwendig.

Seit der ersten Auflage befasst sich das Werk mit der Thematik, wie sich mit unterschiedlichsten Messsystemen, die sich in Satelliten, Flugzeugen, Schiffen oder auf der Erde befinden, Informationen über die Gestalt der Erdoberfläche sammeln lassen und wie diese in Referenzsystemen (Koordinatensystemen) dargestellt werden können, um sie einer Vielzahl interessierter Nutzer zur Verfügung zu stellen. Rasante Fortschritte in verschiedenen Bereichen wie Satelliten-, Laser-, Computertechnologien bedingen nicht nur eine ständige Erneuerung der Stoffgebiete, sondern auch interessante Ausweitungen der Anwendungen in anderen Ingenieur- und Wissenschaftsbereichen.

Ein einführendes Kapitel behandelt Grundbegriffe des Messwesens, der Geodäsie und der Ausgleichungsrechnung. Messen ist heute weitgehend mit einer parallel laufenden funktechnischen Übertragung von Daten verbunden. Nahezu alle Bereiche des Spektrums der elektromagnetischen Wellen kommen heute bei geodätischen Messverfahren und dem Datenfunk zur Anwendung. Dieser Thematik widmet sich das 2. Kapitel. In Kapitel 3 – 5 werden die Instrumente und Messverfahren für die Richtungs- und Streckenmessung dargestellt. Neuere Instrumente arbeiten mit elektrischen Sensoren und lassen daher von der Aufnahme der Messwerte im Feld bis zur Übernahme in Informationssysteme oder bis zur Herstellung von Karten und

Plänen weitgehend automatische Arbeitsprozesse zu. Höchste Entwicklungsstufen der Messsysteme haben Robotereigenschaften und werden daher Messroboter genannt. Die folgenden Kapitel 6 – 8 führen den Inhalt konsequent weiter, indem von den Messverfahren zu den Berechnungsmethoden übergegangen wird. Sie behandeln Koordinatensysteme und das Berechnen von Lagepunkten in Bezug auf diese, wobei Kapitel 6 als einfache Einführung dient. Kapitel 9 befasst sich mit der 3D-Trägheitsnavigation. Die hier beschriebenen Strap-down-Systeme dienen einerseits der Navigation und kommen andererseits zunehmend zum Einsatz, wenn Messdaten in bewegten Fahrzeugen erfasst werden sollen. In Kapitel 10 wird gezeigt, dass insbesondere die Satellitenverfahren heute ein weites Spektrum neuer Aufgaben eröffnen, das von Arbeiten des amtlichen Vermessungswesens über die Ingenieurvermessung bis zur Navigation von Land- und Wasserfahrzeugen reicht. Auf diesem Gebiet vollzieht sich zur Zeit in der Geodäsie ein revolutionärer Schritt: der Übergang von den vermarkten zu den nicht vermarkten Festpunktfeldern. Letztere werden heute durch die permanent betriebenen Satelliten-Referenzstationen in Referenzstationsnetzen zur Verfügung gestellt. Die Kapitel 11 – 15 befassen sich mit dem weiten Spektrum der Höhenmessverfahren. Da heute der Vermessungsingenieur nicht nur nationale, sondern auch vielfach länderübergreifende Aufgaben lösen muss, behandelt das 16. Kapitel einführend den historischen Aufbau sowie die Weiterentwicklung nationaler, kontinentaler und globaler Festpunktfelder. Kapitel 17 beschreibt die Aufnahme großmaßstäbiger und topographischer Karten. Der Automatisierung sowie der Erfassung und Verarbeitung der Messwerte wird hier besondere Bedeutung gegeben. Neu wird in Kapitel 18 auf Grundbegriffe der Navigation und der Location Based Services eingegangen. Wie die Methoden der Geodäsie in anderen Ingenieurbereichen und wissenschaftlichen Disziplinen eingesetzt werden können, ist Gegenstand von Kapitel 19. Da es sich hier um ein sehr breites Anwendungsgebiet handelt, kann die Vorgehensweise nur exemplarisch gezeigt werden.

Kapitel 16 wurde weitgehend von Herrn Prof. Dr. Wolfgang Augath und Kapitel 18.2 von Herrn Ass. Prof. Dr. Günther Retscher formuliert.

Besonderer Dank gebührt meiner Frau Mechthild, die mit viel Mühe und Geduld die Texte mit dem Satzsystem LaTeX in die digitale Form übertragen hat. Dank gebührt außerdem Frau Dr. Irene Zimmermann; sie hat nicht nur die Texte durchgesehen, sondern auch Texte und Bilder in ein neues Format gebracht. Herrn Dr. Manfred Karbe, der bis Ende 2004 das Buch und auch diese Neuauflage für den Verlag betreute, möchte ich für die langjährige Zusammenarbeit und viele wertvolle Hinweise danken.

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis

Messwerte

R	Richtungen
Z	Zenitwinkel
D^A	am Entfernungsmesser abgelesene Distanz
T, T'	Temperatur des trockenen bzw. feuchten Thermometers
p	Luftdruck

Abgeleitete bzw. reduzierte Messergebnisse

r	Richtungen
r^o	orientierte Richtungen
t	Richtungswinkel
z	Zenitwinkel
z'	Zenitwinkel (beeinflusst durch Refraktion)
D	geometrische Weglänge
S^R	Schrägstrecke
S^O	Strecke in Meereshöhe
S	ellipsoidische Länge
s	Strecke im Gauß-Krüger-Koordinatensystem
H	Höhe über NN
ΔH	Höhendifferenz
β	Brechungswinkel (Polygonzug)

Koordinaten

rechtwinklige Koordinaten

x, y, z	in nordorientierten Abbildungssystemen
x', y'; ζ, ν	in örtlichen Systemen
X, Y, Z	in äquatorialen Systemen

Polarkoordinaten

x, s	in nordorientierten Abbildungssystemen
s', t'	in örtlichen Systemen

Statistik

$s^2(\cdot)$	empirische Varianz
$\sigma^2(\cdot)$	theoretische Varianz
$s(\cdot)$	empirische Standardabweichung
$\sigma(\cdot)$	theoretische Standardabweichung
σ_{P}	Standardabweichung eines Punktes

1 Grundlagen

1.1 Einleitung

Das *Vermessungswesen* bzw. die *Geoinformation* befasst sich mit der Vermessung und Berechnung größerer oder kleinerer Teile der Erdoberfläche und ihrer Darstellung: digital in räumlichen Informationssystemen oder analog in Karten und Plänen. Wenn die Bestimmung der Figur und des Schwerefeldes der Erde sowie die Erdrotation von besonderer Bedeutung sind, verwendet man den Begriff „Geodäsie“.

Im allgemeinen beschreibt man die Objekte in erdgebundenen Koordinatensystemen. Dies schließt auch Aufgaben der Navigation ein. Die Definition und Realisierung von Koordinatensystemen sowie die Herstellung von Beziehungen zwischen diesen ist folglich eine der wichtigsten Grundaufgaben der Geodäsie. Bei hohen Genauigkeitsanforderungen und bewegten Objekten kommt noch die Zeit als vierter Parameter hinzu.

Das Vermessungswesen bzw. die Geoinformation lässt sich in vier Teilgebiete untergliedern, wobei

- die *Erdmessung* sich mit der Bestimmung der Erdrotation sowie der Form und Größe der Erde und ihres Schwerefeldes auseinandersetzt,
- die *Landesvermessung* sich mit der großräumigen Erfassung der Landesoberfläche durch Festpunktfelder, geographische Informationssysteme und amtliche topographische Karten befasst,
- der *Katastervermessung* die örtliche Feststellung, Abgrenzung und Sicherung des Eigentums an Grund und Boden durch Vermessung der Flurstücke obliegt und
- die *Ingenieurvermessung* (häufig auch Ingenieurgeodäsie genannt) sich mit der Anwendung der Methoden der Geodäsie in anderen Ingenieurdisziplinen (Bauingenieurwesen, Maschinenbau, Flugzeugbau, Fahrzeugbau,. . .) auseinandersetzt.

1.2 Bezugsflächen

Zur Bestimmung der Position feststehender oder beweglicher Objekte sind zunächst Aussagen über Bezugsflächen zu treffen. Letztere sollen sich der Erde möglichst gut anpassen. Eine sehr einfache Bezugsfläche ist die Kugel mit einem Radius von 6371,0 km. Für viele Aufgabenstellungen ist diese Approximationsfläche bereits genau genug. Eine genauere Anpassung ist jedoch gegeben, wenn man die Erdfigur

durch ein Rotationsellipsoid annähert. Die Definition eines solchen *mittleren Erdellipsoides* für die gesamte Erdoberfläche ist erst mit Hilfe von Messungen zu künstlichen Erdsatelliten möglich geworden. In der Vergangenheit haben aus praktischen Gründen einzelne Staaten ihre Landesvermessung auf einem eigenen sogenannten *Referenz-* oder *Bezugsellipsoid* berechnet, welches jeweils andere Dimensionen und eine spezielle Lagerung zum Erdkörper hat. Die Länder haben dabei stets versucht, ihr Referenzellipsoid dem jeweiligen Vermessungsgebiet möglichst gut anzupassen.

Im Vermessungswesen sind *Niveauflächen* – Flächen gleichen Schwerepotentials – von besonderer Bedeutung. Laut physikalischer Definition wird bei Bewegungen entlang einer Niveaufläche keine Arbeit verrichtet, d. h. es kann auch kein Wasser fließen. In der unendlichen Schar der Niveauflächen gibt es eine ausgezeichnete, die etwa in mittlerer Höhe der ruhend gedachten Meeresoberfläche verläuft; diese bezeichnet man als *Geoid*. Abb. 1.1 zeigt die Anpassung eines Geoids und Ellipsoids an die feste sichtbare Erdoberfläche (Lithosphäre) und Meeresoberfläche (Hydrosphäre).

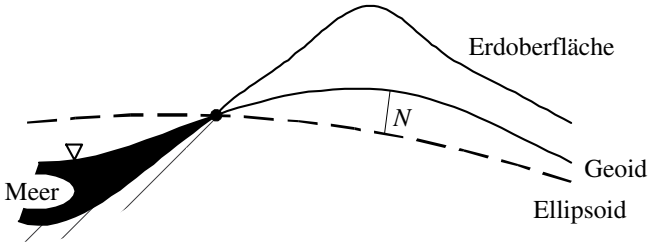


Abbildung 1.1. Geoid, Ellipsoid

Die Abstände zwischen dem Geoid und mittleren Erdellipsoid bezeichnet man als *absolute Undulation* (Geoidundulation N); sie können Werte bis ± 100 m annehmen. Bei Referenzellipsoiden betragen die Abweichungen nur wenige Meter. Hier spricht man von *relativen Undulationen*.

In der Vergangenheit wurden geodätische *Lagenetze* auf einem Ellipsoid berechnet. Dabei wurden die Lage- und Höhenbestimmung getrennt, da man technisch brauchbare Höhen nur erhält, wenn man sie auf eine durch das Schwerefeld beeinflusste Fläche wie z. B. das Geoid bezieht. Ellipsoidische Koordinaten dienen als Ausgangsprodukt für die Herleitung ebener Kartensysteme. Für die Höhen entstand ein eigenes *Höhennetz* mit der Bezugsfläche Geoid. Aufgrund dieser Aufteilung sprach man in der Vergangenheit häufig von einer zweidimensionalen Geodäsie. Mit Hilfe der Satellitenpositionierungsverfahren ist heute die gleichzeitige und gleichberechtigte Bestimmung der drei kartesischen Raumkoordinaten möglich. Diese lassen sich in ellipsoidische Koordinaten (ellipsoidische Länge L, ellipsoidische Breite B, ellipsoidische Höhe h) umrechnen (Abb. 1.2). Die Verbindung zwischen den Geoidhöhen und den ellipsoidischen Höhen ist über die Geoidundulationen gegeben.

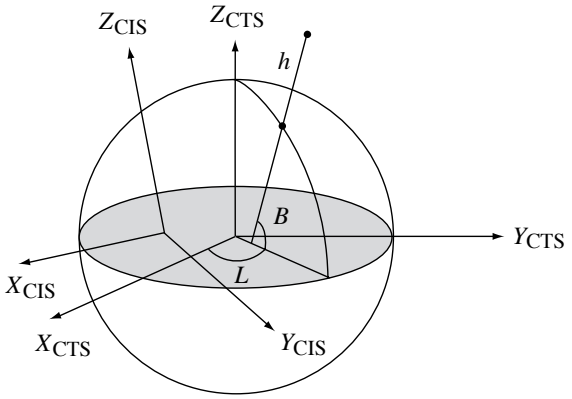


Abbildung 1.2. Referenzellipsoid mit ellipsoidischen und kartesischen Koordinaten

1.3 Koordinatensysteme

Um die Erdoberfläche mit all ihren natürlichen und künstlichen Objekten darstellen zu können, müssen die Bezugsflächen mit Koordinatensystemen verknüpft werden. Je nach dem Zweck der gestellten Aufgabe arbeitet man im Vermessungswesen (in der Geoinformation) mit unterschiedlichen Koordinatensystemen, wobei orthogonale kartesische und orthogonale Flächenkoordinaten bevorzugt sind. Die Definition von Koordinatensystemen beruht je nach der Zielsetzung der gestellten Aufgabe auf Vereinbarungen der Nutzer.

Allgemein unterscheidet man noch zwischen dem ideellen Konzept und der Realisierung eines Koordinatensystems; das erste nennt man international „Coordinate System“, das zweite „Coordinate Frame“.

Für die Erfassung der Erdoberfläche sind die Koordinatensysteme ausgehend vom globalen Bereich bis in den lokalen hinein hierarchisch gegliedert. Das moderne Vermessungswesen stützt sich heute wesentlich auf ein globales, geozentrisches, mit der Erde fest verbundenes kartesisches System: das *Conventional Terrestrial System* (CTS). Dies ist in einem Inertialsystem – *Conventional Inertial System* (CIS) – gelagert (Abb. 1.2). Laut Vereinbarung weist die Z-Achse des CTS zum mittleren Pol der Jahre 1900 bis 1905, bezeichnet als Conventional International Origin (CIO); die XZ-Ebene liegt im mittleren Meridian von Greenwich.

Der *International Terrestrial Reference Frame* (ITRF) ist eine Realisierung des CTS. Dieser Referenzrahmen stützt sich erdumspannend auf mehr als 250 Beobachtungsstationen. Die innere Genauigkeit des ITRF wird mit wenigen Zentimetern angegeben. Da Bewegungen innerhalb der Erdkruste vergleichsweise größere Beträ-

ge pro Jahr annehmen, gelten die Realisierungen nur für einen bestimmten Zeitpunkt, was durch eine angehängte zweistellige Jahreszahl ausgedrückt wird (z. B. ITRF 89).

Das *World Geodetic System 84* (WGS 84) ist ein weiteres globales Koordinatensystem, welches ebenfalls mit dem CTS übereinstimmt. Dieses System ist durch fünf weltweit verteilte Kontrollstationen und eine Anzahl ITRF-Stationen realisiert. Das WGS 84 und der ITRF sind beide mit dem Satellitensystem *Global Positioning System* (GPS) verknüpft, so dass im Zusammenhang mit Messungen zu Satelliten auch von beiden Satellitenbahndaten zur Verfügung gestellt werden können.

Um in Europa ein weiter verdichtetes Netz aufzubauen, hat man sich 1990 entschlossen, mit 1989-ITRF-Koordinaten von 35 europäischen Stationen den *Europäischen Terrestrischen Referenzrahmen* (ETRF 89) zu definieren. Aufbauend auf diesem Rahmen entstanden inzwischen nationale Netze wie ein *Deutscher Referenzrahmen* (DREF). Auf diese Weise liegen inzwischen ITRF-Koordinaten in einer hohen Verdichtungsstufe vor.

In den vergangenen Jahrhunderten entwickelten die einzelnen Länder aus politischen und praktischen Gründen je eigene *Landesvermessungssysteme* (LS). Basis ist ein orthogonales (rechtwinkliges) kartesisches System, dem ein Ellipsoid zugeordnet ist. (Ein geeignetes kartesisches System $(X, Y, Z)_{\mathrm{LS}}$ für das Referenzellipsoid ist gegeben, wenn man den Ursprung in den Mittelpunkt legt und die Z_{LS}-Achse mit der kleinen Halbachse zusammenfallen lässt.) Die LS weisen gegenüber dem CTS leichte Verschiebungen und Verdrehungen auf. Beide Systeme lassen sich über Koordinatentransformationen miteinander verknüpfen:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\mathrm{CTS}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\mathrm{LS}} ,$$

wobei $\Leftrightarrow$ für Hin- und Rücktransformation steht.

Über weitere Transformationen lassen sich die kartesischen und ellipsoidischen Koordinaten ineinander umrechnen:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\mathrm{LS}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} B \\ L \\ h \end{bmatrix}_{\mathrm{LS}} .$$

Für viele technische Aufgaben in der angewandten Geodäsie benötigt man eine ebene Abbildung des Ellipsoids, d. h. ein *ebenes rechtwinkliges Koordinatensystem*. Man bevorzugt hierfür isotherme Koordinaten, da sie eine konforme, d. h. winkeltreue Abbildung ermöglichen. „Isotherm“ bedeutet, dass die Parameterlinien (Meridiane, Parallelkreise) orthogonal sind und auf ihnen ein gleicher Maßstab gegeben ist; d. h. es wird ein Netz aus infinitesimalen Quadraten gebildet. Eine konforme Abbildung hat zwar den Nachteil, dass Längenverzerrungen unvermeidlich sind, von besonders praktischer Bedeutung ist jedoch, dass sie von der Richtung unabhängig sind.

In der Praxis hat sich heute die *Meridianstreifenabbildung* – vielfach auch Gauß-Krüger-Abbildung genannt – weltweit durchgesetzt. Ein schmaler Streifen östlich und westlich ausgewählter Mittelmeridiane wird so konform in die Ebene abgebildet, dass im Mittelmeridian Streckentreue vorliegt (Abb. 1.3). Die x-Achse in der Abbildungsebene ist das Bild des Mittelmeridians des Referenzellipsoids und die y-Achse das Bild des Äquators. Die ellipsoidischen Koordinaten und die rechtwinkligen Koordinaten(X_{GK}, Y_{GK}) lassen sich über Transformationsformeln ineinander umrechnen:

$$\begin{bmatrix} B \\ L \end{bmatrix}_{\mathrm{LS}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}_{\mathrm{GK}}.$$

Auf Baustellen benötigt man spezielle *Baustellenkoordinatensysteme* (BKS) zur optimalen Anpassung an die örtlichen Gegebenheiten. Die Definition eines speziellen Systems ist auch dann notwendig, wenn die Genauigkeitsanforderungen der Baustelle nicht von dem übergeordneten System erfüllt werden können.

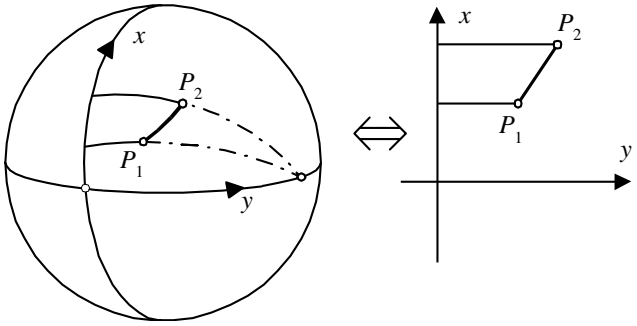


Abbildung 1.3. Abbildung ellipsoidischer Koordinaten in rechtwinklige Koordinaten

1.4 Messen, Grundbegriffe und Definitionen

Der Ablauf einer Messung ist einerseits durch das Erfassen und Darstellen physikalischer Größen, andererseits durch das Zuordnen einer Maßzahl gekennzeichnet. Der Größe X wird die Maßzahl x als Vielfaches der Vergleichsgröße N, dem sogenannten Normal, zugeordnet

$$X = x \cdot N.$$

Für die Definition gilt analog:

$$[d] = [-] \cdot [d].$$

Für den Ablauf einer Messung müssen zwei Fundamentalvoraussetzungen erfüllt sein:

– die zu messende Größe muss eindeutig definiert sein
– das Normal muss durch eine Konvention festgelegt sein [1.5].

Die charakteristischen Merkmale eines Messvorganges zeigt Abb. 1.4. In dem idealisierten Schema wird der Messvorgang nur durch die Messgröße und das Normal beeinflusst. Abb. 1.5 gibt ein fehlerbehaftetes Messsystem wieder.

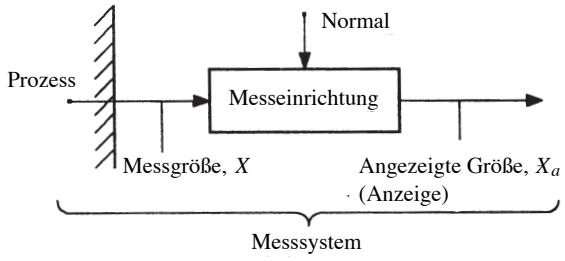


Abbildung 1.4. Schema des fehlerfreien Messvorganges

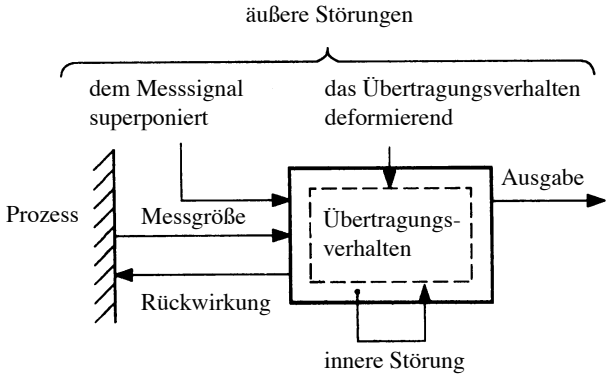


Abbildung 1.5. Schema des fehlerbehafteten Messvorganges

In Anlehnung an die DIN-Normen (*DIN 1319*) seien folgende Begriffe zusammengestellt:

Messgröße: Die Messgröße ist die physikalische Größe, die durch die Messung erfasst wird (z. B. Höhe, Länge, Temperatur, u. s. w.).

Anzeige: Die Anzeige ist die an einer Skala abgelesene Marke oder an einer Ziffernanzeigeeinrichtung abgelesene Größe. Die Anzeige kann in Einheiten der Messgröße, in Skalenteilen oder in Ziffernschritten angegeben werden.

Anzeigebereich: Der Anzeigebereich umfasst die Messwerte, die am Anzeigeinstrument abgelesen werden können.

Messbereich: Der Messbereich umfasst den Teil des Anzeigebereichs, in dem Fehler innerhalb vorgeschriebener Fehlergrenzen bleiben.

Messwert: Der Messwert ergibt sich aus der Anzeige; er ist das Produkt aus Zahlenwert und Messgröße (z. B. 10 mm).

Messergebnis: Das Messergebnis erhält man mit Messwerten aus vorgegebenen Beziehungen.

Messeinrichtung: Eine Messeinrichtung ist die Gesamtheit der für die Messung benutzten Komponenten wie: Sensoren, Steuerrechner, Auswerterechner, Anzeigeeinheit,. . .

Messsystem: Das Messsystem umfasst einerseits die Messeinrichtung und andererseits den Bereich des Prozesses, der durch den Messvorgang beeinflusst wird (vgl. Abb. 1.4).

Messgerät: Das Messgerät ist ein Baustein, welcher Teil oder Ganzes einer Messeinrichtung sein kann.

Messprinzip: Das Messprinzip umfasst das physikalische Phänomen, das seiner Messung zugrunde liegt.

Messverfahren: Das Messverfahren umfasst die Funktionsweise einer Messeinrichtung. Man unterscheidet analoge/digitale und direkte/indirekte Messverfahren.

Wie schon am Anfang dieses Kapitels beschrieben wurde, ist der Messwert das Produkt der Maßzahl x und der Dimension des zugehörigen Normals. Bei einem Messvorgang wird die Information über diese Maßzahl durch Signale übertragen.

Analoge Messverfahren enthalten diese Informationen in der direkten Zuordnung der Maßzahl der Messgröße zur Maßzahl der physikalischen Größe des Signals; nicht die Maßzahl selbst, sondern eine analoge Größe wird verarbeitet. Für *digitale Messverfahren* ist charakteristisch, dass sie die Ziffer der Maßzahl verarbeiten und ausgeben.

Bei digitalen Verfahren wird die Maßzahl abgesehen von Rundungsfehlern fehlerfrei verarbeitet. Bei analogen Verfahren muss noch die Analog/Digital Wandlung zwischengeschaltet werden, wobei die Genauigkeit dieses Schrittes von der Genauigkeit der Interpolation abhängt.

Direkte Messverfahren kann man daran erkennen, dass der gesuchte Messwert einer Messgröße durch unmittelbaren Vergleich mit der Messgröße gewonnen wird (Beispiel: Längenmessung).

Indirekte Messverfahren sind dadurch charakterisiert, dass der gesuchte Messwert aus andersartigen physikalischen Größen auf der Basis physikalischer Gesetzmäßigkeiten abgeleitet wird (Beispiel: Brechungsindex).

Abb. 1.5 zeigt das Schema eines fehlerbehafteten Messsystems. Eine Vielzahl von Störeinflüssen kann wirksam werden. Ein erster Störeinfluss ergibt sich durch die Rückwirkung der Messeinrichtung auf den Prozess, der beobachtet wird. Wird z. B. die Lage eines Gegenstandes mit einem Messband beobachtet, das an diesem befestigt ist, so kann bereits die Zugspannung des Messbandes Formveränderungen

des Objektes und damit scheinbare Verschiebungen vortäuschen. Man unterscheidet noch zwischen äußeren Störungen und inneren Störungen.

Sehr häufig treten dem Messsignal sich überlagernde äußere Störungen auf. Typisch hierfür sind z. B. Verfälschungen der Richtungsmessung mit einem Theodolit oder der Distanzmessung mit einem elektronischen Distanzmesser, indem die Atmosphäre die physikalischen Eigenschaften der Messsignale ändert. Zusätzlich müssen deformierende äußere Störungen in Betracht gezogen werden; es sind dies Störungen, die das Übertragungsverhalten der Messeinrichtung beeinflussen. Unter dem Übertragungsverhalten versteht man die Beziehung zwischen der Ein- und Ausgangsgröße einer Messeinrichtung. So kann z. B. die Umgebungstemperatur oder die Sonneneinstrahlung die Übertragungseigenschaften der Mechanik eines Theodolits oder Nivelliergerätes beeinflussen. Innere Störungen können vielfältige Ursachen haben, z. B. die Reibung von Lagern oder das Spiel mechanischer Übertragungseinrichtungen.

Die Art und Handhabung der Fehlereinflüsse ist sehr komplex und wird überblicksweise in [1.6] behandelt.

1.5 Maßsysteme und Maßeinheiten

1.5.1 Vom Archivmeter zum Einheitensystem SI

Auf Vorschlag der Pariser Akademie der Wissenschaften beschloss im Jahre 1791 die damalige französische Nationalversammlung, ein einheitliches Längenmaß einzuführen, das dem zehnmillionsten Teil eines Erdmeridians gleichen und „Meter“ heißen sollte. Die Größe des Meters wurde in den nächsten Jahren aus mehreren Gradmessungen abgeleitet. Damit es aber jederzeit zu reproduzieren war, wurde ein Prototyp aus Platin hergestellt und im französischen Staatsarchiv niedergelegt. Dieses „Archivmeter“ ist die Grundlage des Metersystems, auf das außer dem Längenmaß auch die Einheiten des Flächenmaßes, des Raummaßes und des Gewichts bezogen wurden.

Um die internationale Anerkennung des Metersystems weiter zu betreiben, schlossen im Jahre 1875 die damaligen Teilnehmerstaaten die „Internationale Meter-Konvention“ ab und luden alle Staaten der Erde zum Beitritt ein. Die Staaten einigten sich ferner auf die Einrichtung eines Internationalen Büros für Maß und Gewicht in Breteuil bei Paris; doch sollte die Entscheidungsbefugnis über neue Vorlagen den Zusammenkünften der Delegierten der Teilnehmerstaaten verbleiben, die fortan als „Generalkonferenz für Maß und Gewicht“ bezeichnet wurden.

Als erste größere Aufgabe erarbeitete das Büro in 10-jährigen Versuchen einen neuen Meterprototyp mit X-förmigem Querschnitt aus Platin-Iridium, der das Meter noch genauer festlegen sollte als das Archivmeter. Diesen Stab erklärte die 1. Generalkonferenz (1889) zum neuen internationalen Meterprototyp und definierte das Meter

als den Abstand zweier auf den Prototyp von Breteuil angebrachten Strichmarken bei 0° C. Auch diese Definition hat sich auf die Dauer als nicht ausreichend erwiesen. Sie wurde daher, ohne dass die Länge des Meters geändert wurde, abgelöst durch den Beschluss der 11. Generalkonferenz für Maß und Gewicht vom 14. Oktober 1960. Danach ist das Meter das 1 650 763,73fache der Wellenlänge der von den Atomen des Nuklids ^{86}Kr, eines Isotops des Edelgases Krypton mit der Masse 86, beim Übergang vom Zustand 5d zum Zustand $2p_{10}$ ausgesandten Strahlung. Diese Strahlung lässt sich unter bestimmten Voraussetzungen mit der sogenannten *Engelhard-Lampe* realisieren, die sich dabei in einem Kältebad von 63 Kelvin befindet.

Die 13. Generalkonferenz für Maß und Gewicht definierte 1967 die „Atomsekunde“ mit dem Cäsiumatom 133. Mit Hilfe der Cäsiumfrequenz wurden jetzt Zeitmessungen mit relativen Unsicherheiten von 10^{-13} bis 10^{-14} möglich. Gleichzeitig entstanden hochgenaue Techniken, Längenmessungen auf Laufzeitmessungen elektromagnetischer Wellen zurückzuführen. Nicht zuletzt aus dem Grunde wurde auf der 15. Generalkonferenz für Maß und Gewicht 1975 ein Wert für die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen im Vakuum neu festgesetzt. Er beträgt c = 299 792 458 m/s. Es waren jetzt nochmals die Voraussetzungen für eine neue Definition des Meters gegeben. So beschloss man auf der 17. Generalkonferenz für Maß und Gewicht 1983 in Paris die Definition: Das Meter ist die Länge der Strecke, die Licht im leeren Raum während der Dauer von 1/299 792 458 Sekunden durchläuft.

In den Jahrzehnten nach 1875 wurden die elektromagnetischen Einheiten Volt, Ampere, Ohm und Watt eingeführt. 1901 erkannte der italienische Physiker Giovanni Giorgi, dass man aus diesen Einheiten und den mechanischen Einheiten Meter, Kilogramm und Sekunde ein kohärentes (= eng zusammenhängendes) Einheitensystem mit nur vier Grund- oder Basiseinheiten bilden könne, wenn man nur die Definitionen der elektromagnetischen Einheiten etwas anders formulierte. Später wurden noch rund 15 weitere Einheiten, darunter das Kelvin für die thermodynamische Temperatur und die Candela für die Lichtstärke, festgelegt. Alle diese Einheiten aber ließen sich nach dem Vorgang von Giorgi auf (z. Zt.) 7 Basiseinheiten reduzieren.

Diesem großartigen System erteilte im Jahre 1954 die 10. Generalkonferenz für Maß und Gewicht ihre Zustimmung. Die 11. Generalkonferenz (1960) gab ihm den Namen „Système International d'Unités“, abgekürzt SI. (*Ledersteger* 1956; *Straßer* 1974; *Bayer-Helms* 1974).

In den nun folgenden Abschnitten sind die Regelungen zusammengestellt, die das Vermessungswesen an irgend einer Stelle berühren.

1.5.2 Grundlegende Vorschriften des Einheitengesetzes

Das SI kennt nach § 2 und 3 des Gesetzes die folgenden 7 Basiseinheiten und Einheitenzeichen

für die Länge	das Meter	= m
für die Masse	das Kilogramm	= kg

für die Zeit	die Sekunde	= s
für die elektrische Stromstärke	das Ampère	= A
für die thermodynamische Temperatur	das Kelvin	= K
für die Lichtstärke	die Candela	= cd
für die Stoffmenge	das Mol	= mol.

Nach §5 des Gesetzes und dem 2. Abschnitt der Ausführungsverordnung können aus den 7 Basiseinheiten durch Multiplikation mit 1 oder mit einem von 1 verschiedenen Faktor neue Einheiten abgeleitet werden. Durch Multiplikation mit dem Faktor 1 entstehen die kohärenten Einheiten des SI, z. B.

für die Fläche	$1\ \mathrm{m}^2$
für die Geschwindigkeit	$1\ \mathrm{m\,s}^{-1}$
für die Beschleunigung	$1\ \mathrm{m\,s}^{-2}$
für die Kraft	$1\ \mathrm{m\,kg\,s}^{-2}$, genannt 1 Newton (N)
für den Druck	$1\ \mathrm{m}^{-1}\ \mathrm{kg\,s}^{-2} = 1\ \mathrm{N/m}^2 = 1$ Pascal (Pa).

Nicht kohärente Einheiten können mit einer ganzzahligen Potenz von 10 oder mit einer anderen Zahl zusammengesetzt werden, z. B.

die Fläche $10^2\ \mathrm{m}^2$	= 1 a
die Beschleunigung $10^{-2}\ \mathrm{m\,s}^{-2}$	= 1 Gal
die Kraft $10^{-5}\ \mathrm{m\,kg\,s}^{-2}$	$= 10^{-5}$ N =1 dyn
der Druck $10^5\ \mathrm{m}^{-1}\ \mathrm{kg\,s}^{-2}$	$= 10^5\ \mathrm{N/m}^2 = 1$ bar

und

die Kraft $9{,}806\,65\ \mathrm{m\,kg\,s}^{-2}$	= 9,806 65 N =1 kp
der Druck $101\,325\ \mathrm{m}^{-1}\ \mathrm{kg\,s}^{-2}$	$= 101\,325\ \mathrm{N/m}^2 = 1$ atm.

Nach §6 des Gesetzes lassen sich aus den vorgenannten Einheiten durch Vorsätze dezimale Vielfache und Teile bilden und durch Vorsatzzeichen folgendermaßen kennzeichnen.

	Vorsatz	Vorsatz-zeichen		Vorsatz	Vorsatz-zeichen
10^1	Deka	da	10^{-1}	Dezi	d
10^2	Hekto	h	10^{-2}	Zenti	c
10^3	Kilo	k	10^{-3}	Milli	m
10^6	Mega	M	10^{-6}	Mikro	μ
10^9	Giga	G	10^{-9}	Nano	n
10^{12}	Tera	T	10^{-12}	Piko	p

1.5.3 Die alten und die neuen Maßeinheiten in der Vermessungstechnik

1.5.3.1 Die Einheiten des Längen-, Flächen- und Volumenmaßes

Diese sind in ihrer 1875 von der Meterkonvention erarbeiteten Form durch das Einheitengesetz bestätigt. Lediglich die Einheiten des Längenmaßes sind um einige Zehnerpotenzen nach oben und unten erweitert worden. Nach dem Einheitengesetz und der Ausführungsverordnung gilt nunmehr folgendes:

a) Die SI-Einheit des Längenmaßes ist die Basiseinheit Meter (m). Aus ihr folgen mit dem Vorsatzzeichen unter [1.5.2]

1 Dekameter	$= 10^1$ m	= 1 dam	1 Dezimeter	$= 10^{-1}$ m	= 1 dm
1 Hektometer	$= 10^2$ m	= 1 hm	1 Zentimeter	$= 10^{-2}$ m	= 1 cm
1 Kilometer	$= 10^3$ m	= 1 km	1 Millimeter	$= 10^{-3}$ m	= 1 mm
1 Megameter	$= 10^6$ m	= 1 Mm	1 Mikrometer	$= 10^{-6}$ m	= 1 μm
1 Gigameter	$= 10^9$ m	= 1 Gm	1 Nanometer	$= 10^{-9}$ m	= 1 nm
1 Terameter	$= 10^{12}$ m	= 1 Tm	1 Pikometer	$= 10^{-12}$ m	= 1 pm.

b) Die SI-Einheit des Flächenmaßes ist die abgeleitete Einheit Quadratmeter (m^2). Aus ihr folgt mit den obigen Vorsatzzeichen

1 Ar	$= 10^2$ m^2	= 1 a	1 Quadratdezimeter	$= 10^{-2}$ m^2	= 1 dm^2
1 Hektar	$= 10^4$ m^2	= 1 ha	1 Quadratzentimeter	$= 10^{-4}$ m^2	= 1 cm^2
1 Quadrat-kilometer usw.	$= 10^6$ m^2	= 1 km^2	1 Quadrat-millimeter usw.	$= 10^{-6}$ m^2	= 1 mm^2

c) Die SI-Einheit des Volumenmaßes ist die abgeleitete Einheit Kubikmeter (m^3). Daraus sind mit den Vorsätzen in 1.5.2 das dm^3, das cm^3 und das mm^3 usw. abgeleitet worden. Zu Fläche und Volumen bestimmt die Ausführungsverordnung:

Die Flächenmaße Ar (a) und Hektar (= Hektoar: ha) werden als abgeleitete Maßeinheiten für Grundstücksflächen beibehalten (§48). Die amtliche Begründung hierzu bezieht sich ausdrücklich auf den Ausweis der Grundstücksflächen in den Grundbüchern.

1.5.3.2 Die SI-Einheiten des ebenen Winkelmaßes

Sie weichen von den überkommenen Maßeinheiten in unterschiedlicher Weise ab. Daher müssen – schon im Hinblick auf die vorhandene Literatur – der bisherige und der neue Zustand einander gegenübergestellt werden. Bislang wurden benutzt: die Sexagesimalteilung, die Zentesimalteilung und das Arcus- oder Bogenmaß. Im einzelnen sind die beiden ersten Systeme folgendermaßen aufgebaut:

die Sexagesimalteilung:	1 Vollkreis = 360° (Grad)
$1^\circ = 60'$ (Minuten)	$1' = 60''$ (Sekunden)
die Zentesimalteilung:	1 Vollkreis = 400^{g} Neugrad oder Gon
$1^{\mathrm{g}} = 100^{\mathrm{c}}$ (Neuminuten)	$1^{\mathrm{c}} = 100^{\mathrm{cc}}$ (Neusekunden),

wobei das hochgestellte c als Abkürzung für „centi“ stand.

Die Sexagesimalteilung ist wegen ihrer engen Beziehungen zur Astronomie und zum Gradnetz der Erdoberfläche mit ihren bisherigen Einheiten Grad, Minute und Sekunde und deren Zeichen in das SI unverändert übernommen worden. Die früher gerne benutzten Bezeichnungen Altgrad, Altminute und Altsekunde sind fortgefallen.

Die Zentesimalteilung kennt als SI-Einheit nur noch das Gon (Einheitenzeichen gon); die Bezeichungen Neugrad, Neuminute und Neusekunde sind ebenfalls fortgefallen. Die Bruchteile des Gon sind im SI im Prinzip als Dezimale des Gon darzustellen; doch ist es mit den in 1.5.2 angegebenen Vorsätzen erlaubt, das Zentigon (Einheitenzeichen cgon) und das Milligon (Einheitenzeichen mgon) zu bilden. Ein Einheitenzeichen für die ehemalige Neusekunde (^{cc}) gibt es nicht. Vielmehr ist künftig

$$1^{\mathrm{cc}} = 1 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{gon} = 0{,}1\,\mathrm{mgon}.$$

Für den rechten Winkel oder den „Rechten“ ist das Einheitenzeichen $1^{\llcorner}$ geschaffen worden.

Das Bogenmaß eines Winkels, die dritte der überkommenen Winkeleinheiten, ist das Verhältnis des Bogens b, den die Schenkel eines Winkels α aus einem um seinen Scheitelpunkt geschlagenen Kreis ausschneiden, zu dem Kreishalbmesser r (Abb. 1.6). Die Einheit des Bogenmaßes ist der Winkel, für den dieses Verhältnis gleich 1 ist, d. h. für den $b = r$ ist. Dieser Winkel wird als „Radiant“ bezeichnet, weil er entsteht, wenn der Halbmesser eines Kreises auf seinem Umfang abgewickelt wird. Das Bogenmaß des vollen Winkels ist daher 2π, das des rechten $\pi/2$.

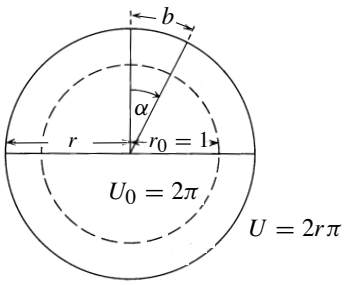


Abbildung 1.6. Definition des Bogenmaßes

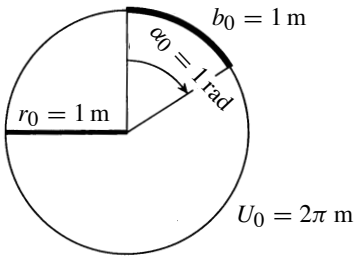


Abbildung 1.7. Das Bogenmaß im Einheitskreis

Das Bogenmaß ist also der Quotient zweier Längen, und wohl deshalb ist der Radiant (Einheitenzeichen rad) im SI, das die Anzahl der Basiseinheiten möglichst klein halten möchte, zur (abgeleiteten) SI-Einheit des ebenen Winkels erklärt worden. Etwas spezieller als im vorigen Absatz heißt es im §5 der Ausführungsverordnung: „1 Radiant ist gleich dem ebenen Winkel, der als Zentriwinkel eines Kreises vom Halbmesser 1 m aus dem Kreis einen Bogen der Länge 1 m ausschneidet“. Zur Veranschaulichung dieses Satzes sind in Abb. 1.7 (Einheitskreis) der Zentriwinkel α, der zugehörige Bogen b und der Halbmesser r mit dem Index Null ($_0$) versehen worden.

Um aber dem Bedürfnis der Praxis nach den Einheiten der Sexagesimal- und Zentesimalteilung gerecht zu werden, sind – ebenfalls in §5 a.a.O. – aus dem Radianten noch folgende Einheiten abgeleitet, bei deren Erläuterung für das Wort Einheitenzeichen hier die Abkürzung Ez benutzt ist.

$$\begin{array}{lll}
\text{Vollwinkel (kein EZ.)} & = 2\pi \text{ rad} & = 360^\circ = 400\,\text{gon} \\
1 \text{ Rechter (Ez.: }^{\llcorner}\text{)} & = \pi/2\,\text{rad} & = 90^\circ = 100\,\text{gon} \\
1 \text{ Grad (Ez.: }^\circ\text{)} & = \dfrac{\pi}{180}\,\text{rad} & = 90\text{ster Teil des Rechten} \\
1 \text{ Minute (Ez.: }'\text{)} & = \dfrac{\pi}{180\cdot 60}\,\text{rad} & = 60\text{ster Teil des Grades} \\
1 \text{ Sekunde (Ez.: }''\text{)} & = \dfrac{\pi}{180\cdot 60^2}\,\text{rad} & = 60\text{ster Teil der Minute} \\
1 \text{ Gon (Ez.: gon)} & = \dfrac{\pi}{200}\,\text{rad} & = 100\text{ster Teil des Rechten} \\
1 \text{ Zentigon (Ez.: cgon)} & = \dfrac{\pi}{200\cdot 10^2} & = 100\text{ster Teil eines Gon} \\
1 \text{ Milligon (Ez.: mgon)} & = \dfrac{\pi}{200\cdot 10^3} & = 1000\text{ster Teil eines Gon.}
\end{array} \tag{1.1}$$

1.5.3.3 Vermessungstechnische Sonderzeichen

Die Reziproken der in (1.1) auftretenden Quotienten $\pi/180^\circ$ und $\pi/200\,\text{gon}$ – allgemein $\pi/2^{\llcorner}$ – werden in der Geodäsie so häufig benutzt, dass dafür das Symbol ϱ eingeführt ist, und zwar ist

$$180/\pi = \varrho^{(\circ)} \text{ (lies } \varrho \text{ in Grad)} \quad \text{und} \quad 200/\pi = \varrho^{(\text{gon})} \text{ (lies } \varrho \text{ in gon).} \tag{1.2}$$

Zu einer ersten Anwendung entnehme man der Abb. 1.6 den Ansatz

$$\alpha : b = 4^{\llcorner} : 2\pi.$$

Im *Einheitskreis* (Abb. 1.7) folgt daraus wegen $b_0 = r_0 = 1$ für einen Winkel $\alpha_0 = 1\,\text{rad}$, wenn die jeweiligen Winkeleinheiten eingesetzt werden,

$$\alpha = \frac{2^{\llcorner}}{\pi}\,; \quad \alpha^{(\circ)} = \frac{180^\circ}{\pi}\,; \quad \alpha^{(\text{gon})} = \frac{200\text{gon}}{\pi}.$$

Die Winkelwerte der ϱ im Sexagesimal- und Zentesimalsystem sind demnach gleich denen des Radianten in den entsprechenden Maßsystemen. Zahlenmäßig sind diese Werte

$$\begin{aligned} \varrho^{(\circ)} &= 57{,}295779\ldots & \varrho^{(\mathrm{gon})} &= 63{,}661977\ldots \\ \varrho^{(')} &= 3437{,}7467\ldots & \varrho^{(\mathrm{cgon})} &= 6366{,}1977\ldots \\ \varrho^{('')} &= 206264{,}8\ldots & \varrho^{(\mathrm{mgon})} &= 63661{,}977\ldots \end{aligned} \tag{1.3}$$

Für eine zweite Anwendung ergibt sich aus Abb. 1.2

$$b : 2r\pi = \alpha : 4^{\llcorner}.$$

Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung mit 2π, so erhält man mit (1.2) die in der Vermessungstechnik viel benutzte Formel

$$b : r = \alpha : \varrho, \tag{1.4}$$

in die b und r bzw. α und ϱ jeweils mit den einander entsprechenden Einheiten einzusetzen sind.

Zahlenbeispiel: Eine 150 m lange Achse soll um 12 cgon verschwenkt werden. Um welchen linearen Betrag b wird dadurch das freie Ende der Achse seitwärts verlegt? Die Gleichung (1.4) ergibt mit dem $\varrho^{(\mathrm{gon})}$ aus (1.3)

$$b^{(m)} = r^{(m)} \frac{\alpha^{(\mathrm{gon})}}{\varrho^{(\mathrm{gon})}} = \frac{150 \cdot 12 \cdot 10^{-2}}{63{,}66} = 0{,}283\,\mathrm{m}\,.$$

Eine dritte Sonderanwendung ist der Übergang auf andere Winkeleinheiten. Die Umwandlung von Grad oder Gon in die Einheit Radiant und umgekehrt ist in der Vermessungstechnik kaum erforderlich. Auch der Übergang von der Sexagesimalteilung in die Zentesimalteilung und umgekehrt verliert an Bedeutung, weil das Sexagesimalsystem in der Vermessungspraxis nur noch selten gebraucht wird. Zum Übergang vom Sexagesimal- in das Zentesimalsystem gibt es zahlreiche Tafeln. Bequemer ist heute das Umrechnen mit einem elektronischen Taschenrechner unter Verwertung nachstehender Identitäten:

$$\begin{aligned} 1^\circ &= 10/9\ \mathrm{gon} = 1{,}111\ \ldots\ldots\ \mathrm{gon} & 1\ \mathrm{gon} &= 0{,}9^\circ \\ 1' &= 1{,}85185185\ \ldots\ldots\ldots\ \mathrm{cgon} & 1\ \mathrm{cgon} &= 0{,}54' \\ 1'' &= 0{,}308641975308\ \ldots\ \mathrm{mgon} & 1\ \mathrm{mgon} &= 3{,}24''. \end{aligned}$$

Auch hierfür wird man zweckmäßig zuvor die Sexagesimalminuten und -sekunden in Dezimale des Grades verwandeln.

Für Überschlagsrechnungen merke man:

$$1' \approx 2\,\text{cgon}; \quad 1'' \approx 0{,}3\,\text{mgon} = 3 \cdot 10^{-4}\,\text{gon}.$$

In der Bautechnik werden die Höhenunterschiede meistens in Prozenten des Längenunterschiedes oder durch das Steigungsmaß $1 : n$, seltener durch den Neigungswinkel α, ausgedrückt.

1.5.4 Seltener gebrauchte SI-Einheiten

1.5.4.1 Die (abgeleitete) SI-Einheit des räumlichen Winkels

Die SI-Einheit des räumlichen Winkels ist nach §6 der Ausführungsverordnung der Steradiant (Einheitenz. sr). 1 Steradiant ist gleich dem räumlichen Winkel, der als gerader Kreiskegel mit der Spitze im Mittelpunkt einer Kugel vom Halbmesser 1 m aus der Kugeloberfläche eine Kalotte der Fläche 1 m^2 ausschneidet.

1.5.4.2 Die (abgeleitete) SI-Einheit des Drucks

Die SI-Einheit des Drucks oder der mechanischen Spannung, die in der Vermessungstechnik vor allem für die barometrische Höhenmessung gebraucht wird, ist nach §20 a. a. O. das Pascal (Einheitenz.: Pa). 1 Pascal ist gleich dem auf eine Fläche gleichmäßig wirkenden Druck, bei dem senkrecht auf die Fläche 1 m^2 die Kraft 1 N = 1 Newton ausgeübt wird. 10^5 Pa sind gemäß [1.5.2] 1 Bar (bar), 10^2 Pa 1 Millibar (mbar).

Die Einheiten technische Atmosphäre (at), physikalische Atmosphäre (atm), Torr (torr), Meter-Wassersäule (mWs), Millimeter-Quecksilbersäule (mm Hg) waren nur noch bis Ende 1977 zugelassen.

1.5.4.3 Die Basiseinheit der (thermodynamischen) Temperatur (T)

Die Basiseinheit der Temperatur, auch Kelvintemperatur genannt, ist nach §3 des Einheitengesetzes das Kelvin (Einheitenzeichen K). Dieses ist definiert als der 273,16 ste Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes des Wassers.

Hierzu vermerkt das Normblatt DIN 1301 S.11: Die Einheit, das Kelvin, gilt auch für die Angabe von Temperaturdifferenzen. – Als Celsius-Temperatur (t) wird die besondere Differenz einer beliebigen thermodynamischen Temperatur T gegenüber der Temperatur $T_0 = 273{,}15$ K bezeichnet. Es ist also

$$t = T - T_0 = T - 273{,}15\,\text{K}.$$

Bei der Angabe von Celsius-Temperaturen sind der Einheitenname Grad Celsius und das Einheitenzeichen °C anzuwenden. Die Differenz Δt zweier Celsius-Temperaturen, z. B. der Celsius-Temperaturen $t_1 = T_1 - T_0$ und $t_2 = T_2 - T_0$,

ist

$$\Delta t = t_1 - t_2 = T_1 - T_2 = \Delta T.$$

Eine derartige Temperaturdifferenz ist nicht mehr auf die dynamische Temperatur T_0 bezogen, somit keine Celsius-Temperatur im Sinne der Definition nach der ersten der beiden obigen Gleichungen.

1.5.4.4 Die (abgeleitete) SI-Einheit der Frequenz

Die SI-Einheit der Frequenz ist nach §12 der Ausführungsverordnung das Hertz (Einheitenzeichen Hz). 1 Hertz ist gleich der Frequenz eines Schwingungsvorgangs der Periodendauer 1 s. Zur Kennzeichnung von Vielfachen und Teilen dienen die Vorsatzzeichen in [1.5.2].

1.6 Fehlerrechnung und Ausgleichungsrechnung

1.6.1 Die Aufgabe der Fehlerrechnung

Die geodätischen Messungen müssen im Hinblick auf ihren jeweiligen Zweck mit einer bestimmten Genauigkeit ausgeführt und gegen Irrtümer gesichert sein. Völlig fehlerfreie Messungen sind infolge der Mängel der Messgeräte und der Unvollkommenheit der menschlichen Sinne nicht möglich. Die Messungen werden daher in der Regel mehrere Male wiederholt und möglichst noch durch zusätzliche Messungen gestützt, indem man z. B. außer den Katheten noch die Hypotenuse misst, oder neben zwei Dreieckswinkeln, die man braucht, auch den dritten beobachtet.

Bei der Auswertung der Messungen entsteht die Aufgabe,

1. aus den Beobachtungen den günstigsten Mittelwert der gesuchten Größe abzuleiten,
2. eine Maßzahl für die Genauigkeit einer einzelnen Messung oder ihre „Streuung“ anzugeben,
3. die Genauigkeit oder die Streuung des Mittelwertes und seinen „Vertrauensbereich“ abzuschätzen.

1.6.2 Fehlerarten

Die Messungsfehler unterteilt man nach Art ihrer Entstehung in grobe, systematische und zufällige Fehler.

Grobe Fehler sind grob fehlerhafte Ablesungen an den Messinstrumenten, Zielverwechslungen und dergleichen. Sie werden durch Kontrollmessungen entdeckt und ausgeschieden.

Systematische Fehler verfälschen das Messergebnis stets in demselben Sinne. Sie werden hervorgerufen durch unzureichende Eichung und einseitige Handhabung der

Messinstrumente sowie durch einsinnig wirkende Einflüsse von Temperatur, Luftdruck usw. auf das Messinstrument oder den zu messenden Gegenstand. Diese Fehler lassen sich in allen Regelfällen durch Eichung der Messinstrumente, Wahl geeigneter Messverfahren und rechnerisches Berücksichtigen der einsinnigen Einflüsse zum größten Teil eliminieren.

Als *zufälligen Fehler* einer Messung betrachtet man die Summe der nach dem Ausscheiden der groben und der systematischen Fehler übrigbleibenden unbekannten „Elementarfehler", die auf begrenzte Schärfe der menschlichen Sinne, Unvollkommenheiten der Messinstrumente, unkontrollierbare Veränderungen der äußeren Umstände und gelegentlich auch des Gegenstandes der Messung zurückzuführen sind. Die zufälligen Fehler werden ebenso oft positives wie negatives Vorzeichen annehmen und sind im Sinne der mathematischen Statistik *stochastisch unabhängige Veränderliche*. Trotz ihrer scheinbaren Regellosigkeit unterliegen sie den Gesetzen des Zufalls.

Abb. 1.8 lässt die Verteilung der wahren Fehler ε_i [1.6.3] erkennen, die bei 160 Beobachtungen desselben Winkels gemacht wurden. Die ε_i sind dazu ihrer Größe nach in die auf der Abszissenachse angedeuteten Gruppen von je 0,1 mgon Breite eingeordnet, und über den Abszissenabschnitten sind Rechtecke eingezeichnet, deren Höhe der Anzahl der in die betreffende Gruppe fallenden Fehler proportional ist. Wie die so entstandene Treppenkurve (= Histogramm) zeigt, ist die Häufigkeit, mit der ein Fehler ε auftritt, eine Funktion seiner Größe. Diese Erscheinung ist von C. F. Gauß in das nach ihm benannte Fehlergesetz

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} \tag{1.5}$$

gebracht worden, in dem $\varphi(\varepsilon)$ die relative – d. h. prozentuale – Häufigkeit des Auftretens, e die Basis der natürlichen Logarithmen und h eine Konstante ist, die die Messungsgenauigkeit charakterisiert. Die danach zu erwartende theoretische Fehlerverteilungskurve ist in Abb. 1.8 als durchlaufende Kurve eingezeichnet; sie stimmt mit der aus den Messungen gewonnenen Treppenkurve gut überein. Das gilt für alle größeren Messungsreihen, die überwiegend zufällige Fehler aufweisen. Solche Messungsreihen besitzen in der Sprache der Statistik eine *Normalverteilung*. Die überwiegend durch zufällige Fehler verursachten Messungswidersprüche aber lassen sich nach der auf C. F. Gauß zurückgehenden *Methode der kleinsten Quadrate* willkürfrei ausgleichen.

1.6.3 Mittelwerte und Streuungsmaße

Die Einzelergebnisse l_i, die sich ergeben würden, wenn man eine Größe beliebig oft ($n \to \infty$) durch gleichgenaue, unabhängige und nur mit zufälligen Fehlern behaftete Messungen bestimmte, werden um einen gewissen *Mittelwert* ξ schwanken, den man

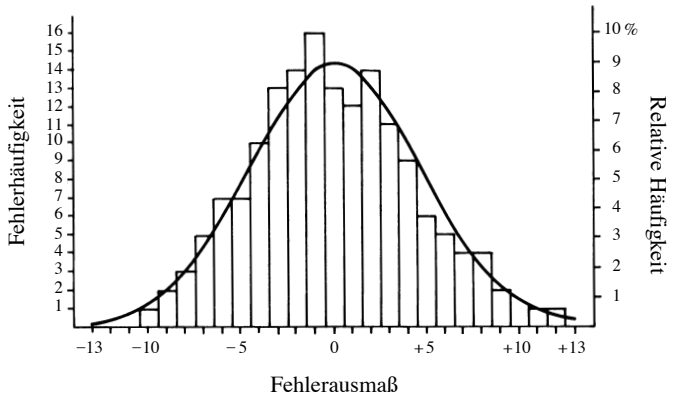


Abbildung 1.8. Histogramm eines wiederholt gemessenen Winkels

den *Erwartungswert* oder auch den *wahren Wert* der Größe nennt. Da jedoch in allen Regelfällen nur eine begrenzte Anzahl von Messungen (eine Stichprobe vom Umfang n) vorliegt, benutzt man als Näherungswert für den wahren Wert das *arithmetische Mittel*

$$\hat{x} = \frac{1}{n}(l_1 + l_2 + \cdots + l_n) = \frac{1}{n}[l]^1. \tag{1.6}$$

Für die nach dem Bilden des arithmetischen Mittels *übrigbleibenden Fehler* oder *Verbesserungen*

$$v_1 = \hat{x} - l_1; \quad v_2 = \hat{x} - l_2; \ \ldots \quad v_n = \hat{x} - l_n$$

gilt, dass deren Quadratsumme $[vv]$ ein Minimum wird, also

$$[vv] = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 = \text{Min.} \tag{1.7}$$

Das ist gleichzeitig die Grundforderung der Methode der kleinsten Quadrate, aus der das arithmetische Mittel sich als Sonderfall herleiten lässt.

Um gemäß [1.6.1] Ziff. 2 ein *Maß für die Streuung* einer einzelnen Messung l_i zu bekommen, betrachtet man – zunächst für $n \to \infty$ – die Abweichungen der Beobachtungen l_i von dem wahren Wert ξ, die sogenannten *wahren Fehler*

$$\varepsilon_1 = \xi - l_1; \quad \varepsilon_2 = \xi - l_2; \ \ldots \quad \varepsilon_n = \xi - l_n$$

[1] In der Fehlerrechnung verwendet man nach dem Vorbild von C. F. Gauß gern eckige Klammern als Summenzeichen.

und definiert als Genauigkeitsmaß für eine einzelne Messung l_i die *„theoretische Standardabweichung“*

$$\sigma = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}; \quad n \to \infty. \tag{1.8}$$

Die ε_i sind jedoch in allen Regelfällen nicht bekannt; man muss daher auf die in [1.6.3] eingeführten übrigbleibenden Fehler v_i zurückgehen und erhält daraus aufgrund einer statistischen Abschätzung anstelle von σ den Näherungs- oder Schätzwert

$$s = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}, \tag{1.9}$$

der als *„empirische Standardabweichung“ einer einzelnen Beobachtung* bezeichnet wird[2].

Das arithmetische Mittel aus n Beobachtungen hat, wie in [1.6.4] begründet werden wird, die Standardabweichung

$$s(\hat{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}}. \tag{1.10}$$

Damit sind die in [1.6.1] gestellten Aufgaben für den Fall gleich genauer Beobachtungen gelöst.

1.6.4 Das Fehlerfortpflanzungsgesetz

Neben der Standardabweichung einer einzelnen Messung wird oftmals auch die Standardabweichung einer Funktion gemessener Größen benötigt. Das leistet das *Fehlerfortpflanzungsgesetz.*

Lineare Funktionen: Gegeben seien die Messungen l_1 und l_2 sowie deren Standardabweichungen σ_1 und σ_2. Gesucht werde die Standardabweichung $s(x)$ der Funktion

$$x = l_1 + l_2. \tag{1.11}$$

Zur Berechnung von $s(x)$ geht man zurück auf die Definitionsgleichung (1.8) und unterstellt, die l_i in (1.11) seien die Mittel aus ν Urmessungen mit den wahren Fehlern $\varepsilon_1', \varepsilon_1'', \ldots, \varepsilon_1^{(\nu)}$ bzw. $\varepsilon_2', \varepsilon_2'', \ldots, \varepsilon_2^{(\nu)}$, wobei unter ν eine sehr große Zahl verstanden sei. Dann bestehen ν Gleichungen von der Form $\varepsilon_x = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, aus denen durch Quadrieren, Aufaddieren und Division durch ν folgt

$$\frac{[\varepsilon_x\varepsilon_x]}{\nu} = \frac{[\varepsilon_1\varepsilon_1]}{\nu} + \frac{[\varepsilon_2\varepsilon_2]}{\nu} + \frac{2[\varepsilon_1\varepsilon_2]}{\nu}.$$

Die 3 ersten Ausdrücke ergeben nach (1.8) die Werte $\sigma(x)^2$, σ_1^2 und σ_2^2. Im letzten Ausdruck werden die gemischten Produkte, da nur zufällige Fehler, d. h. stochastisch

[2] In der Vergangenheit wurde in der Regel die Bezeichnung mittlerer Fehler verwendet.

unabhängige Variable vorausgesetzt sind, im Durchschnitt gleich oft positiv und negativ sein und sich daher beim Aufaddieren so weitgehend tilgen, dass der Ausdruck, zumal nach Division durch ν, gegen Null geht. Also bleibt

$$\sigma(x)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2.$$

Ersetzt man dann noch, wie beim Übergang von (1.8) auf (1.9), die σ durch die entsprechenden Schätzwerte s, so erhält man zur Berechnung eines Schätzwertes für die Standardabweichung der in (1.11) erhaltenen Summe x die Regel

$$s(x)^2 = s_1^2 + s_2^2. \tag{1.12}$$

Anwenden desselben Gedankenganges auf die Funktion

$$x = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \cdots + \alpha_n l_n$$

gibt

$$s(x)^2 = \alpha_1^2 s_1^2 + \alpha_2^2 s_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 s_n^2. \tag{1.13}$$

Man beachte folgende Sonderfälle:

a) Ist $s_1 = s_2 = \cdots = s_n = s$, so wird

$$s(x)^2 = [\alpha\alpha]s^2. \tag{1.14}$$

b) Sind ferner alle α_i entweder $+1$ oder -1, so ist

$$s(x)^2 = ns^2 \quad \text{oder} \quad s(x) = s\sqrt{n}. \tag{1.15}$$

Dieser Fall tritt z. B. beim Nivellement und bei der Streckenmessung auf. In Worten lautet die Regel:
Werden mehrere gleich genaue Einzelmessungen zu einer Summe oder Differenz vereinigt, so wächst die Standardabweichung des Ergebnisses mit der Quadratwurzel aus der Anzahl der Einzelmessungen.

c) Bringt man die Gleichung (1.6) in die Form

$$\hat{x} = \frac{l_1}{n} + \frac{l_2}{n} + \cdots + \frac{l_n}{n},$$

wobei alle $s_i = s$ sind, so folgt daraus nach (1.13) für $s(\hat{x})^2$ der bereits in (1.10) angegebene Wert

$$s(\hat{x})^2 = \frac{s^2}{n^2} + \frac{s^2}{n^2} + \cdots + \frac{s^2}{n^2} \quad \text{oder} \quad s(\hat{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

In Worten: *Wird ein und derselbe Gegenstand n mal mit gleicher Genauigkeit gemessen, so geht die Standardabweichung des arithmetischen Mittels mit der Quadratwurzel aus der Anzahl der Wiederholungen zurück.*

Der Leser möge die Fälle b) und c) wohl auseinanderhalten; vgl. die nachfolgenden Beispiele 1 und 2.

Nichtlineare Funktionen macht man gewöhnlich mit Hilfe der Taylorschen Reihe linear und wendet auf das Ergebnis die Gleichung (1.13) an. Das Fehlerfortpflanzungsgesetz lautet dann in seiner allgemeinsten Form:

Für $x = f(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ ist

$$\sigma(x)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)^2 \sigma_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial l_n}\right)^2 \sigma_n^2. \tag{1.16}$$

Zahlenbeispiele:

1. Bei einer Längenmessung mit einem 20 m-Messband ist die von dem ungenauen Aneinanderlegen des Messbandes herrührende Standardabweichung einer einzelnen Messbandlage gleich 2 mm. Wie groß ist die Standardabweichung einer Strecke vom 100 m?

Aus (1.15) folgt:

$$s_{100} = 2\sqrt{5} = 4\,\text{mm}.$$

2. Eine Strecke von 160 m wurde viermal unabhängig gemessen. Eine einzelne Messung hat die Standardabweichung 12 mm. Wie groß ist die Standardabweichung des arithmetischen Mittels aus den 4 Messungen?

Aus (1.10) folgt:

$$s(\hat{x}) = \frac{12}{\sqrt{4}}\,\text{mm} = 6\,\text{mm}.$$

3. Gegeben ist $a = 87{,}46$. Wie groß ist die Standardabweichung von $x = \lg a$, wenn $s(a) = 0{,}04$ ist?

Aus (1.16) folgt:

$$s(x) = \frac{d\lg a}{da} s(a) = \frac{\text{Mod}}{a} s(a) = \frac{0{,}4343}{87{,}46} \cdot 0{,}04 = 0{,}00020.$$

4. Die Seiten eines Rechtecks und ihre Standardabweichungen sind $a = 39{,}12$ m, $b = 71{,}38$ m, $s(a) = 0{,}02$ m und $s(b) = 0{,}04$ m. Gesucht sind die Fläche des Rechtecks und ihre Standardabweichung.

Aus $F = ab$ folgt gemäß (1.16) $s(F)^2 = (bs(a))^2 + (as(b))^2$ und mit den gegebenen Zahlen $F = 2792\,\text{m}^2$ mit $s(F)^2 = 2{,}1\,\text{m}^2$.

5. Im Dreieck ABC sind gemessen $b = 221{,}41$ m, $c = 166{,}14$ m und $\alpha = 54{,}2110$ gon, wobei $s(b) = 0{,}06$ m, $s(c) = 0{,}05$ m und $s(\alpha) = 4{,}0$ mgon ist. Gesucht sind die Seite a und ihre Standardabweichung.

Aus $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$ folgt gemäß (1.16)

$$s(a)^2 = \left(\frac{b - c\cos\alpha}{a} s(b)\right)^2 + \left(\frac{c - b\cos\alpha}{a} s(c)\right)^2 + \left(\frac{bc\sin\alpha}{a} \cdot \frac{s(\alpha)}{\varrho}\right)^2$$

und mit den gegebenen Zahlen $a = 167{,}80$ m mit $s(a) = 0{,}04$ m.

1.6.5 Ausgleichung direkter Beobachtungen von gleicher Genauigkeit

Ist eine Größe mehrfach gemessen worden, so müssen die Messungen zur Lösung der Aufgaben in [1.6.3] nach (1.6), (1.9) und (1.10) ausgeglichen werden. Um mit kleinen Zahlen rechnen zu können, führt man für die Unbekannte einen Näherungswert x_0 ein und setzt $x = x_0 + \delta x$. Bezeichnet man dann die Messungsgrößen anstatt mit l_i künftig mit L_i, so hat man die Ausgangsgleichung

$$L_i + v_i = x_0 + \delta x. \tag{1.17}$$

Darin bringt man L_i nach rechts und erhält die *Fehlergleichung*

$$v_i = \delta x - (L_i - x_0) = \delta x - l_i, \tag{1.18}$$

in der l_i eine neue Bedeutung erhalten hat.

Damit ergibt sich folgendes Rechenschema: Bilde

1. die Absolutglieder	$-l_i = -(L_i - x_0)$
2. den Mittelwert	$\delta x = \frac{1}{n}[l]$
3. die übrigbleibenden Fehler	$v_1 = \delta x - l_i$
4. die $[v]$-Probe	$[v] = 0$
5. die $[vv]$-Proben	$[vv] = [ll] - [l]\delta x = [ll] - \frac{[l]^2}{n}$
6. die Standardabweichung einer Messung	$s = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$
7. die Standardabweichung des Mittelwertes	$s(\hat{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}}$

und setze als Schlussprobe die gewonnenen Ergebnisse in Gleichungen (1.17) ein, die erfüllt sein müssen.

Zahlenbeispiel: Zur Bestimmung eines Winkels seien die in Spalte 1 des nachstehenden Schemas eingetragenen Beobachtungen gemacht. Als Näherungswert werde $x_0 = 52{,}350$ gon eingeführt.

L_i	$l_i = L_i - x_0$	$v_i = \delta x - l_i$		vv	ll
		+	−		
gon	mgon	mgon	mgon	mgon^2	mgon^2
1	2	3		4	5
52,356	+6		5,3	28	36
52,348	−2	2,7		07	04
52,346	−4	4,7		22	16
52,347	−3	3,7		14	09
52,352	+2		1,3	01	04
52,355	+5		4,3	18	25
	+4	11,1	10,9	90	94

$$\delta x = \frac{+4}{6} = 0{,}7\,\text{mgon}; \quad [v] = 0{,}2; \qquad \text{soll} = \text{Null},$$

$$[vv] = 94 - 4 \cdot \delta x = 94 - \frac{4^2}{6} = 91; \quad \text{soll} = 90.$$

Ausgleichsergebnisse: $\hat{x} = x_0 + \delta x = 52{,}351\,\text{gon}$;

$$s = \sqrt{\frac{0{,}90}{6-1}} = 0{,}004\,\text{gon}; \quad s(\hat{x}) = \frac{0{,}004}{\sqrt{6}} = 0{,}0013\,\text{gon}\,.$$

1.6.6 Ausgleichung direkter Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit

1.6.6.1 Einführen von Gewichten

Ist eine Messungsgröße mehrere Male mit *verschiedener* Genauigkeit beobachtet worden, müssen beim Bilden des Mittelwertes die Genauigkeitsverhältnisse oder – in der Sprache der Ausgleichungsrechnung – die *Gewichte* der einzelnen Messungen berücksichtigt werden. Eine Messung habe das Gewicht p, wenn sie die gleiche Standardabweichung hat wie das arithmetische Mittel aus p tatsächlichen oder fingierten Standardmessungen mit dem Gewicht 1. Mithin gilt im Hinblick auf (1.10) für die Messungen $L_1, L_2, \ldots, L_n$ mit den Gewichten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ der Ansatz

$$p_1 : p_2 : \cdots : p_n = \frac{\sigma^2}{\sigma_1^2} : \frac{\sigma^2}{\sigma_2^2} : \cdots : \frac{\sigma^2}{\sigma_n^2}. \tag{1.19}$$

Die Gewichte sind also den Quadraten der Standardabweichungen umgekehrt proportional. Die Standardabweichungen einer Messung vom Gewicht 1 wird *Gewichtseinheitsfehler* genannt und gewöhnlich mit σ_0 bezeichnet. Zur Berechnung des Gewichts p_i einer Beobachtung L_i mit der Standardabweichung σ_i hat man dann die Gleichung

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}. \tag{1.20}$$

Die Gewichtseinheit wählt man so, dass die Gewichte möglichst wenig von 1 abweichen. Gebräuchliche Gewichtseinheiten sind die Gewichte einer Streckenmessung von 100 m, eines Nivellements von 1 km und das Gewicht eines in beiden Fernrohrlagen einmal beobachteten Winkels.

Aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz (1.13) folgt mit den aus (1.20) abzuleitenden Werten der σ_i^2 das *Gewichtsfortpflanzungsgesetz*

$$\frac{1}{p_x} = \frac{\alpha_1^2}{p_1} + \frac{\alpha_2^2}{p_2} + \cdots + \frac{\alpha_n^2}{p_n}. \tag{1.21}$$

Multipliziert man eine Beobachtung L_i mit der Wurzel aus ihrem Gewicht, so erhält nach (1.21) der Ausdruck

$$L_i \sqrt{p_i} \tag{1.22}$$

das Gewicht 1.

Dieser Ausdruck wird als *normierte oder standardisierte Variable* bezeichnet.

Zahlenbeispiel: In einem Dreieck wurde Winkel α mit $s(\alpha) = 0{,}6$ mgon und Winkel β mit $s(\beta) = 0{,}4$ mgon beobachtet. Gefragt ist a) wie groß ist p_β, wenn $p_\alpha = 1$ gesetzt wird; b) wie groß ist p_γ für $\gamma = 200\,\text{gon} - \alpha - \beta$?

$$\text{Zu a)} \quad p_\alpha : p_\beta = \frac{1}{0{,}6^2} : \frac{1}{0{,}4^2} = \frac{0{,}36}{0{,}36} : \frac{0{,}36}{0{,}16}; \quad p_\beta = 2{,}2.$$

$$\text{Zu b)} \quad \frac{1}{p_\gamma} = \frac{1}{p_\alpha} + \frac{1}{p_\beta} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2{,}2} = 1{,}45; \qquad p_\gamma = 0{,}7.$$

1.6.6.2 Das gewogene Mittel

Um einen Mittelwert aus Messungen verschiedenen Gewichts zu erhalten, ersetzt man wegen (1.22) die Minimumsbedingung (1.7) durch die allgemeine Forderung

$$[vvp] = \text{Minimum}. \tag{1.23}$$

An die Stelle des einfachen Mittels (1.6) tritt dann, wenn man wie in (1.17) einen Näherungswert x_0 abspaltet, als Mittelwert aus n Messungen L_i mit verschiedenen Gewichten das *gewogene Mittel*

$$\hat{x} = \frac{L_1 p_1 + L_2 p_2 + \cdots + L_n p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = x_0 + \frac{[lp]}{[p]} = x_0 + \delta x. \tag{1.24}$$

Die Standardabweichungen einer Beobachtung vom Gewicht 1 bzw. vom Gewicht p_i sind gemäß (1.9) und (1.22)

$$s_0 = \sqrt{\frac{[vvp]}{n-1}} \quad \text{bzw.} \quad s_i = \frac{s_0}{\sqrt{p_i}}. \tag{1.25}$$

Die Standardabweichung und das Gewicht des gewogenen Mittels sind

$$s(\hat{x}) = \frac{s_0}{\sqrt{[p]}} \quad \text{bzw.} \quad p_x = [p]. \tag{1.26}$$

Der *Rechenweg* entspricht durchaus dem Verfahren in 1.6.5. Hinzu kommt lediglich, dass jede Fehlergleichung ihr besonderes Gewicht hat. Dadurch treten im nachstehenden Zahlenbeispiel an die Stelle von [1.6.5] Ziffer 2., 6. und 7. die Gleichungen (1.24) bis (1.26); es erscheinen zusätzlich die Spalten lp und vp; und vv und ll werden durch vvp und llp ersetzt. Ferner erhalten die $[v]$-Probe und die $[vv]$ – vgl. [1.6.5] Ziffer 4. und 5. – die Formen

$$[vp] = 0 \tag{1.27}$$

$$[vvp] = [llp] - [lp]\delta x = [llp] - \frac{[lp]^2}{[p]}. \tag{1.28}$$

Zahlenbeispiel: Ein Winkel wurde am 1. Tage 8mal, am 2. Tage 4mal, am 3. Tage 12mal und am 4. Tage 8mal gemessen. Man erhielt als Tagesmittel der Reihe nach 40,1714 gon, 40,1718 gon, 40,1721 gon und 40,1725 gon. Gesucht sind der Mittelwert und seine Standardabweichung.

Als Näherungswert sei 40,17 gon gewählt. Die Gewichtseinheit sei ein viermal gemessener Winkel. Damit erhält man:

p	$l_i = L_i - x_0$	lp	$v_i = \delta x - l_i$	vp		vvp	llp
				+	−		
	mgon	mgon	mgon	mgon	mgon	mgon^2	mgon^2
1	2	3	4	5		6	7
2	1,4	2,8	+0,6	+1,2		0.72	3,92
1	1,8	1,8	+0,2	0,2		0,04	3,24
3	2,1	6,3	−0,1		0,3	0,03	13,23
2	2,5	5,0	−0,5		1,0	0,50	12,50
8		15,9		1,4	1,3	1,29	32,89

$$\delta x = \frac{15{,}9}{8} = 1{,}988\,\text{mgon}; \quad [vp] = +0{,}1\,\text{mgon} \quad (\text{soll} = \text{Null});$$

$$[vvp] = 32{,}89 - 15{,}9 \cdot \delta x = 32{,}89 - \frac{15{,}9^2}{8} = 1{,}29 \quad (\text{soll} = 1{,}29).$$

(Beachte: Damit die $[vvp]$-Probe stimmt, muss δx auf 1 bis 2 Stellen genauer berechnet werden, als sachlich notwendig ist).

Ausgleichsergebnisse:

$$\hat{x} = 40{,}17\,\text{gon} + 0{,}002\,\text{gon} = 40{,}1720\,\text{gon};$$

$$s_0 = \sqrt{\frac{1{,}29}{4-1}} = 0{,}7\,\text{mgon}; \quad s(\hat{x}) = \frac{s_0}{\sqrt{[p]}} = \frac{7}{\sqrt{8}} = 0{,}24\,\text{mgon}.$$

1.6.7 Ausgleichung von direkten Beobachtungen mit einer Summenbedingung

Oftmals müssen die ausgeglichenen Werte mehrerer Messungen L_i einer mathematischen Bedingung genügen, z. B. muss die Summe der den Horizont füllenden Winkel 400 gon betragen, und eine Nivellementschleife, die zum Ausgangspunkt zurückgeführt wird, muss mit Null abschließen. Für die Ausgleichung solcher Messungen ergibt das Prinzip des gewogenen Mittels folgenden Weg:

Ist S der Sollwert und $[L]$ die Summe aus den Ergebnissen der n die Summe bildenden Messungen, so wird der *Widerspruch* $w = [L] - S$ bei lauter gleichgewichtigen Messungen auf alle Einzelmessungen zu gleichen Teilen verteilt. Die Standardabweichungen einer ursprünglichen Messung L_i bzw. die einer ausgeglichenen Messung x_i sind

$$s_i = \frac{w}{\sqrt{n}} \qquad \text{bzw.} \quad s(x_i) = s_i\sqrt{1 - \frac{1}{n}}. \tag{1.29}$$

Bei ungleichen Gewichten der Einzelmessungen dagegen wird der Widerspruch proportional zu den reziproken Gewichten $1/p_i$ verteilt. Die Standardabweichung einer ursprünglichen Messung von Gewicht 1 bzw. die einer ausgeglichenen Messung x_i sind dann

$$s_0 = w : \sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]} \quad \text{bzw.} \quad s(x_i) = \frac{s_0}{\sqrt{p_i}}\sqrt{1 - \frac{1}{p_i} : \left[\frac{1}{p}\right]}. \tag{1.30}$$

1.6.8 Berechnung der Standardabweichungen aus Doppelmessungen

Oftmals werden der Sicherheit halber n gleichartige Größen (Winkel, Strecken, Höhenunterschiede, Flächeninhalte usw.) je zweimal mit gleicher Genauigkeit beobachtet. L_i und ε_i seien die Beobachtungen und die wahren Fehler der ersten Serie, L'_i und ε'_i die der zweiten Serie. Beobachtung plus wahrer Fehler ergeben laut Definition den wahren Wert einer Größe. Also muss sein

$$L_i + \varepsilon_i = L'_i + \varepsilon'_i \quad \text{oder} \quad L_i - L'_i = d_i = -\varepsilon_i + \varepsilon'_i.$$

Mithin sind die $d_i = -\varepsilon_i + \varepsilon'_i$ als die Differenz $L_i - L'_i$ bekannt. Werden die n möglichen Gleichungen für die d_i zuerst quadriert, dann aufsummiert und schließlich durch n geteilt, so erhält man, weil wie in [1.6.4] die gemischten Glieder gegen Null gehen,

$$\frac{[dd]}{n} = s^2 + s'^2.$$

Da aber s und s', wenn beide Male nach dem gleichen Verfahren gemessen wird, als gleich angenommen werden können, erhält man bei gleichgewichtigen Messungen als Standardabweichung einer einzelnen Beobachtung

$$s = \sqrt{\frac{[dd]}{2n}}, \tag{1.31}$$

als Standardabweichung einer aus beiden Messungen gemittelten Beobachtung

$$s_M = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[dd]}{n}}. \tag{1.32}$$

Bei Messungen mit *verschiedenen* Gewichten ist die Standardabweichung einer Beobachtung vom Gewicht 1

$$s_0 = \sqrt{\frac{[ddp]}{2n}}. \tag{1.33}$$

Beim Nivellement ist das Gewicht, da die Standardabweichung nach der Regel bei (1.15) mit der Wurzel aus der nivellierten Strecke wächst, gemäß (1.21) der Strecke umgekehrt proportional; also ist, wenn die Strecke R_i heißt, $p_i = 1/R_i$.

Für die Fehlerrechnung ergeben sich dann die in [12.9.1] abgeleiteten Formeln.

1.6.9 Ausgleichungsalgorithmus für vermittelnde Beobachtungen

Die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen wendet man an, wenn mehrere Unbekannte gemeinsam zu bestimmen sind und die Anzahl der Beobachtungen größer ist als die der Unbekannten. In vielen Fällen sind nicht die Unbekannten selbst beobachtet worden, sondern andere Größen, die mit ihnen in einem funktionalen Zusammenhang stehen. So werden z. B. beim trigonometrischen Einschneiden

Winkel gemessen; als Unbekannte aber werden die Koordinaten des Neupunktes N bestimmt [vgl.7.4]. Zur Lösung drückt man zunächst in den Fehlergleichungen die Beobachtungen durch die Unbekannten aus. Alsdann werden die dabei auftretenden Verbesserungen ν aufgrund der Forderung $[\nu\nu]$ zum Minimum ausgeglichen.

Ein einfaches Beispiel für das Aufstellen von Fehlergleichungen ist bereits in [1.6.5] gegeben. Nachfolgend soll ein Lösungsweg für die Bestimmung mehrerer Unbekannter beschrieben werden. Für jede Beobachtung L_i erhält man eine Fehlergleichung. Bei mehreren Unbekannten x, y, z haben diese, falls ein linearer Zusammenhang $L_i + \nu_i = f_i(x, y, z)$ gegeben ist, die Form

$$\begin{aligned} L_1 + \nu_1 &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ L_2 + \nu_2 &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ &\vdots \\ L_m + \nu_m &= a_{m1}x + a_{m2}y + a_{m3}z, \end{aligned} \tag{1.34}$$

wobei die a_{ij} die bekannten Koeffizienten (vgl. z. B. 1.43) beschreiben. Der Index i bezeichnet die Beobachtungen, j die Unbekannten.

In Matrizenschreibweise hat (1.34) die Form

$$\mathbf{L} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{1.35}$$

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix} = \mathbf{L}, \quad \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \vdots \\ \nu_m \end{bmatrix} = \mathbf{v}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{x}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \end{bmatrix} = \mathbf{A}.$$

Nach Anwenden der Methode der kleinsten Quadrate erhält man aus (1.35) für gleichwertige Beobachtungen die Normalgleichungen

$$\mathbf{A}^\top\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}^\top\mathbf{L} = 0 \tag{1.36}$$

und daraus die Unbekannten

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A}^\top\mathbf{A}\right)^{-1}\left(\mathbf{A}^\top\mathbf{L}\right) \qquad (\hat{}\text{: Schätzwert}). \tag{1.37}$$

Von besonderem Interesse in der Gleichung (1.37) ist die Kofaktormatrix $(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}$. Mit dieser berechnet man die Varianz-Kovarianzmatrix der Unbekannten:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z^2 \end{bmatrix} = \sigma_0^2\left(\mathbf{A}^\top\mathbf{A}\right)^{-1}. \tag{1.38}$$

Die Größen in der Diagonalen sind die Varianzen der Unbekannten, die seitwärts liegenden die Kovarianzen. Der Faktor σ_0^2 ist eine Konstante. Eine unverzerrte Schätzung für die Konstante ist die empirische Varianz

$$s_0^2 = \frac{\mathbf{v}^\top \mathbf{v}}{n-u}, \tag{1.39}$$

wobei

n die Anzahl der Beobachtungen und
u die Anzahl der Unbekannten ist.

Bei einer ausreichenden Anzahl von Überbestimmungen ($n - u > 5$) kann s_0^2 in (1.38) an Stelle von δ_0^2 verwendet werden.
Die Verbesserungen erhält man nach (1.35) aus

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{L}. \tag{1.40}$$

Bei Beobachtungen mit unterschiedlichen Gewichten erhält man an Stelle von (1.36), (1.37), (1.38):

$$\left(\mathbf{A}^\top \mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{A}^\top \mathbf{P}\mathbf{L} = 0, \tag{1.36a}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A}^\top \mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^\top \mathbf{P}\mathbf{L}, \tag{1.37a}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z^2 \end{bmatrix} = \sigma_0^2 (\mathbf{A}^\top \mathbf{P}\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{N}^{-1} \tag{1.38a}$$

mit

$$\begin{bmatrix} P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_n \end{bmatrix} = \mathbf{P}$$

und

$$s_0^2 = \frac{\mathbf{v}^\top \mathbf{P}\mathbf{v}}{n-u}. \tag{1.39a}$$

Sind die ursprünglichen Fehlergleichungen (1.34)

$$L_i + v = f_i(x, y, z)$$

nicht linear, so werden sie – mit Hilfe der Taylorschen Reihe für mehrere Unbekannte – linear gemacht. Nach Einführen von Näherungswerten

$$x = x_0 + dx, \quad y = y_0 + dy, \quad z = z_0 + dz, \tag{1.41}$$

erhält man an Stelle von (1.34) die linearisierten Fehlergleichungen:

$$L_i + v_i = f_i(x_0, y_0, z_0) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)_0 dy + \left(\frac{\partial f_i}{\partial z}\right)_0 dz + \cdots . \quad (1.42)$$

Setzt man

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)_0 = a_{i1}, \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)_0 = a_{i2}, \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial z}\right)_0 = a_{i3} \quad (1.43)$$

und

$$L_i - f_i(x_0, y_0, z_0) = l_i, \quad (1.44)$$

so bekommen die umgeformten Fehlergleichungen die Form

$$v_i = a_{i1}dx + a_{i2}dy + a_{i3}dz - l_i. \quad (1.45)$$

Beispiele[3]:

a) Die ursprünglichen Fehlergleichungen für die von Festpunkten (x_i, y_i) zu einem Neupunkt (x, y) gemessenen Strecken lauten:

$$s_i + v_i = q\sqrt{(y - y_i)^2 + (x - x_i)^2}, \quad (1.46)$$

bzw. nach Einführen von Näherungskoordinaten für den Neupunkt N

$$s_i + v_i = q_0\sqrt{(y_0 - y_i + dy)^2 + (x_0 - x_i + dx)^2}.$$

q ist ein Maßstabsfaktor, q_0 ein Näherungswert.

Für die einzelnen Glieder von (1.45) erhält man dann

$$f_i(x_0, y_0) = q_0\sqrt{(y_0 - y_i)^2 + (x_0 - x_i)^2} = s_i^0,$$

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)_0 = a_{i1} = q_0\frac{y_0 - y_i}{s_i^0}, \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)_0 = a_{i2} = q_0\frac{x_0 - x_i}{s_i^0}, \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial q}\right)_0 = a_{i3} = s_i^0,$$

so dass die umgeformten Fehlergleichungen lauten

$$v_i = q_0\frac{y_0 - y_i}{s_i^0}dy + q_0\frac{x_0 - x_i}{s_i^0}dx + s_i^0 dq - \left(s_i - s_i^0\right). \quad (1.47)$$

b) Bei Richtungsbeobachtungen von Festpunkten (x_i, y_i) zu einem Neupunkt (x, y) gelten die ursprünglichen Fehlergleichungen:

$$\left(r_N^0\right)_i + v_i = \arctan\frac{y - y_i}{x - x_i}, \quad (1.48)$$

[3] vgl. [7.4, 7.5]

wobei $(r_N^0)_i$ die zum Neupunkt weisenden orientierten Richtungen sind [7.4]. Nach Einführen von Näherungswerten

$$y_i = y_0 + dy_i, \quad x_i = x_0 + dx_i$$

erhält man durch Linearisieren

$$\left(r_N^0\right)_i + v_i = \arctan \frac{y_0 - y_i}{x_0 - x_i} + \left(\frac{\partial \arctan g}{\partial y}\right)_0 dy + \left(\frac{\partial \arctan g}{\partial x}\right)_0 dx$$

mit

$$g = \frac{y_0 + dy - y_i}{x_0 + dx - x_i},$$

$$\left(\frac{\partial \arctan g}{\partial y}\right)_0 = a_{i1} = +\frac{x_0 - x_i}{\left(s_i^0\right)^2} \cdot \frac{200}{\pi},$$

$$\left(\frac{\partial \arctan g}{\partial x}\right)_0 = a_{i2} = -\frac{y_0 - y_i}{\left(s_i^0\right)^2} \cdot \frac{200}{\pi},$$

$$\left(s_i^0\right)^2 = (y_0 - y_i)^2 + (x_0 - x_i)^2.$$

Setzt man noch $\arctan \frac{y_0 - y_i}{x_0 - x_i} = t_i^0$, so gilt für die umgeformten Fehlergleichungen:

$$v_i = \frac{x_0 - x_i}{\left(s_i^0\right)^2} \cdot \frac{200}{\pi} dy - \frac{y_0 - y_i}{\left(s_i^0\right)^2} \cdot \frac{200}{\pi} dx - \left(\left(r_N^0\right)_i - t_i^0\right). \tag{1.49}$$

c) Sind auf einem Neupunkt (x, y) Richtungen r_i zu mehreren Festpunkten (x_i, y_i) gemessen, so gilt für die Richtung nach einem beliebigen Punkt:

$$r_i + v_i = -\varphi + \arctan \frac{y_i - y}{x_i - x}. \tag{1.50}$$

Die arctan Funktion unterscheidet sich von der in (1.48) auftretenden dadurch, dass im Zähler und Nenner des Quotienten die Vorzeichen vertauscht sind. Im Vergleich zu (1.49) haben daher auch die Koeffizienten der Fehlergleichungen ein umgekehrtes Vorzeichen; der Betrag der Koeffizienten bleibt erhalten, φ ist eine Orientierungsunbekannte. An Stelle von (1.49) erhält man:

$$v_i = -\frac{x_0 - x_i}{\left(s_i^0\right)^2} \cdot \frac{200}{\pi} dy + \frac{y_0 - y_i}{\left(s_i^0\right)^2} \cdot \frac{200}{\pi} dx - \left(r_i - t_i^0\right) \tag{1.51}$$

mit

$$t_i^0 = \arctan \frac{y_0 - y_i}{x_0 - x_i} \pm 200\,\text{gon}\,.$$

Beim Rückwärtseinschneiden sind nicht nur die Koordinaten des Neupunktes, sondern auch die Orientierung φ der gemessenen Richtungen unbekannt. Das System der Fehlergleichungen kann daher gelöst werden, wenn auch für die Unbekannte φ eine Fehlergleichung aufgestellt ist. Da hierfür keine Beobachtung vorliegt, muss eine fingierte Gleichung eingeführt werden. Diese lautet nach *Schreiber*:

$$v_{n+1} = [a_{i1}]_1^n dy + [a_{i2}]_1^n dx - [l_i]_1^n; \quad \text{Gewicht: } p_{n+1} = \frac{1}{[p_i]_1^n}, \tag{1.52}$$

wobei

$$l_i = \left(r_i - t_i^0\right).$$

Einzelne Aufgaben kann man nach folgendem Rechenschema lösen: Bilde

(1)	Näherungskoordinaten	x_0, y_0
(2)	die linearen bzw. nichtlinearen Beziehungen zwischen den Beobachtungen und Unbekannten, d. h. stelle jede Beobachtung als Funktion der Unbekannten auf	$L_i + v_i = f_i(x, y, z)$
(3)	die Koeffizienten	$a_{i1}, a_{i2}, \ldots$
(4)	die Absolutglieder	$l_i = L_i - f_i(x_0, y_0, z_0)$
(5)	die Matrix der Koeffizienten	$\mathbf{A}$
(6)	die Matrix der Absolutglieder	$\mathbf{l}$
(7)	die Unbekannten	$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^\top\mathbf{l}) = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{n}$
(8)	die Verbesserungen der Beobachtungen	$\mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}$
(9)	die Ausgleichungsprobe	$\mathbf{v}^\top\mathbf{v} = -\mathbf{l}^\top\mathbf{v}$
(10)	die empirische Varianz	$s_0^2 = \mathbf{v}^\top\mathbf{v}/(n-u)$
(11)	die Varianz der Unbekannten	$((\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1})s_0^2$
(12)	das Endergebnis	$\hat{\mathbf{x}}$.

1.6.10 Fehlergrenzen und Vertrauensbereich

Die Fläche unter der Kurve Abb. 1.8 repräsentiert die Gesamtheit aller aufgetretenen Fehler. Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung einen Fehler zwischen den Grenzen $\varepsilon = a$ und $\varepsilon = b$ zu begehen, erhält man demnach durch Integration von (1.5)

zu

$$\bar{\varphi}(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\varepsilon=a}^{b} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon. \tag{1.53}$$

Wählt man als Grenzen $a = -u_s\sigma$ und $b = +u_s\sigma$, wobei u_s ein Zahlenfaktor und σ der nach (1.8) für den Fall $n \to \infty$ gefundene theoretische Wert der Standardabweichung ist, so gewinnt man für bestimmte Werte von u_s die in der Tabelle 1.1 vermerkten Prozentsätze der Sicherheit S dafür, dass die Beobachtungen in dem Vertrauensbereich

$$x \pm u_s\sigma \tag{1.54}$$

liegen. Nach der letzten Zeile dieser Tabelle wird also der dreifache Wert von σ nur in 0,3% aller Fälle überschritten.

Tabelle 1.1

u_s	S %
1	68,3
1,96	95
2	95,4
2,58	99
3	99,7

Gestützt auf diese Erkenntnisse und auf langjährige praktische Erfahrungen betrachten die Vermessungsverwaltungen den 3- bis 4 fachen Betrag der theoretischen Standardabweichung der verschiedenen Messungsarten als *Fehlergrenze* und schreiben vor, dass Messungen, bei denen die jeweiligen Fehlergrenzen überschritten werden, wiederholt werden müssen. Diese Vorschrift führt vielfach zu der Auffassung, dass ein Messungsergebnis, bei dem die aus den Messungen selbst errechnete Standardabweichung den durch die Fehlergrenzen gesteckten Rahmen nicht überschreitet, als gesichert angesehen werden kann. Das trifft in dieser Allgemeinheit nicht zu. Aus der begrenzten Zahl der Messungen gewinnt man nämlich nicht den theoretischen Wert σ der Standardabweichung, sondern z. B. nach (1.9) oder (1.31) lediglich den Näherungswert s, und nach [1.6.5] und [1.6.6] den Näherungswert $s(\hat{x})$. s und $s(\hat{x})$ aber sind um so ungenauer, je kleiner die Anzahl f der zu ihrer Berechnung verwandten überschüssigen Messungen ist.

Die mathematische Statistik verzichtet daher auf den Begriff der Fehlergrenze und ermittelt statt dessen für das Messungsergebnis den sogenannten *Vertrauensbereich*,

dessen untere und obere Grenze beschrieben wird durch die Formel

$$x \pm t_s s(\hat{x}). \tag{1.55}$$

Der darin auftretende Faktor t_s ist eine Funktion der Anzahl f der zur Berechnung von $s(\hat{x})$ benutzten überschüssigen Messungen und des je nach Lage des Falles für erforderlich gehaltenen Sicherheitsprozentsatzes S. Einige Zahlenwerte dieser sog. „Studentschen“ Funktion sind in der Tabelle 1.2 wiedergegeben. In diese geht man ein mit f und findet rechts daneben die Werte für t_s bei $S = 95\%$ und $S = 99\%$.

Tabelle 1.2

	Wert von t für	
f	$S = 95\%$	$S = 99\%$
1	12,71	63,66
2	4,30	´9,92
3	3,18	5,84
4	2,78	4,60
5	2,57	4,03
8	2,31	3,36
10	2,23	3,17
20	2,09	2,85
50	2,01	2,68
∞	1,96	2,58

Der sogenannte Erwartungswert oder wahre Wert der Messungsgröße selbst liegt dann mit *dem gewählten Sicherheitsprozentsatz S* in dem durch (1.36) beschriebenen Bereich.

Zahlenbeispiele:

1. Im Zahlenbeispiel zu [1.6.5] wurden $\hat{x} = 52{,}351$ gon und

$$s(\hat{x}) = 0{,}0013 \text{ gon}$$

mit $f = 5$ überschüssigen Beobachtungen berechnet. Also ist der Vetrauensbereich bei 95% Sicherheit:

$$\hat{x} \pm 2{,}57 \cdot 0{,}0013 \quad \text{oder} \quad 52{,}351 \text{ gon} \pm 0{,}003 \text{ gon},$$

und bei 99% Sicherheit:

$$\hat{x} \pm 4{,}03 \cdot 0{,}0013 \quad \text{oder} \quad 52{,}351\,\text{gon} \pm 0{,}005\,\text{gon}\,.$$

Die Unsicherheit des Ergebnisses ist also 3 bzw. 5mal größer als meistens aufgrund der berechneten Standardabweichung angenommen wird.

2. Im Zahlenbeispiel zu [1.6.6.2] ergab sich $\hat{x} = 40{,}1720\,\text{gon}$ und $s(\hat{x}) = 0{,}00024\,\text{gon}$ mit $f = 3$. Also ist der Vertrauensbereich bei $S = 95\%$

$$\hat{x} \pm 3{,}18 \cdot 0{,}00024\,\text{gon} \quad \text{oder} \quad 40{,}1720\,\text{gon} \pm 0{,}0008\,\text{gon}$$

und bei $S = 99\%$

$$\hat{x} \pm 5{,}84 \cdot 0{,}00024\,\text{gon} \quad \text{oder} \quad 40{,}1720\,\text{gon} \pm 0{,}0014\,\text{gon}\,.$$

Der Schlusssatz zum vorigen Beispiel gilt entsprechend.

Es überrascht zunächst, dass bei steigenden Ansprüchen an die Sicherheit in beiden Beispielen die Vertrauensgrenzen weiter nach außen gerückt sind und damit das Ergebnis x mit größerer Unsicherheit behaftet zu sein scheint als bei geringeren Ansprüchen. Die Erklärung ist jedoch einfach: Wenn zwischen den Vertrauensgrenzen bei sonst gleichbleibenden Verhältnissen ein größerer Prozentsatz an Sicherheit untergebracht werden soll, so müssen die Grenzen erweitert werden. Wünscht man dagegen das endgültige Messungsergebnis $\hat{x}$ in engeren Grenzen einzuschließen, so muss man – eine aus (1.36) folgende triviale Erkenntnis – entweder durch genaueres Messen für eine kleinere Standardabweichung sorgen oder durch Vermehrung der Zahl der überschüssigen Beobachtungen in der Tabelle 2 zu einem kleineren Wert von t_s kommen.

Zur Vertiefung von [1.6] kann noch auf folgende Literatur verwiesen werden: *Benning* 2002; *Jäger u. a.* 2004; *Koch* 1999, *Niemeier* 2002; *Witte u. a.* 2004.

2 Einige Grundlagen der Physik und Nachrichtentechnik

2.1 Elektromagnetische Wellen für die Positionierung und den Datenfunk

In der Geodäsie bestimmt man Positionen von feststehenden und beweglichen Objekten durch *Richtungs- und Distanzmessungen*. Wenn man großräumiger arbeiten will, nutzt man hierfür elektromagnetische Wellen. Es ist immer ein *Sender* und ein *Empfänger* beteiligt, zwischen denen mit elektromagnetischen Wellen Signale übertragen werden. Sender und Empfänger stehen dabei auf Punkten, deren Koordinaten bekannt sind oder solchen, deren Koordinaten zu bestimmen sind.

Bei einigen Positionierungsverfahren wird zwischen dem Sender und Empfänger *Datenfunk* benötigt, um Messwerte, Korrekturwerte und/oder andere Informationen zwischen diesen auszutauschen. Das Messverfahren lässt sich dann häufig flexibler gestalten und es lassen sich Genauigkeitssteigerungen erzielen.

Für die Positionierung und den Datenfluss nutzt man nahezu alle Wellenbereiche des Spektrums der elektromagnetischen Wellen. Tab. 2.1 gibt einen Überblick über die Wellenbereiche.

Die physikalischen Bedingungen bei der Ausbreitung der einzelnen Wellenbereiche sind unterschiedlich. Je nach Aufgabenbereich müssen daher die nutzbaren Wellenbereiche sorgfältig ausgewählt werden.

2.1.1 Ausbreitung elektromagnetischer Wellen

Die *Ausbreitungsgeschwindigkeit* der elektromagnetischen Wellen ist abhängig vom jeweiligen Zustand der Erdatmosphäre, welcher sich geeignet durch den Brechungsindex beschreiben lässt. Dieser ist vom Ort und der Zeit abhängig [4.3; 10.4].

Die *Ausbreitungsrichtung* lässt sich bei sehr kleinen Wellenlängen des optischen Bereichs ($< 100\,\mu$m) durch die Ausrichtung der optischen Achse eines Objektivs [2.2] und bei größeren Wellenlängen durch die Abstrahlcharakteristik der verwendeten Antenne beeinflussen. Es werden Richtantennen und Rundumstrahler eingesetzt [2.3].

Tabelle 2.1. Wellenbereiche

Wellenbereich	Wellenlänge	Frequenz
Ultraschall- und Schallwellen		
Längstwellen (VLF)	> 10 km	< 30 kHz
Langwellen (LF)	1 bis 10 km	300 bis 30 kHz
Mittelwellen (MF)	100 bis 1000 m	3 bis 0,3 MHz
Kurzwellen(HF)	10 bis 100	30 bis 3 MHz
Ultrakurzwellen (VHF)	1 bis 10 m	300 bis 30 MHz
Dezimeterwellen (UHF)	1 bis 10 dm	3000 bis 300 MHz
Zentimeterwellen (SHF)	1 bis 10 cm	30 bis 3 GHz
Millimeterwellen (EHF)	1 bis 10 mm	300 bis 30 GHz
Submillimeterwellen	0,1 bis 1 mm	3000 bis 300 GHz
Infrarotstrahlung (IR)	750 nm bis 100 μm	$4 \cdot 10^{14}$ bis $3 \cdot 10^{12}$ Hz
Sichtbares Licht	400 bis 750 nm	$7{,}5 \cdot 10^{14}$ bis $4 \cdot 10^{14}$ Hz
Ultraviolette Strahlung (UV)	100 bis 400 nm	$3 \cdot 10^{15}$ bis $7{,}5 \cdot 10^{14}$ Hz

Für die *Reichweite* sind die Sendeleistung, die Art der verwendeten Antenne oder des Objektivs, der Aufstellungsort und die Empfindlichkeit des Empfängers maßgebend. Außerdem ist entscheidend, ob es sich um die Ausbreitung einer *Boden-* oder *Raumwelle* handelt (Abb. 2.1).

Es ist von der Sendefrequenz abhängig, ob die sich ausbreitende Welle der Erdkrümmung folgt (Bodenwelle) oder in den Raum hinein (Raumwelle) strahlt.

Je niedriger die Frequenz ($<$ 300 MHz) ist, um so mehr passt sich die Welle der Erdkrümmung an. Bei höheren Frequenzen ($>$ 300 MHz) erfolgt eine teilweise Abstrahlung in Richtung Weltraum und die Reichweite der Bodenwelle geht zurück. Dies ist eine Folge der mit steigender Frequenz stark anwachsenden Dämpfung der Bodenwellen sowie der ebenfalls wachsenden Beugungsdämpfung an Hindernissen und der Erdkrümmung.

Lichtwellen und Wellen bis in den Bereich der Ultrakurzwelle (VHF) breiten sich fast geradlinig aus. Bei Ultrakurzwellen spricht man auch von der quasi-optischen Ausbreitungszone. Die Beugung dieser Wellen ist so gering, dass sie nicht zu einer Krümmung entlang der Erdoberfläche führt. Eine geringfügige Strahlungskrümmung entsteht durch Refraktion. Die Reichweite von Mess- und Datenfunkgeräten, welche mit Wellen dieses Bereichs arbeiten, wird durch die direkte Sicht begrenzt. Lässt man die Krümmung des Erdellipsoids (ohne Relief) und die Refraktion unberücksichtigt, so wird die Grenze der direkten Sicht zwischen zwei Punkten durch deren Höhen

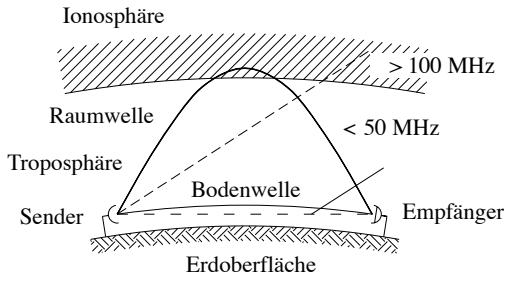


Abbildung 2.1. Wellenausbreitung

H_1 und H_2 bestimmt:

$$S_{\max} = 3{,}57 \left(\sqrt{\frac{H_1}{m}} + \sqrt{\frac{H_2}{m}} \right) \text{km}. \tag{2.1}$$

Will man zusätzlich die Refraktion berücksichtigen, so ist bei elektrischen Wellen anstelle von 3,57 der Koeffizient 4,12 und bei Lichtwellen 3,93 einzusetzen.

Die Wellen bis in den VHF-Bereich durchdringen auch nahezu geradlinig die Ionosphäre, denn erst unterhalb 50 MHz übt die Ionosphäre auf die Ausbreitungsrichtung einen entscheidenden Einfluss aus, während sie die Frequenzen über etwa 100 MHz i. a. unbeeinflusst lässt (Abb. 2.1).

Lang- und Mittelwellen werden an den Ionosphärenschichten der Atmosphäre, die in Höhen von mehr als 60 km gelagert sind, reflektiert. Zum Sender gelangt also nicht nur die längs der Erdoberfläche sich direkt ausbreitende Welle (Bodenwelle), sondern auch die von der Ionosphäre reflektierte Welle (Raumwelle) (Abb. 2.1). In dem Bereich, wo die Oberflächen- und Raumwelle zusammentreffen, interferieren diese. Aus Abb. 2.2 ist zu erkennen, dass die Reflexionsvorgänge sehr unterschiedlich ablaufen können. Dort, wo die Wellen interferieren, wird die Amplitude und Phase

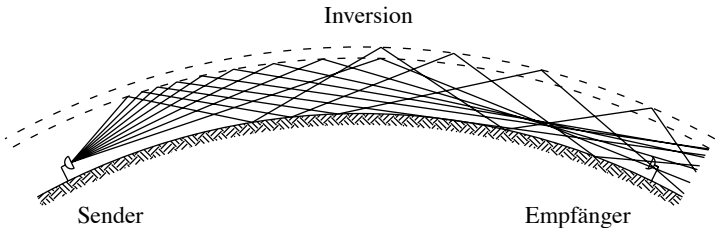


Abbildung 2.2. Reflexionen von Wellen < 50 MHz

der Oberflächenwelle verzerrt. Befinden sich Empfänger in dieser Zone, so kann es zu erheblichen Störungen bei Messungen und der Datenübertragung kommen.

Die von der Ionosphäre reflektierte Raumwelle kann sich über eine weit größere Entfernung als die Bodenwelle ausbreiten, für welche die Erde mit ihrem Relief hinderlich ist. Infolge der Beugung durch diese Hindernisse verläuft die Bodenwelle gekrümmt und ihrer Ausbreitung hängt von den absorbierenden Eigenschaften der Erdoberfläche ab. Auch die Raumwelle wird teilweise von der Ionosphäre und Erdoberfläche absorbiert. Die Absorption an der Erdoberfläche hängt von der Wellenlänge, der Polarisation und den elektrischen Charakteristika der Oberfläche ab.

Im Mittelwellenbereich gibt es wegen der Reflexionen an der Ionosphäre eine starke Abhängigkeit der Feldstärke von der Tageszeit. Am Tag herrscht die Bodenwelle vor, die infolge der Beugungsvorgänge Reichweiten bis etwa 1000 km erreicht. Nachts ist im Mittelwellenbereich die Reichweite der Raumwelle größer. Im Langwellenbereich kann sich die Oberflächenwelle infolge Beugung bis zu 3000 km ausbreiten.

2.1.2 Modell einer linearpolarisierten monochromatischen Welle

Bei der Ausbreitung einer Schwingung im Raum mit der Geschwindigkeit c entstehen Wellen mit der Wellenlänge

$$\lambda = \frac{c}{f}, \tag{2.2}$$

wobei f die Frequenz bezeichnet. Bei den elektromagnetischen Wellen kommt es zu Schwingungen der Spannungen der elektrischen und magnetischen Felder. Ein Spezialfall der Schwingungsprozesse sind die harmonischen Schwingungen der Spannungen der elektrischen und magnetischen Felder, welche ein sich im Raum ausbreitendes Wechselfeld, die *elektromagnetischen Wellen*, bilden. Die Vektoren der Spannungen dieser beiden Felder sind zueinander rechtwinklig und liegen in Ebenen rechtwinklig zum Vektor der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen.

Elektromagnetische Wellen unterliegen der *Polarisation*. Verlaufen die Schwingungen des elektrischen Vektors in der zur Ausbreitungsrichtung der Wellen rechtwinkligen Ebene nur in einer Richtung, so ist die Welle linear polarisiert; sind die Schwingungsrichtungen in dieser Ebene zufällig verteilt, so ist die Welle nicht polarisiert. Eine linear-polarisierte monochromatische Welle, welche sich längs der x-Achse mit der Geschwindigkeit c ausbreitet, lässt sich durch folgende Gleichung beschreiben:

$$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_0\right] = A\cos\left(\omega t - kx + \varphi_0\right) \tag{2.3}$$

mit $k = 2\pi/\lambda$ als Wellenzahl. Die Wellenzahl beschreibt, wie viele Wellenlängen in einem Abschnitt von der Länge 2π enthalten sind. Der Klammerausdruck beschreibt die Phase der Schwingung und φ_0 die Anfangsphase. Die Ebene der Schwingungen

des elektrischen Vektors ist die Schwingungsebene der linearpolarisierten Welle, die der Schwingungen des magnetischen Vektors die Polarisationsebene. Wellen aus Schwingungen mit nur einer Frequenz werden als *monochromatisch* bezeichnet.

Wellen einer Frequenz mit konstant bleibender Phasendifferenz bezeichnet man als *kohärent*. Überlagern sich zwei kohärente, linearpolarisierte monochromatische Wellen, so hängt die Amplitude der Gesamtwelle von der Phasendifferenz der Teilwellen ab. Es entsteht *Interferenz*.

Das Modell der monochromatischen Schwingungen und Wellen ist eine Idealisierung. In der Realität gibt es keine monochromatischen Wellen. Eine nicht monochromatische Welle kann jedoch mit Hilfe einer Fourier-Entwicklung in einzelne Komponenten monochromatischer Wellen zerlegt werden. Mit Hilfe des Modells der monochromatischen Wellen lassen sich die Prinzipien von Messverfahren darstellen, weshalb dieses hier eine besondere Bedeutung hat.

2.1.3 Bahnkrümmung der Raumwellen

Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen durch die Troposphäre ist abhängig von der Veränderlichkeit des Brechungsindexes n und der Anfangsrichtung. Der Brechungsindex ist eine Funktion der Temperatur, des Luftdrucks und des Partialdrucks des Wasserdampfes [4.3]. Die Veränderlichkeit des Brechungsindexes in horizontaler Richtung kann im allgemeinen für die Wellenausbreitung in erster Näherung vernachlässigt werden. Man hat es daher primär mit einem vertikal geschichteten Medium zu tun, in dem der Brechungsindex n mit steigender Höhe abnimmt. Insbesondere in Bodennähe kann es auch zu Umkehrungen kommen, was jedoch zunächst nicht näher betrachtet werden soll.

Bei ebener Erde und ebener Schichtung der Brechzahl gilt das Snellius-Gesetz (Abb. 2.3)

$$n \cdot \cos\varphi = \text{konstant}. \tag{2.4}$$

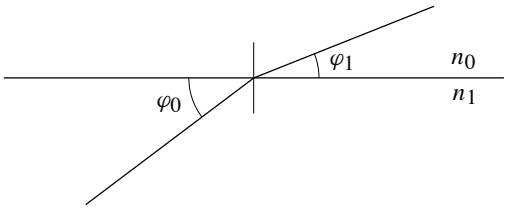


Abbildung 2.3. Brechung an ebenen Schichten

Bei sphärisch gekrümmter Erde und sphärischer Schichtung des Brechungsindexes gilt (Abb. 2.4)

$$n \cdot \rho \cdot \cos\varphi = \text{konstant}. \tag{2.5}$$

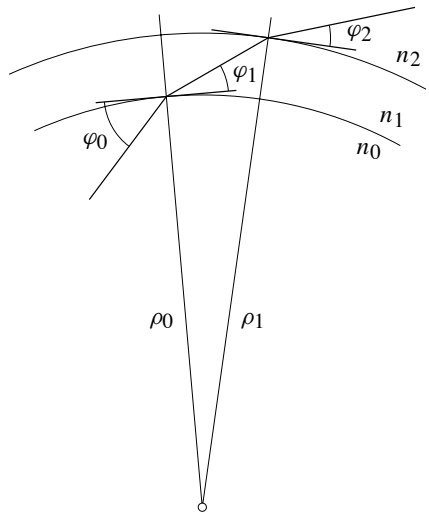


Abbildung 2.4. Brechung an sphärischen Schichten

Dabei beschreibt φ den Erhebungswinkel der Bahnkurve gegenüber der jeweiligen Kugelschale mit dem Radius ρ.

Für die Richtungswinkel der Strahlbahn gilt (Abb. 2.5)

$$d\tau = \varphi_0 + d\vartheta - \varphi = d\vartheta - d\varphi$$

d. h.

$$\frac{d\tau}{dh} = \frac{d\vartheta}{dh} - \frac{d\varphi}{dh}. \tag{2.6}$$

Nach Differentiation von (2.5) erhält man

$$\rho \cdot \cos\varphi dn + n\cos\varphi d\rho - n\rho \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi = 0,$$

und da $d\rho$ identisch mit dh ist, gilt

$$\frac{d\varphi}{dh} = \cot\varphi \left(\frac{1}{n}\frac{dn}{dh} + \frac{1}{\rho}\right). \tag{2.7}$$

In dem differentiellen Dreieck $P_1 P_2 Q$ ergibt sich $b = dh \cot\varphi$ und außerdem ist $d\vartheta = b/\rho$, d. h.

$$\frac{d\vartheta}{dh} = \frac{\cot\varphi}{\rho}. \tag{2.8}$$

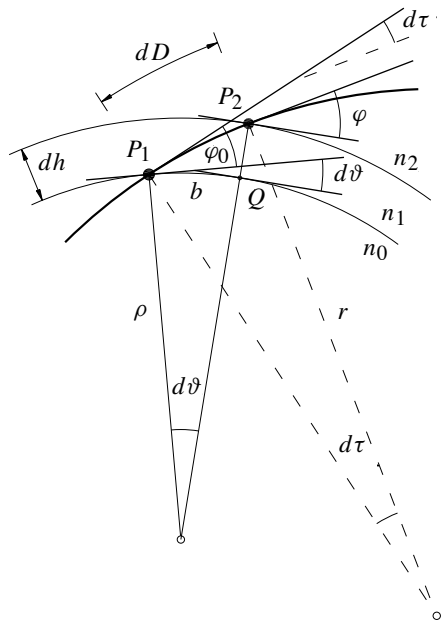


Abbildung 2.5. Elemente der Differentialgleichung der Strahlbahn

Aus (2.6), (2.7) und (2.8) folgt nun

$$\frac{d\tau}{dh} = -\cos\varphi \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{dn}{dh}. \tag{2.9}$$

Der Krümmungsradius r ist gegeben durch $r = dD/d\vartheta$, wobei dD die Länge eines Bogenelementes beschreibt. Da in dem differentiellen Dreieck $P_1 P_2 Q$ außerdem $dD = dh/\sin\varphi$ gilt, erhält man für (2.9)

$$\frac{1}{r} = -\cos\varphi \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{dn}{dh}. \tag{2.10}$$

Bei vielen terrestrischen Messverfahren, die elektromagnetische Wellen nutzen, ist φ sehr klein und $n \approx 1$, so dass man ohne wesentlichen Genauigkeitsverfall schreiben kann

$$\frac{1}{r} = \frac{dn}{dh}. \tag{2.11}$$

Aus (2.11) erkennt man: ändert sich der Brechungsindex linear mit der Höhe, d. h. ist der Gradient dn/dh konstant, so beschreibt die Bahn der Wellen einen Kreisbogen.

Für die Troposphäre ist eine Standardatmosphäre definiert worden, welche auf Jahresmittelwerten beruht. In den unteren Kilometern wird dort dn/dh als konstant

betrachtet. Der Radius des Strahlenweges kann daher im Mittel als konstant betrachtet werden. In Abhängigkeit von der Frequenz der elektromagnetischen Wellen entspricht er einem Vielfachen des Erdradius.

Das Verhältnis von Erdradius und Bahnradius bezeichnet man als Refraktionskoeffizient k:

$$k = \frac{R}{r}. \tag{2.12}$$

Als Durchschnittswerte für die ungestörte Atmosphäre gelten $k_L = 0{,}13$ (für Infrarotstrahlung u. sichtbares Licht) und $k_M = 0{,}25$ (für Zentimeterwellen (SHF) und Dezimeterwellen(UHF)). Also ist der Krümmungshalbmesser der Lichtkurve $\approx 8R$ und der der Mikrowellenkurve (SHF, UHF) $\approx 4R$.

Die Bahnkrümmung dieser Raumwellen kann daher einfach in geometrischen Modellen berücksichtigt werden, was bedeutet, dass sie sich für hochgenaue Richtungs- und Distanzmessungen geeignet nutzen lassen [3; 4; 10; 12; 13].

2.1.4 Absorption elektromagnetischer Wellen in der Atmosphäre

Je kürzer die Wellenlänge gewählt wird, um so mehr wächst die Dämpfung der Wellen an, welche die Reichweite der Messverfahren empfindlich beeinträchtigen kann. In der niederschlagsfreien Atmosphäre kann die Absorption der m-, dm-, und cm-Wellen vielfach vernachlässigt werden (Abb. 2.6). Erst im mm-Wellenbereich kommt

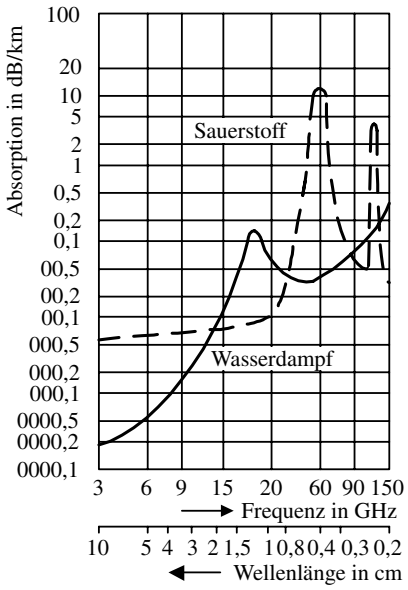
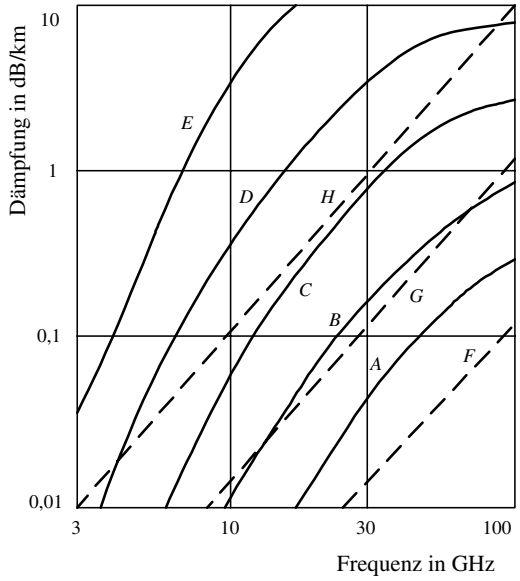


Abbildung 2.6. Atmosphärische Absorption (*Großkopf* 1970)

es zu Dämpfungserscheinungen durch Resonanzeffekte der neutralen Sauerstoffmoleküle und der Moleküle des nicht kondensierten Wasserdampfes. Die Abb. 2.6 zeigt die Dämpfung in dB/km in Abhängigkeit von der Frequenz, berechnet für die Troposphäre in Höhe des Meeresspiegels. Die Absorption bei vertikalem Durchgang durch die freie Troposphäre ist im allgemeinen sehr klein. Sie beträgt bei 10 GHz etwa 0,1 dB. Die Resonanzspitzen bei $\lambda = 13{,}5$ mm (H_2O), 5 mm (O_2), 2,5 mm (O_2) und 1,63 mm (H_2O) sind um so schärfer ausgeprägt, je größer die Höhe der Troposphäre ist, bzw. je geringer die Dichte wird.

Zusätzlich tritt Absorption durch kondensierten Wasserdampf in Form von Nebel und Wolken auf (Abb. 2.7). Sie ist proportional der Masse W des flüssigen Wassers



— — Dämpfung in Regen mit einer Stärke von

A:	0,25mm/h	(Nieselregen)
B:	1,0mm/h	(leichter Regen)
C:	4,0mm/h	(mäßiger Regen)
D:	16,0mm/h	(starker Regen)
E:	100,0mm/h	(sehr starker Regen)

– – – Dämpfung in Nebel oder Wolken

F:	0,032 g/m^3	(Sicht > 600 m)
G:	0,32 g/m^3	(Sicht ≈ 120 m)
H:	0,3 g/m^3	(Sicht ≈ 30 m)

Abbildung 2.7. Niederschlagsdämpfung in Abhängigkeit von der Frequenz (*Großkopf* 1970)

pro Kubikmeter und etwa umgekehrt proportional dem Quadrat der Wellenlänge:

$$\alpha = 0{,}483 \cdot \frac{W}{\lambda^2} \qquad (\alpha \text{ in dB/km},\ \lambda \text{ in cm},\ W \text{ in } g/\mathrm{m}^3).$$

Bei 18°C beträgt der Absorptionskoeffizient für $\lambda = 10$ cm etwa 0,005 dB/km pro g/m^3 und bei $\lambda = 1$ cm schon 0,4 dB/km. Der Wassergehalt der Wolken kann etwa $1\mathrm{g}/\mathrm{m}^3$ erreichen.

Höhere Werte erreicht die Dämpfung pro km durch Niederschläge, besonders im Frequenzbereich oberhalb 1 GHz. Abb. 2.7 zeigt die Frequenzabhängigkeit der Dämpfung für verschiedene Niederschlagsintensitäten in mm/Stunde.

Zusammenfassend kann man sagen: Messgeräte für die Richtungs- und Distanzmessung, welche mit Wellen des sichtbaren Lichtes und Infrarot arbeiten, können wegen der begrenzten Reichweite nur im Nahbereich eingesetzt werden. Die Reichweite entspricht etwa der Sichtweite, welche wiederum stark abhängig von der Witterung ist. Messgeräte, die Mikrowellen nutzen, können zu jeder Zeit global unabhängig von der Witterung eingesetzt werden. Satellitengestützte Messverfahren arbeiten daher vorwiegend mit Wellen des UHF Bereiches. Erdgebundene Navigationsverfahren arbeiten mit elektromagnetischen Wellen des Mittelwellen- und Langwellenbereiches.

2.1.5 Bereiche des Spektrums für Positionierungsverfahren und den Datenfunk

Bei der *Richtungsmessung* verwendet man vorwiegend die Infrarotstrahlung (IR) und sichtbares Licht, da sich der Ausbreitungsweg der Wellen dieser Wellenlängenbereiche unter normalen Bedingungen (sphärische Schichtung, konstanter Gradient des Brechungsindexes) einfach und relativ genau mathematisch modellieren lässt [2.1.3].

Für die *elektronische Distanzmessung* werden Wellen fast aller in Tab. 2.1 enthaltenen Bereiche, außer der UV-Strahlung und der Kurzwellen, verwendet. Der Wellenbereich, der sich vom sichtbaren Licht bis zu den Dezimeterwellen erstreckt, erfüllt weitgehend alle Anforderungen an hohe Genauigkeit, denn der Ausbreitungsweg dieser Wellen folgt in der Regel genähert einem schwach gekrümmten Kreisbogen, der ohne merkbaren Genauigkeitsverlust vielfach einfach durch eine Gerade ersetzt werden kann. Die Bedingungen sind günstiger, je kürzer die Wellenlänge gewählt wird.

Für Positionierungsaufgaben geringerer Genauigkeit – z. B. für die Positionierung von Schiffen – kann die Bodenwelle des Mittelwellen- und Langwellenbereichs genutzt werden. Man erzielt hier eine große Reichweite von mehr als 1000 km, hat jedoch Genauigkeitseinbußen, denn die sich ausbreitende Welle folgt etwa dem Bodenprofil, welches sich nur in grober Annäherung mathematisch modellieren lässt.

Bei Positionierungsverfahren ist neben der mathematischen Modellierung des Ausbreitungsweges die Genauigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit von großer

Bedeutung. In dem Wellenbereich, der sich vom Infrarot bis zu den Mikrowellen (dm-Wellen) erstreckt, kann der Brechungsindex und somit die Ausbreitungsgeschwindigkeit sehr genau physikalisch mathematisch modelliert werden, und zwar um so genauer, je kürzer die Wellenlänge ist [4.3.10.4]. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Bodenwellen ist dagegen nur ungenauer zu bestimmen, da sie wesentlich von physikalischen Parametern der Erdoberfläche abhängt.

2.2 Optische und optoelektronische Bausteine

Nutzt man für die Richtungs- und Distanzmessung Wellen des sichtbaren Lichtes oder Infrarot, so benötigt man für die Übertragung der Signale vom Sender zum Empfänger optische und optoelektronische Bausteine.

2.2.1 Konzept für die Übertragung von Messsignalen mit Trägern des sichtbaren Lichts oder Infrarot

Bei der *Richtungsmessung* dienen Zielmarken als Sender und Messfernrohre als Empfänger (Abb. 2.8a). Die Zielmarken senden elektromagnetische Wellen aus,

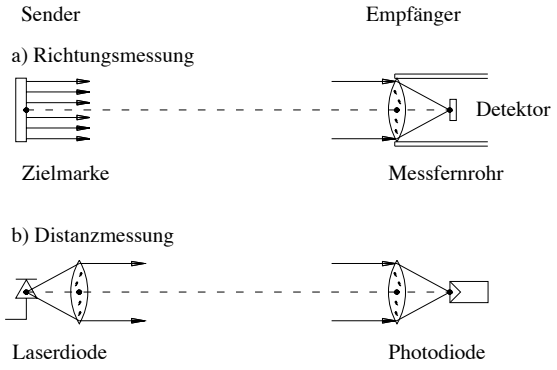


Abbildung 2.8. Übertragungsstrecken bei der Richtungs- und Distanzmessung

welche vom Objektiv des Messfernrohres empfangen und gebündelt werden. Bei der Richtungsmessung wird das Fernrohr so lange um eine vertikale und horizontale Achse verschwenkt, bis die optische Achse des Fernrohres auf das Zentrum der Zielmarke zentriert ist. Die optische Achse ist durch zwei Punkte definiert: den Mittelpunkt des Objektivsystems und den Mittelpunkt eines Strichkreuzes oder Detektors in der Bildebene des Objektivsystems. Praktisch erfolgt das Zielen so, dass der Mittelpunkt der durch das Objektiv abgebildeten Zielmarke mit dem Zentrum eines positionsgebenden Detektors oder eines Strichkreuzes zur Deckung gebracht

wird. Im Idealfall liegen dann der Mittelpunkt der Zielmarke, des Objektivsystems und des Detektors (bzw. des Strichkreuzes) auf einer Geraden.

Bei der *Distanzmessung* erzeugt in einem Sender eine Lichtquelle (z. B. eine Laserdiode) infrarote Strahlung, welche durch ein Objektiv gebündelt und auf das Objektiv eines Empfängers ausgerichtet wird (Abb. 2.8b). In dem Empfänger wird die infrarote Strahlung durch das Objektiv auf eine Diode abgebildet. Im Sender kann der Strahlung durch Modulation ein Signal aufgeprägt werden, welches im Empfänger durch die Diode wiederum in ein elektrisches Signal umgewandelt wird. Der Empfänger bestimmt die Laufzeit des Signals, aus welcher dann die Distanz zwischen dem Sender und Empfänger gerechnet werden kann. Die Geräte lassen sich einfacher bauen, wenn Sender und Empfänger sich auf einer Station befinden; auf der Gegenstation benötigt man dann einen Reflektor, der das gesendete Licht parallel zu sich reflektiert.

2.2.2 Der Aufbau eines Messfernrohrs

Das Fernrohr besteht in seiner einfachsten, von J. Kepler bereits im Jahre 1611 angegebenen Form, aus zwei zentrierten Sammellinsen, und zwar einer Objektivlinse mit großer und einer Okularlinse mit kleiner Brennweite. Das Objektiv liefert ein umgekehrtes verkleinertes Bild, das durch das Okular betrachtet wird. Für einen in endlicher Entfernung befindlichen Gegenstand ergibt sich daraus der in Abb. 2.9 (oben) gezeichnete Strahlengang, während das untere Bild die Abbildung eines ∞ fernen Gegenstandes zeigt. Um das Fernrohr zu einem Messfernrohr umzugestal-

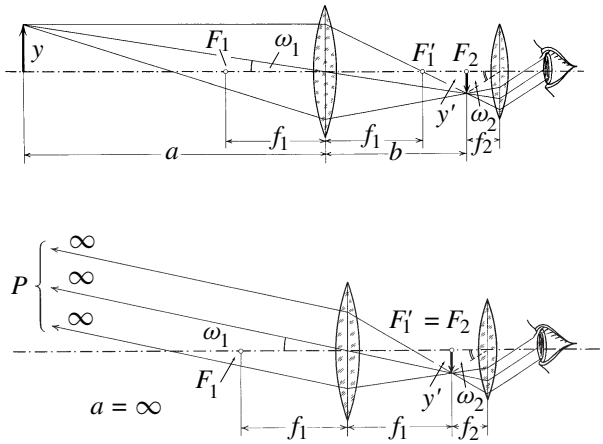


Abbildung 2.9. Keplersches Fernrohr

ten und gleichzeitig die Abbildungsfehler möglichst weit herunterzudrücken, sind einige Zusatzeinrichtungen und mehrere Abwandlungen vom ursprünglichen Typ erforderlich.

2.2.2.1 Das Strichkreuz

Damit das Fernrohr auf ein Ziel eingestellt werden kann, ist am hinteren Ende eine Glasplatte mit einem feinen Strichkreuz eingebaut, das von 3 oder 4 Justierschrauben gehalten wird (Abb. 2.10). Das Kreuz befindet sich in der Regel kurz vor dem Okular, das zum Scharfsehen ein wenig verstellt werden kann. Optischer Mittelpunkt

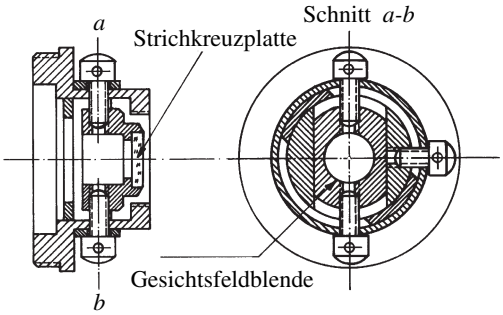


Abbildung 2.10. Justierbares Strichkreuz

des Objektivs und Schnittpunkt der Striche bestimmen die Ziellinie. Um diese erforderlichenfalls parallel der Achse einer Fernrohrlibelle oder senkrecht zur Kippachse eines Theodolits machen zu können, wird das Strichkreuz von einem Ring gehalten, der mit Hilfe von Justierschrauben geringfügig verschoben werden kann (Justierung der Ziellinie). Beim automatischen Zielen [3.4] wird anstelle des Strichkreuzes ein positionsgebender Detektor [2.2.5] verwendet.

2.2.2.2 Die Zwischenlinse

Wenn das Ziel in endlicher Entfernung liegt, entsteht das Bild hinter der Brennebene des Objektivs, und zwar um so weiter nach hinten, je näher der Gegenstand rückt.

Das Strichkreuz ist normalerweise – abgesehen von kleinen Justierbewegungen senkrecht zur optischen Achse – fest in dem Fernrohr angebracht. Das vom Objektiv erzeugte Bild muss daher durch eine Zusatzeinrichtung in die Strichkreuzebene verlegt werden . Hierzu ist zwischen der Objektivlinse und ihrem hinteren Brennpunkt eine – meistens schwach negative – Zwischenlinse eingebaut, die die vom Objektiv

gesammelten Strahlen ein wenig zerstreut (Abb. 2.11). Die Strahlen vereinigen sich infolgedessen erst etwas später, d. h. das Bild entsteht weiter hinten, und zwar um so weiter, je näher die Zwischenlinse dem Objektiv ist.

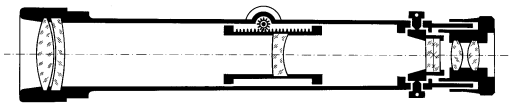


Abbildung 2.11. Fernrohr mit Zwischenlinse

2.2.2.3 Objektiv und Okular

Sie werden zur Bekämpfung von Farbabweichung und Kugelabweichung aus mehreren Linsen mit verschiedener Brechkraft und verschiedenen Halbmessern zusammengesetzt. Bei Okularen wird zur Minderung der Farbabweichung außerdem ein Abstand zwischen den Einzellinsen gelassen.

Als *Objektiv* werden bei geodätischen Instrumenten in der Regel Apochromate gewählt. Diese dreilinsigen Systeme sind für die Abbildung unendlich ferner auf der optischen Achse liegender Objekte kleiner Ausdehnung korrigiert (Abb. 2.12).

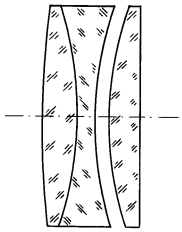


Abbildung 2.12. Apochromatisches Objektiv

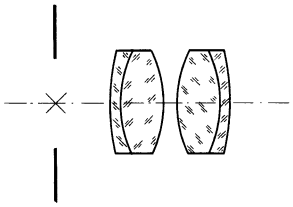


Abbildung 2.13. Orthoskopisches Okular

Als *Okular* verwendet man bei Messgeräten vorwiegend orthoskopische Okulare, die aus vier bis fünf gruppenweise verkitteten Linsen bestehen (Abb. 2.13). Sie sind weitgehend verzeichnungsfrei und können auch bei schlechter Beleuchtung benutzt werden.

Wird in das Okular noch eine Umkehrlinse eingebaut, so erhält man ein *terrestrisches Okular*. Fernrohre mit terrestrischen Okularen liefern aufrechte Bilder. Solche Bilder lassen sich auch durch Einbau von Prismenkombinationen erzeugen.

2.2.2.4 Die Blenden

Um Astigmatismus, Bildfeldwölbung und Koma klein zu halten, werden die auf das Objektiv fallenden Strahlenbündel durch Öffnungsblenden begrenzt; ferner werden Bündel mit zu großer Neigung des Hauptstrahles durch Gesichtsfeldblenden abgeschnitten. Öffnungsblende ist in der Regel die Objektivfassung. Als Gesichtsfeldblende dient der Ring, der das Strichkreuz trägt; er bewirkt, dass ein schräg einfallendes Strahlenbündel nur dann ins Okular gelassen wird, wenn nicht mehr als die Hälfte des Bündels durch die Okularfassung abgeschnitten wird (Abb. 2.14). Denkt man sich die Gesichtsfeldblende durch das Objektiv in den Gegenstandsraum

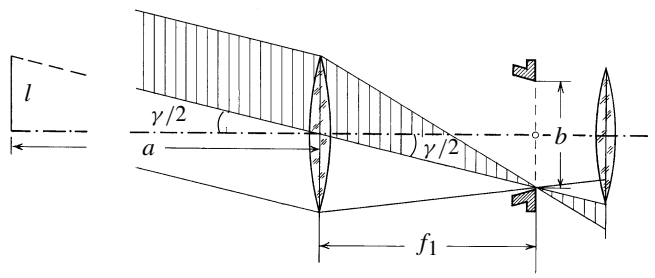


Abbildung 2.14. Öffnungsblende und Gesichtsfeldblende

abgebildet, so bewirkt sie eine scharfe Begrenzung des Gegenstandes, die wie eine in der Örtlichkeit aufgestellte Maske wirkt. Diese scheinbare Maske heißt *Eintrittsluke*.

Die Bilder der Öffnungsblende heißen *Pupillen*. Ist die Objektivfassung Öffnungsblende, so ist sie auch gleichzeitig *Eintrittspupille*; ihr durch das Okular – gegebenenfalls über die Zwischenlinse – entworfenes, in Abb. 2.15 konstruiertes Bild, ist die *Austrittspupille*. Sie erscheint als heller Kreis in der Nähe des hinteren Brennpunktes des Okulars und kann dort auf einem Maßstab aufgefangen und ausgemessen werden.

2.2.3 Vergrößerung, Gesichtsfeld, Helligkeit und Auflösungsvermögen

Dies sind Eigenschaften, die vor allen anderen den Wert eines Fernrohrs kennzeichnen. Fall ausgegangen werden; doch wird unter f_2 die Brennweite des Okulars und bei Fernrohren mit Zwischenlinse unter f_1 die Brennweite des Systems Objektiv plus Zwischenlinse bei Einstellung auf ∞ verstanden.