

Vermessungskunde

I

Fehlerlehre, Vermessungen
und Berechnungen für großmaßstäbige
Karten und Pläne, Nivellieren

von

Heribert Kahmen

17., überarbeitete und erweiterte Auflage
mit 173 Abbildungen



1988

Walter de Gruyter · Berlin · New York

SAMMLUNG GÖSCHEN 2160

Dr.-Ing. Heribert Kahmen

o. Univ. Professor an der Technischen Universität Wien

Die Gesamtdarstellung umfaßt folgende Bände:

Band II: Winkel- und Streckenmeßgeräte, Polygonierung, Triangulation und Trilateration. 14., neubearb. u. erw. Auflage 1986 (Sammlung Göschen Band 2161).

Band III: Trigonometrische und barometrische Höhenmessung, Tachymetrie und Abstecken von Geraden und Kurven; Ingenieurgeodäsie. 12., erw. Auflage 1988 (Sammlung Göschen Band 2162).

CIP-Titelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Kahmen, Heribert:

Vermessungskunde / von Heribert Kahmen. — Berlin ; New York : de Gruyter.

(Sammlung Göschen ; ...)

Früher u. d. T.: Grossmann, Walter: Vermessungskunde

1. Kahmen, Heribert: Fehlerlehre, Vermessungen und Berechnungen für grossmassstäbige Karten und Pläne, Nivellieren. — 17., überarb. u. erw. Aufl. — 1988

Kahmen, Heribert:

Fehlerlehre, Vermessungen und Berechnungen für grossmassstäbige Karten und Pläne, Nivellieren / von Heribert Kahmen. — 17., überarb. u. erw. Aufl. — Berlin ; New York : de Gruyter, 1988

(Vermessungskunde / von Heribert Kahmen ; 1)

(Sammlung Göschen ; 2160)

Bis 16. Aufl. u. d. T.: Grossmann, Walter: Fehlerlehre, Vermessungen und Berechnungen für grossmassstäbige Karten und Pläne, Nivellieren

ISBN 3-11-011759-2

NE: 2. GT

© Copyright 1988 by Walter de Gruyter & Co., Berlin 30 — Alle Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie der Übersetzung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (durch Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des Verlages reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden — Printed in Germany — Satz und Druck: Arthur Collignon GmbH, 1 Berlin 30 — Bindearbeiten: Lüderitz & Bauer, Berlin 61

Vorbemerkung

Verfasser der 1. bis 9. Auflage dieses Bandes I war Prof. Dr.-Ing. Paul Werkmeister. Mit der 10. Auflage (1958) übernahm Prof. Dr.-Ing. Walter Großmann die Bearbeitung und führte sie bis zur 15. Auflage fort. Nach seinem Tode brachte Prof. Dr.-Ing. Heribert Kahmen seit der 16. Auflage den Stoff auf den neuesten Stand.

Die Bände Vermessungskunde I, II und III sind so geschrieben, daß sie für eine Einführung in das Vermessungswesen und nachfolgend für ein vertieftes Studium verwendet werden können. In erster Linie dienen sie als Fachliteratur für Studierende der Fachrichtungen Vermessungswesen, Kartographie, Bauingenieurwesen, Architektur, Raum- und Landesplanung, Geographie und weiterer Geowissenschaften. Bei der schnellen Fortentwicklung von Techniken und Methoden sollen sie all denjenigen eine Hilfe sein, die um ihre Fort- und Weiterbildung bemüht sind.

Besonderer Dank gebührt Herrn Hans-Jürgen Kramer für das Anfertigen vieler neuer Zeichnungen.

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	11
1 Grundlagen	13
1.1 Einleitung	13
1.2 Bezugsflächen	14
1.3 Maßsysteme und Maßeinheiten	16
1.3.1 Vom Archivmeter zum Einheitensystem SI	16
1.3.2 Grundlegende Vorschriften des Einheitengesetzes	18
1.3.3 Die alten und die neuen Maßeinheiten in der Vermessungstechnik	19
1.3.3.1 Die Einheiten des Längen-, Flächen- und Volumenmaßes	19
1.3.3.2 Die SI-Einheiten des ebenen Winkelmaßes	20
1.3.3.3 Vermessungstechnische Sonderzeichen	22
1.3.4 Seltener gebrauchte SI-Einheiten	24
1.3.4.1 Die (abgeleitete) SI-Einheit des räumlichen Winkels	24
1.3.4.2 Die (abgeleitete) SI-Einheit des Drucks	24
1.3.4.3 Die Basiseinheit der (thermodynamischen) Temperatur (T)	25
1.3.4.4 Die (gesetzliche) SI-Einheit der Zeit	25
1.3.4.5 Die (abgeleitete) SI-Einheit der Frequenz	25
1.4 Fehlerrechnung und Bilden von Mittelwerten	26
1.4.1 Die Aufgabe der Fehlerrechnung	26
1.4.2 Fehlerarten	26
1.4.3 Mittelwerte und Streuungsmaße	28
1.4.4 Das Fehlerfortpflanzungsgesetz	30
1.4.5 Ausgleichung direkter Beobachtungen von gleicher Genauigkeit	33
1.4.6 Ausgleichung direkter Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit	34
1.4.6.1 Einführen von Gewichten	34
1.4.6.2 Das gewogene Mittel	36
1.4.7 Ausgleichung von direkten Beobachtungen mit einer Summenbedingung	37
1.4.8 Berechnung der Standardabweichungen aus Doppelmessungen	38

1.4.9	Ausgleichsalgorithmus für vermittelnde Beobachtungen.....	39
1.4.10	Fehlergrenzen und Vertrauensbereich.....	45
2	Abstecken und Messen gerader Linien	49
2.1	Bezeichnungen von Punkten und Geraden	49
2.1.1	Bezeichnung von Punkten im Gelände	49
2.1.2	Ausfluchten von Geraden	50
2.1.3	Überwinden von Geländehindernissen.....	51
2.2	Absetzen von festen Winkeln	53
2.2.1	Winkelprismen.....	53
2.2.1.1	Das Fünfsseitprisma oder Pentagon nach Goulier.....	53
2.2.1.2	Das Wollastonprisma.....	55
2.2.1.3	Genauigkeit der Winkelprismen.....	55
2.2.2	Prismenkreuze	56
2.2.3	Die Kreuzscheibe	57
2.3	Längenmessung mit Stahlmaßstäben	58
2.4	Längenmessung mit Stahlmeßbändern und Drähten ...	62
2.4.1	Längenmessung mit frei hängenden Stahlmeßbändern..	65
2.4.2	Längenmessung mit aufliegenden Stahlmeßbändern	68
2.4.3	Rollbandmaße	69
2.4.4	Die Abgleichung von Stahlmeßbändern	72
2.4.5	Präzisionsmessungen mit Drähten	73
2.5	Genauigkeit der Längenmessung.....	76
2.5.1	Das Fehlergesetz der Längenmessung	76
2.5.2	Fehlergrenzen (größte zulässige Abweichung).....	76
3	Lagevermessung für großmaßstäbige Karten.....	77
3.1	Vermessungsverfahren.....	77
3.1.1	Rechtwinkerverfahren	77
3.1.2	Das Einbindeverfahren	78
3.1.3	Polarverfahren	80
3.1.4	Aufnahmegegenstände.....	82
3.1.5	Vermessungsrißführung	83
3.2	Einfache Koordinatenberechnungen	85
3.2.1	Das geodätische Koordinaten-System	86
3.2.2	Berechnung von Höhe und Höhenfußpunkt.....	86
3.2.3	Berechnung von Kleinpunkten.....	87
3.2.4	Berechnung seitwärts liegender Punkte	90
3.2.5	Schnitt zweier Geraden.....	92
3.2.6	Prüfung des Liniennetzes.....	95
3.3	Grundrißkartierung und -zeichnung	95

3.3.1	Maßstab und Zeichenträger	95
3.3.2	Kartierung	97
3.3.3	Reinzeichnung	100
3.3.4	Interaktive graphische Kartier- und Datenbanksysteme	100
3.4	Vervielfältigung und Maßstabsänderung	105
3.4.1	Vervielfältigung von Plänen und Karten	105
3.4.2	Maßstabsänderung von Plänen und Karten	106
4	Flächenberechnung	108
4.1	Flächenberechnung aus Maßzahlen	108
4.1.1	Die Flächenberechnung aus Feldmaßen	108
4.1.2	Die Flächenberechnung aus Koordinaten	110
4.2	Halbgraphische Flächenermittlung	112
4.3	Graphische Flächenbestimmung mit einfachen Hilfsmitteln	112
4.4	Mechanisch-graphische Flächenbestimmung mit dem Polarplanimeter	115
4.4.1	Beschreibung und Wirkungsweise	115
4.4.2	Bestimmung der Fahrarmlänge	119
4.4.3	Regeln für den Gebrauch des Polarplanimeters	120
4.4.4	Besondere Planimeterformen	123
4.5	Flächenberechnung mit Digitalisiertisch und angeschlossenenem Rechner	123
4.6	Genauigkeit der Flächenbestimmung	124
4.6.1	Verprobung der Flächenbestimmungen	124
4.6.2	Gegenüberstellung der Flächenbestimmungsverfahren ..	124
4.6.3	Fehlergrenzen	126
5	Bestandteile geodätischer Meßinstrumente	127
5.1	Die Libellen	127
5.1.1	Die Dosenlibelle	127
5.1.2	Die Röhrenlibelle	128
5.1.3	Justierung und Gebrauch der Röhrenlibellen	130
5.1.4	Das Bestimmen der Libellenangabe	132
5.1.5	Besonderheiten der Röhrenlibellen	136
5.1.6	Röhrenlibellen und Kompensatoren	137
5.2	Die Abbildung durch Linsen, Spiegel und Prismen	138
5.2.1	Geometrisch-optische Grundbegriffe	138
5.2.2	Abbildungsfehler	142
5.2.3	Planspiegel- und Reflexionsprismensysteme	143
5.2.3.1	Änderung der Bündelrichtung	144
5.2.3.2	Bildorientierung	145

5.2.3.3	Prismen mit Dachkante	146
5.2.3.4	Prismensysteme zur vollständigen Bildumkehr	147
5.2.3.5	Planparallelplatte	148
5.3	Die Meßfernrohre	149
5.3.1	Der Aufbau eines Meßfernrohrs	149
5.3.1.1	Das Strichkreuz	150
5.3.1.2	Die Zwischenlinse	150
5.3.1.3	Objektiv und Okular	151
5.3.1.4	Die Blenden	152
5.3.2	Vergrößerung, Gesichtsfeld, Helligkeit und Auflösungsvermögen	154
5.3.2.1	Die Fernrohrvergrößerung	154
5.3.2.2	Das Gesichtsfeld	154
5.3.2.3	Die Fernrohrhelligkeit	155
5.3.2.4	Das Auflösungsvermögen	155
5.3.3	Der Gebrauch des Fernrohrs	156
5.3.4	Kollimation, Autokollimation	157
5.4	Stative und Befestigungseinrichtungen geodätischer Instrumente	162
6	Instrumente und Geräte zum Nivellieren, Modellbildung	164
6.1	Einfache Nivelliergeräte	164
6.1.1	Die Kanalwaage	165
6.1.2	Die Schlauchwaage	166
6.1.3	Freihandgefällmesser	166
6.2	Nivelliere mit Libellenhorizontierung	166
6.2.1	Mechanischer Aufbau der Libellennivelliere	166
6.2.2	Regeln für den Gebrauch der Libellennivelliere	168
6.2.2.1	Handhabung und Justierbedingungen	168
6.2.2.2	Einfluß von Temperaturänderungen auf Libellennivelliere	170
6.2.3	Prüfverfahren für Nivelliergeräte	171
6.2.3.1	Justieren im Feld (nach Kukkamäki)	171
6.2.3.2	Justieren mit dem Kollimator	174
6.2.4	Klassifizierung der Libellennivelliere	176
6.2.4.1	Nivelliere niederer und mittlerer Genauigkeit	177
6.2.4.2	Nivelliere hoher Genauigkeit	178
6.2.4.3	Nivelliere sehr hoher und höchster Genauigkeit	179
6.2.5	Nivelliertachymeter	182
6.3	Automatische Nivelliere	182
6.3.1	Grundprinzip der Kompensatoren	183
6.3.1.1	Kompensatoren mit optischer Winkelvergrößerung	186

6.3.1.2	Kompensatoren mit überwiegend mechanischer Winkelvergrößerung.....	196
6.3.2	Regeln für den Gebrauch automatischer Nivelliere	200
6.3.2.1	Handhabung und Justierbedingungen	200
6.3.2.2	Vorhorizontieren mit der Dosenlibelle.....	201
6.3.2.3	Höhenversatz des Objektivs und Horizontschräge	202
6.3.2.4	Periodische Erschütterungen	204
6.3.2.5	Empfindlichkeit gegen Temperaturänderungen.....	204
6.3.2.6	Einfluß des Magnetfeldes der Erde	205
6.3.3	Automatische und Libellennivelliere	206
6.3.4	Klassifizierung der automatischen Nivelliere	206
6.4	Nivellierlatten.....	208
6.4.1	Einfache Nivellierlatten.....	208
6.4.2	Präzisions-Nivellierlatten	209
6.4.3	Lattenzubehör	211
6.4.4	Kalibrieren der Nivellierlatten	211
6.4.4.1	Bestimmung des mittleren Lattenmeters	211
6.4.4.2	Kalibrieren von Präzisions-Nivellierlatten mit Komparatoreinrichtungen	212
6.5	Registrierung der Daten in einem mobilen Datenerfassungsgerät (Datenterminal), automatischer Datenfluß ..	214
6.6	Refraktionsmodelle für das Nivellement.....	215
7	Nivellierverfahren.....	217
7.1	Höhenausgangsfläche und Höhenfestpunkte	217
7.1.1	Aufbau eines Nivellementpunktfeldes.....	217
7.1.2	Festlegung der Nivellementpunkte.....	220
7.1.3	Bezeichnung der Nivellementpunkte	222
7.1.4	Nachweis der Nivellementpunkte	223
7.2	Festpunktnivellements	223
7.2.1	Allgemeine Nivellementregeln	223
7.2.2	Einfache Nivellements	224
7.2.3	Ingenieurnivellements.....	226
7.2.4	Feinnivellements	230
7.3	Nivellierverfahren in Sonderfällen	236
7.3.1	Nivellitische Fluß- und Talübergänge.....	236
7.3.2	Das motorisierte Präzisionsnivellement	240
7.4	Genauigkeit des Nivellements	243
7.4.1	Fehlerfortpflanzung zufälliger Fehler und die Standardabweichung für 1 km Nivellement	243
7.4.2	Fehlerfortpflanzung zufälliger und systematischer Fehler	247
7.4.3	Die Fehlergrenzen für Festpunktnivellements	248

7.5	Längs- und Querprofile	249
7.5.1	Längsprofile	250
7.5.2	Querprofile.....	252
7.5.3	Auftragen der Längs- und Querprofile	253
7.6	Flächennivellements	255
7.6.1	Lagemessung, Höhenaufnahme, Zeichnung der Höhenpläne	255
7.6.2	Die Genauigkeit von Flächennivellements.....	259
Anhang.....		260
Literaturverzeichnis		263
Sachverzeichnis.....		267

Symbolverzeichnis

1. Meßwerte

L	angezeigte oder abgelesene Distanz der mechanischen Längenmessung
h	beobachteter Höhenunterschied auf einer Niv.-Station
Δh	beobachteter Höhenunterschied zweier Festpunkte; $\Delta h = \sum h$
R	Länge der Niv.-Strecke
L	Länge der Niv.-Linie; $L = \sum R$
F	Länge der Niv.-Schleife; $F = \sum R = \sum L$
z	Zielweite beim Nivellement

2. Abgeleitete bzw. reduzierte Meßergebnisse

L_0	Solllänge eines Maßstabes oder Meßbandes unter Normalbedingungen
L	mechanisch bestimmte horizontale Strecke
L^R	Schrägstrecke
L^0	Strecke in Meereshöhe
S	ellipsoidische Länge
s	Strecke im Gauß-Krüger-Koordinatensystem
H	Orthometrische Höhe
ΔH	Orthometrischer Höhenunterschied

3. Koordinaten

	<i>rechtwinklige Koordinaten</i>
x, y	in nordorientierten Abbildungssystemen
	<i>Polarkoordinaten</i>
s, t	in nordorientierten Abbildungssystemen
t	Richtungswinkel

4. Statistik

$s(\cdot)$	empirische Standardabweichung
$\sigma(\cdot)$	theoretische Standardabweichung

1 Grundlagen

1.1 Einleitung

Die Vermessungskunde befaßt sich mit der Vermessung und Berechnung größerer oder kleinerer Teile der Erdoberfläche und ihrer Darstellung in Karten und Plänen. Man unterteilt die Vermessungskunde in die Erdmessung, die Landesvermessung und die Land- oder Feldmessung. Die beiden erstgenannten Gebiete, bei denen die Krümmung der Erdoberfläche und die Verteilung der Schwerebeschleunigung auf ihr berücksichtigt werden müssen, werden auch als Geodäsie bezeichnet, während die Land- und Feldmessung (englisch surveying) auch praktische Geometrie genannt wird. Ganz allgemein gliedern die vermessungstechnischen Arbeiten sich in Horizontal- oder Lagemessungen und Vertikal- oder Höhenmessungen. Dabei versteht man unter „Messung“ einen einzelnen Messungsgang und unter „Vermessung“ die Summe aller für die Erfassung eines Objekts notwendigen Messungen.

Die wichtigste Aufgabe der Vermessungstechnik ist die Herstellung von Landesvermessungs- und Kartenwerken. Dazu gehören in erster Linie die vorwiegend in den Maßstäben 1 : 500, 1 : 1000 und 1 : 2000 gezeichneten Katasterkarten, die insbesondere die Lage, die rechtmäßigen Grenzen und die Bebauung der Grundstücke nachweisen, und die in den Maßstäben von 1 : 5000 bis etwa 1 : 250000 stehenden topographischen Karten, die vor allem eine Geländedarstellung enthalten. Daneben gibt es Spezialkartenwerke für Siedlungsräume, Verkehrsanlagen, Wasserbauten und zahlreiche andere Zwecke; überhaupt bilden Vermessung und Karte die Grundlage allen Planens und Bauens.

Als Unterlage für Ingenieurbauten werden in Kulturländern bei der Vorplanung die Kartenwerke der Landesvermessung

verwendet. Für die spezielle Bauplanung, für die Absteckung der Bauelemente, für die Baukontrolle und für die Schlußabnahme sind besondere Baumessungen notwendig. Diese werden generell nicht anders angelegt als die Vermessungen für die Landeskartenwerke. Die Krümmung der Erdoberfläche braucht aber bei ihnen nur selten berücksichtigt zu werden. Dafür wird im einzelnen oftmals eine sehr hohe Genauigkeit und außerordentliche Wendigkeit des Vermessungsingenieurs verlangt.

In Neuländern muß der Ingenieur in der Lage sein, die etwa vorhandenen Vermessungsunterlagen von den Lage- und Höhenfestpunkten an bis zu den Kartenwerken zu beurteilen und sie erforderlichenfalls selbst herzustellen.

1.2 Bezugsflächen

Um die zu vermessenden Gegenstände nach Lage und Höhe festlegen zu können, bedarf es einer Ausgangs- oder Bezugsfläche. Hierfür empfiehlt sich, da man die Vertikalachsen der Vermessungsinstrumente mit Hilfe von Pendeln oder Libellen in die Richtung der Schwerkraft zu bringen pflegt, eine Niveaufläche, d. h. eine Fläche, die in jedem ihrer Punkte normal zu der jeweiligen Richtung der Schwerkraft verläuft. Eine Fläche dieser Art ist auf der Erde durch die Oberfläche des Weltmeeres gegeben, das man sich hierzu in einer von Gezeiten, Strömungen usw. freien mittleren Lage ruhend vorzustellen und mittels kommunizierender Röhren unter den Kontinenten fortgesetzt zu denken hat. Diese auf der ganzen Erde eindeutig definierbare Fläche wird in Anlehnung an das griechische Wort für Erde als *Geoid* bezeichnet und als die mathematische Figur der Erde betrachtet (Abb. 1.1).

Die Meeresoberfläche stellt sich nach Maßgabe der Schwerkraft ein. Da diese aber infolge der Massenverteilung im Erdinnern gewisse Unregelmäßigkeiten aufweist, ist auch das Geoid keine regelmäßige Fläche. Es gleicht jedoch mit Abweichungen, die 80 m kaum überschreiten, einem *Umdrehungsellipsoid*, dessen

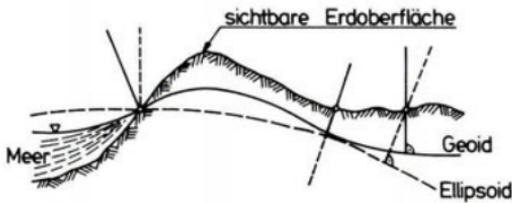


Abb. 1.1 Geoid, Ellipsoid, physische Erdoberfläche

Äquatorhalbmesser im Jahre 1987 während der „General Assembly der I.U.G.G.“ (Internationale Union für Geodäsie und Geophysik) in Vancouver durch internationale Vereinbarung zu 6378137m festgelegt ist. Als Maß für die Abplattung – das ist die relative Verkürzung der Drehachse gegenüber der Äquatorachse – ist 1 : 298,25 angenommen worden. Die Drehachse ist also nur rund 3‰ kürzer als die Äquatorachse.

Soll nun ein Ausschnitt aus der *sichtbaren Erdoberfläche* vermessen werden, so denke man sich alle Oberflächenpunkte in der jeweiligen Lotrichtung auf das Geoid projiziert. Als Fläche gilt dann die Projektion des Ausschnitts auf das Geoid. Die horizontale Entfernung zweier Punkte ist die auf dem Geoid zu messende kürzeste Entfernung der Lotfußpunkte; die Höhe (= Meereshöhe) eines Punktes ist sein in der Lotlinie gemessener Abstand vom Geoid, und der Höhenunterschied zweier Punkte ist die Differenz ihrer Meereshöhen.

Angesichts der geringen Unterschiede von Geoid und Umdrehungsellipsoid kann man, sofern man sich auf Länder von mittlerer Größe beschränkt, für Lagemessungen ein Umdrehungsellipsoid als Bezugsfläche nehmen und hat dann den Vorteil, auf einer mathematisch beherrschbaren Fläche rechnen zu können. Für kleinere Länder wählt man eine sich der Erdkrümmung im Vermessungsgebiet möglichst eng anschmiegende Kugel, und wenn das Vermessungsgebiet 10 km im Quadrat nicht überschreitet, genügt die Ebene als Bezugsfläche.

Bei den Höhenmessungen sind diese Vereinfachungen nicht erlaubt. Einerseits ist nämlich die Krümmung der Erdoberflä-

che so bedeutend, daß eine Tangentialebene, die man in irgendeinem Punkt an die als Ellipsoid oder Kugel betrachtete Erde legt, in 35 km Entfernung vom Berührungspunkt bereits rund 100 m von der Erde absteht. Zum anderen machen die Unterschiede zwischen Ellipsoid und Geoid sich bei der Höhenmessung durchaus bemerkbar. Höhenmessungen werden daher stets auf das Geoid – oder wie man in der Praxis zu sagen pflegt – auf den mittleren Meereshorizont bezogen.

Die Vermessungskunde wird in diesem Bändchen nur insoweit behandelt, als die Bezugsfläche für Lagemessungen als Ebene angesehen werden kann. Von den Höhenmessungen wird lediglich das Verfahren des Nivellements besprochen, bei dem es dem Praktiker gar nicht zum Bewußtsein kommt, daß er auf einer gekrümmten Bezugsfläche arbeitet.

1.3 Maßsysteme und Maßeinheiten

1.3.1 Vom Archivmeter zum Einheitensystem SI

Auf Vorschlag der Pariser Akademie der Wissenschaften beschloß im Jahre 1791 die damalige französische Nationalversammlung, ein einheitliches Längenmaß einzuführen, das dem zehnmillionsten Teil eines Erdmeridians gleichen und „Meter“ heißen sollte. Die Größe des Meters wurde in den nächsten Jahren aus mehreren Gradmessungen abgeleitet. Damit es aber jederzeit zu reproduzieren war, wurde ein Prototyp aus Platin hergestellt und im französischen Staatsarchiv niedergelegt. Dieses „Archivmeter“ ist die Grundlage des Metersystems, auf das außer dem Längenmaß auch die Einheiten des Flächenmaßes, des Raummaßes und des Gewichts bezogen wurden.

Das Metersystem wurde in den nächsten Jahrzehnten von mehreren Staaten übernommen. In Deutschland wurde es durch die Maß- und Gewichtsordnung für den Norddeutschen Bund vom 17. 8. 1868 eingeführt, die mit ihrem Inkrafttreten am 1. 1. 1872 für das ganze damalige Deutsche Reich verbindlich wurde.

Um die internationale Anerkennung des Metersystems weiter zu betreiben, schlossen im Jahre 1875 die damaligen Teilnehmerstaaten die „Internationale Meter-Konvention“ ab und luden alle Staaten der Erde zum Beitritt ein. Die Staaten einigten sich ferner auf die

Einrichtung eines Internationalen Büros für Maß und Gewicht in Breteuil bei Paris; doch sollte die Entscheidungsbefugnis über neue Vorlagen den Zusammenkünften der Delegierten der Teilnehmerstaaten verbleiben, die fortan als „Generalkonferenzen für Maß und Gewicht“ bezeichnet wurden.

Als erste größere Aufgabe erarbeitete das Büro in 10-jährigen Versuchen einen neuen Meterprototyp mit X-förmigem Querschnitt aus Platin-Iridium, der das Meter noch genauer festlegen sollte als das Archivmeter. Diesen Stab erklärte die 1. Generalkonferenz (1889) zum neuen internationalen Meterprototyp und definierte das Meter als den Abstand zweier auf dem Prototyp von Breteuil angebrachten Strichmarken bei 0°C . Von diesem Prototyp erhielten alle der Konvention beigetretenen Staaten eine Kopie. Angesichts der fortschreitenden Vertiefung der physikalischen Grundlagen und der steigenden Genauigkeitsansprüche hat auch diese Definition sich auf die Dauer als nicht ausreichend erwiesen. Sie wurde daher, ohne daß die Länge des Meters geändert wurde, abgelöst durch den Beschluß der 11. Generalkonferenz für Maß und Gewicht vom 14. Oktober 1960. Danach ist das Meter das 1650763,73fache der Wellenlänge der von den Atomen des Nuklids ^{86}Kr , eines Isotops des Edelgases Krypton mit der Masse 86, beim Übergang vom Zustand $5d$ zum Zustand $2p_{10}$ ausgesandten Strahlung. Diese Strahlung läßt sich unter bestimmten Voraussetzungen mit der sogenannten *Engelhard-Lampe* realisieren, die sich dabei in einem Kältebad von 63 Kelvin befindet.

Die 13. Generalkonferenz für Maß und Gewicht definierte 1967 die „Atomsekunde“ mit dem Cäsiumatom 133. Mit Hilfe der Cäsiumfrequenz wurden jetzt Zeitmessungen mit relativen Unsicherheiten von 10^{-13} bis 10^{-14} möglich. Gleichzeitig entstanden hochgenaue Techniken, Längenmessungen auf Laufzeitmessungen elektromagnetischer Wellen zurückzuführen. Nicht zuletzt aus dem Grunde wurde auf der 15. Generalkonferenz für Maß und Gewicht 1975 ein Wert für die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen im Vakuum neu festgesetzt. Er beträgt $c = 299792458\text{ m/s}$. Es waren jetzt nochmals die Voraussetzungen für eine neue Definition des Meters gegeben. So beschloß man auf der 17. Generalkonferenz für Maß und Gewicht 1983 in Paris die Definition: Das Meter ist die Länge der Strecke, die Licht im leeren Raum während der Dauer von $1/299792458$ Sekunden durchläuft.

In den Jahrzehnten nach 1875 wurden unabhängig von der Meterkonvention, in deren Zuständigkeit lediglich die Einheiten Meter, Quadratmeter, Kubikmeter und Kilogramm fielen, die elektromagnetischen

Einheiten Volt, Ampere, Ohm und Watt eingeführt. 1901 erkannte der italienische Physiker Giovanni Giorgi, daß man aus diesen Einheiten und den mechanischen Einheiten Meter, Kilogramm und Sekunde ein kohärentes (= eng zusammenhängendes) Einheitensystem mit nur vier Grund- oder Basiseinheiten bilden könne, wenn man nur die Definitionen der elektromagnetischen Einheiten etwas anders formulierte. Später wurden noch rund 15 weitere Einheiten darunter das Kelvin für die thermodynamische Temperatur und die Candela für die Lichtstärke festgelegt. Alle diese Einheiten aber ließen sich nach dem Vorgang von Giorgi auf (z. Zt.) 7 Basiseinheiten reduzieren.

Diesem großartigen System erteilte im Jahre 1954 die 10. Generalkonferenz für Maß und Gewicht ihre Zustimmung. Die 11. Generalkonferenz (1960) gab ihm den Namen „Système International d’Unités“, abgekürzt SI. In der Bundesrepublik Deutschland wurde das System durch das Gesetz über die Einheiten im Meßwesen vom 2. 7. 1969 und die Ausführungsverordnung zu diesem Gesetz vom 26. 6. 1970 eingeführt (*Ledersteger 1956; Straßer 1974; Bayer-Helms 1974; Winter 1974; Simmerding 1970*).

In den nun folgenden Abschnitten sind die Regelungen zusammengestellt, die das Vermessungswesen an irgend einer Stelle berühren.

1.3.2 Grundlegende Vorschriften des Einheitengesetzes

Das SI kennt nach §§ 2 und 3 des Gesetzes, die folgenden 7 Basiseinheiten und Einheitenzeichen

für die Länge	das Meter	= m
für die Masse	das Kilogramm	= kg
für die Zeit	die Sekunde	= s
für die elektrische Stromstärke	das Ampère	= A
für die thermodynamische Temperatur	das Kelvin	= K
für die Lichtstärke	die Candela	= cd
für die Stoffmenge	das Moll	= mol

Nach § 5 des Gesetzes und dem 2. Abschnitt der Ausführungsverordnung können aus den 7 Basiseinheiten durch Multiplikation mit 1 oder mit einem von 1 verschiedenen Faktor neue Einheiten abgeleitet werden. Durch Multiplikation mit dem Faktor 1 entstehen die kohärenten Einheiten des SI z. B.

für die Fläche	1 m ²
für die Geschwindigkeit	1 m s ⁻¹

für die Beschleunigung	1 m s^{-2}
für die Kraft	1 m kg s^{-2} , genannt 1 Newton (N)
für den Druck	$1 \text{ m}^{-1} \text{ kg s}^{-2} = 1 \text{ N/m}^2$.

Nichtkohärente Einheiten können mit einer ganzzahligen Potenz von 10 oder mit einer anderen Zahl zusammengesetzt werden, z. B.

die Fläche 10^2 m^2	= 1 a
Die Beschleunigung 10^{-2} m s^{-2}	= 1 Gal
die Kraft $10^{-5} \text{ m kg s}^{-2}$	= $10^{-5} \text{ N} = 1 \text{ dyn}$
der Druck $10^5 \text{ m}^{-1} \text{ kg s}^{-2}$	= $10^5 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ bar}$

und

die Kraft $9,806 65 \text{ m kg s}^{-2}$	= $9,806 65 \text{ N} = 1 \text{ kp}$
der Druck $101 325 \text{ m}^{-1} \text{ kg s}^{-2}$	= $101 325 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ atm}$.

Nach § 6 des Gesetzes lassen sich aus den vorgenannten Einheiten durch Vorsätze dezimale Vielfache und Teile bilden und durch Vorsatzzeichen folgendermaßen kennzeichnen:

	Vorsatz	Vorsatz- zeichen		Vorsatz	Vorsatz- zeichen
10^1	Deka	da	10^{-1}	Dezi	d
10^2	Hekto	h	10^{-2}	Zenti	c
10^3	Kilo	k	10^{-3}	Milli	m
10^6	Mega	M	10^{-6}	Mikro	μ
10^9	Giga	G	10^{-9}	Nano	n
10^{12}	Tera	T	10^{-12}	Piko	p

1.3.3 Die alten und die neuen Maßeinheiten in der Vermessungstechnik

1.3.3.1 Die Einheiten des Längen-, Flächen- und Volumenmaßes

Diese sind in ihrer 1875 von der Meterkonvention erarbeiteten Form durch das Einheitengesetz bestätigt. Lediglich die Einheiten des Längenmaßes sind um einige Zehnerpotenzen nach oben und unten erweitert worden. Nach dem Einheitengesetz und der Ausführungsverordnung gilt nunmehr folgendes:

a) Die SI-Einheit des Längenmaßes ist die Basiseinheit Meter (m). Aus ihr folgen mit dem Vorsatzzeichen unter [1.3.2]

2*

1 Dekameter = 10^1 m = 1 dam	1 Dezimeter = 10^{-1} m = 1 dm
1 Hektometer = 10^2 m = 1 hm	1 Zentimeter = 10^{-2} m = 1 cm
1 Kilometer = 10^3 m = 1 km	1 Millimeter = 10^{-3} m = 1 mm
1 Megameter = 10^6 m = 1 Mm	1 Mikrometer = 10^{-6} m = 1 μ m
1 Gigameter = 10^9 m = 1 Gm	1 Nanometer = 10^{-9} m = 1 nm
1 Terameter = 10^{12} m = 1 Tm	1 Pikometer = 10^{-12} m = 1 pm

b) Die SI-Einheit des Flächenmaßes ist die abgeleitete Einheit Quadratmeter (m^2). Aus ihr folgt mit den obigen Vorsatzzeichen

1 Ar = $10^2 m^2 = 1 a$	1 Quadratdezimeter = $10^{-2} m^2 = 1 dm^2$
1 Hektar = $10^4 m^2 = 1 ha$	1 Quadratzentimeter = $10^{-4} m^2 = 1 cm^2$
1 Quadratkilometer = $10^6 m^2 = 1 km^2$	1 Quadratmillimeter = $10^{-6} m^2 = 1 mm^2$
usw.	usw.

c) Die SI-Einheit des Volumenmaßes ist die abgeleitete Einheit Kubikmeter (m^3). Daraus sind mit den Vorsätzen in 1.3.2 das dm^3 , das cm^3 und das mm^3 usw. abgeleitet worden. Zu Fläche und Volumen bestimmt die Ausführungsverordnung:

Die Flächenmaße Ar (a) und Hektar (= Hektoar: ha) werden als abgeleitete Maßeinheiten für Grundstücksflächen beibehalten (§ 48). Die amtliche Begründung hierzu bezieht sich ausdrücklich auf den Ausweis der Grundstücksflächen in den Grundbüchern.

1.3.3.2. Die SI-Einheiten des ebenen Winkelmaßes

Sie weichen von den überkommenen Maßeinheiten in unterschiedlicher Weise ab. Daher müssen – schon im Hinblick auf die vorhandene Literatur – der bisherige und der neue Zustand einander gegenübergestellt werden. Bislang wurden benutzt: die Sexagesimalteilung, die Zentesimalteilung und das Arcus- oder Bogenmaß. Im einzelnen sind die beiden ersten Systeme folgendermaßen aufgebaut:

die Sexagesimalteilung:	1 Vollkreis = 360° (Grad);
$1^\circ = 60'$ (Minuten)	$1' = 60''$ (Sekunden)
die Zentesimalteilung:	1 Vollkreis = 400^g Neugrad oder Gon
$1^g = 100^c$ (Neuminuten)	$1^c = 100^{cc}$ (Neusekunden)

wobei das hochgestellte c als Abkürzung für „centi“ stand.

Die Sexagesimalteilung ist wegen ihrer engen Beziehungen zur Astronomie und zum Gradnetz der Erdoberfläche mit ihren bisherigen Einheiten Grad, Minute und Sekunde und deren Zeichen in das SI unverändert übernommen worden. Die früher gerne benutzten Bezeichnungen Altgrad, Altminute und Altsekunde sind fortgefallen.

Die Zentesimalteilung kennt als SI-Einheit nur noch das Gon (Einheitenzeichen gon); die Bezeichnungen Neugrad, Neuminute und Neusekunde sind ebenfalls fortgefallen. Die Bruchteile des Gon sind im SI im Prinzip als Dezimale des Gon darzustellen; doch ist es mit den in 1.3.2 angegebenen Vorsätzen erlaubt, das Zentigon (Einheitenzeichen cgon) und das Milligon (Einheitenzeichen mgon) zu bilden. Ein Einheitenzeichen für die ehemalige Neusekunde (c) gibt es nicht. Vielmehr ist künftig

$$1^c = 1 \cdot 10^{-4} \text{ gon} = 0,1 \text{ mgon}.$$

Für den rechten Winkel oder den „Rechten“ ist das Einheitenzeichen 1^r geschaffen worden.

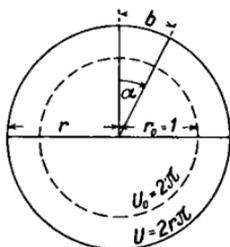


Abb. 1.2
Definition des Bogenmaßes



Abb. 1.3
Das Bogenmaß im Einheitskreis

Das Bogenmaß eines Winkels, die dritte der überkommenen Winkleinheiten, ist das Verhältnis des Bogens b , den die Schenkel eines Winkels α aus einem um seinen Scheitelpunkt geschlagenen Kreis ausschneiden, zu dem Kreishalbmesser r (Abb. 1.2). Die Einheit des Bogenmaßes ist der Winkel, für den dieses Verhältnis gleich 1 ist, d. h. für den $b = r$ ist. Dieser Winkel wird als „Radiant“ bezeichnet, weil er entsteht, wenn der Halbmesser eines Kreises auf seinem Umfang abgewickelt wird. Das Bogenmaß des vollen Winkels ist daher 2π , das des Rechten $\pi/2$.

Das Bogenmaß ist also der Quotient zweier Längen, und wohl deshalb ist der Radiant (Einheitenzeichen rad) im SI, das die Anzahl der

Basiseinheiten möglichst klein halten möchte, zur (abgeleiteten) SI-Einheit des ebenen Winkels erklärt. Etwas spezieller als im vorigen Absatz heißt es im § 5 der Ausführungsverordnung: „1 Radian ist gleich dem ebenen Winkel, der als Zentriwinkel eines Kreises vom Halbmesser 1 m aus dem Kreis einen Bogen der Länge 1 m ausschneidet“. Zur Veranschaulichung dieses Satzes sind in Abb. 1.3 (Einheitskreis) der Zentriwinkel α , der zugehörige Bogen b und der Halbmesser r mit dem Index Null (₀) versehen worden.

Um aber dem Bedürfnis der Praxis nach den Einheiten der Sexagesimal- und Zentesimalteilung gerecht zu werden, sind – ebenfalls im § 5 a. a. O. – aus dem Radianen noch folgende Einheiten abgeleitet, bei deren Erläuterung für das Wort Einheitenzeichen hier die Abkürzung Ez benutzt ist.

$$\begin{aligned}
 & \text{1 Vollwinkel (kein EZ.)} = 2\pi \text{ rad} & = 360^\circ = 400 \text{ gon} \\
 & \text{1 Rechter (Ez.: } ^\perp) & = \pi/2 \text{ rad} & = 90^\circ = 100 \text{ gon} \\
 & \text{1 Grad (Ez.: } ^\circ) & = \frac{\pi}{180} \text{ rad} & = 90\text{ster Teil des Rechten} \\
 & \text{1 Minute (Ez.: } ') & = \frac{\pi}{180 \cdot 60} \text{ rad} & = 60\text{ster Teil des Grades} \\
 & \text{1 Sekunde (Ez.: } ") & = \frac{\pi}{180 \cdot 60^2} \text{ rad} & = 60\text{ster Teil der Minute} \\
 & \text{1 Gon (Ez.: gon)} & = \frac{\pi}{200} \text{ rad} & = 100\text{ster Teil des Rechten} \\
 & \text{1 Zentigon (Ez.: cgon)} & = \frac{\pi}{200 \cdot 10^2} & = 100\text{ster Teil eines Gon} \\
 & \text{1 Milligon (Ez.: mgon)} & = \frac{\pi}{200 \cdot 10^3} & = 1000\text{ster Teil eines Gon}
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

1.3.3 Vermessungstechnische Sonderzeichen

Die Reziproken der in (1.1) auftretenden Quotienten $\pi/180^\circ$ und $\pi/200 \text{ gon}$ – allgemein $\pi/2^\perp$ – werden in der Geodäsie so häufig benutzt, daß dafür das Symbol ϱ eingeführt ist, und zwar ist

$$180/\pi = \varrho^{(^\circ)} \text{ lies } \varrho \text{ in Grad} \parallel 200/\pi = \varrho^{(\text{gon})} \text{ (lies } \varrho \text{ in Gon)} \tag{1.2}$$

Zu einer ersten Anwendung entnehme man der Abb. 1.2 den Ansatz

$$\alpha : b = 4^\perp : 2\pi.$$

Im *Einheitskreis* (Abb. 1.3) folgt daraus wegen $b_0 = r_0 = 1$ für einen Winkel $\alpha_0 = 1$ rad, wenn die jeweiligen Winkeleinheiten eingesetzt werden,

$$\alpha = \frac{2^\perp}{\pi} \varrho; \quad \alpha^{(o)} = \frac{180^\circ}{\pi} \varrho^\circ; \quad \alpha^{(\text{gon})} = \frac{200 \text{ gon}}{\pi} \varrho^{(\text{gon})}$$

Die Winkelwerte der ϱ im Sexagesimal- und Zentesimalsystem sind demnach gleich denen des Radianten in den entsprechenden Maßsystemen. Zahlenmäßig sind diese Werte

$$\begin{aligned} \varrho^{(o)} &= 57,295779 \dots & \varrho^{(\text{gon})} &= 63,661977 \dots \\ \varrho^{(\prime)} &= 3437,7467 \dots & \varrho^{(\text{cgon})} &= 6366,1977 \dots \\ \varrho^{(\prime\prime)} &= 206264,8 \dots & \varrho^{(\text{mgon})} &= 63661,973 \dots \end{aligned} \quad (1.3)$$

Für eine zweite Anwendung ergibt sich aus Abb. 1.2

$$b : 2r\pi = \alpha : 4^\perp$$

Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung mit 2π , so erhält man mit (1.2) die in der Vermessungstechnik viel benutzte Formel

$$b : r = \alpha : \varrho, \quad (1.4)$$

in die b und r bzw. α und ϱ jeweils mit den einander entsprechenden Einheiten einzusetzen sind.

Zahlenbeispiel: Eine 150 m lange Achse soll um 12 cgon verschwenkt werden. Um welchen linearen Betrag b wird dadurch das freie Ende der Achse seitwärts verlegt? Die Gleichung (1.4) gibt mit dem $\varrho^{(\text{gon})}$ aus (1.3)

$$b^{(\text{m})} = r^{(\text{m})} \frac{\alpha^{(\text{gon})}}{\varrho^{(\text{gon})}} = \frac{150 \cdot 12 \cdot 10^{-2}}{63,66} = 0,283 \text{ m}$$

Eine dritte Sonderanwendung ist der Übergang auf andere Winkeleinheiten. Die Umwandlung von Grad oder Gon in die Einheit Radiant und umgekehrt ist in der Vermessungstechnik kaum erforderlich. Auch der Übergang von der Sexagesimalteilung in die Zentesimalteilung und umgekehrt verliert an Bedeutung, weil das Sexagesimalsystem in der Vermessungspraxis nur noch selten gebraucht wird. Zum Übergang vom Sexagesimal- in das Zentesimalsystem gibt es zahlreiche Tafeln. Bequemer ist heute das Umrechnen mit einem elektronischen Taschenrechner unter Verwertung nachstehender Identitäten:

$$\begin{aligned} 1^\circ &= 10/9 \text{ gon} = 1,111 \dots \text{ gon} & 1 \text{ gon} &= 0,9^\circ \\ 1' &= 1,85185185 \dots \text{ cgon} & 1 \text{ cgon} &= 0,54' \\ 1'' &= 0,308641975308 \dots \text{ mgon} & 1 \text{ mgon} &= 3,24'' \end{aligned}$$

Auch hierfür wird man zweckmäßig zuvor die Sexagesimalminuten und -sekunden in Dezimale des Grades verwandeln.

Für Überschlagrechnungen merke man:

$$1' \approx 2 \text{ cgon}; \quad 1'' \approx 0.3 \text{ mgon} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ gon}$$

In der Bautechnik werden die Höhenunterschiede meistens in Prozenten des Längenunterschiedes oder durch das Steigungsmaß $1:n$ seltener durch den Neigungswinkel α ausgedrückt. In runden Werten bestehen folgende Zusammenhänge:

%	1	2	3	5	10	25	50	100
α (gon)	0,6	1,3	1,9	3,2	6,3	16,1	29,5	50
$1:n$	1:100	1:50	1:33 1/3	1:20	1:10	1:4	1:2	1:1

Man beachte ferner bei Benutzung fremdsprachlicher Literatur:

im Englischen ist Grad \rightarrow degree, gon \rightarrow grade

im Französischen Grad \rightarrow degré, gon \rightarrow grade.

1.3.4 Seltener gebrauchte SI-Einheiten

1.3.4.1 Die (abgeleitete) SI-Einheit des räumlichen Winkels

Die SI-Einheit des räumlichen Winkels ist nach § 6 der Ausführungsverordnung der Steradian (Einheitenz. sr). 1 Steradian ist gleich dem räumlichen Winkel, der als gerader Kreiskegel mit der Spitze im Mittelpunkt einer Kugel vom Halbmesser 1 m aus der Kugeloberfläche eine Kalotte der Fläche 1 m^2 ausschneidet.

1.3.4.2 Die (abgeleitete) SI-Einheit des Drucks

Die SI-Einheit des Drucks oder der mechanischen Spannung, die in der Vermessungstechnik vor allem für die barometrische Höhenmessung gebraucht wird, ist nach § 20 a.a.O. das Pascal (Einheitenz.: Pa). 1 Pascal ist gleich dem auf eine Fläche gleichmäßig wirkenden Druck, bei dem senkrecht auf die Fläche 1 m^2 die Kraft $1 \text{ N} = 1 \text{ Newton}$ ausgeübt wird. 10^5 Pa sind gemäß [1.3.2] 1 Bar (bar), 10^2 Pa 1 Millibar (mbar).

Die Einheiten technische Atmosphäre (at), physikalische Atmosphäre (atm), Torr (torr), Meter-Wassersäule (mWs), Millimeter-Quecksilbersäule (mm Hg) waren nur noch bis Ende 1977 zugelassen.

1.3.4.3 Die Basiseinheit der (thermodynamischen) Temperatur (T)

Die Basiseinheit der Temperatur, auch Kelvintemperatur genannt, ist nach §3 des Einheitengesetzes das Kelvin (Einheitenzeichen K). Dieses ist definiert als der 273,16^{te} Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes des Wassers.

Hierzu vermerkt das Normblatt DIN 1301 S.11: Die Einheit, das Kelvin, gilt auch für die Angabe von Temperaturdifferenzen. – Als Celsius-Temperatur (t) wird die besondere Differenz einer beliebigen thermodynamischen Temperatur T gegenüber der Temperatur $T_0 = 273,15\text{ K}$ bezeichnet. Es ist also

$$t = T - T_0 = T - 273,15\text{ K}.$$

Bei der Angabe von Celsius-Temperaturen sind der Einheitenname Grad Celsius und das Einheitenzeichen °C anzuwenden. Die Differenz Δt zweier Celsius-Temperaturen z. B. der Celsius-Temperaturen $t_1 = T_1 - T_0$ und $t_2 = T_2 - T_0$ ist

$$\Delta t = t_1 - t_2 = T_1 - T_2 = \Delta T.$$

Eine derartige Temperaturdifferenz ist nicht mehr auf die dynamische Temperatur T_0 bezogen, somit keine Celsius-Temperatur im Sinne der Definition nach der ersten der beiden obigen Gleichungen.

1.3.4.4 Die (gesetzliche) SI-Einheit der Zeit

Die SI-Einheit der Zeit ist gem. [1.3.2] die Sekunde (Einheitenzeichen s); von dieser werden folgende Vielfache abgeleitet:

1 Minute (min) = 60 s, 1 Stunde (h) = 60 min = 3600 s,
1 Tag (d) = 24 h = 86400 s; h von lat. hora, d von lat. dies.

Die Vorsatzzeichen in [1.3.2] sind auf dezimale Vielfache oder Teile der Zeiteinheiten nicht anzuwenden.

1.3.4.5 Die (abgeleitete) SI-Einheit der Frequenz

Die SI-Einheit der Frequenz ist nach §12 der Ausführungsverordnung das Hertz (Einheitenzeichen Hz). 1 Hertz ist gleich der Frequenz eines Schwingungsvorgangs der Periodendauer 1 s. Zur Kennzeichnung von Vielfachen und Teilen dienen die Vorsatzzeichen in [1.3.2]

1.4 Fehlerrechnung und Bilden von Mittelwerten

1.4.1 Die Aufgabe der Fehlerrechnung

Die geodätischen Messungen müssen im Hinblick auf ihren jeweiligen Zweck mit einer bestimmten Genauigkeit ausgeführt und gegen Irrtümer gesichert sein. Völlig fehlerfreie Messungen sind infolge der Mängel der Meßgeräte und der Unvollkommenheit der menschlichen Sinne nicht möglich. Die Messungen werden daher in der Regel mehrere Male wiederholt und möglichst noch durch zusätzliche Messungen gestützt, indem man z. B. außer den Katheten noch die Hypotenuse mißt, oder neben zwei Dreieckswinkeln, die man braucht, auch den dritten beobachtet.

Bei der Auswertung der Messungen entsteht die Aufgabe,

1. aus den Beobachtungen den günstigsten Mittelwert der gesuchten Größe abzuleiten,
2. eine Maßzahl für die Genauigkeit einer einzelnen Messung oder ihre „Streuung“ anzugeben,
3. die Genauigkeit oder die Streuung des Mittelwertes und seinen „Vertrauensbereich“ abzuschätzen.

1.4.2 Fehlerarten

Die Messungsfehler unterteilt man nach Art ihrer Entstehung in grobe, systematische und zufällige Fehler.

Grobe Fehler sind grob fehlerhafte Ablesungen an den Meßinstrumenten, Zielverwechslungen und dergleichen. Sie werden durch Kontrollmessungen entdeckt und ausgeschieden.

Systematische Fehler verfälschen das Meßergebnis stets in demselben Sinne. Sie werden hervorgerufen durch unzureichende Eichung und einseitige Handhabung der Meßinstrumente sowie durch einsinnig wirkende Einflüsse von Temperatur, Luftdruck usw. auf das Meßinstrument oder den zu messenden Gegenstand. Diese Fehler lassen sich in allen Regelfällen durch Eichung der Meßinstrumente, Wahl geeig-

ter Meßverfahren und rechnerisches Berücksichtigen der einsinnigen Einflüsse zum größten Teil eliminieren.

Als *zufälligen Fehler* einer Messung betrachtet man die Summe der nach dem Ausscheiden der groben und der systematischen Fehler übrigbleibenden unbekanntes „Elementarfehler“, die auf begrenzte Schärfe der menschlichen Sinne, Unvollkommenheiten der Meßinstrumente, unkontrollierbare Veränderungen der äußeren Umstände und gelegentlich auch des Gegenstandes der Messung zurückzuführen sind. Die zufälligen Fehler werden ebenso oft positives wie negatives Vorzeichen annehmen und sind im Sinne der mathematischen Statistik *stochastisch unabhängige Veränderliche*. Trotz ihrer scheinbaren Regellosigkeit unterliegen sie den Gesetzen des Zufalls.

Abb. 1.4 läßt die Verteilung der wahren Fehler ε_i [1.4.3] erkennen, die bei 160 Beobachtungen desselben Winkels gemacht wurden. Die ε_i sind dazu ihrer Größe nach in die auf der Abszissenachse angedeuteten Gruppen von je 0,1 mgon Breite eingeordnet, und über den Abszissenabschnitten sind Rechtecke eingezeichnet, deren Höhe der Anzahl der in die betreffende Gruppe fallenden Fehler proportional ist. Wie die so entstandene Treppenkurve (= Histogramm) zeigt, ist die Häufigkeit, mit der ein Fehler ε auftritt, eine Funktion seiner Größe. Diese

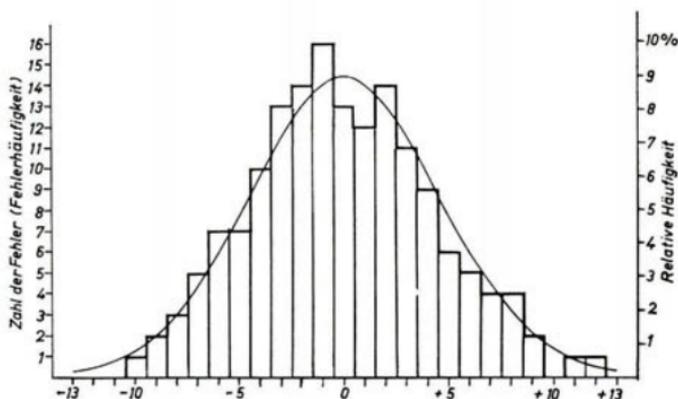


Abb. 1.4 Histogramm eines wiederholt gemessenen Winkels

Erscheinung ist von C. F. Gauß in das nach ihm benannte Fehlergesetz

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} \quad (1.5)$$

gebracht worden, in dem $\varphi(\varepsilon)$ die relative – d. h. prozentuale – Häufigkeit des Auftretens, e die Basis der natürlichen Logarithmen und h eine Konstante ist, die die Messungsgenauigkeit charakterisiert. Die danach zu erwartende theoretische Fehlerverteilungskurve ist in Abb. 1.4 als durchlaufende Kurve eingezeichnet; sie stimmt mit der aus den Messungen gewonnenen Treppenkurve gut überein. Das gilt für alle größeren Messungsreihen, die überwiegend zufällige Fehler aufweisen. Solche Messungsreihen besitzen in der Sprache der Statistik eine *Normalverteilung*. Die überwiegend durch zufällige Fehler verursachten Messungswidersprüche aber lassen sich nach der auf C. F. Gauß zurückgehenden *Methode der kleinsten Quadrate* willkürfrei ausgleichen.

1.4.3 Mittelwerte und Streuungsmaße

Die Einzelergebnisse l_i , die sich ergeben würden, wenn man eine Größe beliebig oft ($n \rightarrow \infty$) durch gleichgenaue, unabhängige und nur mit zufälligen Fehlern behaftete Messungen bestimmte, werden um einen gewissen *Mittelwert* ξ schwanken, den man den *Erwartungswert* oder auch den *wahren Wert* der Größe nennt. Da jedoch in allen Regelfällen nur eine begrenzte Anzahl von Messungen (eine Stichprobe vom Umfang n) vorliegt, benutzt man als Näherungswert für den wahren Wert das *arithmetische Mittel*

$$\hat{x} = \frac{1}{n} (l_1 + l_2 + \dots + l_n) = \frac{1}{n} [I]^* \quad (1.6)$$

Für die nach dem Bilden des arithmetischen Mittels *übrigbleibenden Fehler* oder *Verbesserungen*

$$v_1 = \hat{x} - l_1; \quad v_2 = \hat{x} - l_2; \quad v_n = \hat{x} - l_n$$

* In der Fehlerrechnung verwendet man nach dem Vorbild von C. F. Gauß gern eckige Klammern als Summenzeichen.