Halliday / Resnick
Physik Teil 2

David Halliday
Robert Resnick

Physik

Teil 2

Aus dem Amerikanischen
übersetzt von
Joachim Streubel
und
Bernd Schaarschmidt

Walter de Gruyter • Berlin • New York 1994

Titel der Originalausgabe

David Halliday/Robert Resnick
Physics
Third Edition, Part One and Part Two, Extended Version
Copyright © by John Wiley & Sons, Inc., New York, New York, 1978, 1986
Kapitel 56 aus:
David Halliday/Robert Resnick/Kenneth S. Krane
Physics, Volume Two, Extended Version, Fourth Edition
Copyright © by John Wiley & Sons, Inc., New York,
New York, 1992

Autoren

David Halliday
Professor of Physics, University of Pittsburgh

Robert Resnick
Professor of Physics, Rensselaer Polytechnic Institute

Deutschsprachige Ausgabe

Joachim Streubel
Professor an der Fachhochschule Bochum

Bernd Schaarschmidt
Professor an der Freien Universität Berlin

Dieser Band enthält 680 Abbildungen und 45 Tabellen.

♾ Gedruckt auf säurefreiem Papier, das die US-ANSI-Norm über Haltbarkeit erfüllt.

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Halliday, David:
Physik / David Halliday ; Robert Resnick. Aus dem Amerikan. übers. von Joachim Streubel und Bernd Schaarschmidt. – Berlin ; New York : de Gruyter.
Einheitssacht.: Physics ⟨dt.⟩
NE: Resnick, Robert:
Teil 2 (1994)
ISBN 3-11-013897-2

Copyright © 1994 by Walter de Gruyter & Co., D-10785 Berlin.
Dieses Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Printed in Germany
Satz und Druck: Tutte Druckerei GmbH, Salzweg-Passau
Buchbindearbeiten: Lüderitz & Bauer Buchgewerbe-GmbH, Berlin
Einbandentwurf: Hansbernd Lindemann, Berlin.

Vorwort zur deutschen Übersetzung

Diese Einführung wendet sich zunächst an Studierende der Physik und der Natur- und Ingenieurwissenschaften an Universitäten und Fachhochschulen. Sie ist aber gleichermaßen als Lern- und Lehrbuch in der Weiterbildung und für das Selbststudium geeignet. Im englischsprachigen Raum und darüber hinaus ist dieses Werk wegen seines Inhalts, vor allem aber wegen seiner pädagogisch-didaktisch gelungenen Darstellung seit vielen Jahren sehr erfolgreich.

Unter Betonung der Prinzipien der klassischen und modernen Physik spannt es den Bogen von einfachen und grundlegenden bis zu praktischen Fragestellungen. Dabei wird die Einheit von theoretischer und Experimentalphysik ebenso deutlich wie die Rolle, die die Mathematik bei der Formulierung physikalischer Aussagen spielt.

Ein wesentlicher Vorteil dieses Buches und eine beträchtliche Erleichterung für die Lernenden sind die vielen, im Detail ausgeführten und gerechneten Beispiele sowie die äußerst umfangreiche Sammlung von überwiegend anwendungsbezogenen Aufgaben, die zur besseren Übersicht nach den einzelnen Abschnitten und in aufsteigendem Schwierigkeitsgrad geordnet sind.

Die vorliegende deutschsprachige Ausgabe basiert auf der 3. bzw. 4. amerikanischen Auflage. Nomenklatur und Einheiten wurden dem von der Internationalen Union für reine und angewandte Physik (IUPAP) empfohlenen Standard und weitgehend auch den DIN-Normen angepaßt.

Unser besonderer Dank gilt Herrn Dr.-Ing. Rudolf Weber für seine stete Unterstützung beim Zustandekommen dieses Buches.

Inhaltsübersicht zu Teil 1 und Teil 2

Teil 1

1 Über das Messen
2 Vektoren
3 Eindimensionale Bewegung
4 Bewegung in einer Ebene
5 Dynamik I
6 Dynamik II
7 Arbeit und Energie
8 Erhaltung der Energie
9 Erhaltung des Impulses
10 Der Stoß
11 Die Drehbewegung
12 Drehmoment, Drehimpuls und Trägheitsmoment
13 Erhaltung des Drehimpulses
14 Gleichgewicht starrer Körper
15 Schwingungen
16 Gravitation
17 Statik der Flüssigkeiten und Gase
18 Dynamik der Flüssigkeiten und Gase
19 Wellen in elastischen Medien
20 Schallwellen
21 Temperatur
22 Wärme und der erste Hauptsatz der Thermodynamik
23 Kinetische Gastheorie I
24 Kinetische Gastheorie II
25 Entropie und der zweite Hauptsatz der Thermodynamik
Ergänzungen
Anhang

Teil 2

26 Ladung und Materie
27 Das elektrische Feld
28 Das Gaußsche Gesetz

29 Das elektrische Potential
30 Kondensator und Dielektrikum
31 Strom und Widerstand
32 Spannungsquellen und Stromkreise
33 Das magnetische Feld
34 Das Magnetfeld elektrischer Ströme
35 Das Induktionsgesetz
36 Selbstinduktion und Gegeninduktion
37 Magnetische Eigenschaften der Materie
38 Elektromagnetische Schwingungen
39 Wechselströme
40 Die Maxwellschen Gleichungen
41 Elektromagnetische Wellen
42 Natur und Ausbreitungseigenschaften des Lichts
43 Reflexion und Brechung – Ebene Wellen und ebene Grenzflächen
44 Reflexion und Brechung – Kugelwellen und sphärische Grenzflächen
45 Interferenz
46 Beugung
47 Gitter und Spektren
48 Polarisation
49 Licht und Quantenphysik
50 Die Wellennatur der Materie
51 Struktur der Atome
52 Atomphysik: drei ausgewählte Themen
53 Elektrische Leitung in Festkörpern
54 Einführung in die Kernphysik
55 Kernenergie
56 Physik der Elementarteilchen und Kosmologie
Ergänzungen
Anhang

Inhalt

26	Ladung und Materie	779
26.1	Vorbemerkungen zum Elektromagnetismus	779
26.2	Elektrische Ladung	780
26.3	Leiter und Isolatoren	781
26.4	Das Coulombsche Gesetz	782
26.5	Die Quantelung der Ladung	787
26.6	Ladung und Materie	787
26.7	Die Erhaltung der Ladung	792
	Fragen	793
	Aufgaben	794
27	Das elektrische Feld	798
27.1	Das elektrische Feld	798
27.2	Die elektrische Feldstärke	800
27.3	Feldlinien	801
27.4	Berechnung der elektrischen Feldstärke	805
27.5	Punktladung in einem elektrischen Feld	811
27.6	Dipol im elektrischen Feld	815
	Fragen	817
	Aufgaben	818
28	Das Gaußsche Gesetz	826
28.1	Einführung	826
28.2	Der Fluß	826
28.3	Der elektrische Fluß	828
28.4	Das Gaußsche Gesetz	831
28.5	Das Gaußsche Gesetz und das Coulombsche Gesetz	832
28.6	Isoliert aufgestellter Leiter	834
28.7	Experimenteller Nachweis des Gaußschen und des Coulombschen Gesetzes	835
28.8	Einige Anwendungen des Gaußschen Gesetzes	837
28.9	Das Kernmodell des Atoms	843
	Fragen	845
	Aufgaben	847
29	Das elektrische Potential	854
29.1	Das elektrische Potential, die elektrische Spannung	854

29.2 Potential und elektrisches Feld 857
29.3 Das Potential einer Punktladung 861
29.4 Mehrere Punktladungen 863
29.5 Das Potential eines Dipols 865
29.6 Potentielle Energie in einem elektrischen Feld 869
29.7 Feldstärke und Potential 871
29.8 Isoliert aufgestellter Leiter 876
29.9 Der elektrostatische Generator 879
Fragen 883
Aufgaben 884

30 Kondensator und Dielektrikum 893
30.1 Kapazität 893
30.2 Berechnung der Kapazität 895
30.3 Energieinhalt des elektrischen Feldes 900
30.4 Kondensator mit Dielektrikum 903
30.5 Das Dielektrikum – eine mikroskopische Erklärung 905
30.6 Das Gaußsche Gesetz für ein Dielektrikum 908
30.7 Die Vektorgrößen des elektrischen Feldes 912
Fragen 916
Aufgaben 917

31 Strom und Widerstand 926
31.1 Stromstärke und Stromdichte 926
31.2 Widerstand, spezifischer Widerstand, Leitfähigkeit 930
31.3 Das Ohmsche Gesetz 935
31.4 Eine mikroskopische Deutung des Ohmschen Gesetzes 938
31.5 Energieübertragung in einem Stromkreis 941
Fragen 943
Aufgaben 945

32 Spannungsquellen und Stromkreise 949
32.1 Die elektromotorische Kraft 949
32.2 Berechung der Stromstärke 952
32.3 Andere einfache Stromkreise 953
32.4 Berechnung der Spannung 955
32.5 Verzweigte Stromkreise 958
32.6 Strom- und Spannungsmessung 961
32.7 Die Potentiometerschaltung 962
32.8 Stromkreis mit Widerstand und Kondensator (*RC*-Kreis) 963
Fragen 969
Aufgaben 970

33 Das magnetische Feld 979
33.1 Das magnetische Feld 979

33.2 Die magnetische Flußdichte B 980
33.3 Die magnetische Kraft auf einen elektrischen Strom 984
33.4 Drehmoment auf eine stromdurchflossene Leiterschleife 988
33.5 Der Hall-Effekt 992
33.6 Ladungen auf einer Kreisbahn 995
33.7 Zyklotron und Synchrotron 997
33.8 Die Entdeckung des Elektrons 1001
Fragen 1003
Aufgaben 1004

34 Das Magnetfeld elektrischer Ströme 1015
34.1 Das Ampèresche Gesetz 1015
34.2 Magnetfeld um einen unendlich langen Leiter 1019
34.3 B-Linien 1022
34.4 Zwei parallele, stromdurchflossene Leiter 1024
34.5. Das Magnetfeld einer stromdurchflossenen Spule 1027
34.6 Das Biot-Savartsche Gesetz 1031
Fragen 1036
Aufgaben 1038

35 Das Induktionsgesetz 1048
35.1 Die Faradayschen Versuche 1048
35.2 Das Faradaysche Induktionsgesetz 1050
35.3 Die Lenzsche Regel 1051
35.4 Quantitative Fassung des Induktionsgesetzes 1053
35.5 Zeitlich veränderliches Magnetfeld 1059
35.6 Das Betatron 1063
35.7 Die Relativbewegung bei einem Induktionsvorgang 1066
Fragen 1070
Aufgaben 1074

36 Selbstinduktion und Gegeninduktion 1084
36.1 Beschreibung der Selbstinduktion 1084
36.2 Berechnung der (Selbst-)Induktivität 1086
36.3 Stromkreis mit Widerstand und Induktivität (RL-Kreis) 1088
36.4 Energieinhalt des Magnetfeldes 1092
36.5 Energiedichte des Magnetfeldes 1095
36.6 Gegeninduktion 1098
Fragen 1100
Aufgaben 1101

37 Magnetische Eigenschaften der Materie 1106
37.1 Monopole und Dipole 1106
37.2 Das Gaußsche Gesetz für das Magnetfeld 1110

37.3 Das Magnetfeld der Erde . . . 1112
37.4 Paramagnetismus . . . 1115
37.5 Diamagnetismus . . . 1118
37.6 Ferromagnetismus . . . 1121
37.7 Magnetisches Moment des Atomkerns . . . 1128
37.8 Die Vektoren des Magnetfeldes . . . 1131
Fragen . . . 1137
Aufgaben . . . 1139

38 Elektromagnetische Schwingungen . . . 1143
38.1 Schwingungen eines *LC*-Kreises . . . 1143
38.2 Analogie zur harmonischen Bewegung . . . 1147
38.3 Quantitative Beschreibung der elektromagnetischen Schwingung . . . 1148
38.4 Ein Exkurs: Konzentrierte und gleichmäßig verteilte Elemente eines schwingungsfähigen Systems . . . 1152
38.5 Elektromagnetischer Hohlraumresonator . . . 1154
Fragen . . . 1158
Aufgaben . . . 1159

39 Wechselströme . . . 1163
39.1 Einführung . . . 1163
39.2 Die Elemente eines Wechselstromkreises . . . 1164
39.3 Der *RCL*-Wechselstromkreis . . . 1169
39.4 Die Leistung in einem Wechselstromkreis . . . 1172
39.5 Resonanz in einem Wechselstromkreis . . . 1176
39.6 Wechselstromgleichrichter, Wechselstromfilter . . . 1178
39.7 Der Transformator . . . 1182
Fragen . . . 1185
Aufgaben . . . 1187

40 Die Maxwellschen Gleichungen . . . 1192
40.1 Die Grundgleichungen der Elektrodynamik . . . 1192
40.2 Induzierte Magnetfelder . . . 1193
40.3 Der Verschiebungsstrom . . . 1196
40.4 Die Maxwellschen Gleichungen . . . 1198
40.5 Maxwellsche Gleichungen und Hohlraumschwingungen . . . 1200
Fragen . . . 1203
Aufgaben . . . 1204

41 Elektromagnetische Wellen . . . 1209
41.1 Einführung . . . 1209
41.2 Das elektromagnetische Spektrum . . . 1209
41.3 Elektromagnetische Strahlung aus dem Weltraum . . . 1212
41.4 Übertragungsleitungen . . . 1213
41.5 Die Feldverteilung in einem Koaxialkabel . . . 1216
41.6 Hohlleiter . . . 1219

41.7 Das Strahlungsfeld eines Dipols 1222
41.8 Fortschreitende Wellen und Maxwellsche Gleichungen 1224
41.9 Der Poynting-Vektor 1229
Fragen 1233
Aufgaben 1234

42 Natur und Ausbreitungseigenschaften des Lichts 1240
42.1 Einführung 1240
42.2 Energie und Impuls 1241
42.3 Die Lichtgeschwindigkeit 1245
42.4 Bewegte Lichtquellen und Beobachter 1248
42.5 Der Doppler-Effekt 1251
Fragen 1255
Aufgaben 1256

43 Reflexion und Brechung – ebene Wellen und ebene Grenzflächen 1260
43.1 Reflexion und Brechung 1260
43.2 Das Huygenssche Prinzip 1266
43.3 Huygenssches Prinzip und Reflexionsgesetz 1267
43.4 Huygenssches Prinzip und Brechungsgesetz 1268
43.5 Totalreflexion 1271
43.6 Das Fermatsche Prinzip 1276
Fragen 1278
Aufgaben 1279

44 Reflexion und Brechung – Kugelwellen und sphärische Grenzflächen 1284
44.1 Geometrische Optik und Wellenoptik 1284
44.2 Kugelwellen – ebener Spiegel 1287
44.3 Kugelwellen – sphärische Spiegel 1291
44.4 Brechung an sphärischen Flächen 1298
44.5 Dünne Linsen 1304
44.6 Optische Instrumente 1312
Fragen 1316
Aufgaben 1319

45 Interferenz 1328
45.1 Das Experiment von Young 1328
45.2 Kohärenz 1333
45.3 Intensitätsverteilung beim Versuch von Young 1337
45.4 Überlagerung von harmonischen Wellen 1339
45.5 Interferenz an dünnen Schichten 1342
45.6 Umkehrbarkeit und Phasenänderungen bei Reflexion 1348
45.7 Das Michelson-Interferometer 1350
Fragen 1351
Aufgaben 1353

46 Beugung . . . 1360
46.1 Einführung . . . 1360
46.2 Beugung am Spalt . . . 1363
46.3 Beugung am Spalt – qualitative Behandlung . . . 1366
46.4 Beugung am Spalt – quantitative Behandlung . . . 1369
46.5 Beugung an einer Lochblende . . . 1372
46.6 Interferenz und Beugung am Doppelspalt . . . 1376
Fragen . . . 1381
Aufgaben . . . 1383

47 Gitter und Spektren . . . 1388
47.1 Einführung . . . 1388
47.2 Mehrfachspalte . . . 1388
47.3 Beugungsgitter . . . 1393
47.4 Das Auflösungsvermögen eines Gitters . . . 1397
47.5 Röntgenbeugung . . . 1400
47.6 Die Bragg-Bedingung . . . 1403
Fragen . . . 1408
Aufgaben . . . 1409

48 Polarisation . . . 1415
48.1 Polarisation . . . 1415
48.2 Polarisationsfilter . . . 1417
48.3 Polarisation durch Reflexion . . . 1421
48.4 Doppelbrechung . . . 1423
48.5 Zirkulare Polarisation . . . 1431
48.6 Drehimpuls des Lichts . . . 1435
48.7 Streuung des Lichts . . . 1436
48.8 Zweifache Streuung . . . 1438
Fragen . . . 1438
Aufgaben . . . 1440

49 Licht und Quantenphysik . . . 1444
49.1 Ein neuer Zugang . . . 1444
49.2 Wärmestrahlung und Quanten . . . 1444
49.3 Das Plancksche Strahlungsgesetz . . . 1449
49.4 Die Quantisierung der Energie . . . 1451
49.5 Energiequantisierung und die Wärmekapazität von Festkörpern . . . 1455
49.6 Der photoelektrische Effekt . . . 1459
49.7 Einsteins Photonentheorie . . . 1462
49.8 Der Compton-Effekt . . . 1465
49.9 Linienspektren . . . 1470
49.10 Niels Bohr und das Wasserstoffatom . . . 1472
49.11 Das Bohrsche Korrespondenzprinzip . . . 1477
49.12 Die Grenzen der Bohrschen Theorie . . . 1480
Fragen . . . 1483
Aufgaben . . . 1485

50	Die Wellennatur der Materie	1494
50.1	Die de Broglie-Wellenlänge	1494
50.2	De Broglie-Wellen und Bohrsche Bahnen	1496
50.3	Überprüfung der de Broglieschen Hypothese	1497
50.4	Wellen, Wellenpakete und Teilchen	1502
50.5	Die Heisenbergschen Unschärferelationen	1505
50.6	Die Unschärferelationen – ein Fallbeispiel	1508
50.7	Eine weitere Unschärferelation	1510
50.8	Wellenfunktion und Schrödinger-Gleichung	1511
50.9	Ein Teilchen in einem Potentialtopf	1513
50.10	Das Wasserstoffatom	1521
50.11	Der Tunneleffekt	1523
50.12	Wellen und Teilchen	1528
	Fragen	1532
	Aufgaben	1535
51	Die Struktur der Atome	1540
51.1	Wie sieht ein Atom aus?	1540
51.2	Das Wasserstoffatom und die Schrödinger-Gleichung	1540
51.3	Bahndrehimpuls und Magnetismus	1543
51.4	Quantisierung des Bahndrehimpulses	1546
51.5	Der Stern-Gerlach-Versuch	1550
51.6	Der Spin des Elektrons	1554
51.7	Wissenschaft, Technologie und Spin	1557
51.8	Ordnung der Energiezustände des Wasserstoffatoms	1560
51.9	Der Grundzustand des Wasserstoffatoms	1563
51.10	Der erste angeregte Zustand des Wasserstoffatoms	1564
51.11	Untersuchung des Atoms in einem Magnetfeld	1567
	Fragen	1571
	Aufgaben	1573
52	Atomphysik: ausgewählte Themen	1578
52.1	Auswirkungen der Wellenmechanik	1578
52.2	Röntgenstrahlen und die Ordnung der Elemente	1578
52.3	Aufbau der Atome	1585
52.4	Aufbau des Periodensystems der Elemente	1588
52.5	Laser und Laserlicht	1591
52.6	Einstein und der Laser	1594
52.7	Die Arbeitsweise eines Lasers	1596
	Fragen	1600
	Aufgaben	1602
53	Elektrische Leitung in Festkörpern	1608
53.1	Die Eigenschaften von Festkörpern	1608
53.2	Leitungselektronen in Metallen	1608
53.3	Besetzung der erlaubten Zustände	1612

53.4 Der spezifische Widerstand von Metallen . . . 1617
53.5 Energiebänder und Energielücken . . . 1619
53.6 Leiter, Isolatoren und Halbleiter . . . 1623
53.7 Weitere Eigenschaften von Halbleitern . . . 1624
53.8 Dotierung von Halbleitern . . . 1625
53.9 pn-Übergänge . . . 1629
53.10 Der Halbleitergleichrichter . . . 1633
53.11 Die Leuchtdiode . . . 1635
53.12 Der Transistor . . . 1638
Fragen . . . 1640
Aufgaben . . . 1642

54 Einführung in die Kernphysik . . . 1649
54.1 Die Entdeckung des Atomkerns . . . 1649
54.2 Einige Eigenschaften des Atomkerns . . . 1652
54.3 Radioaktiver Zerfall . . . 1661
54.4 Alpha-Zerfall . . . 1664
54.5 Beta-Zerfall . . . 1667
54.6 Meßgrößen für ionisierende Strahlung . . . 1670
54.7 Kernreaktionen . . . 1673
54.8 Kernmodelle . . . 1677
Fragen . . . 1683
Aufgaben . . . 1685

55 Kernenergie . . . 1697
55.1 Der Kern und das Atom . . . 1697
55.2 Das Prinzip der Kernspaltung . . . 1699
55.3 Der Mechanismus der Kernspaltung . . . 1702
55.4 Das Prinzip eines Kernreaktors . . . 1705
55.5 Ein natürlicher Reaktor . . . 1710
55.6 Thermonukleare Fusion . . . 1713
55.7 Thermonukleare Fusion in der Sonne und in anderen Sternen . . . 1716
55.8 Kontrollierte Kernfusion . . . 1719
55.9 Der Tokamak . . . 1721
55.10 Laserfusion . . . 1724
Fragen . . . 1727
Aufgaben . . . 1728

56 Physik der Elementarteilchen und Kosmologie . . . 1736
56.1 Wechselwirkungen von Teilchen . . . 1736
56.2 Teilchenfamilien . . . 1740
56.3 Erhaltungssätze . . . 1745
56.4 Das Quarkmodell . . . 1749
56.5 Kosmologie und Urknall . . . 1756
56.6 Nukleosynthese . . . 1763

56.7 Das Alter des Universums 1770
Fragen 1775
Aufgaben 1777

Ergänzungen 1782
VI Die Maxwellschen Gleichungen in differentieller Form – die Gleichung der elektromagnetischen Welle 1782
VI.1 Einführung 1782
VI.2 Der Nabla-Operator 1783
VI.3 Die Maxwellschen Gleichungen in differentieller Form – I 1784
VI.4 Die Maxwellschen Gleichungen in differentieller Form – II 1786
VI.5 Die Wellengleichung 1787
VII Supraleitung 1789

Anhang 1793
A Das internationale Einheitssystem (SI) 1793
B Einige Fundamentalkonstanten der Physik 1797
C Einige Angaben über Sonne, Erde und Mond 1798
D Das Planetensystem der Sonne 1799
E Periodensystem der Elemente 1801
F Die Elementarteilchen der Physik 1802
G Umrechnungsfaktoren; Gegenüberstellung anglo-amerikanischer mit metrischen Einheiten 1804
H Mathematische Symbole; Griechisches Alphabet 1808
I Mathematische Formeln 1809
J Nobelpreisträger der Physik 1812

Sach- und Namenverzeichnis 1819

26 Ladung und Materie

26.1 Vorbemerkungen zum Elektromagnetismus

Die älteste bekannte Beschreibung eines elektrischen Phänomens geht auf Thales von Milet (um 600 v. Chr.) zurück. Er beobachtete, daß Strohfasern von Bernstein angezogen wurden, wenn dieser vorher kräftig gerieben wurde. Auch Beobachtungen magnetischer Phänomene sind schon frühzeitig beschrieben worden. In der Antike kannte man die Eigenschaft bestimmter Steine – es handelte sich dabei um Stücke aus Magnetit –, Eisenteilchen anzuziehen. Die Gebiete der Elektrizität und des Magnetismus entwickelten sich bis in das 19. Jahrhundert hinein getrennt voneinander. Erst Hans Christian Oersted (1777–1851) entdeckte 1820 einen Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Erscheinungen, nämlich daß ein elektrischer Strom in einem Metalleiter die Magnetnadel eines Kompasses anzog (Abschn. 33.1).

Die Wissenschaft vom Elektromagnetismus wurde in den folgenden Jahren von vielen Gelehrten weiterentwickelt, von denen Michael Faraday (1791–1867) sicher der bedeutendste war. James C. Maxwell (1831–1879) konnte die Erkenntnisse über den Elektromagnetismus in den nach ihm benannten Gleichungen zusammenfassen (Tab. 40.1, Abschn. 40.4). Diese Gesetze spielen für den Elektromagnetismus dieselbe Rolle wie die Newtonschen Axiome für die Mechanik.

Sicherlich beruhen die *Maxwellschen Gleichungen* maßgeblich auf den umfangreichen Arbeiten vieler anderer Wissenschaftler, doch Maxwell fügte wesentliche neue Beiträge hinzu. Er erkannte, daß auch das Licht elektromagnetischer Natur ist und daß man seine Geschwindigkeit allein durch elektrische und magnetische Messungen bestimmen kann. Der Bereich der Optik war damit eng mit der Elektrizitätslehre und dem Magnetismus verknüpft. Der Geltungsbereich der Maxwellschen Gleichungen ist sehr umfassend, die theoretischen Grundlagen aller elektrischen und optischen Geräte, wie Elektromotor, Radio, Fernsehen, Radar, Mikroskop und Teleskop gehen auf sie zurück.

Nach Maxwell bauten Oliver Heaviside (1850–1925) und Hendrik A. Lorentz (1853–1928) die Theorie des klassischen Elektromagnetismus weiter aus. Heinrich Hertz (1857–1894) konnte durch seine Arbeiten über die „Maxwell-Wellen" und durch die Entdeckung der Radiokurzwellen die Maxwellsche Theorie auch experimentell untermauern. Durch G. Marconi (1874–1937) und andere fanden die elektromagnetischen Wellen in den nachfolgenden Jahrzehnten auch praktische Anwendung.

Auch heute stellen die Maxwellschen Gleichungen die theoretische Grundlage vieler praktischer Probleme dar. Andererseits versucht man sie mit dem Ziel einer allgemeineren Theorie zu erweitern, innerhalb der der Elektromagnetismus nur einen Sonderfall darstellt. Auch die Gravitation und alle Quantenphänomene sollen von dieser verallge-

meinerten Theorie umfaßt werden, doch ist eine derartige Vereinheitlichung bis heute nicht gelungen.

26.2 Elektrische Ladung

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der elektrischen Ladung und ihrer Beziehung zur Materie beschäftigen. Man kann leicht zeigen, daß es *zwei verschiedene Arten von Ladungen* gibt. Wenn man einen Glasstab an einem Ende mit einem Seidentuch reibt und dann an einem Faden aufhängt (Abb. 26.1), wird dieser Glasstab von einem anderen, ebenfalls geriebenen Glasstab abgestoßen. Verwendet man als zweiten Körper hingegen einen Kunststoffstab (z. B. aus Plexiglas) und reibt diesen mit einem Fell, so ziehen sich beide Stäbe an. Zwei geriebene Stäbe aus Kunststoff stoßen sich wiederum ab. Diese Erscheinungen werden durch die Existenz von elektrischen Ladungen erklärt, die beim Reiben in den Stäben auftreten und aufeinander Kräfte ausüben. Offenbar muß die Ladung auf dem Glasstab eine andere sein als die auf dem Plastikstab.

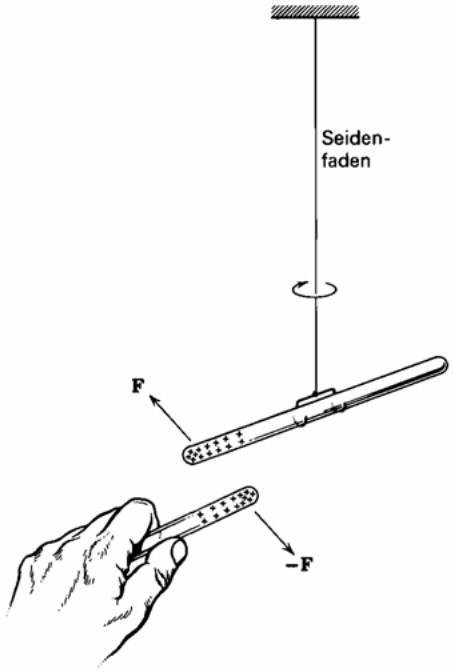


Abb. 26.1 Zwei positiv geladene Glasstäbe stoßen sich ab.

Der amerikanische Physiker Benjamin Franklin (1706–1790) nannte die auf einem Glasstab entstehende Ladung *positiv*, die auf einem Kunststoffstab (zu seiner Zeit nahm man Schellack) entstehende Ladung *negativ*. Diese Bezeichnungen haben sich bis heute erhalten. Das Resultat der Experimente ist daher: *Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab, ungleichnamige Ladungen ziehen sich an.*

Auch andere Materialien als Glas und Kunststoffe werden durch Reiben mehr oder weniger stark aufgeladen. Die dabei entstehende Ladung kann man mit der durch einen Seidenlappen auf einem Glasstab erzeugten Ladung oder mit der durch ein Fell auf einem Kunststoffstab erzeugten Ladung vergleichen und so ihr Vorzeichen bestimmen.

Vom heutigen Standpunkt aus wissen wir, daß kondensierte Materie im normalen bzw. neutralen Zustand gleich viele positive wie negative Ladungen enthält. Wenn zwei Körper, wie ein Glasstab und ein Seidentuch, aneinander reiben, so gehen Ladungen von dem einem Körper auf den anderen über, wodurch sie nicht mehr neutral sind. In unserem Fall wird das Glas positiv und die Seide negativ geladen.

26.3 Leiter und Isolatoren

Wenn man einen Metallstab mit einem Tuch reibt, scheint sich keine Ladung auf dem Stab anzusammeln. Befestigt man den Stab aber an einem Glas- oder Plastikhenkel und berührt ihn beim Reiben nicht mit der Hand, so lädt auch er sich auf. Die Erklärung ist in der elektrischen Leitfähigkeit des Materials zu suchen. Metalle, der menschliche Körper und die Erde stellen für die Elektrizität *Leiter* dar, Glas und Plastik aber sind *Isolatoren* oder *Dielektrika*.

In einem Leiter können sich elektrische Ladungen frei durch das Material bewegen, in einem Isolator nicht. Obwohl es keine absoluten Isolatoren gibt, verhalten sich doch viele Materialien praktisch wie perfekte Isolatoren. Quarzglas isoliert zum Beispiel 10^{25}mal besser als Kupfer.

Mit einem Versuch kann man zeigen, daß sich in einem Metall nur die negativen Ladungen bewegen können (Hall-Effekt, Abschn. 33.5), während die positiven Ladungen, wie in Glas oder anderen Isolatoren, unbeweglich sind. Die eigentlichen Ladungsträger in Metallen sind *freie Elektronen*. Wenn Einzelatome zu einem metallischen Körper zusammengefügt werden, bleiben die äußeren Hüllenelektronen nicht mehr ihren einzelnen ursprünglichen Atomen zugeordnet, sondern können sich über den gesamten Festkörper ausbreiten. In manchen Leitern, wie z. B. den Elektrolyten, können sich sowohl positive wie negative Ladungsträger bewegen.

Eine besondere Klasse von Stoffen, die *Halbleiter*, nehmen eine Mittelstellung bezüglich der elektrischen Leitfähigkeit ein. Zu diesen Materialien gehören die Elemente Silicium und Germanium. Halbleiter finden eine vielseitige Verwendung in der Industrie, zum Beispiel für Transistoren und integrierte Schaltkreise. Die Wirkungsweise von Halbleitern kann man nur mit Hilfe quantenphysikalischer Eigenschaften erklären. In Abb. 26.2 sind die grundlegenden Merkmale von Leitern, Halbleitern und Nichtleitern dargestellt.

In einem Festkörper können die Elektronen nur bestimmte Energiezustände einnehmen, die bestimmten Energiebändern zugeordnet sind. Energiezustände in den Zwischenräumen sind nicht erlaubt. In jedem erlaubten Energieniveau können sich zwei Elektronen aufhalten. Sie können ihre Energie nicht erhöhen (d. h. sich nicht frei bewegen), bevor nicht Plätze in anderen, höheren Energieniveaus frei werden.

Die Abb. 26.2a zeigt die Energiebänder in einem Leiter, z. B. Kupfer. Das Energieband 1 ist nicht vollständig mit Elektronen aufgefüllt, so daß sie leicht in höhere Niveaus gelangen können

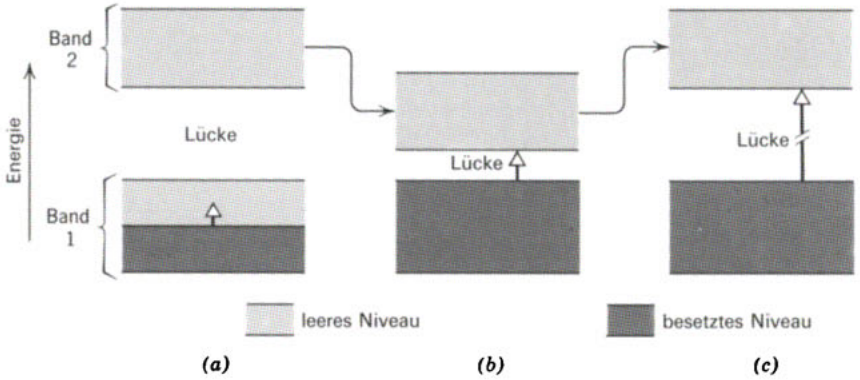


Abb. 26.2 Bändermodell (a) eines Leiters, (b) eines Eigenhalbleiters und (c) eines Nichtleiters. In (b) ist der Abstand der Bänder gering und in (c) relativ groß. Bei Eigenhalbleitern wird die elektrische Leitfähigkeit oft durch Dotierung mit anderen Elementen, wie Arsen oder Bor, erhöht.

und sich dann durch das Metall bewegen können. In Abb. 26.2 b sind die Energiebänder in einem Halbleiter gezeichnet, hier Silicium. Band 1 ist vollständig mit Elektronen aufgefüllt, aber Band 2 liegt (energetisch) so nahe bei Band 1, daß die Elektronen ohne großen Energieaufwand (die erforderliche Energie können sie durch thermische Bewegung aufnehmen) in das leere Band 2 übertreten können. In Abb. 16.2 c schließlich sind die Energiebänder in einem Isolator, hier NaCl, gezeigt. Auch hier ist das Band 1 mit Elektronen aufgefüllt, aber das nächste Band 2 ist (energetisch) so weit entfernt, daß kaum eines der Elektronen den großen Zwischenraum (durch zusätzliche Energieaufnahme) überwinden kann.

26.4 Das Coulombsche Gesetz

Charles A. de Coulomb (1736–1806) hat sich ausführlich mit den elektrischen Anziehungs- und Abstoßungskräften beschäftigt, und er konnte auch eine physikalische Beziehung dafür aufstellen. Coulombs Meßapparatur ist in Abb. 26.3 abgebildet. Sie ähnelt im Prinzip der in Abb. 26.1 dargestellten Anordnung, nur daß auf den Enden der Stäbe kleine Kugeln sitzen, auf denen sich die Ladungen ansammeln können. Falls die Kugeln a und b Ladungen tragen, wird die auf a wirkende elektrische Kraft versuchen, den Faden zu verdrillen. Um die Torsion aufzuheben, drehte er den Aufhängeknopf um einen entsprechenden Winkel. Dessen Größe war dann ein mittelbares Maß für die auf die Kugel a wirkende Kraft. Eine solche Anordnung nennt man eine *Drehwaage*. Später wurde eine Drehwaage auch von Cavendish benutzt, um die Massenanziehung zu bestimmen (Abschn. 16.3).

Coulombs Ergebnisse können durch folgende Beziehung zusammengefaßt werden:

$$F \sim \frac{1}{r^2}.$$

F ist der Betrag der Kraft, die auf jede der beiden Ladungen a und b wirkt, und r der

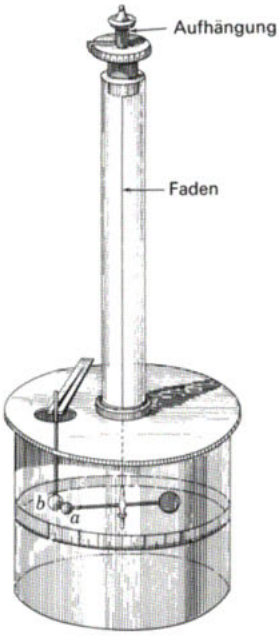


Abb. 26.3 Die Coulombsche Torsionswaage. Zeichnung aus einem Bericht Coulombs aus dem Jahre 1785 an die Französische Akademie der Wissenschaften.

Abstand der Ladungen. Nach dem dritten Newtonschen Axiom wirken die Coulombschen Kräfte längs der Verbindungslinie zwischen den Ladungen, nur daß sie für die beiden Ladungen in entgegengesetzte Richtungen weisen. Dabei ist festzuhalten, daß der Betrag der Kraft auf jede Ladung gleich groß ist, auch wenn die beiden Ladungen verschieden groß sind. Die Kraft hängt ferner vom Produkt beider Ladungen ab. Die zwischen den Ladungen Q_1 und Q_2 wirkende Kraft läßt sich damit durch

$$F \sim \frac{|Q_1||Q_2|}{r^2} \tag{26.1}$$

angeben. Diese Beziehung gilt nur für Ladungen, die keine räumliche Ausdehnung haben (*Punktladung*) bzw. bei denen die räumliche Ausdehnung gegenüber dem Abstand r vernachlässigbar ist.

Sie erinnert an das Gravitationsgesetz, welches zu dieser Zeit schon mehr als 100 Jahre bekannt war. Die Masse m wird einfach durch die Ladung Q ersetzt. Bei der Gravitation kennt man aber nur Anziehungskräfte. Das heißt, es gibt zwei Arten von elektrischen Ladungen, aber augenscheinlich nur eine Art von Masse.

Die Anerkennung dieser Beziehung basiert natürlich nicht nur auf den Coulombschen Versuchen allein, denn Coulombs Untersuchungen mit der Drehwaage konnten nur mit einer Genauigkeit von einigen Prozent durchgeführt werden. In Abschn. 28.7 werden wir zeigen, daß man mit neueren Messungen den Exponenten von r mit einer Genauigkeit von $\pm(3\times10^{-16})$ bestimmen kann.

Bislang haben wir noch keine Einheit für die physikalische Größe Ladung festgelegt.

Man könnte derart verfahren, daß man einfach zwei gleich große Ladungen auf die Kugeln einer Drehwaage bringt und die Kraft F bei einem Abstand r bestimmt. Man könnte dann diejenige Ladung Q als Ladungseinheit definieren, die gerade eine Krafteinheit auf jede Ladung erzeugt, wenn diese genau eine Längeneinheit voneinander entfernt sind.

Aus praktischen Erwägungen wird die Ladung aber nicht aufgrund eines solchen Versuchs mit einer Drehwaage definiert, sondern sie wird auf die Einheit des elektrischen Stromes zurückgeführt. Wenn die Enden eines langen Drahtes mit den Polen einer Batterie verbunden werden, fließt im Leiter ein *elektrischer Strom* der Stärke I. Dieser Strom rührt von den sich bewegenden Ladungen her. Die SI-Einheit für die elektrische Stromstärke ist das *Ampere*, Symbol A. In Abschn. 34.4 werden wir auf die genaue Definition des Ampere zurückkommen.

Die SI-Einheit der Ladung (Elektrizitätsmenge) ist das *Coulomb*, Symbol C. *Es entspricht derjenigen Ladung, die in 1 Sekunde von einem elektrischen Strom der Stromstärke 1 Ampere durch einen Leiter transportiert wird.* Zwischen den physikalischen Größen Ladung Q, Stromstärke I und Zeit t besteht also die Beziehung

$$Q = I\,t. \tag{26.2}$$

Wenn man sich mit einem Kamm einmal durch das Haar streicht, sammelt man eine Ladung von etwa 1 μC auf dem Kamm an. Ein Blitz transportiert zwischen einer Wolke und der Erde eine Ladung von einigen Coulomb.

Beispiel 1

Eine Kupfermünze habe eine Masse von 3.1 g. Da sie elektrisch neutral ist, enthält sie gleichviel positive und negative Ladung. Wie groß ist der Betrag dieser Ladungen? Ein Kupferatom trägt eine positive Kernladung von 4.6×10^{-18} C und eine gleich große negative Elektronenladung.

Die Anzahl N der Atome in der Münze erhält man aus der Beziehung

$$\frac{N}{N_A} = \frac{m}{M},$$

wobei N_A die Avogadro-Konstante, m die Masse der Münze und M die relative Atommasse von Kupfer ist. Setzt man diese Werte ein und löst nach N auf, so ergibt sich

$$N = \frac{(6 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1})(3.1\ \text{g})}{64\ \text{g/mol}} = 2.9 \times 10^{22}.$$

Die Ladung Q erhält man damit zu

$$Q = (4.6 \times 10^{-18}\ \text{C})(2.9 \times 10^{22}) = 1.3 \times 10^{5}\ \text{C}.$$

Durch eine 100-W-Glühbirne fließt bei einer Spannung von 220 V ein Strom von 0.45 A. Es wird also ungefähr 80 Stunden dauern, bis die oben genannte Ladung durch die Wendel der Glühbirne geflossen ist.

Die Beziehung 26.1 kann man zu einer (Vektor-)Gleichung vervollständigen. Der Proportionalitätsfaktor wird aus Gründen, die wir an dieser Stelle nicht erörtern (s. Abschn. 28.5) mit $1/(4\pi\varepsilon_0)$ angegeben, so daß man

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^3} (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \tag{26.3}$$

erhält.

Dies ist das *Coulombsche Gesetz*. $\boldsymbol{r}_1$ bzw. $\boldsymbol{r}_2$ sind darin die Ortsvektoren der Ladungen Q_1 bzw. Q_2 und ε_0 die *elektrische Feldkonstante*. Sie hat einen Wert von

$$\varepsilon_0 = 8.854187818 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/(Nm^2)}.$$

Für uns genügt es, den Wert $8.9 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/(Nm^2)}$ anzunehmen; für den Faktor $1/4\pi\varepsilon_0$ verwenden wir mit einer in diesem Buch ausreichenden Genauigkeit den Wert

$$1/4\pi\varepsilon_0 = 9.0 \times 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}.$$

Beispiel 2

Es seien alle positiven und negativen Ladungen in einer Kupfermünze soweit voneinander getrennt, daß zwischen ihnen eine Anziehungskraft von 1.0 N wirkt. Wie groß ist der Abstand r?

Es gilt:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}.$$

Da die Ladungsmengen gleich groß sind, also $Q_1 Q_2 = Q^2$ gilt, ergibt sich

$$r = Q\sqrt{\frac{1/4\pi\varepsilon_0}{F}} = 1.3 \times 10^5\ \mathrm{C}\sqrt{\frac{9.0 \times 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}}{1.0\ \mathrm{N}}}$$
$$= 12.3 \times 10^9\ \mathrm{m}.$$

Das entspricht einer Strecke von 1930 Erdradien. Welche Kraft wirkt zwischen den beiden Ladungen, wenn sie nur 1 m voneinander entfernt sind?

Die Gl. 26.3 kann auch verwendet werden, wenn mehr als zwei Ladungen wechselwirken. Für jedes Ladungspaar ergibt sich dann eine Teilkraft. Alle Teilkräfte setzen sich zu einer Gesamtkraft bezüglich einer Ladung zusammen. Auf die Ladung Q_1 wird durch alle anderen vorhandenen Ladungen Q_i die Kraft

$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{13} + \boldsymbol{F}_{14} + \ldots, \tag{26.4}$$

ausgeübt, wobei zum Beispiel $\boldsymbol{F}_{12}$ die Kraft zwischen den Ladungen Q_1 und Q_2 ist.

Beispiel 3

In Abb. 26.4 sind drei ortsfeste Ladungen Q_1, Q_2 und Q_3 gezeichnet. Welche Kräfte werden auf Q_1 ausgeübt? Es sei $Q_1 = -1\times10^{-6}$ C, $Q_2 = +3\times10^{-6}$ C, $Q_3 = -2\times10^{-6}$ C, $r_{12} = 15$ cm, $r_{13} = 10$ cm und $\theta = 30°$.

Aus Gl. 26.3 erhält man unter Vernachlässigung der Vorzeichen für die Beträge

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r_{12}^2}$$

$$= \frac{(9.0\times10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2})(1.0\times10^{-6}\ \mathrm{C})(3.0\times10^{-6}\ \mathrm{C})}{(1.5\times10^{-1}\ \mathrm{m})^2} = 1.2\ \mathrm{N}$$

und

$$F_{13} = \frac{(9.0\times10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2})(1.0\times10^{-6}\ \mathrm{C})(2.0\times10^{-6}\ \mathrm{C})}{(1.0\times10^{-1}\ \mathrm{m})^2} = 1.8\ \mathrm{N}.$$

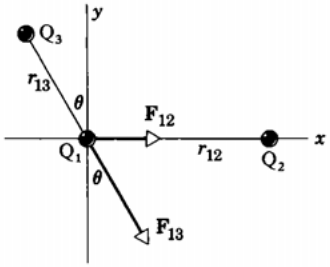


Abb. 26.4 Zu Beispiel 3. Kraftwirkung von Q_2 und Q_3 auf Q_1.

Die Richtungen der Kräfte $\boldsymbol{F}_{12}$ und $\boldsymbol{F}_{13}$ sind durch die Pfeile in der Abb. 26.4 angezeigt. Die Komponenten der resultierenden Kraft auf Q_1 sind nach Gl. 26.4 gegeben durch

$$F_{1x} = F_{12x} + F_{13x} = F_{12} + F_{13}\sin\theta$$

$$= 1.2\ \mathrm{N} + (1.8\ \mathrm{N})(\sin 30°) = 2.1\ \mathrm{N}$$

und

$$F_{1y} = F_{12y} + F_{13y} = 0 - F_{13}\cos\theta$$

$$= -(1.8\ \mathrm{N})(\cos 30°) = -1.6\ \mathrm{N}.$$

Man bestimme den Betrag der Kraft $\boldsymbol{F}_1$ und den Winkel, den sie mit der x-Achse bildet.

26.5 Die Quantelung der Ladung

Zu Benjamin Franklins Zeiten stellte man sich die elektrische Ladung als ein kontinuierliches Fluid vor, eine für sehr viele Probleme nützliche Vorstellung. Die Theorie vom atomaren Aufbau der Materie hat später gezeigt, daß eine Flüssigkeit oder ein Gas nicht kontinuierlich aufgebaut ist, sondern aus einzelnen Atomen oder Molekülen besteht. Auch die elektrische Ladung ist kein Kontinuum, sondern setzt sich aus einem ganzzahligen Vielfachen einer elektrischen Minimalladung zusammen. Diese fundamentale Ladung hat einen Wert von $1.6021892 \times 10^{-19}$ C. Jede in der Natur auftretende Ladung Q kann als ganzzahliges Vielfaches ne der *Elementarladung* e angegeben werden, wobei n positiv oder negativ sein kann.

Wenn eine physikalische Größe, wie die Ladung, nur diskrete und nicht kontinuierlich veränderbare Werte haben kann, nennt man sie *gequantelt*. Die Quantisierung von Größen bildet eine Grundlage der modernen Physik. Die Existenz von Atomen und anderen Teilchen, wie Elektronen und Protonen, zeigt an, daß auch die Masse gequantelt ist. Wir werden später noch sehen, daß sich auf atomarer Ebene andere Größen ebenfalls als gequantelt herausstellen werden, so etwa die Energie und der Drehimpuls.

Das Quantum der Elektrizitätsmenge, die Elementarladung e, ist jedoch so klein, daß die Quantenstruktur im makroskopischen Maßstab nicht mehr bemerkbar ist, so wie wir beim Atmen auch nicht merken, daß die Luft aus einzelnen Molekülen besteht.

Es gibt heute keine Theorie, die die Quantelung der Ladung (oder der Masse, also die Existenz von Elementarteilchen) vorhersagt. Selbst bei Berücksichtigung einer Quantelung können jedoch die klassische Theorie des Elektromagnetismus und die Newtonsche Mechanik das Verhalten von Masse und Ladung im atomaren Bereich nicht korrekt beschreiben. Die klassische Theorie des Elektromagnetismus beschreibt zwar exakt das Verhalten eines Stabmagneten, wenn er durch eine Leiterschleife geschoben wird, doch das molekulare Geschehen in dem Stabmagnet kann sie nicht wiedergeben. Hierfür benötigt man die genauere Theorie der Quantenphysik.

26.6 Ladung und Materie

Gewöhnlich nehmen wir an, daß sich Materie aus drei Arten von Teilchen zusammensetzt, den Elektronen, den Protonen und den Neutronen. Tab. 26.1 gibt einige Eigenschaften dieser Partikel an. Man beachte insbesonders, daß die Massen von Neutron und Proton etwa gleich groß sind, die des Elektrons aber erheblich geringer ist. Atome sind aus dichten positiv geladenen Kernen und einer negativ geladenen Elektronenhülle

Tabelle 26.1 Die Bausteine der Atome

Teilchen	Symbol	Ladung	Masse
Proton	p	$+e$	$1.6726485 \times 10^{-27}$ kg
Neutron	n	0	$1.6749543 \times 10^{-27}$ kg
Elektron	e^-	$-e$	9.109534×10^{-31} kg

aufgebaut (Abb. 26.5). Die Kernradien reichen von 1×10^{-15} m für Wasserstoff bis zu 7×10^{-15} m für die schwersten Atome. Der äußere Durchmesser der Elektronenhülle, also der Durchmesser eines Atoms schlechthin, liegt in der Größenordnung von 0.1 bis 0.3 nm, ist also etwa 10^5mal größer als der Kerndurchmesser.

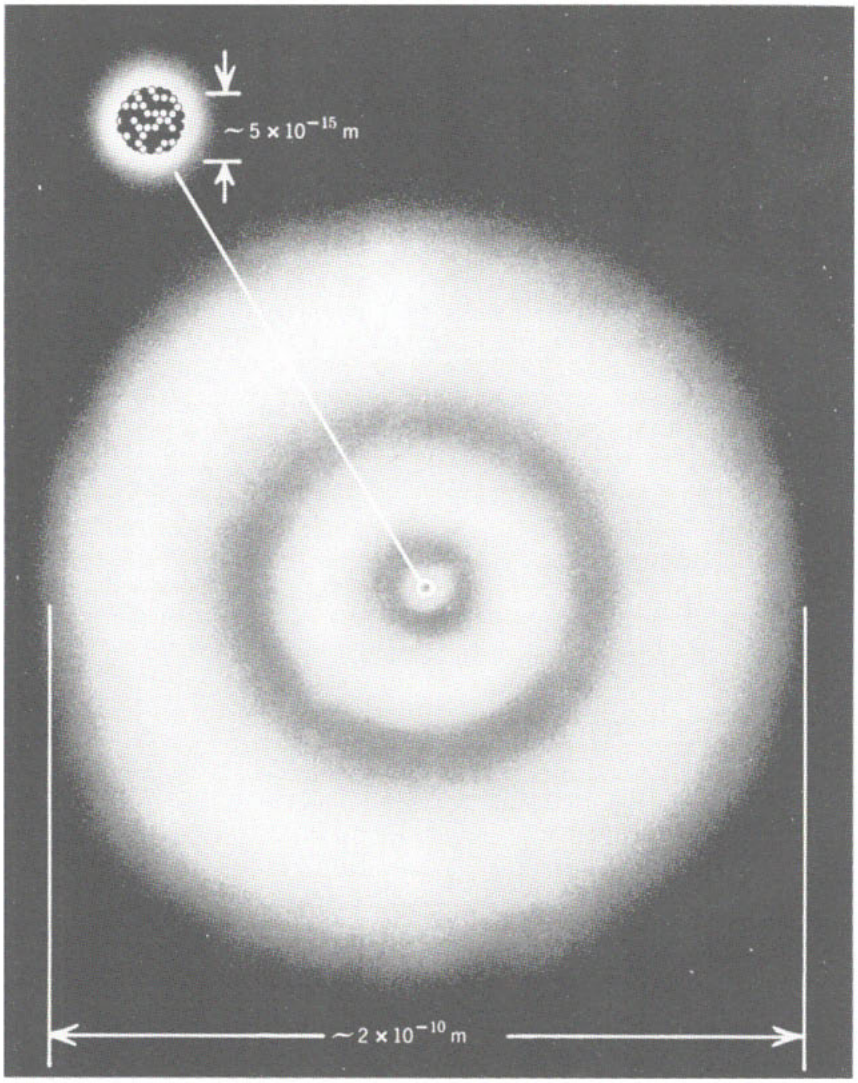


Abb. 26.5 Ein Atommodell, das die Elektronenwolken veranschaulichen soll. Oben links ist der Atomkern vergrößert herausgezeichnet.

Beispiel 4

Ein Wasserstoffatom besteht aus einem Proton und einem Elektron. Der Abstand zwischen beiden beträgt etwa 5.3×10^{-11} m. Wie groß sind (a) die Coulomb-Kraft und (b) die Massenanziehungskraft zwischen beiden Teilchen?

Nach dem Coulombschen Gesetz gilt

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

$$= \frac{(9.0 \times 10^9\ \mathrm{N\,m^2/C^2})(1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{(5.3 \times 10^{-11}\ \mathrm{m})^2} = 8.1 \times 10^{-8}\ \mathrm{N}.$$

Die Massenanziehungskraft ist durch Gl. 16.1 gegeben

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$= \frac{(6.7 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2/kg^2})(9.1 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg})(1.7 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg})}{(5.3 \times 10^{-11}\ \mathrm{m})^2} = 3.7 \times 10^{-47}\ \mathrm{N}.$$

Die elektrische Anziehungskraft ist also 10^{39}mal stärker als die Massenanziehungskraft.

Die Bedeutung des Coulombschen Gesetzes reicht weiter, als nur die Kräfte zwischen geladenen Kugeln beschreiben zu können. Im Rahmen der Quantenphysik beschreibt es exakt (a) die Bindungskräfte eines Elektrons an seinen Kern, (b) die Bindungskräfte zwischen Atomen, die ein Molekül bilden, und (c) die Bindungskräfte zwischen Atomen und Molekülen, die eine Flüssigkeit oder einen Festkörper bilden. Tatsächlich sind die meisten im täglichen Leben auftretenden Kräfte, wenn sie nicht auf Massenanziehung beruhen, elektrische Kräfte. Eine Kraft, die über ein Stahlseil übertragen wird, ist prinzipiell elektrischer Natur. Legen wir nämlich eine gedachte Ebene senkrecht durch das Seil, so wirken zwischen den Atomen beiderseits der Ebene elektrische zwischenmolekulare Anziehungskräfte, die das Seil zusammenhalten. Auch der menschliche Körper wird nur durch die Coulomb-Kräfte zwischen den atomaren Bausteinen in seiner stabilen Form zusammengehalten.

Im Atom*kern* begegnen wir einer neuen Art von Kraft, die weder elektrischer Natur ist noch eine Gravitationskraft ist. Diese starke Anziehungskraft hält die Kernbausteine, also Neutronen und Protonen, zusammen und wird *Kernkraft* oder *starke Wechselwirkung* genannt. Wäre sie nicht vorhanden, so würden die Kerne wegen der Abstoßungskraft zwischen den Protonen auseinanderfliegen. Die Natur der Kernbindung ist bis heute nur teilweise geklärt und stellt ein zentrales Problem der Kernphysik dar.

Beispiel 5

Wie groß ist die Abstoßungskraft zwischen zwei Protonen im Kern eines Eisenatoms? Der Abstand betrage 4×10^{-15} m.

Aus dem Coulombschen Gesetz folgt

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$
$$= \frac{(9.0\times 10^9\ \mathrm{N\,m^2/C^2})(1.6\times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{(4.0\times 10^{-15}\ \mathrm{m})^2}$$
$$= 14\ \mathrm{N}.$$

Diese enorme Kraft muß durch die Kernkräfte mehr als kompensiert werden. Aus diesem Beispiel und aus Beispiel 4 erkennt man, daß Kernkräfte sehr viel stärker sind als die Coulomb-Kräfte und diese wiederum sehr viel stärker als die Gravitationskräfte.

Die Coulombschen Abstoßungskräfte zwischen den Protonen eines Kerns machen diesen natürlich weniger stabil, als er es ohne sie wäre. Die spontane Emission von α-Strahlen aus schweren Kernen und die Kernspaltung sind experimentelle Beweise hierfür.

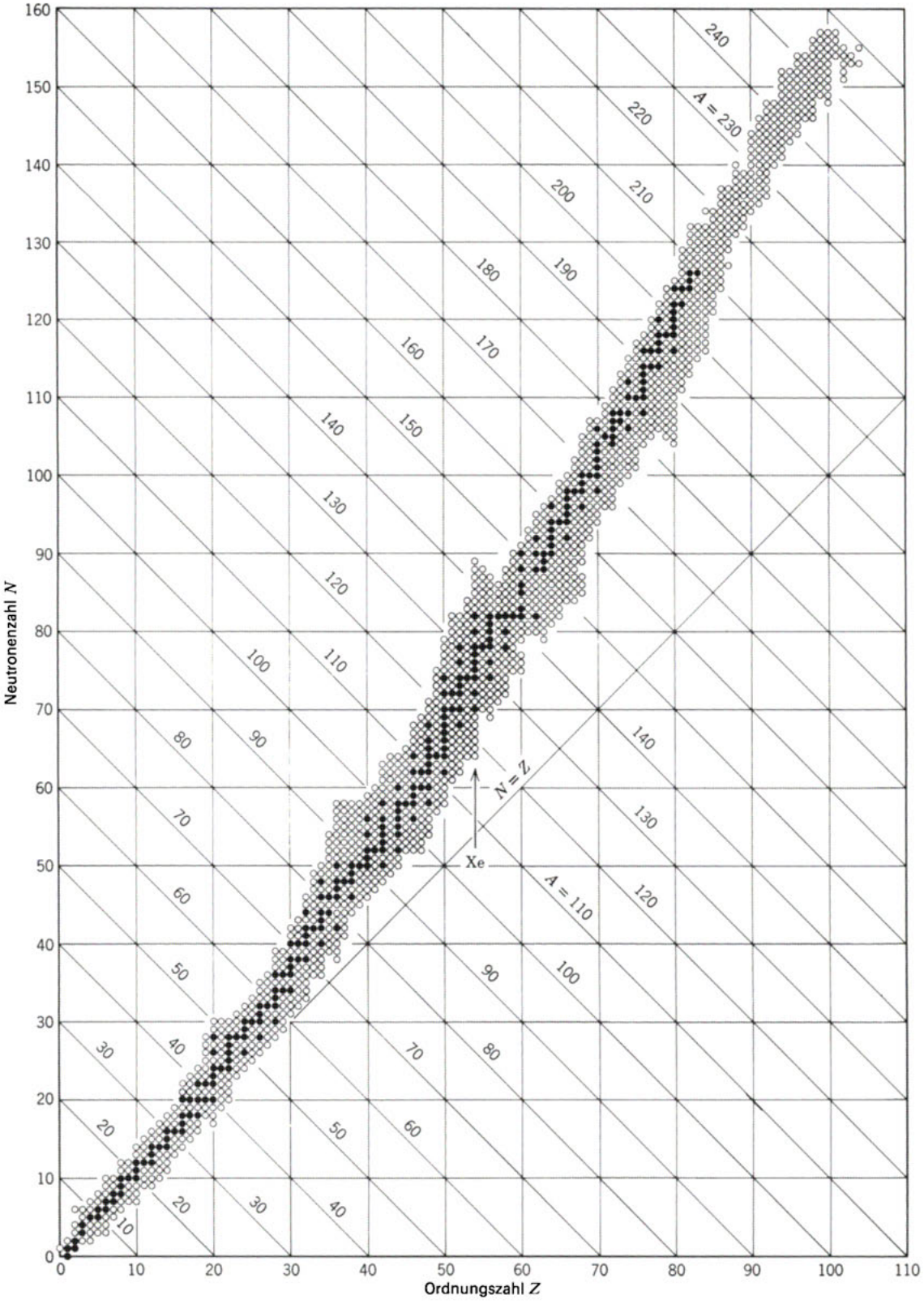
Auch die Tatsache, daß schwere Kerne mehr Neutronen als Protonen enthalten, geht auf die Coulomb-Kräfte zurück. Man betrachte die Nuklidkarte von Abb. 26.6, die für verschiedene Elemente die Neutronenzahl N in Abhängigkeit von der zugehörigen Protonenzahl (*Kernladungszahl*) Z angibt. Stabile Kerne sind durch ausgefüllte Kreise dargestellt, instabile Kerne, die spontan radioaktiv zerfallen, durch offene Kreise. Bei allen Elementen gibt es Kerne verschiedener Zusammensetzung; solche Atome desselben Elementes mit verschiedener Neutronenzahl nennt man *Isotope*.

Man sieht aus der Nuklidkarte, daß leichte Kerne, bei denen die Coulomb-Kräfte keine große Rolle spielen*, nahe bei der Geraden $N = Z$ liegen, d. h. die Neutronenzahl entspricht etwa der Protonenzahl. Die schweren Kerne haben dagegen einen zunehmenden Überschuß an Neutronen, zum Beispiel hat ^{238}U 92 Protonen und 146 Neutronen. Bei Abwesenheit von Coulomb-Kräften würde man für einen Kern mit der Nukleonenzahl 238 genau 119 Protonen und 119 Neutronen erwarten. Ein solcher Kern würde bei Vorhandensein der Coloumb-Kräfte aber auseinanderplatzen. Er wird erst dann stabil, wenn 27 seiner 119 Protonen durch Neutronen ersetzt sind. Dadurch werden die Coulomb-Kräfte abgeschwächt. Selbst dann noch ist der Kern instabil, da er (a) unter Aussendung von α-Teilchen radioaktiv zerfällt und (b) sich nach der Absorption von Neutronen in zwei Teile spaltet. Beide Prozesse führen zu einer Teilung der Kernladung und sind auf die Coulombschen Abstoßungskräfte zurückzuführen. Aus der Abb. 26.6 entnimmt man weiterhin, daß alle Kerne mit $Z > 83$ instabil sind.

Wir haben zu Beginn des Abschnitts 26.6 gesagt, daß die Materie, also die Atome, sich aus drei Teilchenarten zusammensetzt, den Elektronen, den Protonen und den Neutronen. Das ist nicht

* Die Coulomb-Kräfte spielen deshalb nur in schweren Kernen eine Rolle, weil die abstoßenden Coulomb-Kräfte zwischen jedem Paar von Protonen auftreten, die anziehenden Kernkräfte aber nicht. In ^{238}U übt jedes Proton auf die anderen 91 Protonen eine Abstoßungskraft aus. Wegen der geringen Reichweite der Kernkräfte übt aber jedes Proton (und auch Neutron) nur auf die ihm am nächsten liegenden Protonen (und Neutronen) eine Anziehungskraft aus. Mit größer werdender Kernladungszahl nehmen die Coulombschen Abstoßungskräfte stärker zu als die Kernkräfte.

Abb. 26.6 Eine Nuklidkarte. Die Neutronenzahl N ist über der Protonenzahl Z der Atomkerne aufgetragen. Die ausgefüllten Kreise repräsentieren stabile Kerne, die offenen Kreise radioaktive Kerne. So hat z. B. das Xenon ($Z = 54$) 26 Isotope, von denen 9 stabil und 17 radioaktiv sind. Jedes Xenonisotop hat 54 Protonen, während die Neutronenzahl zwischen 64 und 89 schwankt. Deswegen reicht die Nukleonenzahl $A = N + Z$ von 118 bis 143. Kein anderes Element besitzt so viele Isotope. ►


Neutronenzahl N
Ordnungszahl Z
N = Z
A = 230
A = 110
Xe
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150
160
240
220
210
200
190
180
170
150
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10

ganz korrekt, denn es gibt noch sehr viele andere Teilchen. Im Anhang F sind einige dieser Elementarteilchen mit einigen Eigenschaften aufgeführt. Die Ladungen dieser Teilchen sind in Einheiten der Elementarladung e gequantelt.

26.7 Die Erhaltung der Ladung

Reibt man einen Glasstab mit einem Seidentuch, so lädt sich der Stab positiv auf. Messungen zeigen nun, daß sich dabei gleichzeitig das Seidentuch ebenso stark, aber negativ auflädt. Beim Reiben wird also keine Ladung erzeugt, sondern nur Ladung von einem Körper auf den anderen übertragen und die elektrische Neutralität beider Körper etwas gestört. Man kann also vermuten, daß die Ladung insgesamt erhalten bleibt. Dies wurde tatsächlich in vielen Experimenten, sowohl an makroskopischen Körpern wie im mikroskopischen Bereich, ohne Ausnahme bestätigt.

Ein interessantes Beispiel für die *Ladungserhaltung* liefern uns ein Elektron (Ladung $-e$) und ein Positron (Ladung $+e$), wenn sie nahe genug aneinander gebracht werden. Beide Teilchen können bei einem solchen Experiment einfach verschwinden, indem ihre Ruhmasse aufgrund der Beziehung $E = mc^2$ zu Energie zerstrahlt. Diese Paarvernichtung wurde schon in Abschn. 8.9 beschrieben. Die entstehende Energie erscheint in Form von zwei in entgegengesetzte Richtung auseinanderfliegenden γ-Quanten:

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma. \tag{26.5}$$

Die Gesamtladung ist vor und nach dem Prozeß Null, sie bleibt also erhalten. Die Ruhmasse dagegen bleibt nicht erhalten, denn sie wurde vollständig in Strahlungsenergie verwandelt.

Ein zweites Beispiel finden wir bei einem radioaktiven Zerfall, wie

$$^{238}U \rightarrow {}^{234}Th + {}^{4}He. \tag{26.6}$$

Der radioaktive Mutterkern ^{238}U enthält 92 Protonen ($Z = 92$)*. Er zerfällt spontan unter Ausstrahlung eines α-Teilchens (^4He mit $Z = 2$) in den Kern ^{234}Th ($Z = 90$). Die gesamte Ladung von $+92e$ ist bei dem Zerfall erhalten geblieben.

Ein weiteres Beispiel für die Ladungserhaltung ist die Kernreaktion, die beim Beschuß von ^{44}Ca mit (in einem Zyklotron beschleunigten) Protonen abläuft. Dabei kann ein Neutron aus dem ^{44}Ca-Kern unter Zurücklassen eines ^{44}Sc-Kerns herausgeschlagen werden:

$$^{44}Ca + p \rightarrow {}^{44}Sc + n.$$

Die Summe der Ladungen vor der Reaktion, $20 + 1$, entspricht wiederum genau der Summe der Ladungen nach der Reaktion, $21 + 0$.

Als letztes Beispiel sei schließlich der Zerfall eines K-Mesons angeführt. Dieser erfolgt (siehe Anhang F) nach dem Schema

$$K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-.$$

Die Gesamtladung vor und nach dem Zerfall ist Null, also gleich geblieben.

* Links vom Elementsymbol steht die *Massenzahl* $A\,(N + Z)$, das ist die Gesamtzahl der Teilchen im Kern.

Fragen

1. Es seien zwei Metallkugeln auf tragbaren isolierten Ständern montiert. Wie kann man die Kugeln gleichsinnig bzw. entgegengesetzt aufladen? Es darf dazu ein Glasstab benutzt werden, der mit einem Seidentuch gerieben wurde, doch darf dieser die Kugeln nicht berühren. Müssen beide Kugeln gleich groß sein, damit die Methode funktioniert?
2. Wie kann man die beiden Kugeln von Frage 1 gleich stark und mit gleichem Vorzeichen aufladen? Müssen beide Kugeln jetzt gleich groß sein?
3. Ein elektrisch aufgeladener Stab zieht kleine Korkpulverstückchen an. Manchmal springen diese kurz nach der Berührung wieder weg. Wie kann man sich das erklären?
4. Zu Abschn. 26.2. Kann es nicht auch vier verschiedene Arten von Ladungen geben, also die auf dem Glas, auf der Seide, auf dem Kunststoff und auf dem Fell? Was spricht dagegen?
5. Wenn man eine Münze kräftig zwischen den Fingern reibt, lädt sie sich offenbar nicht auf. Warum nicht?
6. Wenn man rasch einen mit Teppich ausgelegten Flur entlanggeht und dann eine Türklinke berührt, springt manchmal ein Funken über. (a) Wieso geschieht das? (b) Wie kann man es verhindern?
7. Warum gelingen elektrostatische Versuche an einem Tag, an dem die Luftfeuchtigkeit hoch ist, nicht so gut?
8. Ein isolierter Stab trage eine elektrische Ladung. Wie kann man diese nachweisen, und wie kann man die Art der Ladung bestimmen?
9. Wenn man einen aufgeladenen Glasstab in die Nähe eines ungeladenen Metallstabs hält (vgl. Abb. 26.7), werden die Elektronen zu einem Ende des Metallstabs gezogen. Warum läßt der Zufluß der Elektronen zu diesem Ende nach, obwohl es einen unerschöpflichen Vorrat von ihnen in dem Metall gibt?

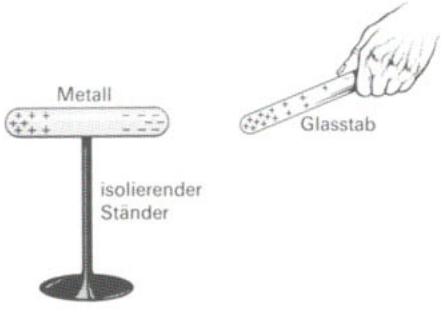


Abb. 26.7 Zu Frage 9 und 10

10. Wirkt auf den Metallstab in Abb. 26.7 insgesamt eine elektrische Kraft?
11. Eine Person steht auf einem isolierten Schemel und berührt einen geladenen isolierten Leiter. Wird der Leiter daraufhin vollständig entladen?
12. (a) Ein positiv aufgeladener Glasstab zieht einen an einem Faden aufgehängten Gegenstand an. Kann man daraus schließen, daß der Gegenstand negativ geladen ist? (b) Ein positiv aufgeladener Glasstab stößt einen an einem Faden aufgehängten Gegenstand ab. Kann man daraus schließen, daß der Gegenstand positiv geladen ist?
13. Ändert sich die von einer Ladung auf eine andere Ladung ausgeübte Kraft durch die Anwesenheit weiterer Ladungen?
14. Es sei eine Anzahl kleiner geladener Kugeln gegeben, deren Ladungen und Massen frei gewählt werden können. Gibt es eine mögliche Anordnung der Ladungen, bei der diese nur durch die

elektrostatischen Kräfte in einem *stabilen* Gleichgewicht gehalten werden? Man untersuche einige Anordnungen. (Eine strenge Ableitung wird nicht erwartet.)

15. Wie kann man der Behauptung entgegentreten, daß in Gl. 26.3 nicht das Produkt $Q_1 \cdot Q_2$, sondern die Summe $Q_1 + Q_2$ stehen müsse? Was wäre, wenn dort $\sqrt{Q_1 \cdot Q_2}$ eingesetzt würde?
16. Die Elementarladung beträgt 1.6×10^{-19} C. Gibt es auch eine entsprechende Elementarmasse?
17. Ein ^{238}U-Kern spaltet sich in zwei identische Teile. Sind die dabei entstandenen Kerne stabil oder radioaktiv?
18. Welche Ladung tragen die Λ-Teilchen in dem Zerfallsschema

$$\Xi^0 \rightarrow \Lambda + \pi^0$$

(siehe Anhang F)?

19. Man zeige, daß bei den im Anhang F gegebenen Zerfallsschemata die Ladung erhalten bleibt.
20. Was bedeutet es, wenn eine physikalische Größe (a) gequantelt ist und (b) erhalten bleibt? Man gebe einige Beispiele an.

Aufgaben

Abschnitt 26.4

1. Zwischen zwei gleichen Ionen, die sich in einem Abstand von 5×10^{-10} m befinden, wirke eine elektrostatische Kraft von 3.7×10^{-9} N. (a) Welche Ladung trägt jedes der Ionen? (b) Wie viele Elektronen fehlen jedem Ion?
   Antwort: (a) 3.2×10^{-19} C; (b) zwei.
2. Zwei Ladungen $+1 \times 10^{-6}$ C und -3×10^{-6} C seien 10 cm voneinander entfernt. (a) Wo muß man eine dritte Ladung plazieren, damit auf sie keine resultierende Kraft wirkt? (b) Befindet sich die dritte Ladung dann in einem stabilen oder labilen Gleichgewicht?
3. Es seien zwei positiv geladene Kugeln gegeben, die zusammen eine Ladung von 5×10^{-5} C tragen. Wie ist diese auf die beiden Kugeln verteilt, wenn sie 2 m voneinander entfernt sind und sich mit einer Kraft von 1 N abstoßen?
   Antwort: 1.2×10^{-5} C und 3.8×10^{-5} C.
4. Zwei gleich große positive Punktladungen haben einen festen Abstand von $2a$. Eine Probe-Punktladung befindet sich auf einer Ebene, die senkrecht auf der Mitte der Verbindungslinie beider Ladungen errichtet ist. (a) Man bestimme den Radius des Kreises auf dieser Ebene, der alle Orte mit maximaler Kraft auf die Probeladung verbindet. (b) Welche Richtung hat diese Kraft, wenn die Probeladung positiv ist?
5. Eine Ladung Q werde in zwei Teile q und $Q - q$ geteilt. Welche Beziehung besteht zwischen Q und q, wenn die beiden Ladungen bei einem bestimmten Abstand die maximale Coulombsche Abstoßungskraft aufeinander ausüben?
   Antwort: $q = \frac{1}{2}Q$.
6. Wie weit müssen zwei Protonen voneinander getrennt sein, damit die auf jedes Proton wirkende Abstoßungskraft genau seinem Gewicht auf der Erdoberfläche entspricht? Die Masse eines Protons ist 1.7×10^{-27} kg.
7. Zwei gleiche positive Ladungen Q haben einen Abstand von $2a$. Die auf eine genau in der Mitte zwischen ihnen befindliche, kleine, positive Probeladung wirkende Kraft sei Null. Man bestimme die Richtung der Kraft auf die Probeladung, wenn diese (a) ein klein wenig in Richtung einer der beiden Ladungen verschoben wird und (b) ein klein wenig rechtwinklig zur Verbindungslinie beider Ladungen verschoben wird. Ist das Gleichgewicht in (a) und (b) stabil oder instabil?

Antworten: (a) In Richtung der ursprünglichen Position, stabil;
(b) von der ursprünglichen Position weg, instabil.

8. Zwei *freie* Punktladungen $+Q$ und $+4Q$ haben einen Abstand von l. Eine dritte Ladung wird so plaziert, daß sich das gesamte System im Gleichgewicht befindet. Man bestimme die Position, die Größe und das Vorzeichen der dritten Ladung. Ist das Gleichgewicht stabil?
9. Zwei gleiche leitende Kugeln mit der Masse m und der Ladung Q hängen an zwei Seidenfäden der Länge l (Abb. 26.8). Der Winkel θ sei so klein, daß $\tan\theta \approx \sin\theta$ sei. Man zeige, daß (a)

$$x = \left(\frac{Q^2 l}{2\pi\varepsilon_0 mg}\right)^{1/3}$$

gilt, wenn x der Abstand zwischen den Kugeln ist. (b) Wie groß ist Q für $l = 120$ cm, $m = 10$ g und $x = 5$ cm?
Antwort: (b) $\pm 2.4 \times 10^{-8}$ C.
10. Es fließe von jeder der Kugeln in Abb. 26.8 eine Ladung mit einer Rate von 1×10^{-9} C/s ab. Mit welcher relativen Geschwindigkeit dx/dt nähern sich die beiden Kugeln (anfänglich) einander?

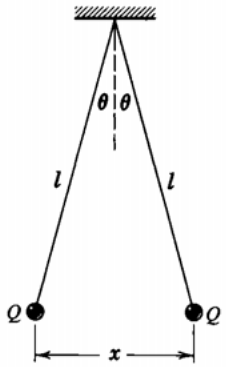


Abb. 26.8 Zu Aufgabe 9, 10 und 11

11. Die beiden Kugeln in Abb. 26.8 seien leitend. (a) Was geschieht, wenn eine von ihnen entladen wird? (b) Welcher Gleichgewichtsabstand stellt sich daraufhin ein?
Antwort: (a) Sie berühren sich und stoßen sich daraufhin ab; (b) 3.1 cm.
12. Die Ladungen und die Ortskoordinaten in der x,y-Ebene zweier Teilchen seien: $Q_1 = +3 \times 10^{-6}$ C, $x = 3.5$ cm, $y = 0.5$ cm und $Q_2 = -4 \times 10^{-6}$ C, $x = -2$ cm, $y = 1.5$ cm. (a) Man bestimme Größe und Richtung der auf Q_2 wirkenden Kraft. (b) Wo müßte eine dritte Ladung $Q_3 = +4 \times 10^{-6}$ C liegen, damit die Gesamtkraft auf Q_2 Null wird?
13. Zwei identische leitende Kugeln im Abstand 0.5 m tragen Ladungen entgegengesetzter Vorzeichen und ziehen sich mit einer Kraft von 0.108 N an. Die Kugeln werden zunächst mit einem Leiter verbunden, der dann aber wieder entfernt wird. Die Kugeln stoßen sich daraufhin mit einer Kraft von 0.036 N ab. Wie groß waren anfänglich die Ladungen auf den Kugeln?
Antwort: $\pm 1 \times 10^{-6}$ C und $\mp 3 \times 10^{-6}$ C.
14. Zwei Studierende mit Körpermassen von 90 kg und 45 kg stehen 30 m voneinander entfernt. Die elektrischen Ladungen der beiden Körper seien um 0.01 % verschieden, so daß der eine schwach positiv und der andere schwach negativ aufgeladen ist. Mit welcher Kraft ziehen sich die beiden Studierenden an? Man sehe die Körper einfachheitshalber als Wasserkugeln an.
15. Zwei gleich geladene Teilchen seien in einem Abstand von 3.2 mm fixiert, werden dann aber losgelassen. Das erste Teilchen beschleunigt mit 7 m/s^2 und das zweite mit 9 m/s^2. Unter der

Annahme, daß das erste Teilchen eine Masse von 0.63 mg habe, bestimme man (a) die Masse des zweiten Teilchens und (b) die gemeinsame Ladung.
Antwort: (a) 0.49 mg; (b) 7.1×10^{-11} C.

16. (a) Wie viele Elektronen muß man von einer Münze abnehmen, damit sie eine Ladung von $+1 \times 10^{-7}$ C erhält? (b) Welchem Anteil aller Elektronen in der Münze entspricht das? Man benutze die Werte von Beispiel 1.
17. (a) Wieviel positive Ladung müßten auf der Erde und dem Mond angebracht werden, um die Gravitationskraft zwischen beiden aufzuheben? (b) Benötigt man zur Lösung von (a) den Abstand des Mondes von der Erde? (c) Wieviele Tonnen Wasserstoff braucht man, um die in (a) benötigte Ladung zur Verfügung zu stellen?
Antwort: (a) 5.7×10^{13} C; (b) nein; (c) 571.54 t.
18. Man schätze, welche positive Ladung ein mit Wasser gefülltes Glas (250 cm^3) enthält.
19. Protonen der kosmischen Strahlung treffen mit einer Teilchenflußdichte von etwa 0.15 $cm^{-2}s^{-1}$ auf die Erdatmosphäre. Welcher elektrischen Stromstärke entspricht das?
Antwort: 0.12 A.
20. Drei geladene Teilchen liegen im Abstand d auf einer geraden Linie (Abb. 26.9). Die Ladungen Q_1 und Q_2 sind ortsfest, die Ladung Q_3 ist frei beweglich. Welche Beziehung besteht zwischen Q_1 und Q_2?

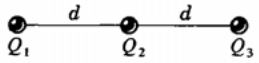


Abb. 26.9 Zu Aufgabe 20

21. Drei kleine Bälle von je 10 g Masse sind an je einem Seidenfaden der Länge 1 m an demselben Punkt der Decke aufgehängt. Die Bälle werden gleichstark aufgeladen und bilden daraufhin die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 10 cm. Wie groß sind die Ladungen auf den Bällen?
Antwort: 6×10^{-8} C.
22. Drei Punktladungen von je $+4 \times 10^{-6}$ C sind an den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge 10 cm befestigt. Welche Kraft (Richtung und Größe) wirkt auf jede der Ladungen?
23. Vier Ladungen bilden die Ecken eines Quadrats; gegenüberliegende Ladungen sind jeweils gleich groß, also $Q_1 = Q_3 = Q$ und $q_2 = q_4 = q$. (a) Welche Beziehung besteht zwischen Q und q, wenn die auf Q wirkende resultierende Kraft Null ist? (b) Kann man q so wählen, daß auf keine der Ladungen eine Kraft wirkt?
Antwort: (a) $Q = -2\sqrt{2}\, q$; (b) nein.
24. Zu Abbildung 26.10. Wie groß ist die Kraft auf die Ladung in der linken unteren Ecke? Es sei $q = 1 \times 10^{-7}$ C und $a = 5$ cm. Die Ladungen seien in den Ecken fixiert.

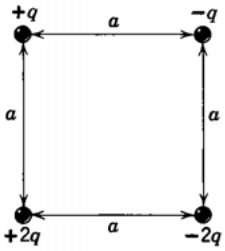


Abb. 26.10 Zu Aufgabe 24

25. Ein Würfel der Kantenlänge a trägt an jeder Ecke eine Punktladung q. (a) Man zeige, daß die Kraft auf jede der Ladungen durch folgende Beziehung gegeben ist

$$F = \frac{0.262\, q^2}{\varepsilon_0 a^2}.$$

(b) Welche Richtung hat $\boldsymbol{F}$ relativ zu den Würfelkanten?
Antwort: (b) Längs einer Würfeldiagonalen von dem Würfel weg.

26. Die Abb. 26.11 zeigt einen langen isolierten und masselosen Stab der Länge l. In der Mitte ist der Stab gelagert, an den Enden sind die positiven Ladungen q und $2q$ befestigt. Durch das Gewicht W im Abstand x vom linken Ende wird die gesamte Anordnung im Gleichgewicht gehalten. Im Abstand h unter den Ladungen an den Stabenden ist je eine positive Ladung Q angebracht. (a) Man bestimme den Abstand x, wenn der Stab ausbalanciert ist. (b) In welchem Abstand h müßten die Ladungen Q liegen, damit der Stab, wenn er ausbalanciert ist, keine Kraft auf die Lagerung in der Mitte ausübt?

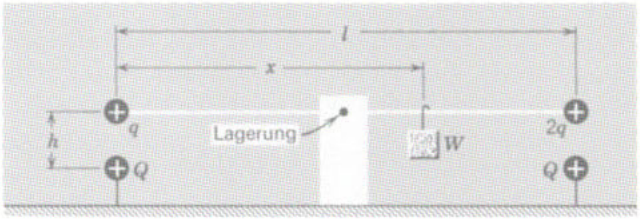


Abb. 26.11 Zu Aufgabe 26

Abschnitt 26.7

27. Ein Elektron wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 3.24×10^5 m/s direkt auf ein ruhendes Proton geschossen. Anfänglich sei das Elektron sehr weit von dem Proton entfernt. In welchem Abstand zum Proton wird das Elektron die doppelte Geschwindigkeit erreicht haben? (Man benutze den Energiesatz.)
Antwort: 1.6×10^{-9} m.

28. Beim radioaktiven Zerfall von ^{238}U (vgl. Gl. 26.6) befinden sich der Mittelpunkt des emittierten α-Teilchens und der Mittelpunkt des zurückbleibenden ^{234}Th-Kerns zu einem bestimmten Zeitpunkt in einem Abstand von 9×10^{-15} m voneinander. (a) Wie groß ist die Kraft auf das α-Teilchen in diesem Abstand? (b) Welche Beschleunigung besitzt das α-Teilchen in diesem Abstand?

27 Das elektrische Feld

27.1 Das elektrische Feld

Jedem Punkt im erdnahen Raum kann man den Vektor $\boldsymbol{g}$ des Gravitationsfeldes zuordnen (Gl. 16.12). Das ist die Fallbeschleunigung, die ein Probekörper in diesem Punkt erfahren würde. Wenn m die Masse dieses Körpers und $\boldsymbol{F}$ die auf ihn wirkende Gravitationskraft ist, so gilt:

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{F}/m. \tag{27.1}$$

In diesem Beispiel handelt es sich um ein *Vektorfeld.* Es wird für Punkte nahe der Erdoberfläche oft als konstant angenommen. Das bedeutet, daß die Fallbeschleunigung $\boldsymbol{g}$ überall gleich ist.

Die Wasserströmung in einem Fluß wird ebenfalls durch ein Vektorfeld beschrieben, das man hier *Strömungsfeld* nennt (Abschn. 18.7). Jedem Punkt im Wasser wird eine Vektorgröße zugeordnet, die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$, mit der das Wasser durch diesen Punkt hindurchfließt. Wenn sich $\boldsymbol{g}$ und $\boldsymbol{v}$ zeitlich nicht ändern, nennt man die zugehörigen Felder *stationär*. Bei der Wasserströmung heißt das, daß der Vektor $\boldsymbol{v}$ überall zeitunabhängig ist, obwohl sich das Wasser selbst bewegt.

Wenn man in die Nähe eines geladenen Stabes eine Probeladung bringt, wird auf sie eine elektrostatische Kraft ausgeübt. Wir sprechen dann von einem *elektrischen Feld* im Raum um den Stab. Ähnlich sprechen wir von einem *magnetischen Feld* im Raum um einen Magneten. In der klassischen Theorie des Elektromagnetismus spielen das elektrische und das magnetische Feld eine zentrale Rolle. In diesem Kapitel wollen wir uns nur mit dem elektrischen Feld um ruhende elektrische Ladungen befassen. Dieses Gebiet heißt *Elektrostatik*.

Vor Faraday sah man die Kräfte zwischen geladenen Teilchen als eine direkte und augenblickliche Wechselwirkung an. Diese *Fernwirkungstheorie* vertrat man auch bei magnetischen und gravitativen Kräften. Heute bevorzugt man dagegen unter Verwendung des Feldbegriffs eine andere Vorstellung, die in Abb. 27.1 veranschaulicht ist:

1. Die Ladung Q_1 erzeugt in dem sie umgebenden Raum ein elektrisches Feld, das in der Abbildung durch die helle Wolke angedeutet ist. Wir werden später zeigen, wie elektrische Felder konkreter dargestellt werden können.
2. Das Feld wirkt auf die Ladung Q_2. Die Wirkung wird erkennbar durch die Kraft $\boldsymbol{F}$, die Q_2 erfährt.

Das Feld hat in dieser Darstellung also eine Übertragungsfunktion für die Kräfte zwischen den Ladungen. Es treten hierbei zwei getrennte Aufgabenstellungen auf: (a) Die

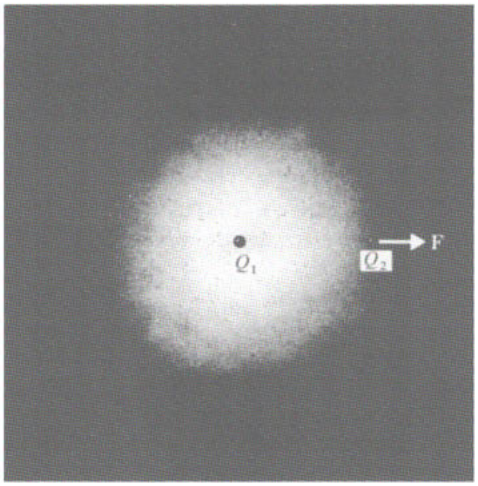


Abb. 27.1 Eine Ladung Q_1 erzeugt ein elektrisches Feld, welches auf die Ladung Q_2 eine Kraft ausübt.

Bestimmung der Felder, die durch eine gegebene Ladungsverteilung erzeugt werden, und (b) die Berechnung der Kräfte, die diese Felder auf Ladungen ausüben. Die Wirkung wird also durch das Schema

$$\text{Ladung} \rightleftharpoons \text{Feld} \rightleftharpoons \text{Ladung}$$

beschrieben und nicht nach dem Schema

$$\text{Ladung} \rightleftharpoons \text{Ladung}.$$

Man kann sich auch vorstellen, daß in Abb. 27.1 die Ladung Q_1 ein Feld erzeugt und dieses dann auf Q_2 wirkt, wobei eine Kraft $-\boldsymbol{F}$ in Übereinstimmung mit dem 3. Newtonschen Axiom wirkt. Die Situation ist daher völlig symmetrisch.

Wenn die Kräfte zwischen den (stationären) Ladungen das einzige Problem des Elektromagnetismus darstellten, wären die Vorstellung von einer *Feldwirkung* und die ältere Vorstellung von einer *Fernwirkung* durchaus gleichwertig. Anders stellt sich jedoch die Situation dar, wenn die Ladung Q_1 in Abb. 27.1 plötzlich nach rechts beschleunigte. Wie schnell würde die Ladung Q_2 diese Bewegung wahrnehmen und sich damit auch die Kraftwirkung wegen des sich verkürzenden Abstandes vergrößern? Die Theorie des Elektromagnetismus sagt für diesen Fall voraus, daß Q_2 diese Änderung durch eine Feldstörung erfährt, die von Q_1 mit Lichtgeschwindigkeit ausgeht. Die Fernwirkungstheorie fordert für eine solche Situation eine sofortige Änderung der Kraft; dies steht aber in Widerspruch zu experimentellen Befunden*. Die in der Sendeantenne einer Rundfunkstation beschleunigten Elektronen können die Elektronen in einer entfernten Empfangsantenne erst nach einer Zeit l/c beeinflussen, wobei l der Abstand der Antennen und c die Lichtgeschwindigkeit ist.

* Man kann jedoch unter bestimmten Voraussetzungen auch mit der Fernwirkungstheorie ein mit den Experimenten übereinstimmendes Bild des Elektromagnetismus schaffen. Eine weitergehende Vertiefung würde aber den Rahmen dieses Buches sprengen.

27.2 Die elektrische Feldstärke

Die elektrische Feldstärke wollen wir durch folgende Vorschrift definieren. Wir bringen eine Probeladung q_0 (die wir als positiv annehmen) in den zu untersuchenden Raumpunkt und messen die auf sie wirkende elektrische Kraft $\boldsymbol{F}$, falls es eine gibt. Die *elektrische Feldstärke* $\boldsymbol{E}$ in diesem Punkt ist dann definiert durch*

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}/q_0. \tag{27.2}$$

Da $\boldsymbol{F}$ ein Vektor und q_0 ein Skalar ist, muß auch $\boldsymbol{E}$ ein Vektor sein. Die beiden Vektoren haben die gleiche Richtung, und zwar diejenige, in der sich die (anfangs ruhende, positive) Probeladung bewegen würde.

Die Definition des Gravitationsfeldes ist der des elektrischen Feldes sehr ähnlich, nur daß dort die Masse des Probeteilchens, hier aber seine Ladung von Bedeutung ist. Die Gravitationsfeldstärke $\boldsymbol{g}$ wird gewöhnlich in m/s^2 angegeben, sie kann aber auch in N/kg (Gl. 27.1) angegeben werden. Die Einheit der elektrischen Feldstärke ist N/C (Gl. 27.2). Es werden also sowohl $\boldsymbol{g}$ als auch $\boldsymbol{E}$ als Quotient aus einer Kraft und einer Eigenschaft (Masse, Ladung) des Probekörpers definiert.

Beispiel 1

Wie groß muß der Betrag der elektrischen Feldstärke sein, damit ein Elektron darin eine Kraft erfährt, die genau seinem Gewicht entspricht? Die Masse des Elektrons ist $m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg.

Aus Gl. 27.2 erhält man für $q_0 = e$ und $F = mg$

$$\begin{aligned} E &= \frac{F}{q_0} = \frac{mg}{e} \\ &= \frac{(9.1 \times 10^{-31}\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2)}{1.6 \times 10^{-19}\ \text{C}} \\ &= 5.6 \times 10^{-11}\ \text{N/C}. \end{aligned}$$

Es handelt sich hier um ein sehr schwaches Feld. Welche Richtung muß $\boldsymbol{E}$ haben, damit die Gravitationskraft aufgehoben wird?

Die Erfahrung zeigt nun, daß bei gegebener Konfiguration (zum Beispiel in der Umgebung eines geriebenen Glasstabes) das Verhältnis aus der auf den Probekörper wirkenden Kraft und seiner Ladung von der Größe dieser Ladung unabhängig ist. Bei verschiedenen Probekörpern 1, 2, ... gilt also im selben Raumpunkt:

$$\frac{\boldsymbol{F}_1}{q_1} = \frac{\boldsymbol{F}_2}{q_2} = \ldots \tag{27.3}$$

Dabei nehmen wir entsprechend der Konvention die Ladungen als positiv an und setzen weiter

* Obwohl diese Definition sehr einleuchtend ist, wird sie wegen experimenteller Schwierigkeiten in der Praxis kaum verwendet. $\boldsymbol{E}$ wird gewöhnlich aus anderen, leichter zugänglichen Größen, wie dem elektrischen Potential, gewonnen.

voraus, daß die Probekörper möglichst punktförmig sind, um das Feld punktweise abtasten zu können. Damit ist die durch Gl. 27.2 definierte elektrische Feldstärke nur noch von dem erzeugenden Objekt (etwa den Ladungen auf dem Glasstab) abhängig.

27.3 Feldlinien

Gegenüber dem Vektorkonzept für die elektrische Feldstärke bevorzugte Faraday das Bild von Kraftlinien oder *Feldlinien*, mit dem man auch heute noch Feldverteilungen wenigstens qualitativ veranschaulichen kann. Dabei besteht zwischen den (imaginären) Feldlinien und der elektrischen Feldstärke der folgende Zusammenhang:

1. Die Tangente in einem Punkt der Feldlinie zeigt die *Richtung* der Feldstärke $\boldsymbol{E}$ in diesem Punkt an.
2. Die Feldliniendichte (Zahl der Feldlinien geteilt durch die Fläche senkrecht zu den Feldlinien) ist proportional zum *Betrag* der Feldstärke. Die Feldstärke ist groß, wenn die Feldlinien dicht zusammenliegen, sie ist klein, wenn die Feldlinien weit auseinander liegen.

Ein derartiger Zusammenhang besteht allerdings, wie wir in Aufgabe 7 sehen werden, nur bei Gültigkeit des Coulombschen Gesetzes, in dem die Feldstärke umgekehrt proportional zum *Quadrat* des Abstandes der Ladungen ist.

Abb. 27.2 zeigt das Feldlinienbild für eine Platte, auf der positive Ladungen homogen verteilt sind. Wir nehmen an, daß die Platte unendlich ausgedehnt ist oder daß wir nur solche Punkte betrachten, deren Abstand zur Platte klein ist gegenüber ihrem Abstand zur nächstliegenden Plattenkante. Würde man vor die Platte eine positive Probeladung bringen und nicht fixieren, so würde sich die Probeladung auf einer Linie senkrecht zur Platte von dieser fortbewegen. Der elektrische Feldvektor $\boldsymbol{E}$ steht überall senkrecht auf der Platte. Die Feldlinien haben überall den gleichen Abstand, da die Feldstärke in allen Punkten in der Nähe der Platte gleich ist.

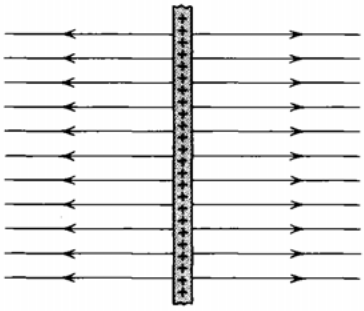


Abb. 27.2 Feldlinienverlauf um eine unendlich ausgedehnte, dünne Platte, die positiv geladen ist

In Abb. 27.3 ist der Feldlinienverlauf um eine negativ geladene Kugel gezeichnet. Aus Symmetriegründen liegen alle Feldlinien auf Kugelradien, und sie weisen nach innen, da eine freie positive Probeladung in Richtung auf den Kugelmittelpunkt gezogen würde.

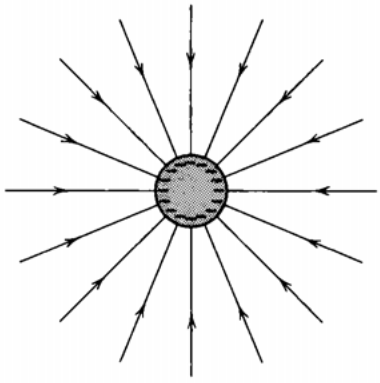


Abb. 27.3 Feldlinienverlauf um eine negativ geladene Kugel

Die elektrische Feldstärke ist nicht homogen, sondern nimmt mit zunehmendem Abstand von der Kugel ab. Dies kommt durch den größer werdenden Abstand zwischen den Feldlinien deutlich zum Ausdruck. Für alle Punkte mit gleichem Abstand zum Zentrum der Kugel ergibt sich eine gleich große Feldstärke.

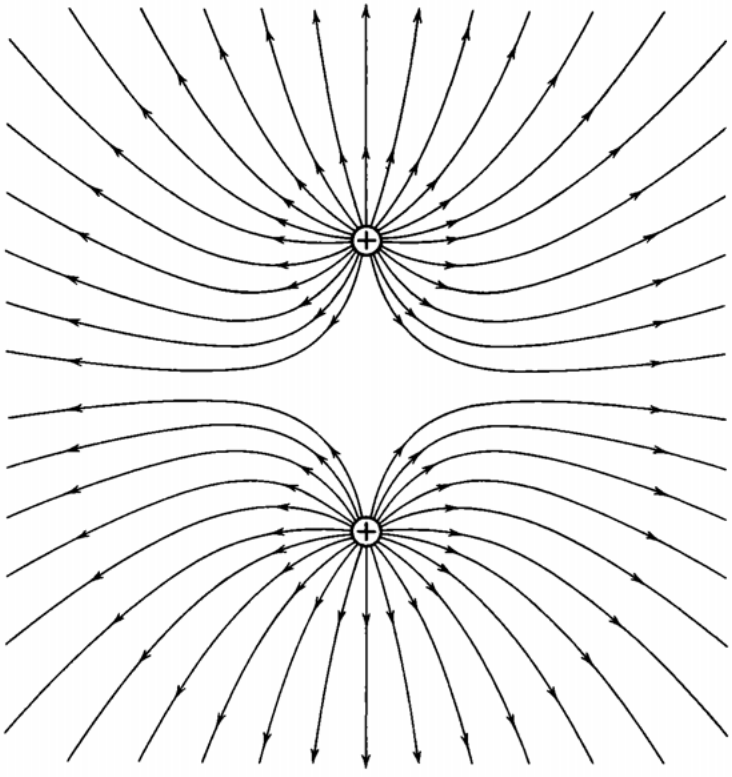


Abb. 27.4 Feldlinienverlauf um zwei gleich große, positive Ladungen

Beispiel 2

Wie ändert sich in Abb. 27.3 die Feldstärke E mit dem Abstand vom Zentrum der Ladung?

Angenommen, es enden N Feldlinien auf der Kugel. Man zeichne eine imaginäre konzentrische Kugel vom Radius r um die Ladung. Dann beträgt die Zahl der Feldlinien geteilt durch die Fläche überall auf der Kugel $N/4\pi r^2$. Da E dieser Feldliniendichte proportional ist, ergibt sich

$$E \sim \frac{1}{r^2}.$$

In Abschn. 27.4 werden wir eine genaue Beziehung herleiten. Wie ändert sich E mit dem Abstand im Fall eines unendlich langen, geladenen Zylinders?

Abb. 27.4 und Abb. 27.5 zeigen den Feldlinienverlauf zwischen zwei gleichnamigen Punktladungen bzw. zwischen zwei ungleichnamigen Punktladungen. Wie schon erwähnt, benutzte Faraday gern das Bild von Kraftlinien, da es ihm besonders realistisch erschien. So kann man z. B. in der Abb. 27.4 fast „sehen", wie die beiden Ladungen voneinander fort gedrückt werden, während sie in Abb. 27.5 aufeinander zu gezogen

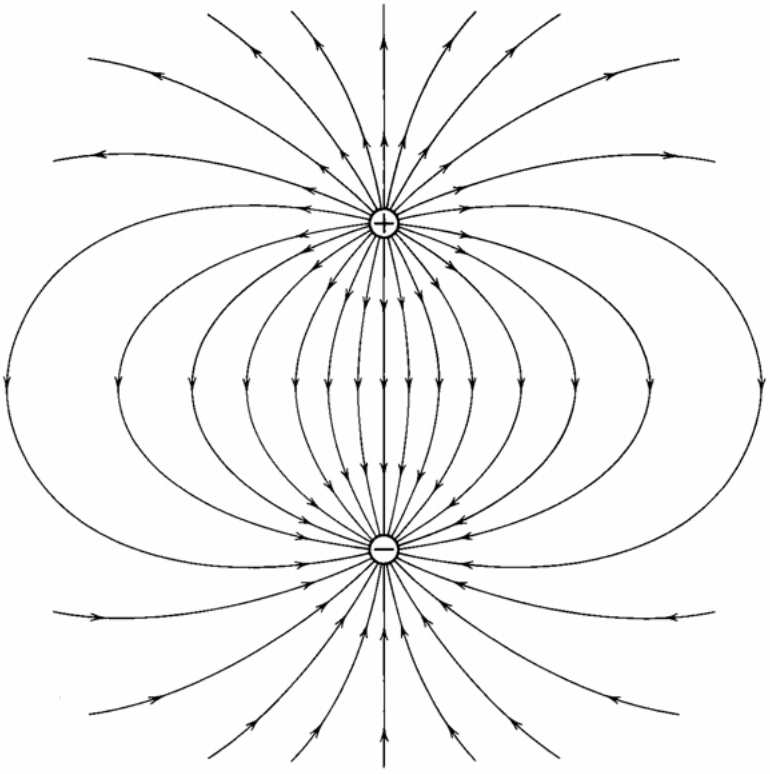


Abb. 27.5 Feldlinienverlauf um zwei gleich große Ladungen entgegengesetzter Vorzeichen

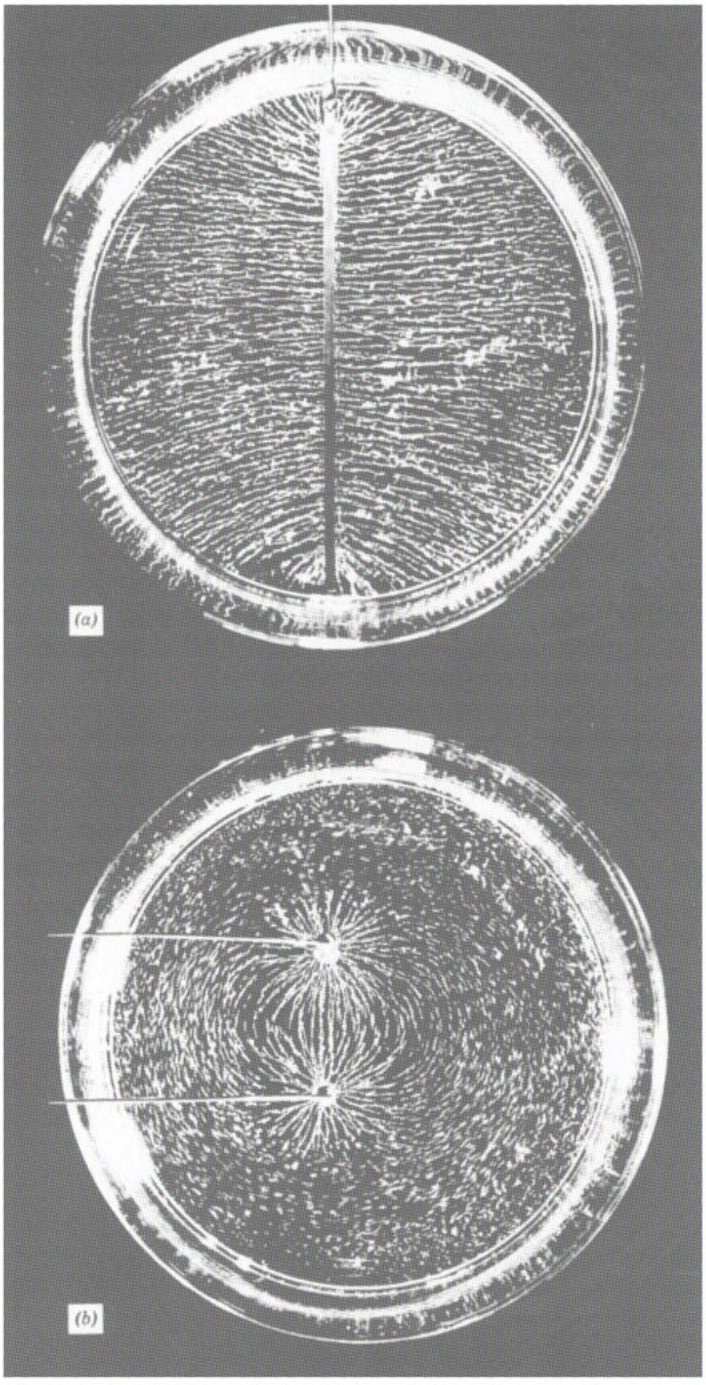


Abb. 27.6 Photographische Aufnahmen des Feldlinienverlaufes (a) um eine geladene Platte (vgl. Abb. 27.2) und (b) um zwei Stäbe mit gleich großen, aber ungleichnamigen Ladung (vgl. Abb. 27.5). Die Bilder wurden durch Aufstreuen von Grassamen auf eine nichtleitende Flüssigkeit erzeugt.

werden. Man vergleiche Abb. 27.5 mit Abb. 18.14, die ein Strömungsfeld darstellt. Abbildung 27.6 zeigt Photographien des Feldlinienverlaufs um einen geladenen Leiter. Die Leiter sind in eine isolierende Flüssigkeit getaucht worden, auf die Grassamen gestreut wurde.

Feldlinien vermitteln einen deutlichen Eindruck, wie sich die Feldstärke in einem Bereich ändert. Die Grundgleichungen der Elektrodynamik (Tab. 40.2) verwenden allerdings nicht den Begriff der Feldlinien, sondern sie werden durch die Feldstärke $\boldsymbol{E}$ und andere Feldvektoren ausgedrückt. Die elektrische Feldstärke ändert sich kontinuierlich, gleichgültig auf welchem Weg man das Feld durchquert (Abb. 27.7).

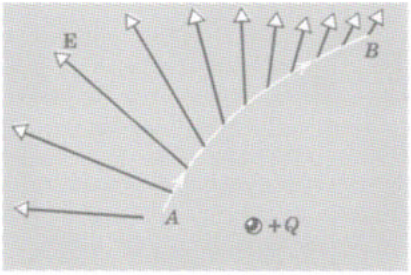


Abb. 27.7 Kontinuierliche Veränderung der Feldstärke **E** längs eines Weges AB im elektrischen Feld um eine Punktladung $+Q$. Der Weg AB und die Feldlinien liegen im allgemeinen nicht in einer Ebene.

27.4 Berechnung der elektrischen Feldstärke

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Wechselwirkung zwischen einer Ladung und einem Feld. Wir werden die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$ für verschiedene Raumpunkte in der Nähe einer gegebenen Ladungsverteilung berechnen.

Wir beginnen mit einer Punktladung Q. In das Feld dieser Punktladung bringen wir eine Probeladung q_0. Der Abstand sei r. Nach dem Coulombschen Gesetz erhält man die auf die Probeladung q_0 wirkende Kraft zu

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Qq_0}{r^3}\,\boldsymbol{r}.$$

Am Ort der Probeladung ergibt sich nach Gl. 27.2 eine Feldstärke von

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{r^3}\,\boldsymbol{r}. \tag{27.4}$$

$\boldsymbol{E}$ ist radial von Q aus nach außen gerichtet, wenn Q positiv ist, im anderen Fall ist sie nach innen gerichtet.

Nunmehr sei eine Gruppe von Punktladungen vorgegeben. Man bestimmt zunächst die Feldstärke in dem betrachteten Punkt bezüglich jeder vorhandenen Einzelladung unter der Annahme, es wäre nur diese Ladung allein vorhanden. Die so erhaltenen Feldstärken addiert man (vektoriell) und erhält die resultierende Feldstärke $\boldsymbol{E}$ in dem

betreffenden Punkt:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3 + \ldots = \Sigma \boldsymbol{E}_n \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{27.5}$$

Dies ist eine Vektorsumme über alle Ladungen. Für Feldstärken gilt nach Gl. 27.5 das *Superpositionsprinzip*, genauso wie für die Kräfte (Gl. 26.4). Die (lineare) Superposition stellt ein wichtiges Prinzip der Physik dar, und man findet es auch bei magnetischen Feldern und bei Gravitationsfeldern*.

Schließlich nehmen wir eine kontinuierliche Ladungsverteilung an. Die Feldstärke in irgendeinem Raumpunkt kann durch die Wirkung infinitesimal kleiner Ladungselemente $\mathrm{d}Q$ dargestellt werden. Diese werden als kleine Punktladungen betrachtet, von denen jede einen Feldstärkebetrag $\mathrm{d}E$ erzeugt. Ein solches Feldstärkeelement ist nach Gl. 27.4 als

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathrm{d}Q}{r^2}, \tag{27.6}$$

anzusetzen, wobei r der Abstand des Ladungselements $\mathrm{d}Q$ vom betrachteten Punkt P ist. Die resultierende Feldstärke in P wird durch Superposition aller von den Ladungselementen erzeugten Feldstärkebeiträge gewonnen:

$$\boldsymbol{E} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{E}. \tag{27.7}$$

Wie die Addition in Gl. 27.5 stellt auch die Integration in Gl. 27.7 eine Vektoroperation dar. Im Beispiel 5 werden wir eine solche Integration für ein einfaches Beispiel durchführen.

Beispiel 3

Der elektrische Dipol. Die Abb. 27.8 zeigt zwei gleich große, aber entgegengesetzte Ladungen im Abstand $2a$ voneinander. Diese Anordnung nennt man einen Dipol, die Verbindungslinie zwischen den beiden Ladungen ist die Dipolachse. Das Feldlinienbild eines Dipols wurde schon in Abb. 27.5 gezeigt. Wie groß ist die Feldstärke $\boldsymbol{E}$ des Dipolfeldes in einem Punkt P, der in einem Abstand r auf der Mittelsenkrechten der Dipolachse liegt? Es sei $r \gg a$.

Nach Gl. 27.5 gilt

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 ,$$

und unter Benutzung der Gl. 27.4 erhält man

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{a^2 + r^2}.$$

Man beachte, daß r in dieser Gleichung eine andere Bedeutung hat als in Gl. 27.4.

* Formal gilt das Superpositionsprinzip nur, wenn die zugehörige Differentialgleichung linear ist. Auch bei mechanischen und elektromagnetischen Schwingungen gilt das Prinzip nicht mehr, wenn die Amplituden zu groß werden. In der Elektrostatik dagegen ist die Superposition uneingeschränkt möglich.

Die Vektorsumme von $\boldsymbol{E}_1$ und $\boldsymbol{E}_2$ zeigt senkrecht nach unten und hat den Betrag

$$E = 2E_1 \cos\theta.$$

Aus der Abbildung entnimmt man

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}}.$$

Die Werte für $\cos\theta$ und für E_1 kann man in die obige Beziehung für E einsetzen, und es ergibt sich

$$E = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{(a^2 + r^2)} \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2aQ}{(a^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Unter der Voraussetzung $r \gg a$ kann man a im Nenner des Bruches vernachlässigen; die Gleichung reduziert sich damit auf

$$E \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(2a)(Q)}{r^3}. \tag{27.8a}$$

Die Größen, die die Ladungsverteilung in Abb. 27.8 beschreiben, nämlich der Betrag der Ladungen Q und ihr Abstand $2a$, gehen als Produkt in die Gl. 27.8a ein. Mißt man daher die Feldstärke in verschiedenen Abständen vom Dipol, so kann man nie auf Q und a getrennt schließen, sondern immer nur auf das Produkt $2aQ$. Bei doppelter Ladung, aber halbem Abstand wäre die elektrische Feldstärke weit weg vom Dipol ($r \gg a$) dieselbe.

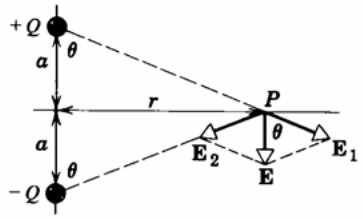


Abb. 27.8 Zu Beispiel 3

Das Produkt $2aQ$ wird *elektrisches Dipolmoment* p genannt. Führen wir diese Größe in die Gl. 27.8a ein, so erhalten wir

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p}{r^3}. \tag{27.8b}$$

Auch wenn ein Punkt nicht auf der Mittelsenkrechten der Dipolachse liegt, so wie oben angenommen, sondern in großem Abstand auf der Verlängerung der Dipolachse (Aufgabe 25) oder sonst irgendwo weit weg vom Dipol (Aufgabe 28), tritt in der entsprechenden Gleichung für die Feldstärke immer das Dipolmoment p auf. Ebenso tritt die Abhängigkeit vom Abstand r immer in der Form von $1/r^3$ auf.

Wenn, wie in Abb. 27.8 gezeigt, die beiden gleich großen, aber ungleichnamigen Ladungen eng beieinanderliegen, werden sich die von ihnen erzeugten Einzelfelder in größerer Entfernung fast auslöschen. Daher ist es einsichtig, daß für einen Dipol $E(r)$ mit $1/r^3$ abnimmt (Gl. 27.8b), während für eine Punktladung $E(r)$ schwächer abnimmt, nämlich mit $1/r^2$ (Gl. 27.4).

Beispiel 4

Die Abb. 27.9 zeigt eine Ladung $Q_1 = +1 \times 10^{-6}$ C in 10 cm Entfernung von einer anderen Ladung $Q_2 = +2 \times 10^{-6}$ C. In welchem Punkt auf der Verbindungslinie der beiden Ladungen ist die Feldstärke Null?

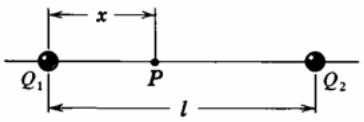


Abb. 27.9 Zu Beispiel 4

Der Punkt muß auf der Verbindungslinie liegen, weil nur auf dieser Linie die auf eine Probeladung ausgeübten Kräfte einander genau entgegengerichtet sind. Es sei E_1 der Betrag der elektrischen Feldstärke in diesem Punkt bezüglich Q_1 und E_2 der bezüglich Q_2. Dann muß gelten:

$$E_1 = E_2$$

bzw. (vgl. Gl. 27.4)

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{(l-x)^2},$$

wobei x und l die in Abb. 27.9 dargestellten Strecken sind.

Wenn man nach x auflöst, erhält man schließlich:

$$x = \frac{l}{1+\sqrt{Q_2/Q_1}} = \frac{10\text{ cm}}{1+\sqrt{2}} = 4.1\text{ cm}.$$

Weshalb wurde die zweite Lösung verworfen?

Beispiel 5

Geladener Ring. In Abb. 27.10 ist ein Ring vom Radius a gezeichnet, der eine gleichmäßig verteilte Ladung Q trägt. Man bestimme die Feldstärke $\boldsymbol{E}$ in einem Punkt P auf der Achse in einer Entfernung x vom Mittelpunkt.

Wir betrachten ein differentielles Element ds des Ringes. Von der Ladung dieses Elementes

$$\mathrm{d}Q = Q\frac{\mathrm{d}s}{2\pi a}$$

($2\pi a$ ist der Umfang des Ringes) wird ein Beitrag d$\boldsymbol{E}$ zur Feldstärke im Punkt P erbracht.

Die resultierende Feldstärke in P ergibt sich aus der Integration über alle Elemente des Ringes. Aus Symmetriegründen muß der Vektor der resultierenden Feldstärke längs der Ringachse liegen. Es tragen somit nur die Komponenten von d$\boldsymbol{E}$ zur Gesamtfeldstärke bei, die parallel zur Achse liegen, alle Komponenten senkrecht zur Ringachse heben sich gegenseitig auf.

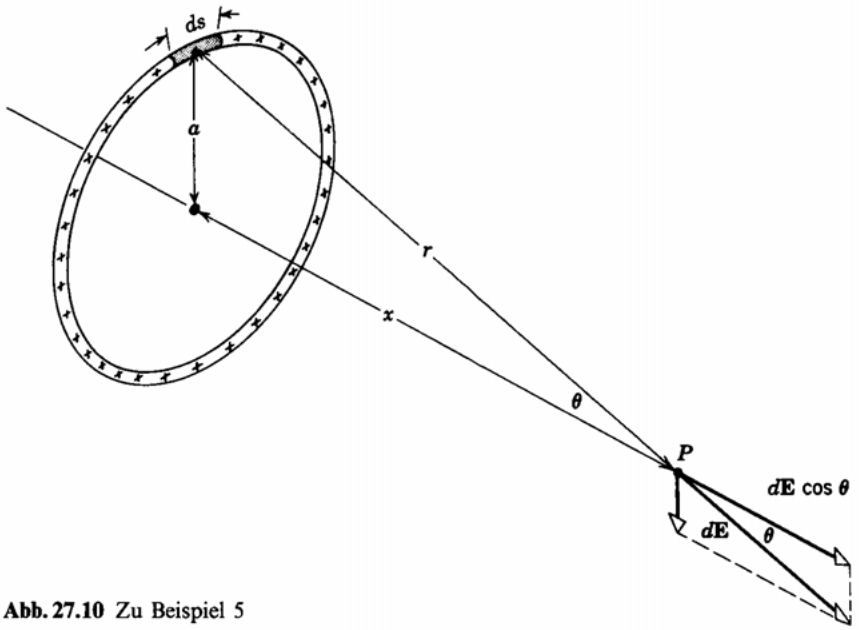


Abb. 27.10 Zu Beispiel 5

Damit reduziert sich die Vektorgleichung Gl. 27.7 auf eine skalare Gleichung, nämlich:

$$E = \int \mathrm{d}E \cos\theta.$$

Nach Gl. 27.6 und nach der obigen ersten Beziehung folgt für $\mathrm{d}E$:

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q\,\mathrm{d}s}{2\pi a}\right)\frac{1}{a^2+x^2}.$$

Aus der Zeichnung entnimmt man noch $\cos\theta$ zu

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

x hat für alle Ladungselemente denselben Wert. Die Integrationsvariable ist s und man erhält:

$$E = \int \mathrm{d}E\cos\theta = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\,\mathrm{d}s}{(2\pi a)(a^2+x^2)}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qx}{(2\pi a)(a^2+x^2)^{3/2}}\int \mathrm{d}s.$$

Das verbleibende Integral ist der Ringumfang $2\pi a$, so daß schließlich für die Feldstärke gilt:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qx}{(a^2+x^2)^{3/2}}.$$

Was sagt diese Beziehung für den Grenzfall $x = 0$ aus? Für den Fall $x \gg a$ kann man a im Nenner

des Bruchs vernachlässigen und die Beziehung reduziert sich auf

$$E \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{x^2}.$$

Das ist genau das Ergebnis der Gl. 27.4, denn für sehr große Entfernungen r erscheint der geladene Ring wie eine Punktladung.

Beispiel 6

Unendlich lange Linienladung. Die Abb. 27.11 zeigt ein Stück einer unendlich langen Linienladung, etwa eines dünnen Drahtes, dessen längenbezogene Ladung (Ladungsbelag λ, gemessen in C/m) konstant ist. Wie groß ist die Feldstärke $\boldsymbol{E}$ in einem Punkt im Abstand y von diesem Leiter?

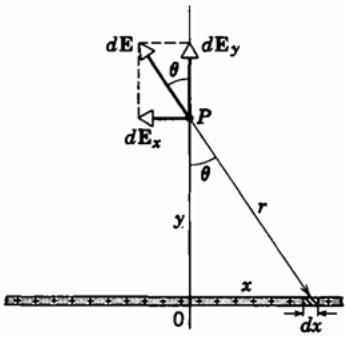


Abb. 27.11 Zu Beispiel 6. Ein Ausschnitt aus einer unendlich langen Linienladung

Wir unterteilen die Ladungen wieder in Ladungselemente $\mathrm{d}Q = \lambda \mathrm{d}x$, die alle einen Beitrag $\mathrm{d}E$ zur Gesamtfeldstärke in P liefern. Nach Gl. 27.6 erhält man somit

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathrm{d}Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda \mathrm{d}x}{y^2 + x^2}.$$

Das Vektorelement $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ setzt sich nach Abb. 27.11 aus folgenden beiden Komponenten zusammen:

$$\mathrm{d}E_x = -\mathrm{d}E \sin\theta \quad \text{und} \quad \mathrm{d}E_y = \mathrm{d}E \cos\theta.$$

Das negative Vorzeichen von $\mathrm{d}E_x$ besagt, daß diese Komponente in die negative x-Richtung zeigt. Für die Komponenten des resultierenden Vektors der Feldstärke ergibt sich einzeln nach Gl. 27.7:

$$E_x = \int \mathrm{d}E_x = -\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \sin\theta \, \mathrm{d}E \quad \text{und} \quad E_y = \int \mathrm{d}E_y = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \cos\theta \, \mathrm{d}E.$$

Die Integration erstreckt sich über die gesamte Länge des Leiters. Aus Symmetriegründen heben sich alle Beiträge $\mathrm{d}E_x$ auf, so daß E_x Null wird. Das bedeutet, die resultierende Feldstärke $\boldsymbol{E}$ weist in die y-Richtung. Da die Beiträge zu E_y von der rechten Hälfte des Leiters genauso groß sind wie die von der linken Hälfte (bezüglich des Punktes 0), kann man den Integrationsbereich ändern und erhält

$$E = E_y = 2\int_{x=0}^{x=+\infty} \cos\theta \, dE.$$

Wir haben den Integrationsbereich halbiert und dafür einen Faktor 2 hinzugefügt.

Wenn man in diese Gleichung den obigen Ausdruck für dE einsetzt, ergibt sich

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{x=0}^{x=+\infty} \cos\theta \frac{dx}{y^2 + x^2}.$$

Man kann der Abb. 27.11 entnehmen, daß x und θ nicht voneinander unabhängig, sondern über $x = y\tan\theta$ verknüpft sind. In differentieller Form lautet diese Beziehung $dx = (y/\cos\theta^2)d\theta$. Man kann nunmehr x und dx substituieren und bekommt wegen $\cos^2\theta(1 + \tan^2\theta) = 1$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \cos\theta \, d\theta.$$

Man prüfe diesen letzten Schritt sorgfältig nach; vor allem beachte man, daß jetzt nicht mehr über x, sondern über θ integriert wird. Das heißt, für $x \to +\infty$ gilt $\theta \to \pi/2$, wie man in Abb. 27.11 sieht. Die Integration kann man leicht ausführen und erhält

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}(\sin\theta)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}.$$

Das eben besprochene Beispiel einer unendlich ausgedehnten Linienladung ist nicht nur theoretisch interessant, denn die dafür abgeleitete Beziehung gilt in guter Näherung auch bei einem endlich langen geladenen Draht für Punkte, die in der Nähe des Drahtes, aber weit genug von seinen Enden liegen (Aufgabe 23). In der Praxis ist es nicht immer nötig, die Geometrie einer Anordnung in allen Details zu analysieren. Ohne Näherungen könnte man sicher viele praktische Aufgaben nicht lösen.

27.5 Punktladung in einem elektrischen Feld

In diesem und im nächsten Abschnitt wollen wir, im Gegensatz zu Abschn. 27.4, die Wechselwirkung zwischen Feld und Ladung von der anderen Seite betrachten. Wir nehmen jetzt ein elektrisches Feld als gegeben an und fragen nach den Kräften und Drehmomenten, die auf eine bestimmte Ladungsverteilung wirken, wenn sie in das Feld gebracht wird. Wir beginnen mit einer Punktladung Q in einem homogenen elektrischen Feld.

Nach Gl. 27.2 wird das Feld auf das geladene Teilchen eine Kraft ausüben:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E}Q.$$

Falls das Teilchen eine Masse m hat, wird es durch diese Kraft mit

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}/m$$

beschleunigt. Wir wollen an zwei Beispielen sehen, wie ein geladenes Teilchen in einem homogenen elektrischen Feld beschleunigt wird. Man kann ein solches Feld zwischen

zwei voneinander isolierten Metallplatten herstellen, indem man die Platten mit je einem Pol einer Batterie verbindet. Ist der Abstand der Platten klein gegenüber ihren Ausdehnungen, so wird das Feld (außer an den Plattenkanten) einigermaßen homogen sein. Bei der Bestimmung der Teilchenbewegung in dem von den äußeren Ladungen erzeugten Feld wird das vom Teilchen selbst erzeugte Feld (d. h. sein *Eigenfeld*) nicht berücksichtigt, genauso wie das Gravitationsfeld der Erde nicht auf diese selbst wirkt, sondern nur auf einen zweiten Körper, wie zum Beispiel einen Stein.

Beispiel 7

Ein Teilchen der Masse m und der Ladung Q wird in ein homogenes elektrisches Feld (Abb. 27.12) gebracht und sich selbst überlassen. Welche Bewegung beschreibt das Teilchen?

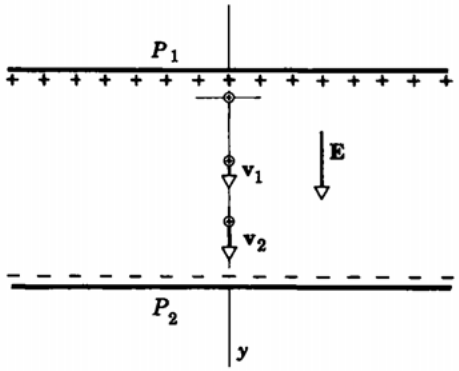


Abb. 27.12 Zwischen zwei entgegengesetzt geladenen Platten besteht ein homogenes elektrisches Feld, unter dessen Wirkung eine Ladung aus dem Ruhezustand heraus in Richtung des Feldes bewegt wird.

Dieses Problem ähnelt dem eines im Schwerefeld der Erde fallenden Teilchens. Die (konstante) Beschleunigung des Teilchens ist

$$a = \frac{F}{m} = \frac{QE}{m}.$$

Hierfür kann man alle Gleichungen für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung (Tab. 3.1) verwenden. Mit $v_0 = 0$ erhält man

$$v = at = \frac{QEt}{m},$$

$$y = \tfrac{1}{2}at^2 = \frac{QEt^2}{2m},$$

$$v^2 = 2ay = \frac{2QEy}{m}.$$

Das Teilchen hat nach einer zurückgelegten Strecke y eine kinetische Energie von

$$E_k = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\left(\frac{2QEy}{m}\right) = QEy.$$

Dieses Ergebnis folgt auch direkt aus dem Energiesatz, denn im vorliegenden Fall wirkt eine konstante Kraft QE entlang der Strecke y.

Beispiel 8

Ablenkung eines Elektronenstrahls. In Abb. 27.13 fliegt ein Elektron der Ladung $Q = e$ und der Masse m mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht in ein homogenes elektrisches Feld der Feldstärke $\boldsymbol{E}$ hinein. Die Bewegung des Elektrons entspricht genau der eines horizontal abgeschossenen Projektils im Schwerefeld der Erde. Man kann also die Überlegungen von Abschn. 4.3 direkt übernehmen. Die waagerechte (x) und die senkrechte (y) Bewegungskomponente sind also

$$x = v_0 t$$

und

$$y = \tfrac{1}{2}at^2 = \frac{eE}{2m}t^2.$$

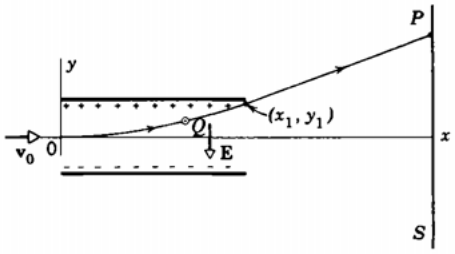


Abb. 27.13 Zu Beispiel 8. Ein Elektron wird in ein homogenes elektrisches Feld hineingeschossen

Nach Elimination von t erhält man dann

$$y = \frac{eE}{2mv_0^2}x^2 \tag{27.9}$$

als Gleichung der Flugbahn.

Wenn das Elektron das Feld zwischen den Platten wieder verläßt (Punkt x_1, y_2), fliegt es (wenn die Schwerkraft vernachlässigt wird) in einer geraden Bahn weiter. Ein Elektronenstrahl kann so auf einem Fluoreszenzschirm S als leuchtender Punkt festgestellt werden. Nach diesem Prinzip arbeitet die Elektronenstrahlröhre in einem Oszillographen.

Beispiel 9

Das elektrische Feld zwischen den Kondensatorplatten einer Elektronenstrahlröhre habe eine Feldstärke von 1.2×10^4 N/C. Welche Ablenkung erfährt ein Elektron, das mit einer Energie von $2\,\text{keV} = 3.2 \times 10^{-16}$ J rechtwinklig in das Feld hineinfliegt? Der Ablenkkondensator habe eine Länge von 1.5 cm.

Aus Gl. 27.9 erhält man mit $E_k = \frac{1}{2} m v_0^2$ die Beziehung

$$y = \frac{eEx^2}{4E_k}.$$

Für die maximale Ablenkung y_1, die am äußersten Punkt x_1 der Platte erreicht wird (Abb. 27.13), erhält man

$$y_1 = \frac{eEx_1^2}{4E_k}$$

$$= \frac{(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})(1.2 \times 10^4\ \text{N/C})(1.5 \times 10^{-2}\ \text{m})^2}{(4)(3.2 \times 10^{-16}\ \text{J})}$$

$$= 3.4 \times 10^{-4}\ \text{m} = 0.34\ \text{mm}.$$

Die auf dem Schirm S festgestellte Ablenkung im Punkt P ist natürlich größer als y_1.

Beispiel 10

Entsprechend der Abb. 27.14 wird eine Probe-Punktladung q_0 genau zwischen zwei gleiche positive Ladungen gebracht. Welche Kräfte wirken auf q_0 nahe dem Punkt P?

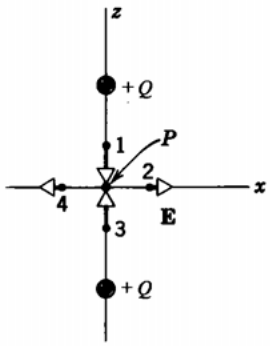


Abb. 27.14 Zu Beispiel 10. Das elektrische Feld in vier Punkten 1, 2, 3 und 4 in der Nähe eines Punktes P, der genau in der Mitte zwischen zwei gleich großen, positiven Ladungen liegt.

Wegen der symmetrischen Anordnung ist direkt im Punkt P die Kraft auf q_0 Null. Die Probeladung befindet sich dort in einem Gleichgewicht. In Abb. 27.14 sind vier weitere Punkte in der Nähe von P eingezeichnet; die zugehörigen Feldstärken $\boldsymbol{E}$ sind durch Pfeile angegeben. Bewegt man die Probeladung q_0 in z-Richtung, so wirkt auf sie eine Rückstellkraft, das heißt, es handelt sich hier um ein stabiles Gleichgewicht. Für eine Bewegung in x-Richtung (oder auch in y-Richtung aus der Papierebene heraus) ist das Gleichgewicht aber instabil. Diese Situation entspricht einem Gleichgewicht, wie es im Sattelpunkt einer Fläche im Dreidimensionalen gegeben ist (vgl. Abb. 14.8). Welches Gleichgewicht ergibt sich für eine negative Probeladung?

27.6 Dipol im elektrischen Feld

Ein elektrisches Dipolmoment kann als ein Vektor angesehen werden, dessen Betrag (vgl. Beispiel 3) $p = 2aQ$ sowohl durch die Größe der Ladung als auch durch die Größe des Abstandes zwischen den Ladungen bestimmt wird. Der Vektor zeigt von der negativen Ladung zur positiven. Die Vektornatur des Dipolmomentes gestattet es, viele Formeln in kompakter mathematischer Schreibweise darzustellen.

In Abb. 27.15a liegt ein Dipol in einem *äußeren* homogenen elektrischen Feld. Die Dipolachse ist um den Winkel θ gegen die Feldlinien geneigt. Auf den Dipol wirken zwei entgegengesetzte Kräfte $\boldsymbol{F}$ und $-\boldsymbol{F}$ mit dem Betrag

$$F = QE.$$

Die zum Feld parallel gerichteten Kraftkomponenten ergeben eine resultierende Kraft von Null, sie verursachen aber ein Drehmoment um eine Achse durch O. Dieses ist nach Gl. 12.2 durch

$$M = 2F(a \sin\theta) = 2aF \sin\theta$$

gegeben. Man kann beide Gleichungen mit Benutzung des Ausdrucks $p = 2aQ$ für das Dipolmoment zusammenfassen:

$$M = 2aqE \sin\theta = pE \sin\theta. \tag{27.10}$$

Auf einen Dipol im homogenen elektrischen Feld wirkt also ein Drehmoment, das bestrebt ist, den Dipol in Feldrichtung einzustellen. Gl. 27.10 lautet in vektorieller Schreibweise:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}. \tag{27.11}$$

Die zugehörigen Vektoren sind in Abb. 27.15b angegeben.

Um die Richtung eines elektrischen Dipols in einem äußeren elektrischen Feld zu ändern, ist eine äußere Arbeit notwendig. Diese Arbeit (positiv oder negativ) wird als

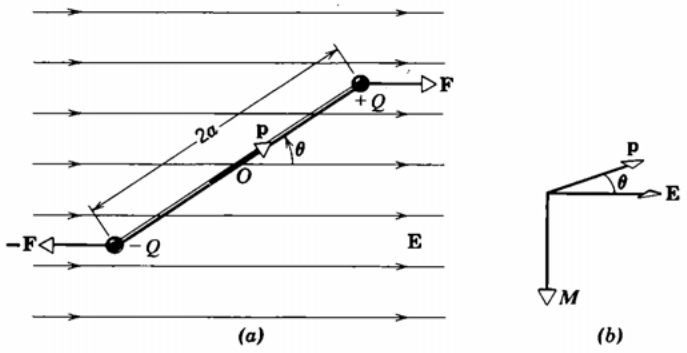


Abb. 27.15 (a) Ein elektrischer Dipol in einem äußeren, homogenen Feld. (b) Die Vektoren des Drehmomentes $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$

potentielle Energie im System gespeichert. Das System besteht aus dem Dipol und der Vorrichtung, mit der das Feld erzeugt wird. Nach Tab. 12.2 ist die Arbeit, die zum Drehen des Dipols um einen Winkel θ erforderlich ist, durch

$$W = \int \mathrm{d}W = \int_{\theta_0}^{\theta} M \, \mathrm{d}\theta = E_\mathrm{p}$$

gegeben. θ_0 sei der Winkel zwischen der Dipolachse und dem Feld vor der Drehung. Diese Gleichung ergibt zusammen mit Gl. 27.10

$$E_\mathrm{p} = \int_{\theta_0}^{\theta} pE \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = pE \int_{\theta_0}^{\theta} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta$$

$$= pE \, (-\cos\theta)\Big|_{\theta_0}^{\theta}$$

Da uns bei unseren Überlegungen nur die Änderung der potentiellen Energie interessiert, können wir das Bezugssystem beliebig wählen, z. B. derart, daß die anfängliche Orientierung des Dipols im Feld zu 90° wird. Unter dieser Annahme wird

$$E_\mathrm{p} = -pE \cos\theta \tag{27.12}$$

oder in vektorieller Schreibweise

$$E_\mathrm{p} = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}. \tag{27.13}$$

Beispiel 11

Ein elektrischer Dipol bestehe aus zwei ungleichnamigen Ladungen der Größe $Q = 1 \times 10^{-6}$ C im Abstand von $d = 2$ cm voneinander. Dieser Dipol wird in ein elektrisches Feld der Feldstärke 1×10^5 N/C gebracht.

(a) Welches Drehmoment übt das Feld maximal auf den Dipol aus? Das größte Drehmoment wird nach Gl. 27.10 bei $\theta = 90°$ erreicht, also

$$\begin{aligned} M &= pE \sin\theta = QdE \sin\theta \\ &= (1.0 \times 10^{-6}\ \mathrm{C})(0.020\ \mathrm{m})(1.0 \times 10^5\ \mathrm{N/C})(\sin 90°) \\ &= 2.0 \times 10^{-3}\ \mathrm{Nm}. \end{aligned}$$

(b) Welche äußere Arbeit muß an dem Dipol verrichtet werden, um ihn einmal umzudrehen? Diese Arbeit entspricht der Differenz der potentiellen Energien für die Positionen $\theta = 0°$ und $\theta = 180°$. Nach Gl. 27.12 erhält man damit

$$\begin{aligned} W &= E_{180°} - E_{0°} = (-pE \cos 180°) - (-pE \cos 0) \\ &= 2pE = 2QdE \\ &= (2)(1.0 \times 10^{-6}\ \mathrm{C})(0.020\ \mathrm{m})(1.0 \times 10^5\ \mathrm{N/C}) \\ &= 4.0 \times 10^{-3}\ \mathrm{J}. \end{aligned}$$

Fragen

1. Man nenne möglichst viele Skalarfelder und Vektorfelder.
2. (a) Kann man bei der Gravitationsanziehung zwischen der Erde und einem Stein davon sprechen, daß sich die Erde im Gravitationsfeld des Steines befindet? (b) Wie hängt das Gravitationsfeld eines Steines mit dem der Erde zusammen?
3. Ein positiv geladener Ball hängt an einer langen Seidenschnur herab. Man möchte die Feldstärke in irgendeinem Punkt der horizontalen Ebene bestimmen, in der der Ball liegt. Hierzu bringt man eine positive Probeladung q_0 in den entsprechenden Punkt und mißt $\boldsymbol{F}/q_0$. Ist der gemessene Wert $\boldsymbol{F}/q_0$ kleiner, gleich oder größer als die tatsächliche Feldstärke in dem Punkt?
4. Hängt die nach Gl. 27.2 ermittelte elektrische Feldstärke von der Größe der Probeladung ab?
5. Beim Ausmessen elektrischer Felder mit einer Probeladung nimmt man nach Vereinbarung oft eine positive Ladung. Ergäbe es einen Unterschied, wenn man eine negative Ladung nähme? Man demonstriere diese Möglichkeit an einem einfachen Beispiel.
6. Warum kreuzen sich elektrische Feldlinien nicht?
7. Zu Abb. 27.4. Wenn man die Richtung der Feldlinien an den Rändern der Abbildung zurückverfolgt, scheint es, als ob sie alle aus der Mitte der Abbildung entspringen. Wie kann man das erklären?
8. Nach Abb. 27.2 hat $\boldsymbol{E}$ in allen Punkten vor einer unendlich ausgedehnten gleichmäßig geladenen Platte denselben Wert. Ist das vernünftig? Man sollte doch annehmen, daß das Feld in der Nähe der Platte, wo die Ladungen viel näher liegen, viel stärker ist als weiter entfernt von ihr.
9. Wird sich eine Probeladung der Masse m längs einer Feldlinie bewegen, wenn sie in ein inhomogenes elektrisches Feld gebracht wird?
10. Eine Punktladung bewege sich in einem elektrischen Feld senkrecht zu den Kraftlinien. Wirken irgendwelche Kräfte auf die Ladung?
11. Der Weg AB in Abb. 27.7 stellt keine Feldlinie dar. Was können Sie dazu sagen?
12. Zu Abb. 27.6. Warum ordnen sich die Körner des Grassamens entlang den Feldlinien an? Grassamen trägt normalerweise keine Ladung.
13. Zwei Punktladungen haben einen Abstand von d. In einem Punkt auf der Verbindungslinie ist die Feldstärke Null. Was kann man über die Punktladungen aussagen?
14. Man diskutiere, wie sich die Feldstärke mit dem Abstand ändert (a) für eine Punktladung (Gl. 27.4), (b) für einen Dipol (Gl. 27.8a) und (c) für einen Quadrupol (Aufgabe 33).
15. Die Ladungen $+Q$ und $-Q$ haben einen Abstand von L. Welche Richtung hat $\boldsymbol{E}$ in einem Punkt auf der Verbindungslinie (a) zwischen den Ladungen, (b) jenseits von $+Q$ und (c) jenseits von $-Q$?
16. Zwei Punktladungen haben einen festen Abstand L. Gibt es Punkte, die nicht auf der Verbindungslinie zwischen den Ladungen liegen und in denen die Feldstärke Null ist? (Die Punkte im Unendlichen seien ausgeschlossen.)
17. Inwiefern gilt Gl. 27.8b nicht mehr für die Feldlinien der Abb. 27.5, wenn man die Bedingung $r \gg a$ fallen läßt?
18. Zwei Dipole mit den Dipolmomenten $\boldsymbol{p}_1$ und $\boldsymbol{p}_2$ werden übereinandergelegt. Wird das Dipolmoment der neuen Anordnung durch $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$ angegeben?
19. In Abb. 27.5 ist die auf die untere Ladung wirkende Kraft endlich und nach oben gerichtet. Die Dichte der Feldlinien an der Stelle dieser Punktladung deutet jedoch daraufhin, daß die Kraft dort unendlich groß sein müsse. Eine in ein Feld unendlich großer Feldstärke gebrachte Ladung sollte aber auch eine unendlich große Kraft erfahren. Wie löst sich der Widerspruch auf?
20. Ein elektrischer Dipol werde in ein *inhomogenes* elektrisches Feld gebracht. Wirkt auf den Dipol eine resultierende Kraft?
21. So wie in Abb. 27.15a dargestellt ist, soll in ein äußeres homogenes elektrisches Feld ein Dipol gebracht und anschließend losgelassen werden. Man diskutiere die Bewegung des Dipols.

22. Ein elektrischer Dipol liege parallel zu den Feldlinien ausgerichtet in einem äußeren homogenen elektrischen Feld. (a) Ist sein Gleichgewicht stabil oder instabil? (b) Man diskutiere die Art des Gleichgewichts, wenn das Dipolmoment der Feldstärke entgegengerichtet ist.

Aufgaben

Abschnitt 27.2

1. Wie groß ist eine Punktladung, die in einer Entfernung von 50 cm ein Feld mit einer Stärke von 2 N/C erzeugt?
   Antwort: 5.6×10^{-11} C.
2. Welchen Betrag und welche Richtung hat die elektrische Feldstärke eines Feldes, das gerade dem Gewicht (a) eines Elektrons und (b) eines α-Teilchens die Waage halten kann?
3. Ein elektrisches Feld der durchschnittlichen Feldstärke 150 N/C ist abwärts in die Erdatmosphäre gerichtet. Es soll eine Schwefelkugel von 454 g Masse so aufgeladen werden, daß sie in diesem Feld schwebt. (a) Welche Ladung (Größe und Vorzeichen) ist dafür notwendig? (b) Warum ist ein solches Experiment nicht sehr sinnvoll?
   Antwort: (a) -0.03 C; (b) die Kugel würde wegen der Coulombschen Abstoßungskräfte zerplatzen.
4. Zu irgendeinem Zeitpunkt seien die Geschwindigkeitskomponenten eines zwischen zwei geladenen Platten fliegenden Elektrons $v_x = 1.5 \times 10^5$ m/s und $v_y = 3 \times 10^5$ m/s; das elektrische Feld habe eine Stärke von 1.2×10^4 N/C und verlaufe längs der y-Richtung. (a) Welche Beschleunigung erfährt das Elektron? (b) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Elektrons, nachdem es eine Strecke zurückgelegt hat, bei der sich die x-Koordinate um 2 cm veränderte?
5. Auf ein Teilchen der Ladung -2×10^{-9} C wirkt in einem homogenen elektrischen Feld eine abwärtsgerichtete Kraft von 3×10^{-6} N. (a) Wie groß ist die elektrische Feldstärke? (b) Welche Kraft (Richtung und Betrag) wirkt auf ein Proton in diesem Feld? (c) Wie groß ist die Gravitationskraft auf ein Proton? (d) In welchem Verhältnis stehen die auf das Proton wirkenden Kräfte (b) und (c)?
   Antwort: (a) 1.5×10^3 N/C; (b) 2.4×10^{-16} N, aufwärts; (c) 1.6×10^{-26} N; (d) 1.5×10^{10}.
6. Zwischen zwei großen parallelen Platten befindet sich ein vertikales homogenes Feld. An einem Faden der Länge l hängend wird eine kleine leitende Kugel der Masse m in das Feld gehalten. Man bestimme die Schwingungsperiode dieses Pendels, wenn die Kugel eine Ladung von $+Q$ trägt und die untere Platte (a) positiv bzw. (b) negativ aufgeladen ist.

Abschnitt 27.3

7. Unter der Annahme, der Exponent r im Coulombschen Gesetz betrüge nicht 2, sondern n, zeige man, daß es für $n \neq 2$ nicht möglich ist, Feldlinien zu zeichnen, die die in Abschn. 27.3 geforderten Bedingungen erfüllen. Der Einfachheit halber nehme man das Beispiel einer Punktladung.
8. Man skizziere qualitativ den Feldlinienverlauf um eine dünne gleichmäßig geladene Kreisscheibe vom Radius R. Hinweis: Als Grenzfälle betrachte man Punkte, die sehr nahe an der Oberfläche sind, und solche, die sehr weit entfernt von ihr sind. Man zeichne die Feldlinien nur in einer Schnittebene, in der die Achse liegt.
9. Man skizziere qualitativ die Feldlinien im Raum zwischen zwei konzentrischen leitenden Kugelschalen. Auf der inneren Schale liege die Ladung $+Q_1$, auf der äußeren $-Q_2$. Man betrachte die Fälle $Q_1 > Q_2$, $Q_1 = Q_2$, $Q_1 < Q_2$.
10. (a) Man skizziere qualitativ die Feldlinien in einer Ebene senkrecht zu drei langen parallelen Geraden, die die gleiche längenbezogene Ladung λ (C/m) haben. Die Schnittpunkte der Geraden mit der Ebene bilden die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks. (b) Man diskutiere das Gleichgewicht einer Probeladung, die sich im Zentrum des Dreiecks befindet.

11. Zu Abb. 27.4. Man betrachte zwei benachbarte, aus der oberen Ladung entspringende Feldlinien, die mit der Verbindungslinie zwischen den Ladungen einen kleinen Winkel einschließen. Wenn die Tangenten an diese Feldlinien in Punkten nahe der Ladung einen Winkel von θ bilden, so bilden sie für Punkte weit weg von der Ladung einen Winkel von $\theta/\sqrt{2}$. Man beweise und erläutere diese Behauptung. Hinweis: Man untersuche, wie sich die Feldlinien in der Nähe der Ladungen und weit weg von ihnen verhalten müssen.

Abschnitt 27.4

12. Drei Ladungen seien in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks angeordnet (Abb. 27.16). Welche Richtung hat die auf $+q$ wirkende Kraft?

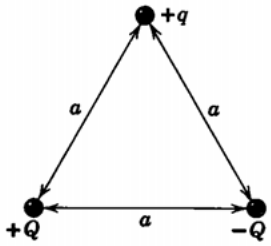


Abb. 27.16 Zu Aufgabe 12

13. Zwei ungleichnamige Ladungen des Betrages 2×10^{-7} C haben einen Abstand von 15 cm. (a) Welchen Betrag und welche Richtung hat die Feldstärke im Mittelpunkt der Verbindungslinie? (b) Welche Kraft (Betrag und Richtung) würde auf ein dort befindliches Elektron wirken?
Antwort: (a) 6.4×10^5 N/C, zur negativen Ladung hin; (b) 1×10^{-13} N, zur positiven Ladung hin.
14. Zwei Punktladungen von $+2 \times 10^{-7}$ C und $+8.5 \times 10^{-8}$ C haben einen Abstand von 12 cm. (a) Welche Feldstärke erzeugen sie am Ort der jeweils anderen Ladung? (b) Welche Kraft wirkt auf jede der Ladungen?
15. Zwei unbekannte Punktladungen haben eine Entfernung d voneinander. (a) Unter welchen Bedingungen ist es möglich, einen Punkt mit der Feldstärke Null zu finden, der auf der Verbindungslinie der Ladungen liegt, aber nicht zwischen ihnen? Wo liegt dieser? (b) Ist es möglich, für eine Anordnung von zwei Punktladungen *zwei* Punkte zu finden (außer im Unendlichen), in denen die Feldstärke Null ist?
Antwort: (a) Die Ladungen müssen ungleichnamig sein, und die näher gelegene Ladung muß kleiner sein als die entferntere. (b) Das ist nicht möglich.
16. (a) In welchen Punkten der Anordnung in Abb. 27.17 ist die Feldstärke Null? (b) Man skizziere qualitativ den Feldlinienverlauf. Es sei $a = 50$ cm.
17. Zwei Punktladungen $Q_1 = +1 \times 10^{-6}$ C und $Q_2 = +3 \times 10^{-6}$ C liegen in einem Abstand von $d = 10$ cm voneinander entfernt. (Abb. 27.18). Man zeichne $E(x)$ für positive und negative x-Werte, wenn der Nullpunkt bei Q_1 liegt. E sei positiv, wenn die Feldstärke nach rechts weist, und negativ, wenn sie nach links weist.

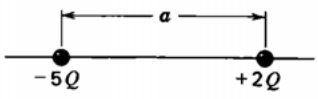


Abb. 27.17 Zu Aufgabe 16

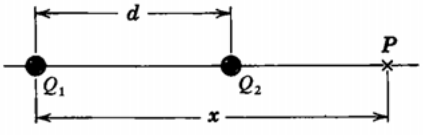


Abb. 27.18 Zu Aufgabe 17

18. Welchen Betrag und welche Richtung hat die Feldstärke im Zentrum des in Abb. 27.19 gezeigten Quadrats? Es sei $Q = 1 \times 10^{-8}$ C und $a = 5$ cm.

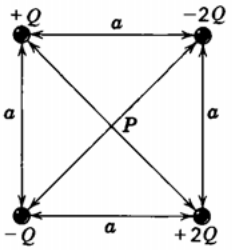


Abb. 27.19 Zu Aufgabe 18

19. Zu Abb. 27.8. Es seien beide Ladungen positiv. (a) Man zeige, daß unter der Annahme $r \gg a$ für die Feldstärke im Punkt P gilt:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2Q}{r^2}.$$

(b) Welche Richtung hat die Feldstärke? (c) Ist es plausibel, daß sich die Feldstärke mit r^{-2} ändert und nicht mit r^{-3} wie bei einem Dipol (Gl. 27.8 b)?
Antwort: (b) Rechtwinklig zur Dipolachse und von ihr weg.

20. Man betrachte die Ladungsverteilung der Abb. 27.20. (a) Man bestimme den Vektor der Feldstärke in den Punkten A, B und C. (b) Man skizziere den Feldlinienverlauf.

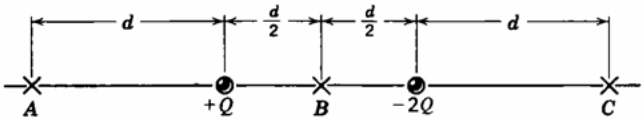


Abb. 27.20 Zu Aufgabe 20

21. Man bestimme den Betrag und die Richtung des Feldstärkevektors im Punkt P der Abb. 27.21.
Antwort: $E = Q/\pi\varepsilon_0 a^2$, längs der Mittelsenkrechten weg vom Dreieck.

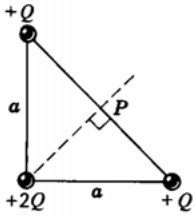


Abb. 27.21 Zu Aufgabe 21

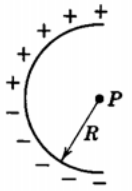


Abb. 27.22 Zu Aufgabe 22

22. Ein dünner Glasstab wird zu einem Halbkreis mit dem Radius R gebogen. Wie in Abb. 27.22 gezeigt, verteilt sich die Ladung $+Q$ gleichmäßig auf die obere Hälfte des Halbkreises und die Ladung $-Q$ gleichmäßig auf die untere Hälfte des Halbkreises. Wie groß ist die elektrische Feldstärke im Mittelpunkt P des Halbkreises?

23. Ein dünner nichtleitender Stab der Länge l trage eine gleichmäßig verteilte Ladung Q (Abb. 27.23). Man zeige, daß die Feldstärke im Punkt P durch folgende Beziehung gegeben ist:

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 y} \frac{1}{\sqrt{l^2 + 4y^2}}.$$

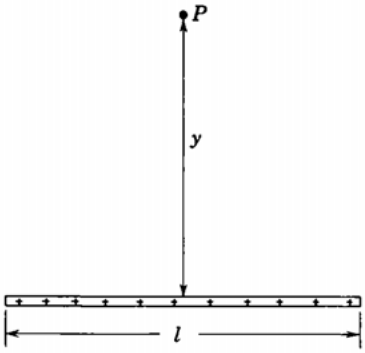


Abb. 27.23 Zu Aufgabe 23

Man zeige, daß sich für $l \to \infty$ das Ergebnis aus Beispiel 6 ergibt.

24. Zu Beispiel 5. Ein Elektron bewegt sich auf der Achse des in Abb. 27.10 gezeigten Ringes. Man zeige, daß das Elektron Schwingungen mit folgender Kreisfrequenz vollführt:

$$\omega = \sqrt{\frac{eQ}{4\pi\varepsilon_0 m a^3}}.$$

Diese Beziehung gilt nur für kleine Schwingungen im Bereich $x \ll a$. Hinweis: Man zeige, daß die Elektronenbewegung harmonisch ist und nach Gl. 15.11 beschrieben wird.

25. Zu Abb. 27.8. (a) Man zeige, daß für große Entfernungen r des Punktes P die elektrische Feldstärke durch

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{p}{r^3}$$

gegeben ist, also den doppelten Betrag des in Gl. 27.8 b genannten Wertes hat. (b) Welche Richtung hat die Feldstärke in P?
Antwort: (b) Parallel zu $\boldsymbol{p}$.

26. Man zeige, daß für den geladenen Ring aus Beispiel 5 die maximale Feldstärke bei $x = a/\sqrt{2}$ auftritt.

27. Zu Beispiel 5. Man nehme an, die Ladung Q sei nicht gleichmäßig über den Ring verteilt, sondern die Teilladung Q_1 sei über die obere Hälfte und die Teilladung Q_2 über die untere Hälfte verteilt. Es sei $Q = Q_1 + Q_2$. (a) Man bestimme für P die Komponente der Feldstärke in x-Richtung und vergleiche sie mit dem in Beispiel 5 gefundenen Wert. (b) Man bestimme für den Punkt P die Komponente der Feldstärke senkrecht zur x-Achse und vergleiche sie mit dem Wert aus Beispiel 5.

Antwort: $(a)\, E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$; $(b)\, E = \frac{1}{2\pi^2\varepsilon_0} \frac{(Q_1 - Q_2)a}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$.

28. *Dipolfeld* der Abb. 27.24. Man zeige, daß für die Komponenten der Feldstärke im Punkt P gilt:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3pxy}{(x^2+y^2)^{5/2}},$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p(2y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}.$$

Man zeige, daß diese allgemeine Beziehung auch die Ergebnisse der Spezialfälle von Gl. 27.8 b und aus Aufgabe 25 umfaßt.

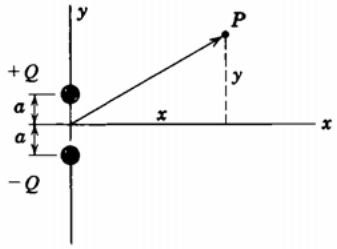


Abb. 27.24 Zu Aufgabe 28

29. Ein in einer Richtung unendlich ausgedehnter isolierender Stab (Abb. 27.25) trägt eine konstante längenbezogene Ladung λ (C/m). Man zeige, daß die Richtung der Feldstärke im Punkt P um 45° gegen den Stab geneigt ist, unabhängig vom Abstand R des Punktes vom Stab.

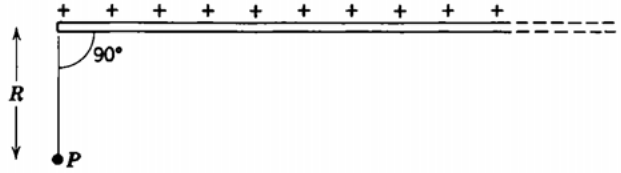


Abb. 27.25 Zu Aufgabe 29

30. Eine nichtleitende Halbkugelschale mit dem inneren Radius a trägt auf der Innenfläche eine gleichmäßig verteilte Ladung Q. Wie groß ist die Feldstärke im Krümmungsmittelpunkt?
31. Ein dünner nichtleitender Stab werde zu einem Kreisbogen mit dem Durchmesser a gebogen. Der Bogen entspricht einem Zentriwinkel θ_0. Längs des Kreisbogens sei eine Ladung Q gleichmäßig verteilt. Man leite eine Beziehung für die Feldstärke im Kreismittelpunkt als Funktion von a, Q und θ_0 her.

Antwort: $E = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0\theta_0 a^2} \sin(\theta_0/2)$.

32. Eine dünne Kreisscheibe mit dem Radius a trägt eine konstante Flächenladungsdichte σ (C/m^2). Man bestimme die elektrische Feldstärke auf der Achse der Kreisscheibe in einer Entfernung r vom Mittelpunkt.
33. *Elektrischer Quadrupol.* Abb. 27.26 zeigt eine mögliche Anordnung eines elektrischen Quadrupols. Er besteht aus zwei hintereinander gesetzten Dipolen, die sich in ihrer Wirkung auf äußere Punkte nicht völlig aufheben. Man zeige, daß die elektrische Feldstärke im Punkt P auf

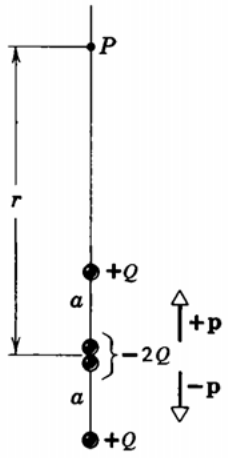


Abb. 27.26 Zu Aufgabe 33

der Quadrupolachse im Abstand r vom Mittelpunkt (es sei $r \gg a$) durch die Beziehung

$$E = \frac{3Q_m}{4\pi\varepsilon_0 r^4}$$

gegeben ist. $Q_m = 2Qa^2$ wird das *Quadrupolmoment* genannt.

34. Eine andere mögliche Quadrupolanordnung wird in Abb. 27.27 gezeigt. Vier Ladungen bilden die Ecken eines Quadrats der Seitenlänge $2a$. Der Punkt P liegt auf einer Mittellinie des Quadrats im Abstand R vom Zentrum entfernt. Man zeige für $R \gg a$, daß die elektrische Feldstärke in P durch

$$E = \frac{3\,Q_m}{2\pi\varepsilon_0 R^4},$$

gegeben ist. $Q_m = 2Qa^2$ ist das Quadrupolmoment. Hinweis: Man betrachte den Quadrupol als Anordnung von zwei Dipolen.

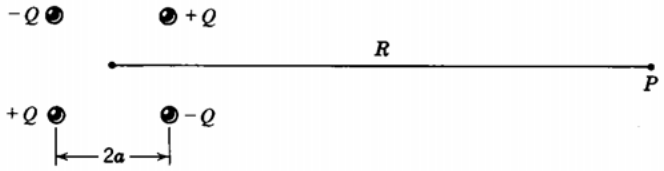


Abb. 27.27 Zu Aufgabe 34

Abschnitt 27.5

35. Zwischen zwei entgegengesetzt geladenen Platten befindet sich ein homogenes elektrisches Feld. Von der negativ geladenen Platte startet ein Elektron und erreicht nach 1.5×10^{-8} s die 2 cm entfernte positive Platte. (a) Mit welcher Geschwindigkeit trifft das Elektron auf? (b) Wie groß ist der Betrag der Feldstärke zwischen den Platten?
Antwort: (a) 2.7×10^6 m/s; (b) 1×10^3 N/C.

36. Ein Elektron wird mit einer Geschwindigkeit von 5×10^8 cm/s parallel zu den Feldlinien in ein elektrisches Feld geschossen. Das Feld hat eine Feldstärke von 1×10^3 N/C und ist so gerichtet, daß es das Elektron abbremst. (a) Welche Strecke legt das Elektron im Feld zurück, bevor es zum Stillstand kommt? (b) Wie lange braucht das Elektron, bis es zum Stillstand kommt? (c) Angenommen, das Feld endet abrupt nach 0.8 cm, welchen Anteil der anfänglichen kinetischen Energie hat das Elektron während des Fluges im Feld verloren?
37. (a) Welche Beschleunigung erfährt ein Elektron in einem homogenen elektrischen Feld der Feldstärke 1×10^6 N/C? (b) Wie lange dauert es, bis das Elektron ein Zehntel der Lichtgeschwindigkeit erreicht hat? Man nehme an, daß die Newtonsche Mechanik gelte.
Antwort: (a) 1.8×10^{17} m/s^2; (b) 1.7×10^{-10} s.
38. Ein Elektron fliegt, so wie in Abb. 27.28 skizziert, mit einer Geschwindigkeit von 6×10^6 m/s unter einem Winkel $\theta = 45°$ in ein aufwärts gerichtetes elektrisches Feld der Feldstärke 2×10^3 N/C. Der Abstand der Platten sei $d = 2$ cm, die Länge des Kondensators sei $l = 10$ cm. (a) Wird das Elektron auf eine der Platten treffen? (b) Wenn ja, wo?

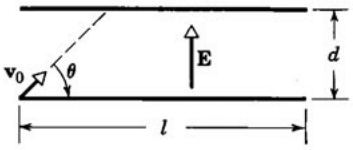


Abb. 27.28 Zu Aufgabe 38

39. *Öltröpfchenversuch von Millikan.* R. A. Millikan hat eine Anordnung entwickelt (Abb. 27.29), in der ein winziges geladenes Öltröpfchen in einem elektrischen Feld zwischen zwei horizonta-

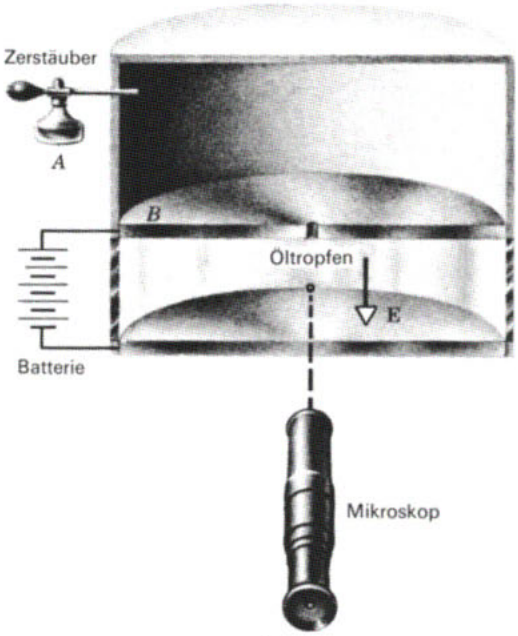


Abb. 27.29 Zu Aufgabe 39. Der Öltröpfchenversuch von Millikan. Durch einen Zerstäuber werden kleine Öltröpfchen erzeugt, von denen ein Teil elektrisch geladen ist. Die Tröpfchen fallen in dem Behälter nach unten. Manche von ihnen treffen genau durch das Loch in der mittleren Platte und gelangen in ein elektrisches Feld **E**.

len Platten durch Veränderung der Feldstärke gegen die Schwerkraft in der Schwebe gehalten werden kann. Es sei der Radius des Tröpfchens $r = 1.64 \times 10^{-4}$ cm, und die Feldstärke im Falle des Schwebens 1.92×10^5 N/C. (a) Wie viele Elementarladungen trägt das Tröpfchen? (b) Warum versuchte Millikan nicht, Elektronen statt Öltröpfchen zu nehmen? Die Dichte von Öl ist 0.851 g/cm^3. (Millikan versuchte zu Anfang, die Elektronenladung so zu bestimmen: Im feldfreien, aber luftgefüllten Raum zwischen den Platten maß er die konstante Geschwindigkeit, mit der die Teilchen herabschwebten, und bestimmte daraus den Radius der Tröpfchen. Durch Pulse von Röntgenstrahlung brachte er eine Ladung auf die Tröpfchen.)
Antworten: (a) 5 e; (b) Elektronen sind nicht sichtbar. Außerdem wäre die Feldstärke für den Gleichgewichtsfall zu klein.

40. Bei einem seiner ersten Versuche beobachtete Millikan folgende Ladungen zu verschiedenen Zeiten auf demselben Tröpfchen (alle Werte in 10^{-19} C): 6.563/8.204/11.50/13.13/16.48/18.08/19.71/22.89/26.13. Welchen Wert kann man daraus für die Elementarladung ableiten?

Abschnitt 27.6

41. *Dipol im inhomogenen elektrischen Feld.* (a) Wie groß ist dE/dz in der Mitte zwischen gleichen positiven Ladungen? z sei der Abstand von einer der Ladungen auf der Verbindungslinie. (b) Ein kleiner Dipol wird parallel zur z-Achse in diesen Punkt gebracht. Wirken auf ihn irgendwelche Kräfte? Man beachte, daß für den Mittelpunkt $\boldsymbol{E} = 0$ gilt.
Antwort: (a) $dE/dz = -8Q/\pi\varepsilon_0 d^3$, wenn d der Abstand zwischen den Ladungen ist; (b) ja.
42. Ein elektrischer Dipol mit dem Dipolmoment p und dem Trägheitsmoment J schwingt in einem homogenen elektrischen Feld der Feldstärke E um seine Gleichgewichtslage. Man bestimme die Frequenz, wenn der Dipol nur Schwingungen mit kleinen Amplituden um die Gleichgewichtslage ausführen kann.
43. Eine Ladung $Q = 3 \times 10^{-6}$ C befindet sich in 30 cm Entfernung auf der Mittelsenkrechten auf eine Dipolachse. Es wirkt eine Kraft von 5×10^{-6} N auf die Ladung. Man zeige in einer Zeichnung (a) die Richtung der Kraft auf die Ladung und (b) die Richtung der Kraft auf den Dipol. (c) Man berechne die Kraft auf den Dipol.
Antwort: (a) Entgegengesetzt zu $\boldsymbol{p}$; (b) 5×10^{-6} N, parallel zu $\boldsymbol{p}$.

28 Das Gaußsche Gesetz

28.1 Einführung

Im vorigen Kapitel haben wir gesehen, wie man mit dem Coulombschen Gesetz die elektrische Feldstärke in verschiedenen Punkten eines Feldes berechnen kann. Voraussetzung hierzu war, daß die Ladungsverteilung bekannt war. Dieses Verfahren führt grundsätzlich immer zum Ziel. Es ist aber – außer bei sehr einfachen Beispielen – sehr aufwendig und kann in schwierigen Fällen nur mit Rechnerunterstützung durchgeführt werden.

Der Inhalt des Coulombschen Gesetzes wird noch durch ein anderes Gesetz wiedergegeben, dem *Gaußschen Gesetz*. Bei dessen Anwendung ist der Rechenaufwand sehr viel geringer. Leider kann er nur auf wenige Fälle angewendet werden. Dann aber ergeben sich sehr elegante Lösungswege. Die Bedeutung des Gaußschen Gesetzes liegt daher nicht so sehr in seiner praktischen Anwendungsmöglichkeit, sondern mehr in der Einsicht, die er in eine Feldtheorie vermittelt. Zur Formulierung des Gaußschen Gesetzes benötigen wir zunächst den Begriff des Flusses bei einem Vektorfeld.

28.2 Der Fluß

Der *Fluß* ist eine charakteristische Größe, die man für alle Vektorfelder einführen kann; bei einem elektrischen Feld nennt man diese Größe den *elektrischen Fluß* Ψ. Zum besseren Verständnis wollen wir den Fluß zunächst am Strömungsfeld einer Flüssigkeit (daher der Name) erklären (vgl. Kap. 18).

In Abb. 28.1 ist das stationäre homogene Feld eines strömenden Mediums, zum Beispiel Wasser oder ein Gas, dargestellt. Dieses Feld wird durch den konstanten Vektor $\boldsymbol{v}$ charakterisiert, der die Geschwindigkeit des Mediums in jedem Punkt des Feldes angibt. Im ersten Teil (a) der Abbildung ist – im Querschnitt dargestellt – eine gedachte ebene Fläche rechtwinklig zum Strömungsfeld hineingelegt worden, nämlich ein Kreis mit dem Radius R und der Fläche A_a. Die durch diese Fläche strömende Masse, der *Massenfluß* q_m (SI-Einheit: kg/s), ist dann durch

$$q_{m,a} = \varrho v A_a \tag{28.1a}$$

gegeben, wenn ϱ die Dichte des Mediums ist. In Vektorschreibweise lautet diese Gleichung

$$q_{m,a} = \varrho \, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}_a. \tag{28.1b}$$

Der Fluß ist ein Skalar.

In Abb. 28.1 b ist eine ebene Fläche $\boldsymbol{A}_b$ in das Strömungsfeld gelegt. Die Projektion dieser Fläche auf die Ebene parallel zu den Stromlinien, $\boldsymbol{A}_b \cos\theta$, entspricht gerade dem Betrag der Fläche $\boldsymbol{A}_a$ im Teil (a) der Abbildung. Offenbar muß der Massenstrom q_m durch diese beiden Flächen gleich groß sein. Man kann also schreiben:

$$\begin{aligned} q_{m,a} &= q_{m,b} = \varrho v A_a = \varrho v (A_b \cos\theta) \\ &= \varrho \, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}_b. \end{aligned} \tag{28.2}$$

Im Teil (c) der Abb. 28.1 ist irgendeine beliebig gewölbte Fläche in das Strömungsfeld gelegt, deren Projektion wiederum gerade $\boldsymbol{A}_a$ sei. Auch in diesem Fall muß $q_{m,c} = q_{m,a}$ gelten.

Im Teil (d) schließlich sei eine geschlossene Fläche in dem Strömungsfeld betrachtet. Wir behaupten, daß der Fluß $q_{m,d}$ durch diese Oberfläche Null ist, denn der Massenanteil des Mediums, der in den linken Teil der Fläche eintritt, muß auch auf der rechten Seite wieder heraustreten. Wir setzen dabei voraus, daß das Medium inkompressibel ist und daß es innerhalb der Oberfläche nicht verschwindet oder vermehrt wird. In Übereinstimmung mit Kapitel 18 sollen also keine Senken oder Quellen innerhalb des umschlossenen Bereichs vorhanden sein. Jede Stromlinie, die in die Oberfläche eintritt, muß auch wieder aus der Oberfläche herauskommen.

Nunmehr gehen wir von dem anschaulichen Beispiel des Feldes eines strömenden Mediums zu dem eines elektrischen Feldes über. Man fragt sich sofort, was in einem elektrischen Feld fließt. Formal betrachtet sagen die Gl. 28.1 b und Gl. 28.2 gar nichts über einen Fluß aus, sondern etwas über einen Feldvektor $\boldsymbol{v}$. Ersetzt man also in Abb. 28.1 und in den Formeln 28.1 und 28.2 den Vektor $\boldsymbol{v}$ durch den Vektor $\boldsymbol{E}$, so werden

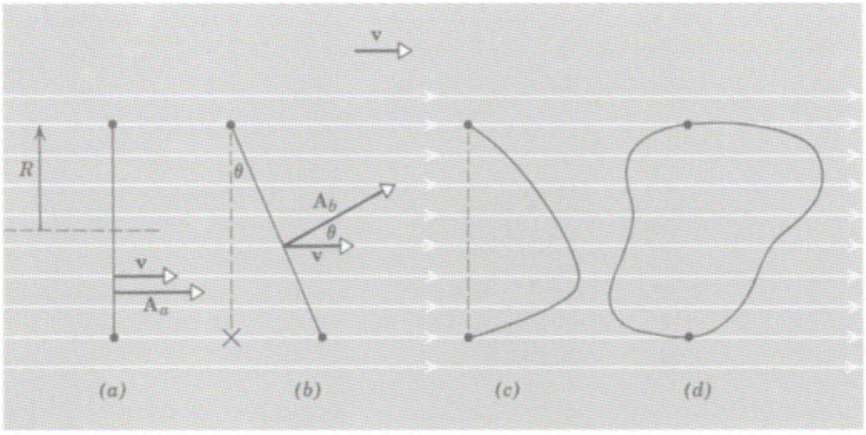


Abb. 28.1 Vier verschiedene Oberflächen innerhalb eines stationären, homogenen Strömungsfeldes einer inkompressiblen Flüssigkeit (z. B. Wasser). Das Strömungsfeld wird durch den Feldvektor **v** beschrieben, der in jedem Punkt des Feldes der Geschwindigkeit der Flüssigkeit entspricht. Die hellen, waagerecht verlaufenden Linien sind die Stromlinien.

die Feldlinien des Strömungsfeldes, die Stromlinien, zu Feldlinien des elektrischen Feldes, und alle Überlegungen bleiben weiter bestehen.

Im folgenden wollen wir uns nur noch mit Fällen von der Art (d) der Abb. 28.1 befassen.

Wenn bei einer inkompressiblen Flüssigkeit der von einer geschlossenen Fläche begrenzte Bereich Quellen oder Senken enthält, so muß der Fluß nicht gleich Null sein. Das ist auch beim elektrischen Feld der Fall. Auch hier kann es Quellen (positive Ladungen, der Fluß ist dann größer als Null) und Senken (negative Ladungen, hier ist der Fluß negativ) im Innern der gedachten geschlossenen Fläche geben.

28.3 Der elektrische Fluß

Wie wir sehen werden, ist der Fluß Ψ eines elektrischen Feldes positiv, wenn die Feldlinien aus einer geschlossenen Oberfläche herauskommen; der elektrische Fluß ist negativ, wenn die Feldlinien in eine geschlossene Fläche hineingehen. In Abb. 28.2 ist dies für zwei gleich große, aber entgegengesetzte Ladungen gezeigt. Die gestrichelten Kurven S_1,

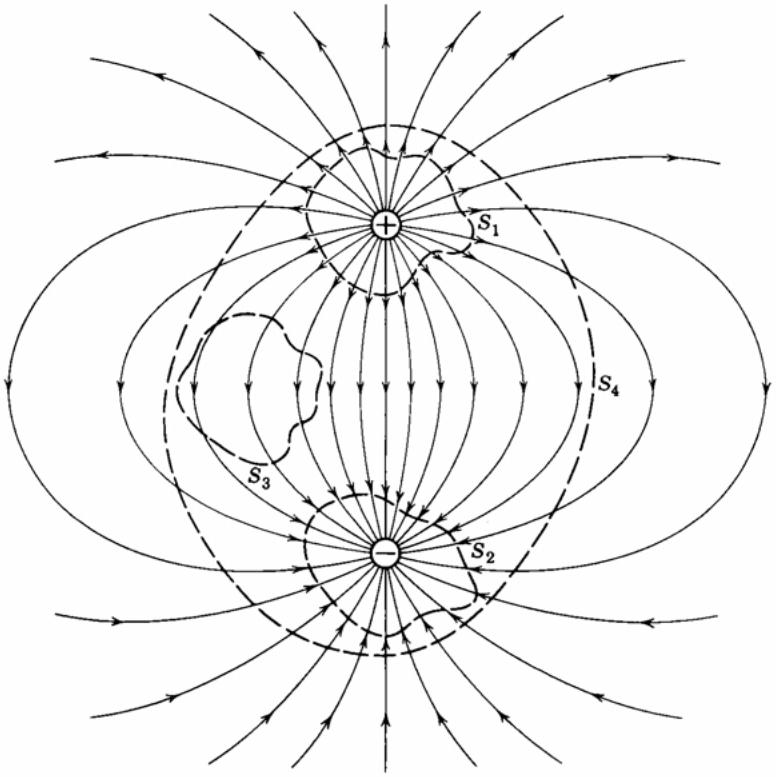


Abb. 28.2 Elektrische Feldlinien um zwei gleich große, ungleichnamige elektrische Ladungen. Die gestrichelten Kurven sind Schnittlinien geschlossener Oberflächen mit der Zeichenebene.

S_2, S_3 und S_4 sind die Schnittkurven von vier angenommenen, geschlossenen Flächen mit der Zeichenebene. Nach der eben genannten Übereinkunft ist Ψ bezüglich der Fläche S_1 positiv, bezüglich S_2 negativ und bezüglich S_3 Null. Der Fluß durch die Fläche S_4 wird ausführlich in Abschn. 28.4 diskutiert, er ist ebenfalls Null. Der elektrische Fluß ist deshalb von besonderer Bedeutung, weil das Gaußsche Gesetz als eine der vier grundlegenden Gleichungen des Elektromagnetismus (Tab. 40.2) mit diesem Begriff formuliert wird.

Wir wollen nun den elektrischen Fluß definieren. Hierzu betrachten wir die Abb. 28.3, in der eine geschlossene Oberfläche, eine sogenannte *Gaußsche Fläche*, in einem inhomogenen elektrischen Feld gezeigt ist. Die Fläche unterteilen wir in viele Flächenelemente

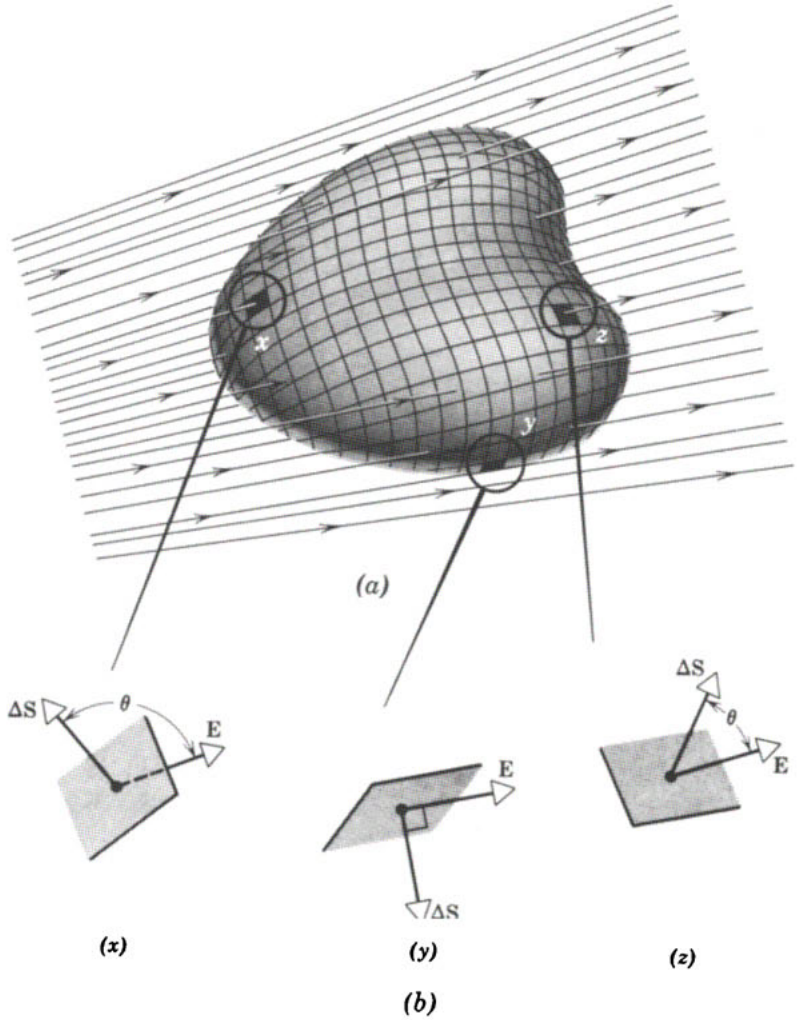


Abb. 28.3 (a) Eine hypothetische Oberfläche innerhalb eines inhomogenen elektrischen Feldes. (b) Drei Oberflächenelemente in vergrößerter Darstellung.

$\Delta \boldsymbol{S}$, die so klein sein sollen, daß man sie als eben annehmen kann. Ein solches Flächenelement kann als Vektor dargestellt werden, dessen Betrag durch die Fläche ΔS angegeben wird. Die Richtung von $\Delta \boldsymbol{S}$ wird durch die nach außen gerichtete Normale auf die Fläche bestimmt.

Auf jedem Flächenelement $\Delta \boldsymbol{S}$ der Oberfläche in Abb. 28.3 ist der Feldvektor $\boldsymbol{E}$ wegen der Kleinheit der Elemente konstant. Die zu jedem kleinen Quadrat gehörenden Vektoren $\boldsymbol{E}$ und $\Delta \boldsymbol{S}$ haben nicht dieselbe Richtung, sondern sie bilden einen Winkel θ miteinander. Abb. 28.3 b zeigt eine Vergrößerung dreier verschiedener Elemente (Quadrate) der Oberfläche. Für den Fall (x) ist $\theta > 90°$, d. h. $\boldsymbol{E}$ ist in die Oberfläche hinein gerichtet; für den Fall (y) ist $\theta = 90°$, d. h. $\boldsymbol{E}$ ist parallel zu der Oberfläche; für den Fall (z) ist $\theta < 90°$, d. h. $\boldsymbol{E}$ kommt aus der Oberfläche heraus.

Mit dieser Vorbetrachtung können wir eine vorläufige Definition des elektrischen Flusses durch

$$\Psi \approx \Sigma \boldsymbol{E} \cdot \Delta \boldsymbol{S} \tag{28.3}$$

geben. Um den elektrischen Fluß zu berechnen, muß man die skalaren Größen $\boldsymbol{E} \cdot \Delta \boldsymbol{S}$ für alle Flächenelemente addieren. Für den Fall (x) ist der Beitrag zum elektrischen Fluß negativ, für den Fall (y) ist er Null und für den Fall (z) ist er positiv. Wenn der elektrische Feldvektor überall aus der Oberfläche herauszeigt, also $\theta < 90°$ gilt, ist $\boldsymbol{E} \cdot \Delta \boldsymbol{S}$ positiv, so z. B. für S_1 in Abb. 28.2. Wenn der elektrische Feldvektor überall in die Oberfläche hineinweist, also $\theta > 90°$, ist $\boldsymbol{E} \cdot \Delta \boldsymbol{S}$ negativ, so z. B. für S_2 in Abb. 28.2.

Die Gl. 28.3 wird zu einer exakten Definition für den elektrischen Fluß, wenn man die Summe durch ein Integral über die Oberfläche ersetzt:

$$\Psi = \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{28.4}$$

Der Kreis am Integralzeichen bedeutet, daß die Integration über eine geschlossene Fläche durchgeführt wird. Die Einheit des elektrischen Flusses ergibt sich zu $\mathrm{Nm^2/C}$.

Beispiel 1

In Abb. 28.4 ist eine geschlossene Oberfläche gezeichnet, ein endlich langer Zylinder mit dem Radius R, der sich parallel zu den Kraftlinien in einem homogenen elektrischen Feld befindet. Wie groß ist der elektrische Fluß durch den Zylinder?

Der Fluß kann in drei Beiträge aufgeteilt werden, je ein Integral über die Deckfläche (a), über die Bodenfläche (c) und die Mantelfläche (b)

$$\begin{aligned} \Psi &= \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \int_{(a)} -\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{(b)} -\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{(c)} -\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}. \end{aligned}$$

Für die (linke) Deckfläche gilt überall $\theta = 180°$, die Vektoren $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ sind alle parallel und $\boldsymbol{E}$ ist konstant. Es gilt also

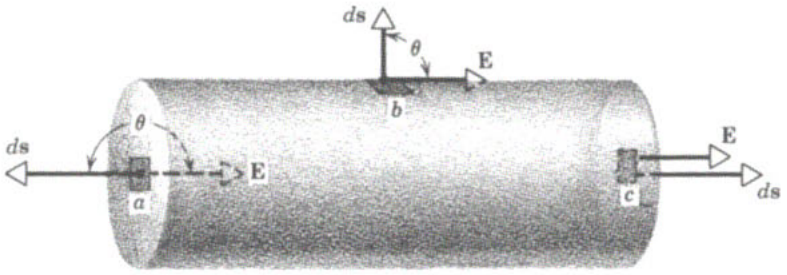


Abb. 28.4 Zu Beispiel 1. Eine geschlossene, zylinderförmige Oberfläche in einem homogenen elektrischen Feld $\boldsymbol{E}$, welches parallel zu der Zylinderachse verläuft.

$$\int_{(a)} -\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int E \cos 180^\circ \, \mathrm{d}S$$
$$= -E \int \mathrm{d}S = -ES,$$

wobei $S = \pi R^2$ die Oberfläche ist. Analog ergibt sich für die (rechte) Bodenfläche

$$\int_{(c)} -\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = +ES,$$

weil dort überall $\theta = 0$ gilt. Für die Mantelfläche schließlich gilt

$$\int_{(b)} -\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0,$$

da hier $\theta = 90^\circ$ und überall $\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$ gilt. Insgesamt erhält man also

$$\Psi = -ES + 0 + ES = 0.$$

Dieses Ergebnis konnte man erwarten, da in dem Zylinder nirgendwo eine Ladung vorhanden ist. Die Feldlinien der konstanten Feldstärke $\boldsymbol{E}$ dringen an der linken Seite in die Deckfläche des Zylinders ein und kommen alle aus der rechten Bodenfläche wieder heraus.

28.4 Das Gaußsche Gesetz

Das Gaußsche Gesetz gilt für beliebige geschlossene Flächen (*Gaußsche Flächen*) und stellt eine Beziehung zwischen dem elektrischen Fluß Ψ durch eine Oberfläche und der von ihr umschlossenen Ladung her. Es lautet:

$$\varepsilon_0 \Psi = Q, \tag{28.5}$$

bzw. unter Benutzung der Gl. 28.4

$$\varepsilon_0 \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q. \tag{28.6}$$

In Beispiel 1 hatte sich für den elektrischen Fluß deshalb der Wert Null ergeben, weil keine Ladung von dem Zylinder umschlossen wurde. Die Gl. 28.4 und Gl. 28.6 ergeben für einen solchen Fall den Wert Null.

Mit dem Symbol Q in Gl. 28.5 und Gl. 28.6 ist die *Gesamtladung innerhalb* der geschlossenen Fläche gemeint. Es dürfen also durchaus lokale Ladungen verschiedenen Vorzeichens auftreten; für die Größe des elektrischen Flusses ist nur ihre algebraische Summe ausschlaggebend. Die exakte Lage der einzelnen Ladungen ist ohne Belang.

Das Gaußsche Gesetz, Gl. 28.6, ist dann von Vorteil, wenn die Ladungsverteilung so symmetrisch ist, daß man leicht eine geeignete, geschlossene Fläche um sie herum finden und das Integral in Gl. 28.6 auswerten kann. Andererseits ist es mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes möglich, die Ladungen innerhalb einer geschlossenen Fläche zu bestimmen, wenn die elektrische Feldstärke in allen Punkten einer Oberfläche bekannt ist. Falls $\boldsymbol{E}$ in allen Punkten der Oberfläche eine nach außen gerichtete Komponente hat, wird Ψ nach Gl. 28.4 positiv sein, und deshalb muß sich innerhalb der Fläche nach Gl. 28.6 eine positive Gesamtladung befinden, so z. B. für S_1 in Abb. 28.2. Hat die Feldstärke überall auf der Oberfläche eine nach innen gerichtete Komponente, muß sich innerhalb der Oberfläche eine negative Gesamtladung befinden, so z. B. für S_2 in Abb. 28.2. Da S_3 in Abb. 28.2 keine Ladungen umschließt, muß Ψ Null sein. Das stimmt mit dem Verlauf der Feldlinien überein, die direkt durch die Fläche S_3 hindurchgehen. Für die Fläche S_4 schließlich ergibt sich auch $\Psi = 0$, da die algebraische Summe der von ihr umschlossenen Ladungen Null ist. Auch hier treten, wie bei S_3, genauso viele Feldlinien in die Fläche hinein wie wieder herauskommen.

28.5 Das Gaußsche Gesetz und das Coulombsche Gesetz

Aus dem Gaußschen Gesetz und durch Symmetrieüberlegungen kann man das Coulombsche Gesetz ableiten. Wir betrachten hierzu eine isoliert aufgestellte Punktladung Q (Abb. 28.5). Obwohl das Gaußsche Gesetz für jede beliebig geformte Oberfläche gilt, kann man eine Aussage doch am bequemsten für eine Kugeloberfläche gewinnen, in derem Mittelpunkt eine Ladung Q liegt. Aus Symmetriegründen muß $\boldsymbol{E}$ auf einer Kugeloberfläche senkrecht stehen und außerdem überall auf der Oberfläche denselben Betrag haben.

In Abb. 28.5 weisen $\boldsymbol{E}$ und $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ überall auf der Fläche radial nach außen. Deshalb ist das Skalarprodukt $\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ durch $E \cdot \mathrm{d}S$ gegeben. Das Gaußsche Gesetz reduziert sich daher auf

$$\varepsilon_0 \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \varepsilon_0 \oint E \, \mathrm{d}S = Q.$$

Da andererseits E überall auf der Oberfläche gleich ist, kann man diese Größe vor das Integral ziehen,

$$\varepsilon_0 E \oint \mathrm{d}S = Q,$$

womit sich das Integral nur noch auf die Berechnung der Kugeloberfläche beschränkt.

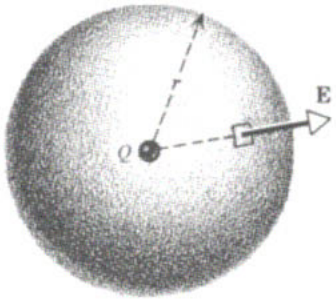


Abb. 28.5 Eine kugelförmige, geschlossene Gaußsche Oberfläche umhüllt eine Punktladung Q.

Wie in diesem Beispiel deutlich wurde, hängt die Anwendungsmöglichkeit des Gaußschen Gesetzes wesentlich von unserem Vermögen ab, eine geeignete Fläche zu finden, auf der $\boldsymbol{E}$ und θ konstant sind (Abb. 28.3). Dann kann man $E \cos \theta$ vor das Integral ziehen und das verbleibende Integral leicht auswerten.

Aus der letzten Gleichung kann man die elektrische Feldstärke errechnen:

$$\varepsilon_0 E(4\pi r^2) = Q$$

und

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}. \tag{28.7}$$

Nach Gl. 28.7 kann man den Betrag der Feldstärke $\boldsymbol{E}$ in jedem Punkt im Abstand r von einer Punktladung berechnen. Man vergleiche Gl. 28.7 mit Gl. 27.4. Die Richtung der Feldstärke ist wegen der Symmetrie der Anordnung bekannt, nämlich radial nach außen gerichtet.

Nunmehr bringen wir eine zweite Punktladung Q_0 in irgendeinen Punkt des Feldes. Auf diese Ladung wirkt eine Kraft (Gl. 27.2) mit dem Betrag

$$F = EQ_0.$$

Aus dieser Gleichung und Gl. 28.7 erhält man die Beziehung

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{QQ_0}{r^2},$$

die das Coulombsche Gesetz darstellt. Wir haben also aus dem Gaußschen Gesetz unter Berücksichtigung der Symmetrie einer Punktladung das Coulombsche Gesetz hergeleitet.

Das Gaußsche Gesetz ist eine der fundamentalen Beziehungen des Elektromagnetismus und gehört zu den in Tab. 40.2 aufgeführten Maxwellschen Gleichungen. Das Coulombsche Gesetz gehört nicht dazu, weil es schon im Gaußschen Gesetz enthalten ist.

Wenn man die Proportionalitätskonstante im Coulombschen Gesetz (Gl. 26.3) zu $1/4\pi\varepsilon_0$ annimmt, erhält man eine sehr einfache Formulierung des Gaußschen Gesetzes, nämlich die Gl. 28.5. Nimmt man die Konstante nur zu k an, so muß es als $(1/4\pi k)\Psi = Q$ formuliert werden. Es wird aber allgemein vorgezogen, den Faktor 4π im Coulombschen Gesetz zu lassen, so daß er dann nicht mehr im Gaußschen Gesetz und in anderen, noch zu besprechenden Gleichungen auftaucht.

28.6 Isoliert aufgestellter Leiter

Aus dem Gaußschen Gesetz kann eine wichtige Aussage hergeleitet werden. Sie lautet: *Bringt man auf einen isoliert aufgestellten Leiter Ladung, so verteilt sich diese vollständig auf die äußere Oberfläche des Leiters.* Das dieser Aussage zugrundeliegende Phänomen war bereits vor der Formulierung des Gaußschen bzw. Coulombschen Gesetzes beobachtet worden und stellt heute die experimentelle Bestätigung dieser beiden Gesetze dar; wie wir bereits betonten, waren die Coulombschen Versuche mit der Drehwaage nicht sehr genau. Wir kehren also die historische Situation einfach um, wenn wir zeigen, daß diese Aussage eine Folge des Gaußschen Gesetzes ist.

Abb. 28.6 zeigt im Querschnitt einen isoliert aufgehängten Leiter von willkürlicher Form, der eine Ladung Q trägt. Die gestrichelte Linie soll eine geschlossene Gaußsche Fläche (im Querschnitt) darstellen, die knapp unterhalb der tatsächlichen Oberfläche des Leiters liegen soll. Sie liegt damit aber immer noch innerhalb des Leiters. Wird auf einen solchen Leiter eine überschüssige Ladung Q aufgebracht, so erzeugt diese ein elektrisches Feld, auch innerhalb des Leiters. Dieses Feld wirkt natürlich auf die Ladungsträger des Leiters (Elektronen) und veranlaßt sie zu einer Bewegung. Die auftretenden Ströme werden versuchen, die zusätzliche Ladung in dem Sinne umzuverteilen, daß der Betrag der Feldstärke im Inneren verringert wird. Schließlich wird das elektrische Feld Null, die elektrischen Ströme versiegen, und es herrschen im Inneren des Leiters nur noch (elektro-)statische Bedingungen. Diese Neuverteilung findet innerhalb kürzester Zeit statt. Wie wirkt sich diese Neuverteilung auf die aufgebrachte Ladung Q aus?

Wenn in einem elektrostatischen Gleichgewicht die Feldstärke $\boldsymbol{E}$ überall im Leiter Null ist, so muß sie es auch für jeden Punkt auf der Gaußschen Fläche sein, denn diese

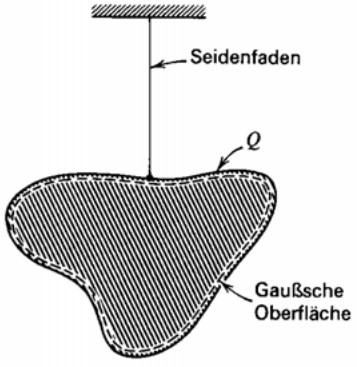


Abb. 28.6 Ein isoliert aufgehängter, metallischer Leiter

liegt ja noch innerhalb des Leiters. Daraus folgt, daß auch der elektrische Fluß Null sein muß. Nach dem Gaußschen Gesetz (Gl. 28.5) muß damit die Gesamtladung innerhalb der Fläche Null sein. Wenn dann eine zusätzliche Ladung Q nicht innerhalb der Fläche liegt, muß sie zwangsläufig außerhalb sein, also auf der Oberfläche des Leiters sitzen.

28.7 Experimenteller Nachweis des Gaußschen und des Coulombschen Gesetzes

Wir wollen die Aussagen von Abschn. 28.6 experimentell nachprüfen. Wir stellen uns ein einfaches Beispiel vor. Eine Metallkugel werde aufgeladen und an einem Seidenfaden in einen Metallbecher gesenkt (Abb. 28.7). Die Kugel berühre die Bodenfläche des Bechers und werde dann wieder hochgezogen. Man stellt daraufhin fest, daß die Ladungen von der Kugel verschwunden sind. Bei der Berührung stellen Becher und Kugel einen isoliert aufgestellten Leiter dar, für den die Aussage im vorigen Abschnitt gilt, und die Ladung der Kugel verteilt sich auf die Oberfläche des Leiters, also die Außenfläche des Bechers. Mit einer anderen kleinen Metallkugel kann man das nachprüfen, indem man mit ihr von der Außenfläche des Bechers eine Ladung abnimmt. Von der Innenseite gelingt dies nicht.

Benjamin Franklin scheint eine solche Beobachtung als erster gemacht zu haben. Im Jahre 1755 schrieb er einem Freund: „Ich elektrifizierte einen Silberbecher, der auf einem Ständer isoliert aufgestellt war, und senkte an einem Seidenfaden einen Korkball von 1 inch Durchmesser in den Becher, bis er den Boden berührte. Der Korkball wurde nicht angezogen, so wie er es auf der Außenfläche wurde, und er war nach dem Herausziehen auch nicht elektrifiziert, wie er es nach

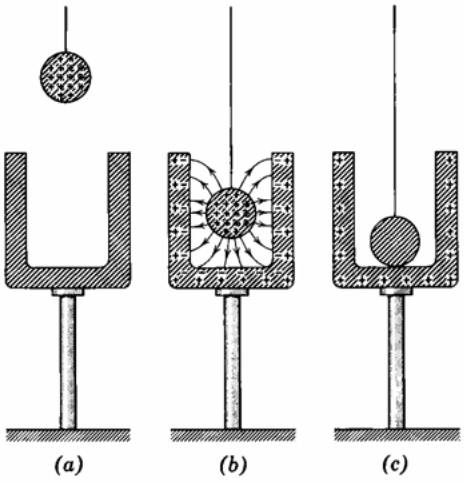


Abb. 28.7 Zur Wirkung des Faradayschen Bechers. Die gesamte Ladung auf dem kleinen Ball sammelt sich bei Berührung mit dem Becher auf der äußeren Oberfläche des Bechers an. Diese Behauptung und die Diskussion in Abschn. 28.7 sind nur dann in Strenge richtig, wenn der Becher mit einem leitenden Deckel verschlossen wird, sobald der Ball in den Becher gesenkt wird. Erst dann kann man eine „äußere" Oberfläche des Bechers definieren.

Berührung mit der Außenfläche war. Dieser Befund ist ungewöhnlich. Sie verlangen eine Antwort? Ich weiß keine ..."

Zehn Jahre später berichtete Franklin seinem Freund Joseph Priestley (1733–1804) von diesem ungewöhnlichen Resultat. Priestley überprüfte 1767, also 20 Jahre vor den Coulombschen Versuchen, Franklins Beobachtungen. Mit bemerkenswertem Weitblick schloß er, daß die elektrostatische Anziehung vom Kehrwert des Abstandsquadrates abhängt. Dieser indirekte Nachweis des Coulombschen Gesetzes war nicht nur genauer als die direkten Versuche Coulombs, sondern er wurde schon viel früher als jene durchgeführt. Priestley kam zu seinem Ergebnis über eine Analogie zur Gravitation. Daß keine elektrische Kraft auf den Korkball in Franklins Versuchen wirkte, entspricht genau dem Ergebnis, daß auf eine Masse innerhalb einer massenbehafteten Kugelschale keine Gravitationskraft ausgeübt wird. Da die Gravitationskraft vom Kehrwert des Abstandsquadrates abhängt, muß das auch für die elektrische Kraft gelten.

Faraday führte auch Experimente durch, um die Verteilung der Ladung auf der Oberfläche von Leitern zu demonstrieren. Insbesondere benutzte er hierzu einen großen, metallüberzogenen Kasten, den *Faradayschen Käfig*, den er isoliert aufstellte und mit einem Generator auflud. Faraday schrieb: „Ich ging in diese Kiste und lebte darin. Ich benutzte Kerzenlicht, Elektrometer und andere physikalische Geräte, um den elektrostatischen Zustand festzustellen, aber ich konnte nicht die geringste Wirkung finden, obwohl die Außenseite der Kiste so stark aufgeladen war, daß Funken und Blitze übersprangen."

Es ist aus vielen Gründen wichtig zu wissen, ob der Exponent im Coulombschen Gesetz exakt den Wert „2" hat. Experimente, die auf diesem Gesetz basieren, können darauf eine Antwort geben. Wir schreiben das Coulombsche Gesetz in der Form*

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^{2+n}} . \tag{28.8}$$

Die Tab. 28.1 zeigt einen geschichtlichen Überblick über die experimentellen Bemühungen, den Exponenten n aus Gl. 28.8 möglichst genau zu bestimmen.

In Abb. 28.8 ist der Versuchsaufbau gezeigt, den Plimpton und Lawton benutzten.

Die Anordnung besteht aus zwei konzentrischen Kugelschalen A und B, von denen die äußere einen Durchmesser von 1.5 m hat. Die innere Kugelschale enthält ein emp-

Tabelle 28.1 Versuche zur experimentellen Bestimmung der Größe n im Exponenten des Coulombschen Gesetzes (Gl. 28.8)

Experimentator	Jahr	n
Benjamin Franklin	1755	–
Joseph Priestley	1767	„Abstandsquadrat"
John Robinson	1769	≤ 0.06
Henry Cavendish	1773	≤ 0.02
Charles A. Coulomb	1785	einige Prozent
James C. Maxwell	1873	$\leq 5 \times 10^{-5}$
S.J. Plimpton und W.E. Lawton	1936	$\leq 2 \times 10^{-9}$
E.R. Williams, J.E. Faller, H.A. Hill	1971	$\leq 2 \times 10^{-16}$

* Für den Fall $n \neq 0$ müßten die Maxwellschen Gleichungen (Tab. 40.2) einschließlich des Gaußschen Gesetzes umformuliert werden. Einem Photon müßte wider der üblichen Annahme eine Masse zugeschrieben werden.

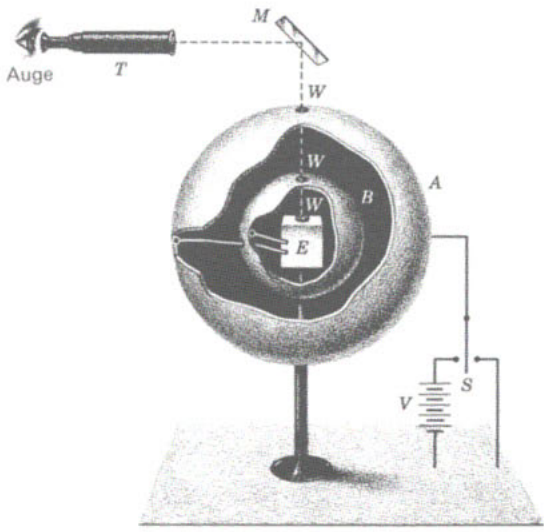


Abb. 28.8 Versuchsanordnung von Plimpton und Lawton zur Überprüfung des Coulombschen Gesetzes

findliches Elektrometer E, das die äußere und die innere Kugelschale miteinander verbindet und anzeigt, ob zwischen ihnen irgendeine Ladungsverschiebung stattfindet. Wenn nun die beiden Schalen elektrisch verbunden sind, sollte sich jede auf diese Anordnung gebrachte Ladung nach dem Gaußschen Gesetz auf die äußere Schale A verteilen.

Wird der Schalter S nach links gelegt, so bringt man eine Ladung auf die Anordnung. Fließt ein Teil der Ladung auf die Kugelschale B, so muß er über das Elektrometer fließen und wird von ihm angezeigt. Den Zeigerausschlag kann man mit einem Fernrohr T durch ein Fenster W und über einen Spiegel M von außen beobachten.

Wenn der Schalter S abwechselnd nach rechts und nach links gelegt, also die Anordnung abwechselnd mit der Erde und der Batterie verbunden wurde, konnte aber keinerlei Zeigerausschlag am Elektrometer festgestellt werden. Aus der bekannten Empfindlichkeit ihres Galvanometers leiteten Plimpton und Lawton für das n in Gl. 28.8 den in Tab. 28.1 angegebenen Wert ab.

28.8 Einige Anwendungen des Gaußschen Gesetzes

Bei einer Ladungsanordnung mit hoher Symmetrie kann man mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes leicht die elektrische Feldstärke berechnen. Ein sehr einfaches Beispiel, das Feld einer Punktladung, wurde bereits besprochen (Gl. 28.7). Im folgenden sollen einige andere Beispiele vorgestellt werden.

Beispiel 2

Kugelsymmetrische Ladungsverteilung. In Abb. 28.9 ist eine solche Verteilung gezeigt. Die Raumladungsdichte ϱ (Ladung geteilt durch Volumen, SI-Einheit: C/m^3) hängt bei Vorliegen einer

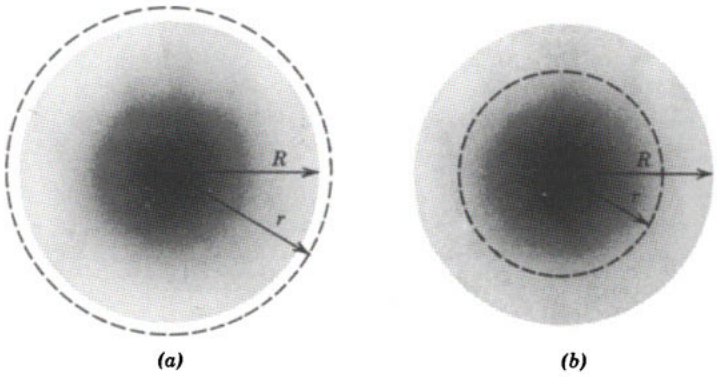


Abb. 28.9 Zu Beispiel 2. Eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung. Die gestrichelten Kurven sind Schnittlinien von Gaußschen Oberflächen mit der Zeichenebene. Die Ladungsdichte nimmt mit dem Abstand vom Mittelpunkt ab.

Kugelsymmetrie nur vom Abstand vom Zentrum ab, aber nicht von der Richtung. Man leite eine Beziehung für die Feldstärke $\boldsymbol{E}$ in Punkten (a) außerhalb und (b) innerhalb der Ladungsverteilung ab. Es handelt sich hier nicht um einen Leiter, denn dann würde sich die Ladung sofort auf die Oberfläche verteilen.

Wir wenden das Gaußsche Gesetz auf eine kugelförmige, geschlossene Fläche mit dem Radius r (s. Abb. 28.9a) an und erhalten Gl. 28.7:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}, \tag{28.7}$$

wobei Q die gesamte Ladung ist. In Punkten außerhalb der kugelsymmetrischen Ladungsverteilung ist die elektrische Feldstärke also genauso groß, wie wenn die Ladung im Kugelmittelpunkt konzentriert wäre.

Dieses Ergebnis erinnert uns daran, daß auch eine kugelsymmetrische Massenverteilung auf einen Punkt außerhalb wie eine im Kugelmittelpunkt konzentrierte Masse wirkt. Das liegt daran, daß sowohl die Gravitationskraft als auch die Coulomb-Kraft mit dem Quadrat des Abstandes abnehmen. Für die Gravitation haben wir dieses Gesetz schon ausführlich in Abschn. 16.6 nachgeprüft, für die elektrostatische Kraft können wir das sehr leicht mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes durchführen.

Abb. 28.9b zeigt eine Gaußsche Fläche innerhalb einer Ladungsverteilung. Mit Gl. 28.6 erhält man

$$\varepsilon_0 \oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \varepsilon_0 E(4\pi r^2) = Q'$$

oder

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q'}{r^2}.$$

Q' ist der innerhalb der Kugelschale r befindliche Teil der Ladung Q. Der außerhalb liegende Teil von Q trägt nicht zur Feldstärke auf der Kugelschale vom Radius r bei. Das entspricht wiederum den Verhältnissen bei der Gravitation (Abschn. 16.6). Eine massenbehaftete Kugelschale übt auf einen in ihr befindlichen Körper keine Massenanziehung aus.

Ein Sonderfall einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung liegt vor, wenn die Ladung homogen auf der Kugel verteilt ist. Eine solche Verteilung könnte in Abb. 28.9 durch eine gleichmäßige Schattierung dargestellt werden. Die Raumladungsdichte ϱ wäre innerhalb der Kugel vom Radius R überall gleich, außerhalb aber überall Null. Für Punkte innerhalb der Kugel kann man

$$Q' = Q\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

oder

$$Q' = Q\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

ansetzen, wobei $\frac{4}{3}\pi R^3$ das Volumen der Ladungsanordnung ist. Für die elektrische Feldstärke erhält man somit

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qr}{R^3}. \tag{28.9}$$

Für den Mittelpunkt $r = 0$ erhält man erwartungsgemäß $E = 0$. Für Punkte auf der Oberfläche der Kugel, also $r = R$, ergeben Gl. 28.7 und Gl. 28.9 denselben Wert, wie man auch erwartet hatte. Die Gl. 28.9 kann nicht auf die in Abb. 28.9b gezeichnete Ladungsverteilung angewendet werden, da dort die Ladungsdichte nicht konstant ist, wie die ungleichmäßige Schattierung andeutet.

Beispiel 3

Das Thomsonsche Atommodell. Früher dachte man sich die positive Ladung eines Atoms einheitlich über das gesamte Atom verteilt, also über eine Kugel vom Durchmesser 10^{-10} m. Man bestimme die elektrische Feldstärke auf der Oberfläche eines solchen „Thomson"-Goldatoms ($Z = 79$). Die Elektronen des Atoms sollen keinen Einfluß auf das Feld haben.

Die positive Ladung eines Atoms wird durch Ze bestimmt, also 79 (1.6×10^{-19} C). Für die elektrische Feldstärke E auf der Oberfläche erhält man nach Gl. 28.7

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \\ &= \frac{(9.0\times10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2})(79)(1.6\times10^{-19}\ \mathrm{C})}{(1.0\times10^{-10}\ \mathrm{m})^2} \\ &= 1.1\times10^{13}\ \mathrm{N/C}. \end{aligned}$$

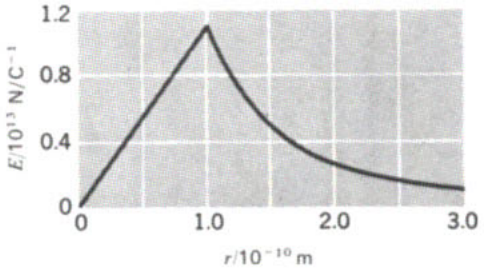


Abb. 28.10 Zum Thomsonschen Atommodell von Beispiel 3. Die elektrische Feldstärke als Funktion des radialen Abstandes vom Mittelpunkt eines Goldatoms.

In Abb. 28.10 ist die Feldstärke E über dem radialen Abstand vom Atommittelpunkt nach Gl. 28.7 und 28.9 aufgetragen. E hat ein Maximum in den Punkten auf der Oberfläche des Atoms und nimmt linear zum Atommittelpunkt hin ab (Gl. 28.9). Außerhalb des Atoms nimmt E mit dem Kehrwert des Abstandsquadrats ab (Gl. 28.7).

Beispiel 4

Das Rutherfordsche Atommodell. In Abschn. 28.9 werden wir zeigen, daß die positive Ladung eines Atoms nicht gleichmäßig über das Atom verteilt ist, sondern in einem kleinen Bereich, dem Kern, lokalisiert ist. Der Radius des Kerns beträgt für ein Goldatom etwa 6.9×10^{-15} m. Wie groß ist die elektrische Feldstärke auf der Oberfläche des Kerns? Die Wirkung der Elektronen sei wieder vernachlässigt.

Diese Aufgabe entspricht genau der des Beispiels 3, nur daß der Radius jetzt sehr viel kleiner ist. Dadurch wird die Feldstärke sehr viel größer, nämlich entsprechend dem Verhältnis der Quadrate der Radien,

$$E = (1.1 \times 10^{13}\ \text{N/C}) \frac{(1.0 \times 10^{-10}\ \text{m})^2}{(6.9 \times 10^{-15}\ \text{m})^2}$$
$$= 2.3 \times 10^{21}\ \text{N/C}.$$

Das stellt ein enorm hohes elektrisches Feld dar, wie es im Labor nicht hergestellt werden kann. Es ist 10^8 mal stärker als das in Beispiel 3 errechnete Feld.

Beispiel 5

*Eine unendlich lange Linienladung**. In Abb. 28.11 ist ein Stück einer unendlich langen Linienladung mit überall konstantem *Ladungsbelag* λ (Ladung durch Länge) gezeigt. Wie groß ist die elektrische Feldstärke im Abstand r von der Linienladung?

Wegen der Symmetrie der Anordnung kann die elektrische Feldstärke nur radial bezüglich der Achse der Ladungsanordnung gerichtet sein. Als Gaußsche Fläche bietet sich daher eine Zylinder-

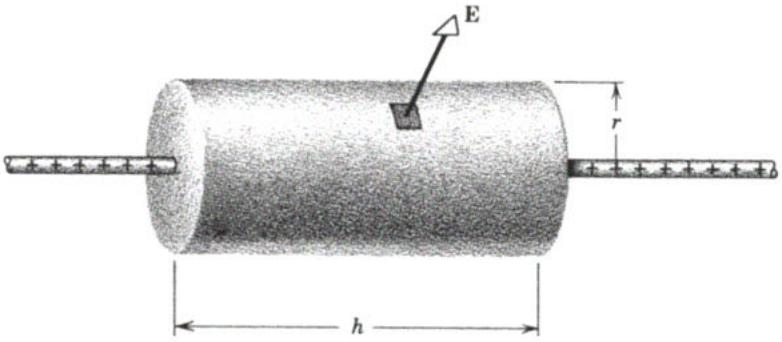


Abb. 28.11 Zu Beispiel 5. Eine auf einer unendlich langen Linie verteilte Ladung, um die eine geschlossene, zylindrische Oberfläche gelegt ist.

* In Wirklichkeit gibt es natürlich keine unendlich langen Linien oder unendlich ausgedehnten Flächen. Man verwendet diese Idealisierung, wenn es darum geht, Randeffekte vernachlässigen zu können.

oberfläche um diese Achse an. Der Zylinder habe den Radius r und die Länge h. Überall auf der Mantelfläche hat der elektrische Fluß einen konstanten Wert von $E(2\pi rh)$, während durch die Stirnflächen kein Fluß hindurchgeht, denn E liegt dort in der Ebene der Stirnflächen. Die vom Zylinder eingeschlossene Ladung beträgt λh. Nach dem Gaußschen Gesetz (Gl. 28.6) wird

$$\varepsilon_0 \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q$$

und mit $Q = \lambda h$

$$\varepsilon_0 E(2\pi rh) = \lambda h$$

bzw.

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}. \tag{28.10}$$

Die Richtung von $\boldsymbol{E}$ ist, wie schon oben erwähnt, uberall radial nach außen gerichtet.

Dieselbe Aufgabe wurde schon in Beispiel 6 in Abschn. 27.4 mit Hilfe des Coulombschen Gesetzes gelöst. Man sieht, daß die Benutzung des Gaußschen Gesetzes viel schneller und eleganter zum Ziel führt. Dies ist aber, wie schon mehrmals betont, immer nur dann der Fall, wenn eine geeignete Gaußsche Fläche gefunden werden kann. In unserem Beispiel hätte die Oberfläche eines Würfels oder einer Kugel statt eines Zylinders überhaupt keinen Vorteil gegenüber der Methode aus Abschnitt 27.4 gebracht. Es kommt bei der Anwendung des Gaußschen Gesetzes entscheidend darauf an, daß die Ladungsverteilung ein bestimmtes Maß an Symmetrie aufweist.

Beispiel 6

Eine unendlich ausgedehnte Flächenladung. In Abb. 28.12 ist ein Ausschnitt aus einer unendlich großen, nichtleitenden Scheibe gezeigt, die mit der konstanten Flächenladungsdichte σ (gemessen in $\mathrm{C/m^2}$) versehen ist. Welche Feldstärke herrscht in einem Punkt im Abstand r von der Fläche?

Als geeignete Gaußsche Fläche sei ein Zylinder mit dem Querschnitt A und der Höhe $2r$ ausgewählt, der die Scheibe senkrecht durchdringt. $\boldsymbol{E}$ weist senkrecht von der Scheibe weg und steht auch senkrecht auf den Stirnflächen des Zylinders. Durch die Mantelfläche des Zylinders tritt kein elektrischer Fluß, da die Feldstärke $\boldsymbol{E}$ dort keinen Winkel mit einem Flächenelement einschließt.

Aus dem Gaußschen Gesetz,

$$\varepsilon_0 \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q\ ,$$

wird daher

$$\varepsilon_0 (EA + EA) = \sigma A,$$

wobei σA die vom Zylinder umschlossene Ladung ist. Für die elektrische Feldstärke erhält man somit

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \tag{28.11}$$

Der Betrag von E ist für alle Punkte auf beiden Seiten der Scheibe derselbe; man vergleiche hierzu die Abb. 27.2. Obwohl es eine solche unendlich ausgedehnte Flächenladung in Wirklichkeit nicht

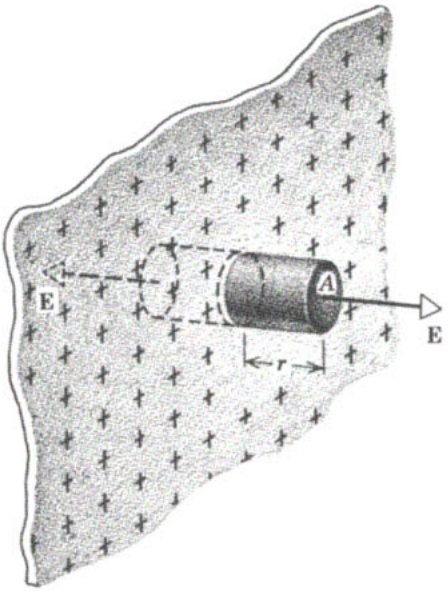


Abb. 28.12 Zu Beispiel 6. Eine unendlich ausgedehnte Flächenladung, die von einer zylindrischen Gaußschen Oberfläche durchsetzt wird.

gibt, ist die dazu abgeleitete Beziehung Gl. 28.11 auch für reale endliche Flächenladungen nützlich. Man darf die Feldstärke nach dieser Gleichung nur nicht für Punkte nahe dem Rand einer solchen Fläche anwenden; für alle anderen Punkte, deren Abstand von der Fläche klein ist im Vergleich zu deren Ausmaßen, gibt Gl. 28.11 durchaus korrekte Werte.

Beispiel 7

Geladener Leiter. Die Abb. 28.13 zeigt einen birnenförmigen Leiter, der auf seiner Oberfläche eine Flächenladungsdichte σ trägt. Im allgemeinen wird σ von Punkt zu Punkt verschiedene Werte annehmen. Wie groß ist $\boldsymbol{E}$ in einem Punkt dicht über der Oberfläche?

Die Richtung von $\boldsymbol{E}$ ist senkrecht zur Oberfläche, und für positive Ladungen nach außen gerichtet. Stünde $\boldsymbol{E}$ nicht senkrecht auf der Oberfläche, so hätte $\boldsymbol{E}$ eine Komponente in der Oberfläche. Diese würde auf die Ladungsträger des Leiters wirken und elektrische Ströme hervorrufen. Im

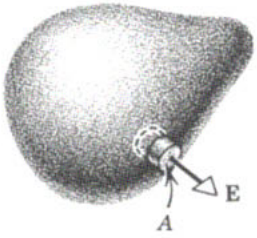


Abb. 28.13 Zu Beispiel 7. Ein isoliert aufgestellter, geladener Leiter mit einer zylindrischen Gaußschen Oberfläche.

vorliegenden Beispiel sollen jedoch elektrostatische Bedingungen herrschen, $\boldsymbol{E}$ muß also auf der Oberfläche senkrecht stehen.

Der Betrag von $\boldsymbol{E}$ kann mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes gefunden werden. Als Gaußsche Fläche legt man durch die Oberfläche einen flachen Zylinder mit dem Querschnitt A. Innerhalb des Leiters ist die Feldstärke überall Null (Abschn. 28.6). Der einzige Betrag zum elektrischen Fluß wird durch die Stirnfläche A des Zylinders gehen, die außerhalb der Oberfläche liegt.

Mit dem Gaußschen Gesetz,

$$\varepsilon_0 \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q \,,$$

erhält man

$$\varepsilon_0 (EA) = \sigma A,$$

wobei σA die Gesamtladung innerhalb der Gaußschen Fläche darstellt. Für die elektrische Feldstärke ergibt sich somit

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{28.12}$$

Ein Vergleich mit Gl. 28.11 zeigt, daß die elektrische Feldstärke in diesem Punkt doppelt so groß ist wie beim Nichtleiter in Beispiel 6. Man vergleiche sorgfältig die beiden Gaußschen Flächen in den Abb. 28.12 und 28.13. Man sieht, daß in Abb. 28.12 die Feldlinien durch beide Stirnflächen des Zylinders gehen, es existiert also auf beiden Seiten der Ebene ein Feld. In Abb. 28.13 gehen die Feldlinien nur durch die außerhalb des Leiters gelegene Stirnfläche des Zylinders, die andere Stirnfläche liegt vollständig im Leiter, in dem kein Feld vorhanden ist. Setzen wir für beide Beispiele dieselbe Flächenladungsdichte und dieselbe Querschnittsfläche voraus, so ist auch die von ihnen eingeschlossene Ladung σA gleich groß. Nach dem Gaußschen Gesetz muß dann auch der elektrische Fluß gleich sein. Es muß $\varepsilon_0 E = \Psi/A$ in Abb. 28.13 doppelt so hoch sein wie in Abb. 28.12. In Abb. 28.12 verteilt sich der Fluß auf beide Seiten der geladenen Ebene, in Abb. 28.12 tritt er nur aus der Außenseite.

28.9 Das Kernmodell des Atoms

Als Ernest Rutherford (1871–1937) im Jahre 1911 versuchte, einige experimentelle Ergebnisse seiner Mitarbeiter H. Geiger und E. Marsden zu deuten, kam ihm als erstem der Gedanke, daß ein Atom einen Kern haben müsse. Die in Beispiel 3 und Beispiel 4 (Abschn. 28.8) besprochenen Ergebnisse beeinflußten Rutherfords Beurteilung entscheidend.

Bei den im Rutherfordschen Labor durchgeführten Versuchen handelte es sich um Streuversuche von α-Teilchen* an dünnen Folien aus schweren Elementen, wie z. B. Gold. Rutherfords Mitarbeiter zählten die Anzahl der unter verschiedenen Winkeln abgelenkten α-Teilchen. In Abb. 28.14 ist der experimentelle Aufbau skizziert, und in

* α-Teilchen sind Heliumkerne, die von manchen radioaktiven Elementen, z. B. Radium, spontan ausgesandt werden (Abschn. 54.4). Sie bewegen sich nach ihrer Emission mit ungefähr 1/30 der Lichtgeschwindigkeit.

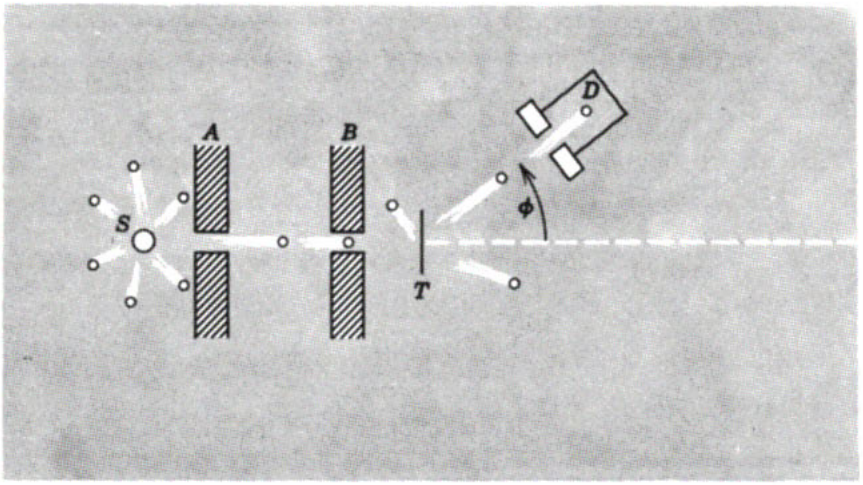


Abb. 28.14 Versuchsanordnung zur Streuung von α-Teilchen. Die von der radioaktiven Quelle *S* ausgesandten α-Teilchen fallen auf eine dünne Metallfolie *T*. Mit dem Detektor *D* werden die in die verschiedenen Richtungen ϕ gestreuten Teilchen gezählt.

Abb. 28.15 sind verschiedene Wege von α-Teilchen durch eine dünne Goldfolie aufgezeichnet. Die Ablenkwinkel reichen von 0° bis 180°, also entsprechend dem Charakter der Zusammenstöße von streifend bis frontal.

Die Elektronen eines Atoms sind zu leicht, als daß sie die Bewegungen der einfallenden α-Teilchen merklich beeinflussen könnten. Die Elektronen werden vielmehr selber stark abgelenkt, so wie ein Insektenschwarm von einem hindurchgeschleuderten Stein aufgewirbelt wird. Eine Ablenkung eines α-Teilchens kann daher nur durch die Abstoßungskraft der positiven Ladungen des Goldatoms verursacht werden. Man wußte

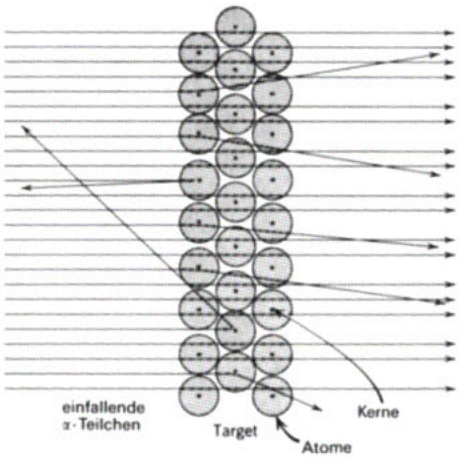


Abb. 28.15 Verschiedene Ablenkungsmöglichkeiten von α-Teilchen durch die Atomkerne einer dünnen Metallfolie

damals schon, daß die Masse des Atoms im wesentlichen von seinem positiv geladenen Teil herrührte.

Zur Zeit der Rutherfordschen Streuversuche glaubten die meisten Physiker an ein „Puddingmodell" des Atoms, das von J. J. Thomson (1856–1940) vorgeschlagen wurde. In diesem Modell (Beispiel 3) verteilt sich die positive Ladung über das gesamte Atom, d. h. über eine Kugel mit dem Radius 10^{-10} m. Die negativen Elektronen liegen in der Puddingkugel wie Rosinen auf festen Plätzen, können allerdings etwas um ihre Gleichgewichtslage herum schwingen. Rutherford konnte mit seinen Streuversuchen das Thomsonsche Atommodell widerlegen und ein anderes Modell aufstellen, das Planetenmodell. Im Rutherfordschen Modell ist die positive Ladung eines Atoms auf eine sehr kleine Kugel vom Radius 10^{-14} m konzentriert. Um diesen Kern bewegen sich die Elektronen und nehmen ein größeres Kugelvolumen vom Radius 10^{-10} m ein. Mit dieser bahnbrechenden Vorstellung schuf Rutherford die Grundlage für die moderne Atom- und Kernphysik.

Das bemerkenswerteste Ergebnis von Rutherfords Versuchen war, daß manche α-Teilchen um einen sehr großen Winkel abgelenkt wurden, nämlich bis zu 180° (Rückwärtsstreuung). So etwas konnte man sich mit dem älteren Puddingmodell überhaupt nicht erklären. Rutherford selbst sagte: „Das war wohl das Unglaublichste, was ich je erlebt habe. Genauso unglaublich, als wenn ein 15-inch-Geschoß auf ein Stück Seidenpapier geschossen würde, dort abprallte und auf einen selber zurückkäme."

Ein α-Teilchen muß, um so stark gestreut zu werden, einen Bereich sehr hoher elektrischer Feldstärke durchfliegen*. In Beispiel 3 haben wir gesehen, daß die elektrische Feldstärke im Thomson-Modell etwa 10^{13} N/C beträgt; in Beispiel 4 ergab sich für das Rutherford-Modell ein Wert von 2×10^{21} N/C auf der Oberfläche des Kerns, also ein 10^8 mal stärkeres Feld. Darin können α-Teilchen stark gestreut werden. Rutherford hatte natürlich sehr viel gründlichere und umfangreichere mathematische Berechnungen angestellt, bevor er seine Hypothese vorbrachte.

Fragen

1. Wie würde man entsprechend dem elektrischen Fluß Ψ einen Gravitationsfluß Ψ_g definieren? Wie groß ist der Fluß des Schwerefeldes der Erde durch die Umgrenzungen eines Zimmers, das keine Materie enthält?
2. Eine Punktladung befindet sich im Mittelpunkt einer kugelförmigen Gaußschen Fläche. Ändert sich Ψ, wenn (a) die Kugel durch einen Würfel gleichen Volumens ersetzt würde, (b) wenn die Kugel durch einen Würfel mit einem Zehntel des Volumens ersetzt würde, (c) wenn die Ladung aus dem Mittelpunkt herausgerückt würde, aber noch innerhalb der Kugel läge, (d) wenn die Ladung gerade außerhalb der Kugeloberfläche läge, (e) wenn eine zweite Ladung außerhalb, aber nahe an die Kugelfläche gesetzt würde und (f) wenn eine zweite Ladung ins Innere der Kugel gebracht würde?
3. Ist im Gaußschen Gesetz:

$$\varepsilon_0 \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q \,,$$

die elektrische Feldstärke auf die Ladung Q zurückführbar?

* Ein großer Streuwinkel aufgrund einer Kombination vieler kleiner Streuwinkel kann als sehr unwahrscheinlich angenommen werden.

4. Man zeige, daß die Gl. 18.3 etwas darstellt, was man als das Gaußsche Gesetz für inkompressible Medien bezeichnen könnte, nämlich

$$q_m = \oint \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0.$$

5. Eine Oberfläche umschließe einen elektrischen Dipol. Was kann man über den elektrischen Fluß durch die Oberfläche aussagen?
6. Angenommen, eine Gaußsche Fläche umhüllt keine Ladung. Fordert das Gaußsche Gesetz, daß $\boldsymbol{E}$ auf der Oberfläche Null sein muß? Oder umgekehrt, trifft es zu, daß eine Gaußsche Fläche keine Ladung einschließen kann, wenn $\boldsymbol{E}$ überall auf der Oberfläche Null ist?
7. Ist es angebracht, das Gaußsche Gesetz zu verwenden, wenn das elektrische Feld für drei Ladungen berechnet werden soll, die die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden?
8. Die Bezeichnung Linienladung, Flächenladung und Volumenladung (bzw. *Ladungsbelag*, *Ladungsbedeckung*, *Raumladungsdichte*) setzen eine kontinuierliche Verteilung der Ladung voraus, obwohl die Ladung im mikroskopischen Maßstab diskrete Werte annimmt. Warum kann man trotzdem die obigen Beziehungen verwenden?
9. Ist $\boldsymbol{E}$ notwendigerweise innerhalb eines geladenen Gummiballs Null, wenn der Ballon (a) kugelförmig ist oder (b) wurstförmig? In beiden Fällen soll die Ladung gleichmäßig über die Oberfläche verteilt sein.
10. Ein kugelförmiger Gummiballon trägt auf seiner Oberfläche eine gleichmäßig verteilte Ladung. Wie verändert sich die elektrische Feldstärke (a) in Punkten innerhalb des Ballons, (b) in Punkten auf der Oberfläche des Ballons und (c) außerhalb, wenn der Ballon aufgeblasen wird?
11. In einem elektrischen Feld gibt es Quellen (positive Ladung) und Senken (negative Ladung). Gibt es Quellen und Senken auch (a) in einem Strömungsfeld und (b) in einem Gravitationsfeld?
12. Sagt das Gaußsche Gesetz wirklich exakt aus, daß die Anzahl der nach außen gerichteten Feldlinien durch eine geschlossene Fläche der eingeschlossenen positiven Ladung proportional ist?
13. In Abschn. 28.5 haben wir das Coulombsche Gesetz aus dem Gaußschen Gesetz hergeleitet. Bedeutet das auch, daß das Gaußsche Gesetz aus dem Coulombschen Gesetz abgeleitet werden kann?
14. Ein großer, isoliert aufgestellter Hohlleiter trägt eine Ladung $+Q$. An einem Seidenfaden wird ein kleiner Metallball mit der Ladung $-Q$ durch ein kleines Loch oben in den Hohlleiter gesenkt, so daß er die Innenfläche berührt. Dann wird der Ball sofort wieder herausgezogen. Welche Ladung trägt (a) der Leiter und (b) der Ball?
15. Kann man nach den Erörterungen des Abschnitts 28.6 behaupten, daß sich die Elektronen im Stromnetz eines Hauses auf der Oberfläche der Leitungen bewegen? Wenn nicht, warum nicht?
16. Sagt das Gaußsche Gesetz nach den Erläuterungen des Abschnitts 28.6 aus, daß alle an der Leitung beteiligten Elektronen eines isoliert aufgestellten Leiters auf der Oberfläche sitzen?
17. In Abschn. 28.6 haben wir die elektrische Feldstärke innerhalb eines Leiters zu Null angenommen. Sicherlich gibt es aber innerhalb eines Leiters sehr starke elektrische Felder, etwa nahe den Elektronen oder dem Kern. Verletzt das die Aussage von Abschn. 28.6?
18. Es wird oft behauptet, daß zusätzliche Ladungen deshalb ausschließlich auf der äußeren Oberfläche eines Leiters sitzen, weil sich gleichnamige Ladungen abstoßen und so weit wie möglich auseinanderstreben. Stimmt das?
19. Würde das Gaußsche Gesetz auch gelten, wenn im Coulombschen Gesetz der Exponent n nicht den Zahlenwert 2 hätte?
20. Wenn man in eine Kugel mit homogener Ladungsverteilung eindringt, sollte E abnehmen, da eine Kugelschale, die durch den Beobachtungsort geht, immer weniger Ladung umschließt. Andererseits sollte E zunehmen, da man dem Zentrum dieser Ladung immer näher kommt. Welcher der beiden Effekte wirkt stärker?

21. Hat in einer kugelsymmetrischen (nicht homogenen) Ladungsverteilung E notwendigerweise ein Maximum auf der Oberfläche? Man diskutiere verschiedene Möglichkeiten.
22. Warum unterscheiden sich Gl. 28.11 und Gl. 28.12 um den Faktor 2?
23. Gilt Gl. 28.7 auch für die in Abb. 28.9a gezeigten Verhältnisse, wenn (a) sich im Zentrum des Körpers ein konzentrischer kugelförmiger Hohlraum befindet, wenn (b) sich im Zentrum des Hohlraums eine Punktladung Q befindet und (c) wenn sich die Punktladung nicht im Zentrum, aber noch innerhalb des Hohlraums befindet?
24. Normalerweise sind Atome elektrisch neutral. Warum wird dann aber ein α-Teilchen von einem Atom abgelenkt?
25. Ein auf den Kern eines Goldatoms geschossenes α-Teilchen wird unter 135° gestreut. Kann man daraus schließen, daß (a) eine Kraft auf das α-Teilchen wirkte oder (b) daß Arbeit an ihm verrichtet wurde?
26. Warum wird das Thomsonsche Atommodell (Beispiel 3) durch die Ergebnisse der Rutherfordschen Streuversuche untragbar?

Aufgaben

Abschnitt 28.1

1. Man berechne den elektrischen Fluß Ψ durch eine Halbkugel mit dem Radius R. Das Feld sei überall einheitlich stark und parallel zur Halbkugelachse gerichtet.
   Antwort: $\pi R^2 E$.
2. Ein Windsack liege in einem homogenen elektrischen Feld (Abb. 28.16). Der Aufspannrahmen sei ein Kreis vom Radius a und stehe senkrecht zu den Feldlinien. Wie groß ist der elektrische Fluß durch den Sack?

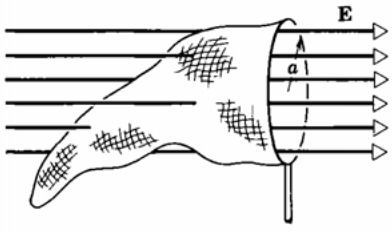


Abb. 28.16 Zu Aufgabe 2

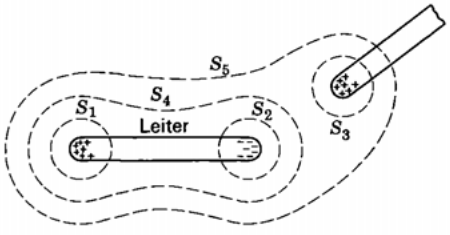


Abb. 28.17 Zu Aufgabe 5

Abschnitt 28.3

3. Man bestimme den elektrischen Fluß (direkt, ohne Verwendung des Gaußschen Gesetzes) durch einen Zylinder mit dem Radius R, der mit der Zylinderachse senkrecht zu den Feldlinien in einem elektrischen Feld liegt.
   Antwort: Null.
4. Eine Punktladung von 1×10^{-6} C liege im Zentrum einer würfelförmigen Gaußschen Fläche der Kantenlänge 0.5 m. Wie groß ist der elektrische Fluß durch die Oberfläche?

Abschnitt 28.4

5. Zu Abb. 28.17. Mit einem positiv geladenen Stab, der in die Nähe eines isoliert aufgestellten ungeladenen Leiters gehalten wird, werden die Ladungen auf dem Leiter getrennt. Was sagt das

Gaußsche Gesetz über die Flüsse durch die fünf gestrichelt eingezeichneten Gaußschen Flächen aus? Die auf dem Leiter induzierte negative Ladung ist genauso groß wie die positive Ladung $+Q$ auf dem Stab.
Antwort: $\Psi_{S_1} = Q/\varepsilon_0$, $\Psi_{S_2} = -Q/\varepsilon_0$, $\Psi_{S_3} = Q/\varepsilon_0$, $\Psi_{S_4} = 0$, $\Psi_{S_5} = Q/\varepsilon_0$.

6. Ein homogen geladener, kugelförmiger Leiter (Radius 1 m) hat eine Flächenladungsdichte von 8 C/m^2. Wie groß ist der gesamte elektrische Fluß durch die Kugeloberfläche?
7. Das elektrische Feld der Erde hat auf der Erdoberfläche eine nach innen gerichtete Feldstärke vom Betrag ≈ 130 N/C. Welche Ladung trägt die Erde, wenn das elektrische Feld durch sie erzeugt wird?
   Antwort: -6×10^5 C.
8. An eine Ecke eines Würfels der Kantenlänge a werde eine Punktladung Q gesetzt. Wie groß ist der elektrische Fluß durch jede der Würfelflächen? (Hinweis: Man wende das Gaußsche Gesetz an und nutze die Symmetrie der Anordnung.)
9. Das Gravitationsgesetz lautet in der Form des Gaußschen Gesetzes

$$\frac{1}{4\pi G}\Psi_g = \frac{1}{4\pi G}\oint g \cdot \mathrm{d}S = -m,$$

   wobei m die eingeschlossene Masse und G die Gravitationskonstante (Abschn. 16.3) ist. Man leite daraus das Newtonsche Gravitationsgesetz her.
10. Zu Abb. 28.18. Die Feldstärkekomponenten seien $E_x = b\sqrt{x}$, $E_y = E_z = 0$ mit $b = 800$ N/(C m$^{1/2}$). Man berechne (a) den elektrischen Fluß durch die Würfeloberfläche und (b) die Ladung innerhalb des Würfels. Die Kantenlänge sei $a = 10$ cm.

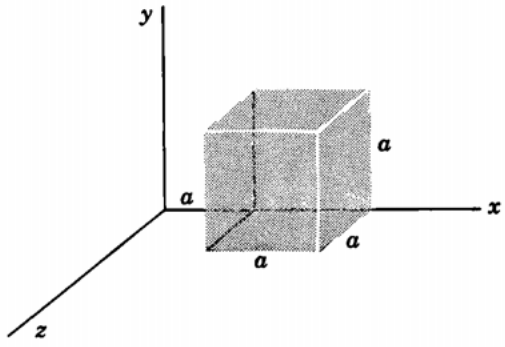


Abb. 28.18 Zu Aufgabe 10

Abschnitt 28.6

11. Mit Gl. 28.12 kann man die elektrische Feldstärke in Punkten nahe einer geladenen Oberfläche berechnen. Man zeige, daß dieselbe Gleichung auch für eine geladene Kugeloberfläche mit dem Radius r gilt.
    Antwort: Es ergibt sich $E = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$.
12. Ein isoliert aufgestellter Leiter trage eine Ladung von $+10^{-5}$ C. Im Inneren des Leiters ist ein Hohlraum, in dem sich eine Punktladung von $+3 \times 10^{-6}$ C befindet. Wie groß ist die Ladung (a) auf den Wänden des Hohlraumes und (b) auf der Außenfläche des Leiters?
13. Abb. 28.19 zeigt einen Metallblock mit einem kugelförmigen Hohlraum vom Radius 3 cm. Im Mittelpunkt des Hohlraums befindet sich eine Punktladung von 10^{-7} C. Man berechne mit

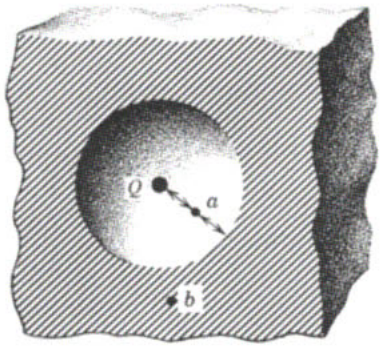


Abb. 28.19 Zu Aufgabe 13

Hilfe des Gaußschen Gesetzes die elektrische Feldstärke (a) in einem Punkt, der genau um $r/2$ vom Mittelpunkt entfernt ist und (b) in einem Punkt außerhalb des Hohlraumes.
Antwort: (a) 4×10^6 N/C; (b) Null.

14. Die Abb. 28.20 zeigt eine nichtleitende, geladene Kugelschale mit homogener Ladungsdichte $\varrho = 10^{-6}$ C/m^3. Es sei $a = 10$ cm und $b = 20$ cm. Man trage die Feldstärke E über dem Abstand r vom Mittelpunkt der Kugel im Bereich $0 < r < 30$ cm auf.

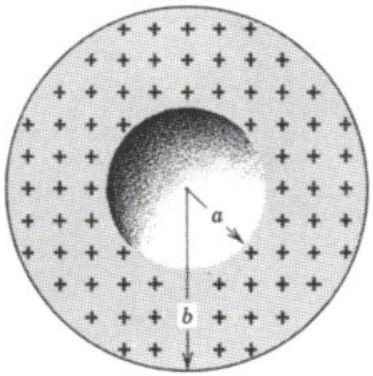


Abb. 28.20 Zu Aufgabe 14

15. Im Zentrum einer dünnen, ungeladenen Kugelschale aus Metall befinde sich eine Punktladung Q. Man gebe mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes die elektrische Feldstärke (a) in Punkten innerhalb der Schale und (b) in Punkten außerhalb der Schale an. (c) Übt die Schale selbst irgendeine Wirkung auf das von Q erzeugte Feld aus? (d) Hat die Anwesenheit von Q irgendeine Wirkung auf die Schale? (e) Erfährt eine zweite, außerhalb der Schale angebrachte Ladung irgendeine Kraft? (f) Erfährt die innere Ladung irgendeine Kraft? (g) Ergibt sich ein Widerspruch zum dritten Newtonschen Axiom?
Antwort: (a) $E = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$, radial nach außen; (b) wie (a); (c) nein; (d) ja, auf der Oberfläche werden Ladungen induziert; (e) ja; (f) nein; (g) nein.

16. Eine dünne, metallene Kugelschale mit dem Radius a trage eine Ladung Q_a. Konzentrisch um sie herum liegt eine weitere dünne Kugelschale mit dem Radius b mit $b > a$, die eine Ladung Q_b trägt. Mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes berechne man die elektrische Feldstärke für Punkte im Abstand r vom Mittelpunkt der konzentrischen Schalen, wenn (a) $r < a$, (b) $a < r < b$ und (c) $r > b$. (d) Wie würde man vorgehen, um für jede Schale die Verteilung der Ladung auf der inneren und äußeren Oberfläche zu bestimmen?

17. Eine nichtleitende Kugel mit dem Radius a liegt konzentrisch in einer leitenden Kugelschale mit dem inneren Radius b und dem äußeren Radius c, vgl. Abb. 18.21. Auf der inneren Kugel befindet sich eine homogen verteilte Ladung $+Q$. Die äußere Kugelschale trägt eine Ladung $-Q$. Man bestimme $E(r)$ in den Punkten (a) innerhalb der Kugel ($r < a$), (b) im Zwischenraum ($a < r < b$), (c) in der Kugelschale ($b < r < c$) und (d) außerhalb der ganzen Anordnung ($r > c$). (e) Welche Ladungen liegen auf der inneren bzw. äußeren Oberfläche der Kugelschale?
Antwort: (a) $E = (Q/4\pi\varepsilon_0 a^3)r$; (b) $E = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$; (c), (d) Null; (e) innen $-Q$ und außen Null.

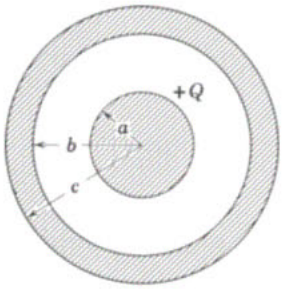


Abb. 28.21 Zu Aufgabe 17

18. Im Inneren eines unregelmäßig geformten Leiters befindet sich ein unregelmäßiger Hohlraum. Auf dem Leiter sitzt eine Ladung $+Q$, der Hohlraum ist ladungsfrei. Man zeige, daß (a) innerhalb des Hohlraums $E = 0$ ist und (b) sich auf der Oberfläche des Hohlraums keine Ladungen befinden.
19. Die innere von zwei konzentrischen leitenden Kugelschalen mit den Radien $R_1 = 14.5$ cm und $R_2 = 20.7$ cm trägt eine Ladung von -6×10^{-8} C. Ein Elektron verläßt die innere Schale mit einer verschwindend kleinen Anfangsgeschwindigkeit. Unter der Annahme eines Vakuums zwischen den beiden Kugelschalen bestimme man die Geschwindigkeit, mit der das Elektron auf die äußere Schale trifft.
Antwort: 2×10^7 m/s.
20. Eine Kugelschale der Dicke $a < r < b$ trage eine Ladung der Dichte $\varrho = A/r$; A sei eine Konstante. Im Mittelpunkt $r = 0$ des eingeschlossenen Hohlraums befinde sich eine Punktladung Q. Wie groß muß A sein, damit der Betrag der Feldstärke in der Kugelschale überall konstant ist?
21. Eine massive nichtleitende Kugel trage eine homogen verteilte Ladung mit der Ladungsdichte ϱ. Es sei $\boldsymbol{r}$ der Vektor vom Kugelmittelpunkt zu einem Punkt P in der Kugel. (a) Man zeige, daß die elektrische Feldstärke in P durch $\boldsymbol{E} = \varrho\boldsymbol{r}/3\varepsilon_0$ gegeben ist. (b) Nun bildet sich in der Kugel ein kugelförmiger Hohlraum, wie in Abb. 28.22 gezeigt. Unter Verwendung des Superpositionsprinzips zeige man, daß die elektrische Feldstärke in allen Punkten dieses Hohlraumes durch $\boldsymbol{E} = \varrho\boldsymbol{a}/3\varepsilon_0$ gegeben ist; $\boldsymbol{a}$ ist der Verbindungsvektor vom Mittelpunkt der Kugel zum Mittelpunkt des Hohlraums. Man beachte, daß die Ergebnisse von (a) und (b) unabhängig vom Radius des Hohlraums und dem der Kugel sind.

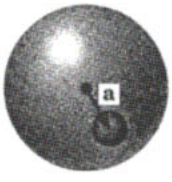


Abb. 28.22 Zu Aufgabe 21

22. Ein langes, dünnwandiges Metallrohr vom Radius R trage auf seiner Oberfläche einen Ladungsbelag λ (Abb. 28.23). Man leite eine Beziehung für die Feldstärke E in Abhängigkeit vom Abstand r von der Rohrachse ab. Man berücksichtige sowohl $r < R$ als auch $r > R$. Mit den vorgegebenen Werten $\lambda = 2 \times 10^{-8}$ C/m und $R = 3$ cm trage man E über dem Bereich $r = 0$ bis $r = 5$ cm auf.

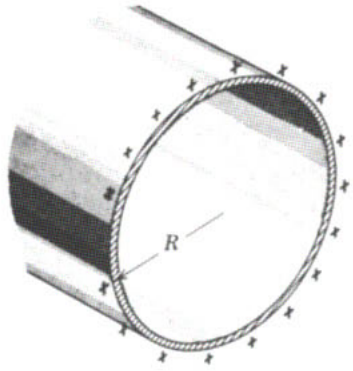


Abb. 28.23 Zu Aufgabe 22

23. Ein langer, leitender Zylinder (Länge l) mit einer Ladung $+Q$ steckt in einem langen leitenden Rohr, das die Ladung $-2Q$ trägt (Abb. 28.24). Mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes bestimme man (a) die elektrische Feldstärke außerhalb des Rohres, (b) die Ladungsverteilung auf dem Rohr und (c) die elektrische Feldstärke im Raum zwischen dem Zylinder und dem Rohr.
Antwort: (a) $E = Q/2\pi\varepsilon_0 lr$, radial nach innen; (b) $-Q$ auf beiden Seiten; (c) $E = Q/2\pi\varepsilon_0 lr$, radial nach außen.

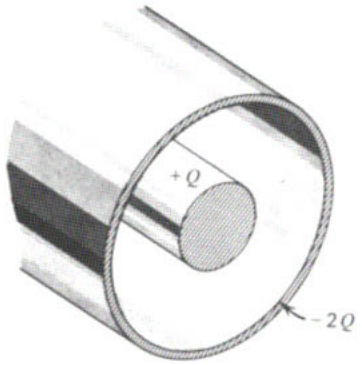


Abb. 28.24 Zu Aufgabe 23

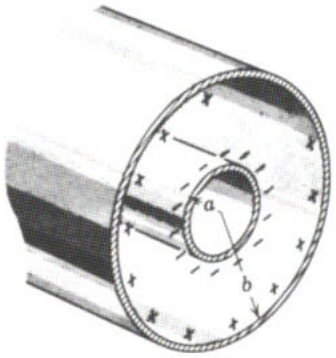


Abb. 28.25 Zu Aufgabe 25

24. Zwei geladene konzentrische Zylinder haben die Radien 3 cm und 6 cm. Der innere Zylinder trägt einen Ladungsbelag von 5×10^{-6} C/m, der äußere von -7×10^{-6} C/m. Man berechne die elektrische Feldstärke (a) bei $r = 4$ cm und (b) bei $r = 8$ cm; r sei der Abstand von den Zylinderachsen.
25. In Abb. 28.25 ist ein Querschnitt durch zwei lange konzentrische Zylinder mit den Radien a und b gezeigt. Die Zylinder tragen gleich große, aber entgegengesetzte Ladungsbeläge. Mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes zeige man, (a) daß $E = 0$ für $r > b$ und für $r < a$ und (b) daß E in

Punkten zwischen den Zylindern durch

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

gegeben ist.

26. In der Anordnung von Aufgabe 25 (Abb. 28.25) kreise ein Positron auf einer konzentrischen Bahn (Radius r) im Raum zwischen den Zylindern. Welche kinetische Energie besitzt es? Es sei $a = 2$ cm, $b = 3$ cm und $\lambda = 3 \times 10^{-8}$ C/m.
27. Ladung sei homogen über einen unendlich langen Zylinder vom Radius R verteilt. (a) Man zeige, daß die elektrische Feldstärke im Abstand r von der Zylinderachse für $r < R$ durch

$$E = \frac{\varrho r}{2\varepsilon_0}$$

gegeben ist. ϱ sei die Raumladungsdichte. (b) Was erwartet man für $r < R$?
Antwort: (b) $\varrho R^2/2\varepsilon_0 r$.

28. Eine quadratische Metallplatte von 8 cm Seitenlänge trage eine Gesamtladung von 6×10^{-6} C. (a) Man bestimme die elektrische Feldstärke in einem Punkt 5 mm über dem Mittelpunkt der Platte. (b) Wie groß ist die elektrische Feldstärke in 3 m Entfernung von der Platte?
29. Wie in Abb. 28.26 gezeigt, stehen sich zwei Metallplatten der Flächenladungsdichte $+\sigma$ und $-\sigma$ gegenüber. Wie groß ist die elektrische Feldstärke in Punkten (a) links von beiden Platten, (b) zwischen den Platten und (c) rechts von beiden Platten? Man betrachte nur solche Punkte, die nicht zu nahe an den Kanten liegen.
Antwort: (a) Null; (b) E = σ/ε_0 nach links; (c) Null.

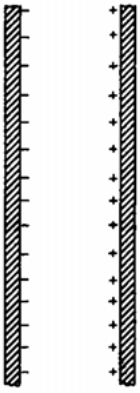


Abb. 28.26 Zu Aufgabe 29

30. Zwei 1 m^2 große Metallplatten stehen sich im Abstand von 5 cm gegenüber. Sie tragen auf ihren Innenseiten gleich große, aber entgegengesetzte Ladungen. Wie groß sind diese Ladungen, wenn die Feldstärke zwischen den Platten 55 N/C beträgt?
31. Zwei ausgedehnte, nichtleitende Platten mit negativen Ladungen liegen sich gegenüber, wie in Abb. 28.27 gezeigt. Wie groß ist die elektrische Feldstärke in Punkten (a) links von den Platten, (b) zwischen den Platten und (c) rechts von den Platten? Beide Platten haben die gleiche Flächenladungsdichte σ. Man berücksichtige nur Punkte, die nicht an den Kanten der Platten liegen. (Hinweis: In jedem Punkt wird $\boldsymbol{E}$ durch die vektorielle Summe der von beiden Platten verursachten Felder dargestellt.)
Antwort: (a) $E = \sigma/\varepsilon_0$, nach links; (b) $E = 0$; (c) $E = \sigma/\varepsilon_0$ nach rechts.

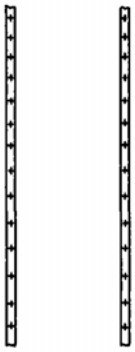


Abb. 28.27 Zu Aufgabe 31

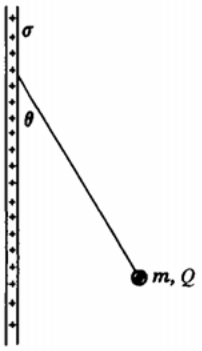


Abb. 28.28 Zu Aufgabe 34

32. Eine nichtleitende, ebene Scheibe der Dicke d habe eine homogene Raumladungsdichte ϱ. Man bestimme die elektrische Feldstärke (a) außerhalb und (b) innerhalb der Scheibe.
33. Ein Elektron mit einer kinetischen Energie von 100 eV wird direkt auf eine große Metallplatte der Flächenladungsdichte -2×10^{-6} C/m^2 geschossen. Aus welcher Entfernung muß das Elektron abgeschossen werden, damit es die Platte gerade nicht mehr erreicht?
Antwort: 0.44 mm.
34. Zu Abb. 28.28. Eine kleine Kugel von 1 mg Masse trägt eine Ladung von $Q = 2\times10^{-8}$ C. Die Kugel hängt an einem Seidenfaden unter einem Winkel von 30° gegenüber einer großen, geladenen, aber nichtleitenden Platte. Welche Flächenladungsdichte trägt die Platte?
35. Man zeige, daß unter der Wirkung von elektrostatischen Kräften allein kein stabiles Gleichgewicht möglich ist. (Hinweis: Man nehme an, daß in einem bestimmten Punkt P eines elektrischen Feldes eine Ladung $+Q$ in einem stabilen Gleichgewicht stehe. Man lege eine Gaußsche Fläche um die Ladung und wende das Gaußsche Gesetz an. Welche Richtung hat $\boldsymbol{E}$?)

Abschnitt 28.9

36. In einem Rutherfordschen Streuexperiment werde eine 3×10^{-5} cm dicke Goldfolie verwendet. (a) Welchen Flächenanteil nehmen die Kerne der Goldatome ein (Kernradius 6.9×10^{-15} m)? Die Kerne sollen sich nicht überdecken. (b) Welchen Volumenanteil nehmen die Kerne ein? (c) Wodurch wird der Rest der Goldfolie ausgefüllt?
37. Ein α-Teilchen ist genau einen Kernradius (6.9×10^{-15} m) von einem Goldatom entfernt. Wie groß ist (a) die Kraft auf das α-Teilchen und (b) die Beschleunigung des α-Teilchens? Die Masse eines α-Teilchens ist 6.7×10^{-27} kg, sie werde als punktförmig angenommen.
Antwort: (a) 190 N; (b) 2.9×10^{28} m/s^2.

29 Das elektrische Potential

29.1 Das elektrische Potential, die elektrische Spannung

Man kann ein elektrisches Feld um einen geladenen Leiter nicht nur durch das elektrische (Vektor-)Feld $\boldsymbol{E}$, sondern auch durch eine skalare Größe, das *elektrische Potential* φ, beschreiben. Beide Größen sind eng miteinander verknüpft, so daß es oft nur eine Frage der Zweckmäßigkeit ist, welche von ihnen man auswählt.

Um den Unterschied des elektrischen Potentials zwischen zwei Punkten A und B festzustellen, verwendet man, wie schon häufiger beschrieben wurde, eine Probeladung q_0. Diese Probeladung wird unter Gleichgewichtsbedingungen, d. h. genügend langsam, von Punkt A in den Punkt B verschoben. Hierzu ist eine äußere Arbeit W_{AB} aufzubringen. Die elektrische Potentialdifferenz wird dann definiert durch:

$$U_{BA} = \varphi_B - \varphi_A = \frac{W_{AB}}{q_0}. \tag{29.1}$$

Die Arbeit W_{AB} kann positiv, negativ oder Null sein, je nachdem, ob das elektrische Potential im Punkt B höher, niedriger oder genauso groß wie im Punkt A ist.

Die SI-Einheit für die Potentialdifferenz ergibt sich aus Gl. 29.1 zu Joule durch Coulomb, J/C. Potentialdifferenzen kommen in der Elektrodynamik sehr oft vor und werden gewöhnlich als (elektrische) *Spannungen* mit dem Symbol U bezeichnet. Beide Bezeichnungen werden in diesem Buch gleichberechtigt nebeneinander benutzt. Die Einheit der Spannung erhielt einen eigenen Namen, das Volt, Symbol V.

Es gilt also

1 Volt = 1 Joule/1 Coulomb.

Es ist üblich, den Bezugspunkt A als unendlich weit entfernt von allen Ladungen anzunehmen und das elektrische Potential φ_A in dieser unendlichen Entfernung (willkürlich!) Null zu setzen. Mit dieser Vereinbarung kann man das elektrische Potential in einem Punkt des Feldes definieren. Mit $\varphi_A = 0$ wird Gl. 29.1 zu

$$\varphi = \frac{W}{q_0}, \tag{29.2}$$

wobei W diejenige äußere Arbeit ist, die an einer Probeladung q_0 verrichtet werden muß, um sie aus dem Unendlichen in den entsprechenden Punkt zu bringen. Man muß sich klarmachen, daß nur die Differenz der Potentiale von Bedeutung ist, während das durch

Gl. 29.2 definierte einzelne Potential von der willkürlichen Festlegung abhängt, daß das Potential des im Unendlichen liegenden Bezugspunktes Null ist. Diesem Referenzpunkt hätte man ebensogut das Potential -100 V zuschreiben können. Auch hätte man ihn nicht im Unendlichen, sondern irgendwo anders im Feld plazieren können. Bei vielen Betrachtungen wählt man z. B. die Erde zum Vergleich und schreibt ihr das Potential Null zu.

Aus Gl. 29.2 erkennt man unmittelbar, daß das Potential φ in der Nähe einer isoliert aufgestellten positiven Ladung positiv sein muß, da man von außen eine positive Arbeit leisten muß, um eine positive Probeladung aus dem Unendlichen dorthin zu bringen. Andererseits muß das Potential φ in der Nähe einer isoliert aufgestellten negativen Ladung negativ sein, weil man bei einer aus dem Unendlichen in den betreffenden Punkt gebrachten Probeladung Arbeit erfährt (negative Arbeit). Das elektrische Potential stellt eine skalare Größe dar, weil (Gl. 29.2) auch W und q_0 Skalare sind.

Sowohl W_{AB} als auch $\varphi_B - \varphi_A$ in Gl. 29.1 sind unabhängig vom Weg, auf dem die Probeladung von Punkt A in den Punkt B gelangt ist. Wenn das nicht so wäre, hätte der Punkt B kein eindeutiges elektrisches Potential (bezüglich des Referenzpunktes A) und die gegebene Definition für das Potential wäre nicht brauchbar.

Wir wollen zeigen, daß die Potentialdifferenz im elektrischen Feld einer Punktladung wegunabhängig ist (Abb. 29.1). Daraus folgern wir dann, daß die Wegunabhängigkeit für alle elektrostatischen Felder gilt. In Abb. 29.1 sind zwei Punkte A und B in einem von einer Punktladung erzeugten Feld gezeigt.

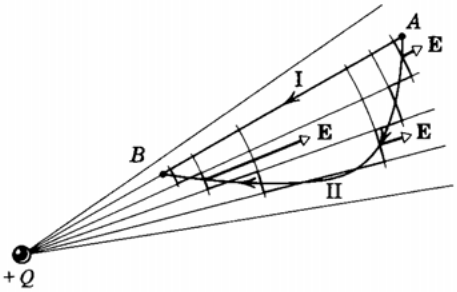


Abb. 29.1 In dem elektrischen Feld um eine Punktladung $+Q$ wird eine Probeladung q_0 auf zwei verschiedenen Wegen I und II von A nach B verschoben.

Wir nehmen an, eine positive Punktladung werde von einer äußeren Kraft auf zwei verschiedenen Wegen von A nach B gebracht. Weg I soll eine gerade Linie sein, Weg II irgendein anderer Weg. Weg II kann man näherungsweise durch viele, abwechselnd aufeinanderfolgende Kreisbögen und Radiusabschnitte ersetzen. Da man diese Wegelemente klein genug wählen kann, ist es möglich, diese dem Weg II beliebig genau anzupassen. Auf dem so zusammengesetzten Weg II wird nur auf den Radiusabschnitten Arbeit geleistet, denn auf den Kreisbögen stehen Kraft $\boldsymbol{F}$ und Wegelement $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ senkrecht aufeinander, so daß die Arbeit $\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ Null wird. Die Summe aller auf den Radiusabschnitten des Weges II verrichteten Arbeiten ist genauso groß wie die insgesamt auf dem Weg I verrichtete Arbeit, denn beide Wege setzen sich aus der gleichen Anzahl von

Radiusabschnitten zusammen. Da Weg II aber beliebig ausgewählt wurde, muß die Arbeit auch für alle anderen Wege gleich groß sein.

Diese Überlegung gilt zunächst nur für ein Feld um eine Punktladung. Jede andere kontinuierliche oder diskrete Ladungsverteilung kann aber als aus Punktladungen oder differentiellen Ladungselementen zusammengesetzt gedacht werden. Aus dem Superpositionsprinzip folgt dann, daß in allen elektrostatischen Feldern die elektrische Potentialdifferenz von der Wegführung unabhängig ist.

Der geometrische Ort aller Punkte gleichen elektrischen Potentials wird *Äquipotentialfläche* genannt. Mit einer Schar von Äquipotentialflächen, von denen jede ein anderes Potential repräsentiert, kann man im allgemeinen das elektrische Feld in einem Raumbereich beschreiben. In Abschn. 27.3 hatten wir dafür die Feldlinien des elektrischen Feldes herangezogen. In den folgenden Abschnitten (z. B. Abb. 29.15) werden wir den Zusammenhang zwischen Feldlinien und Äquipotentialflächen näher untersuchen.

Zum Verschieben einer Probeladung auf derselben Äquipotentialfläche ist keine Arbeit erforderlich. Das folgt aus Gl. 29.1:

$$\varphi_B - \varphi_A = \frac{W_{AB}}{q_0},$$

denn für $\varphi_A = \varphi_B$ ergibt sich W_{AB} zu Null. Das gilt selbst dann, wenn der zwischen A und B gewählte Weg nicht in der Äquipotentialfläche verläuft. Es müssen nur beide Punkte darin liegen.

In Abb. 29.2 sind einige Äquipotentialflächen angegeben. Um eine Ladung längs der Wege I oder II zu verschieben, ist keine Arbeit erforderlich. Für die Verschiebung längs der Wege I′ oder II′ ist hingegen Arbeit aufzubringen. Sie ist für die Wege I′ und II′ gleich groß, da beide Wege in derselben Äquipotentialfläche V_1 beginnen und in derselben Äquipotentialfläche V_2 enden.

Für eine kugelförmige Ladung stellen die Äquipotentialflächen konzentrische Kugelschalen dar. In einem homogenen Feld sind die Äquipotentialflächen Ebenen senkrecht zu den Feldlinien. Tatsächlich stehen in allen elektrischen Feldern die Feldlinien (und

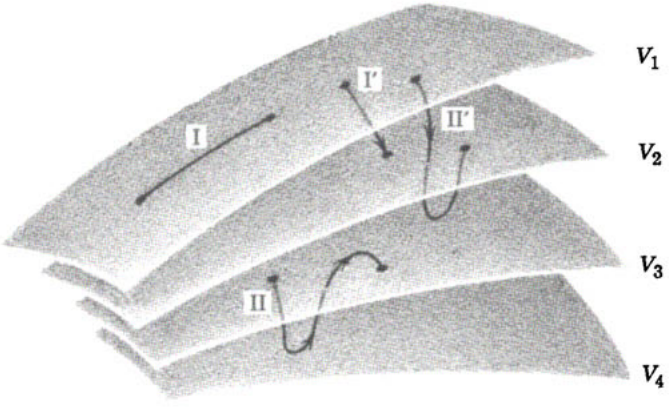


Abb. 29.2 Vier verschiedene Äquipotentialflächen. I, I′, II und II′ stellen vier verschiedene Wege dar, auf denen eine Probeladung verschoben wird.

damit die elektrische Feldstärke) senkrecht auf den Äquipotentialflächen (Abb. 29.15). Wenn die Feldstärke nämlich nicht rechtwinklig auf den Äquipotentialflächen stünde, gäbe es in ihnen eine Komponente von $\boldsymbol{E}$, und man müßte Arbeit verrichten, um eine Punktladung in den Äquipotentialflächen zu verschieben. Das kann aber auf einer Äquipotentialfläche nicht der Fall sein. Also muß $\boldsymbol{E}$ rechtwinklig auf den Äquipotentialflächen stehen.

Es besteht hier wieder eine enge Analogie zum Gravitationsfeld, die durch die Ähnlichkeit der Kraftgesetze (Gl. 16.1 und Gl. 26.3) gegeben ist:

$$F_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad \text{und} \quad F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Die Kräfte sind jeweils zu einer Eigenschaft des Probekörpers (Masse bzw. Ladung) proportional. Man kann also auch ein *Gravitationspotential* folgendermaßen definieren (vgl. Gl. 29.2):

$$V_g = \frac{W}{m},$$

wobei W die Arbeit ist, die zum Verschieben einer Probemasse aus dem Unendlichen in den betreffenden Punkt aufgewendet werden muß. Man kann auch Äquipotentialflächen in einem Gravitationsfeld konstruieren; auch sie müssen senkrecht zu dem Feldvektor $\boldsymbol{g}$ stehen. In einem homogenen Gravitationsfeld, wie auf der Erdoberfläche, sind die Äquipotentialflächen horizontale Ebenen. Das stimmt damit überein, daß zur (reibungsfreien) Verschiebung eines Steines horizontal zur Erdoberfläche keine Arbeit erforderlich ist. Gravitationskräfte sind wie die Coulombschen Kräfte konservativ (vgl. Abschn. 8.2).

29.2 Potential und elektrisches Feld

Abb. 29.3 zeigt ein homogenes elektrisches Feld, in dem zwei Punkte A und B im Abstand d eingezeichnet sind. Durch eine äußere Kraft werde eine positive Probeladung gleichförmig auf einer Geraden von A nach B bewegt. Auf die Probeladung wirkt eine elektrische Kraft $q_0\boldsymbol{E}$, die nach unten gerichtet ist. Bei der Verschiebung der Ladung muß diese elektrische Kraft durch eine äußere Kraft überwunden werden. Die zu verrichtende Arbeit ist

$$W_{AB} = Fd = q_0 Ed. \tag{29.3}$$

Setzt man diesen Ausdruck in Gl. 29.1 ein, so erhält man

$$\varphi_B - \varphi_A = \frac{W_{AB}}{q_0} = Ed. \tag{29.4}$$

Gl. 29.4 verknüpft für unser einfaches Beispiel die elektrische Feldstärke mit der Spannung. Man erkennt, daß sich daraus für die Feldstärke die SI-Einheit Volt durch Meter (V/m) ergibt. Weiter oben (Abschn. 27.2) haben wir N/C als Einheit für die elektrische Feldstärke verwendet. Beide Einheiten sind identisch.

In Abb. 29.3 hat B ein höheres Potential als A, weil eine positive äußere Arbeit

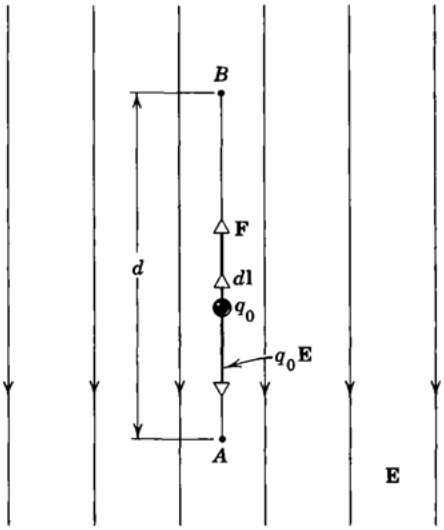


Abb. 29.3 Unter dem Einfluß einer äußeren Kraft **F** wird eine positive Probeladung q_0 in einem homogenen elektrischen Feld von A nach B verschoben.

geleistet werden muß, um eine positive Probeladung von A nach B zu bringen. In einem homogenen Gravitationsfeld entspricht das dem Hochheben eines Steines von A nach B.

Gibt es auch für inhomogene Felder eine Verknüpfung zwischen dem Potential φ und der elektrischen Feldstärke $\boldsymbol{E}$? Hierzu betrachten wir Abb. 29.4. Das elektrische Feld übt auf die Probeladung eine Kraft $q_0 \boldsymbol{E}$ aus. Damit die Probeladung nicht beschleunigt

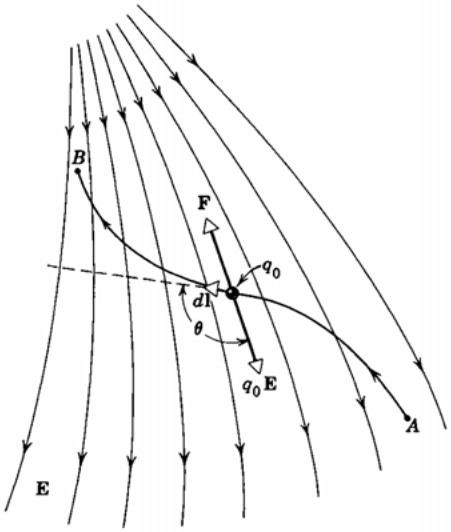


Abb. 29.4 Unter der Wirkung einer äußeren Kraft **F** wird eine positive Probeladung q_0 in einem inhomogenen elektrischen Feld von A nach B verschoben.

wird, muß eine äußere Kraft $\boldsymbol{F}$ aufgewendet werden, die überall den Wert $-q_0\boldsymbol{E}$ haben muß.

Wenn die Probeladung durch die äußere Kraft längs des Weges von A nach B um $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ verschoben wird, wird dabei eine äußere Arbeit $\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ geleistet. Die Gesamtarbeit für die Verschiebung der Probeladung von A nach B ist durch die Summe (Integration) aller infinitesimalen Arbeitsbeträge gegeben:

$$W_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -q_0\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}.$$

Ein solches Integral wird *Linienintegral* (Kurvenintegral) genannt. Wir haben darin $\boldsymbol{F}$ durch $-q_0\boldsymbol{E}$ ersetzt. Setzen wir diesen Ausdruck für W_{AB} in Gl. 29.1 ein, so erhalten wir

$$\varphi_B - \varphi_A = \frac{W_{AB}}{q_0} = -\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}. \tag{29.5}$$

Unter der Voraussetzung, daß der Punkt A unendlich weit entfernt und sein Potential Null ist, liefert diese Gleichung das Potential φ in einem Punkt (hier B) des Feldes:

$$\varphi = -\int_\infty^B \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}. \tag{29.6}$$

Mit den beiden Gleichungen 29.5 und 29.6 ist es möglich, die Potentialdifferenz zwischen zwei beliebigen Punkten (bzw. das Potential in beliebigen Punkten) zu bestimmen, wenn die Feldstärke $\boldsymbol{E}$ bekannt ist.

Beispiel 1

Man bestimme die Spannung $\varphi_B - \varphi_A$ zwischen den beiden Punkten A und B in Abb. 29.3 unter Verwendung von Gl. 29.5. Man vergleiche das Ergebnis mit dem Resultat des Spezialfalls, Gl. 29.4.

Wenn die Probeladung verschoben wird, zeigt das Wegelement $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ immer in Bewegungsrichtung, also in Abb. 29.3 nach oben. Die elektrische Feldstärke ist überall nach unten gerichtet. $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ und $\boldsymbol{E}$ bilden also überall auf dem Verschiebungsweg einen Winkel von 180°. Aus Gl. 29.5 ergibt sich damit

$$\varphi_B - \varphi_A = -\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_A^B E\cos 180^\circ\,\mathrm{d}l = \int_A^B E\,\mathrm{d}l.$$

Da E überall im Feld einen konstanten Wert hat, kann es vor das Integralzeichen gezogen werden und man erhält als Ergebnis

$$\varphi_B - \varphi_A = E\int_A^B \mathrm{d}l = Ed,$$

welches mit dem in Gl. 29.4 übereinstimmt.

Beispiel 2

Eine Probeladung q_0 werde mit konstanter Geschwindigkeit auf dem in Abb. 29.5 gezeigten Weg von A nach B verschoben. Man bestimme die Spannung zwischen den Punkten A und B.

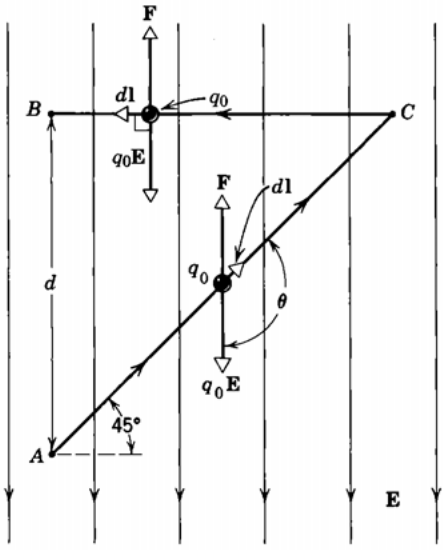


Abb. 29.5 Zu Beispiel 2. Durch eine äußere Kraft **F** wird eine Probeladung q_0 in einem homogenen, elektrischen Feld auf dem Weg ACB verschoben.

Auf dem Wegabschnitt AC bilden $\boldsymbol{E}$ und $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ überall einen Winkel von 135°, so daß man nach Gl. 29.5 folgende Beziehung erhält:

$$\varphi_C - \varphi_A = -\int_A^C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_A^C E\cos 135^\circ \,\mathrm{d}l = \frac{E}{\sqrt{2}}\int_A^C \mathrm{d}l.$$

Das Integral entspricht gerade der Länge der Strecke AC, die $\sqrt{2}d$ beträgt. Damit ergibt sich

$$\varphi_C - \varphi_A = \frac{E}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}d) = Ed.$$

Die Punkte B und C liegen auf derselben Äquipotentialfläche, so daß $\boldsymbol{E}$ und $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ auf der Strecke BC überall rechte Winkel bilden. Daraus folgt

$$\varphi_B - \varphi_A = \varphi_C - \varphi_A = Ed.$$

Es ergibt sich also dasselbe Resultat wie für eine Verschiebung der Ladung auf dem direkten Weg AB. Das muß auch so sein, da die Spannung nach unserer Definition wegunabhängig ist.

29.3 Das Potential einer Punktladung

In Abb. 29.6 sind zwei Punkte A und B im Feld einer isoliert aufgestellten positiven Punktladung Q gezeigt. Wir nehmen einfachheitshalber an, daß A, B und Q auf einer Geraden liegen. Wir bestimmen die Potentialdifferenz zwischen den Punkten A und B, indem wir eine Probeladung q_0 gleichförmig längs eines Radius von A nach B verschieben.

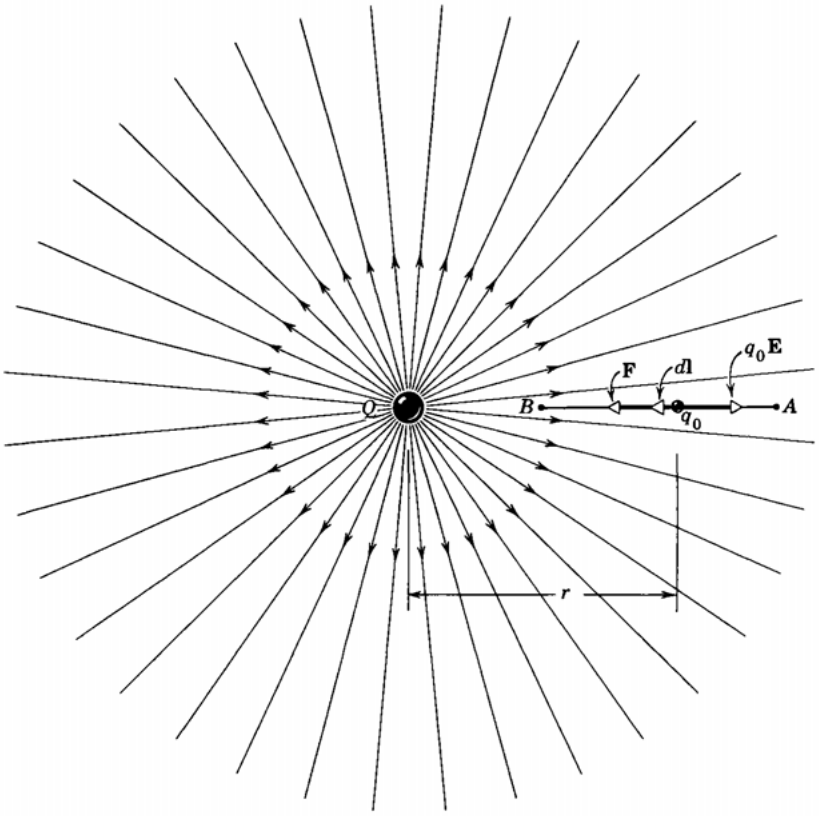


Abb. 29.6 Durch eine äußere Kraft **F** wird eine Probeladung q_0 in dem elektrischen Feld um eine positive Ladung $+Q$ von A nach B verschoben.

Die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$ weist in Abb. 29.6 nach rechts, und $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ weist wie immer in Bewegungsrichtung, also nach links. Aus Gl. 29.5 erhält man

$$\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = E \cos 180^\circ \, \mathrm{d}l = -E\,\mathrm{d}l.$$

Für das Wegelement $\mathrm{d}l$ kann man auch den Abstand $\mathrm{d}r$ von der Punktladung einsetzen, wobei gilt:

$$\mathrm{d}l = -\mathrm{d}r.$$

Damit erhält man

$$\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = E\,\mathrm{d}r.$$

Diesen Wert kann man wiederum in das Integral von Gl. 29.5 einsetzen:

$$\varphi_B - \varphi_A = -\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_{r_A}^{r_B} E\,\mathrm{d}r.$$

Zusammen mit Gl. 27.4

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

folgt dann

$$\varphi_B - \varphi_A = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right). \tag{29.7}$$

Legt man den Bezugspunkt A wieder ins Unendliche ($r_A \to \infty$) und setzt das zugehörige Potential φ_A Null, ergibt sich im Punkt B

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}. \tag{29.8}$$

Man entnimmt dieser Beziehung leicht, daß die Äquipotentialflächen eines Feldes um eine isolierte aufgestellte Punktladung konzentrische Kugelschalen um die Punktladung sind (Abb. 29.15a). Eine entsprechende Herleitung würde zeigen, daß diese Beziehung allgemeiner auch für Punkte außerhalb einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung gilt.

Beispiel 3

Welche positive Punktladung erzeugt im Abstand von 10 cm ein Potential von + 100 V?

Die Auflösung von Gl. 29.8 nach Q ergibt

$$Q = \varphi 4\pi\varepsilon_0 r = (100\ \mathrm{V})(4\pi)(8.9 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\,m^2})(0.10\ \mathrm{m})$$
$$= 1.1 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}.$$

Diese Ladung liegt in der Größenordnung von Ladungsmengen, die durch Reiben erzeugt werden können.

Beispiel 4

Welches Potential hat die Oberfläche des Kerns eines Goldatoms? Der Radius des Kerns betrage 6.6×10^{-15} m, die Kernladungszahl ist $Z = 79$.

Wenn man den Atomkern als kugelsymmetrisch annimmt, wirkt er nach außen wie eine elektri-

sche Punktladung. Wir benutzen Gl. 29.8 mit dem Wert von 1.6×10^{-19} C für die Ladung eines Protons:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} = \frac{(9.0\times10^9\ \mathrm{N\,m^2/C^2})(79)(1.6\times10^{-19}\ \mathrm{C})}{6.6\times10^{-15}\ \mathrm{m}} = 1.7\times10^7\ \mathrm{V}.$$

29.4 Mehrere Punktladungen

Das Potential in irgendeinem Punkt eines Feldes, das durch mehrere Punktladungen erzeugt wird, findet man dadurch, daß man (a) das Potential bezüglich jeder einzelnen Ladung in diesem Punkt bestimmt (und dabei alle anderen Ladungen ignoriert) und (b) diese Einzelpotentiale addiert (vgl. Gl. 29.8), also ist

$$\varphi = \sum_n \varphi_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_n \frac{Q_n}{r_n}; \tag{29.9}$$

dabei bedeutet Q_n die n-te Ladung und r_n ihr Abstand vom Punkt. Die Summe ist eine algebraische und keine Vektorsumme. Gegenüber der elektrischen Feldstärke, die immer ein Vektor ist, stellt die Benutzung des Potentials also eine rechnerische Vereinfachung dar.

Handelt es sich um eine kontinuierliche Ladungsverteilung, wird in Gl. 29.9 die Summe durch ein Integral ersetzt, also

$$\varphi = \int \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\mathrm{d}Q}{r}, \tag{29.10}$$

wobei $\mathrm{d}Q$ ein differentielles Ladungselement darstellt und r den Abstand vom betrachteten Punkt.

Beispiel 5

Wie groß ist das Potential im Mittelpunkt P der Ladungsanordnung von Abb. 29.7? Es seien $Q_1 = +1\times10^{-8}$ C, $Q_2 = -2\times10^{-8}$ C, $Q_3 = +3\times10^{-8}$ C, $Q_4 = +2\times10^{-8}$ C und $a = 1$ m.

Alle vier Ladungen haben einen Abstand von $(a/\sqrt{2}) = 0.71$ m vom Punkt P. Aus Gl. 29.9 ergibt sich

$$\varphi = \sum_n \varphi_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1+Q_2+Q_3+Q_4}{r}$$

$$= \frac{(9.0\times10^9\ \mathrm{N\,m^2/C^2})(1.0-2.0+3.0+2.0)\times10^{-8}\ \mathrm{C}}{0.71\ \mathrm{m}}$$

$$= 500\ \mathrm{V}.$$

Hat das Potential innerhalb des Quadrates einen konstanten Wert? Gibt es innerhalb des Quadrates irgendeinen Punkt mit negativem Potential? Man skizziere die Schnittkurve des Quadrates mit der Äquipotentialfläche von Null Volt.

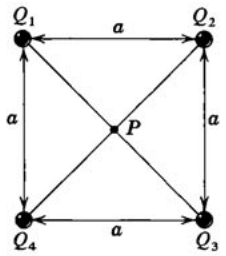


Abb. 29.7 Zu Beispiel 5

Beispiel 6

Geladene Scheibe. Man bestimme das elektrische Potential in einem Punkt P auf der Achse einer Kreisscheibe mit der konstanten Flächenladungsdichte σ (Abb. 29.8).

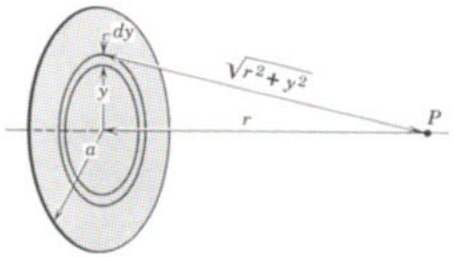


Abb. 29.8 Zu Beispiel 6. Eine Kreisscheibe mit homogener Ladungsverteilung.

Wir betrachten ein Ladungselement $\mathrm{d}Q$ auf einem Kreisring mit dem inneren Radius y und dem äußeren Radius $y + \mathrm{d}y$. Bei gegebener Flächenladungsdichte σ gilt

$$\mathrm{d}Q = \sigma(2\pi y)(\mathrm{d}y),$$

wobei $2\pi y\mathrm{d}y$ die Fläche des Kreisringes darstellt. Alle Ladungen des Ladungselementes sind von dem Punkt P gleich weit entfernt, $r' = \sqrt{y^2 + r^2}$, und ihr Beitrag $\mathrm{d}\varphi$ zum elektrischen Potential in P kann durch Gl. 29.8 angegeben werden:

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\mathrm{d}Q}{r'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\sigma 2\pi y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2 + r^2}}.$$

Das Gesamtpotential erhält man durch Integration über alle Kreisringe (Gl. 29.10):

$$\begin{aligned}\varphi &= \int \mathrm{d}\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^a (y^2 + r^2)^{-1/2} y\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{a^2 + r^2} - r\right).\end{aligned}$$

Diese Beziehung gilt für alle r. Im Grenzfall $r \gg a$ kann man den Wurzelausdruck in eine Reihe entwickeln,

$$\sqrt{a^2+r^2} = r\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)^{1/2} = r\left(1+\frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2}+\ldots\right) \approx r+\frac{a^2}{2r},$$

wobei wir die Binomialreihe verwendet haben (Anhang I). Damit wird das Potential zu

$$\varphi \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(r+\frac{a^2}{2r}-r\right) = \frac{\sigma\pi a^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r},$$

wobei $Q = \sigma\pi a^2$ die Gesamtladung auf der Scheibe ist. Das Ergebnis für diesen Grenzfall ist nicht überraschend, da die Scheibe in sehr großer Entfernung wie eine Punktladung wirkt.

29.5 Das Potential eines Dipols

Ein Dipol besteht aus zwei gleich großen, aber entgegengesetzten Ladungen $\pm Q$, die sich im Abstand $2a$ gegenüberstehen, vgl. Beispiel 3 in Kapitel 27. Das elektrische Dipolmoment $\boldsymbol{p}$ hat einen Betrag von $2aQ$ und weist von der negativen zur positiven Ladung. Wir wollen eine Beziehung für das Potential in irgendeinem Punkt im Feld eines Dipols herleiten. Der Punkt soll einen großen Abstand r vom Dipol haben, d. h. $r \gg a$.

Wie in Abb. 29.9 gezeigt, soll der Ort des Punktes P durch den Abstand r vom Zentrum des Dipols und durch den Winkel θ zur Dipolachse bestimmt sein. Aus Symmetriegründen muß das Potential konstant bleiben, wenn der Punkt P bei gleichbleibendem r und θ um die Dipolachse z rotiert. Um das Potential im Raum um den Dipol bestimmen zu können, braucht man also nur die Potentialfunktion $\varphi(r, \theta)$ für eine Ebene zu finden, in der die z-Achse liegt, z. B. für die Papierebene. Aus Gl. 29.9 erhält man

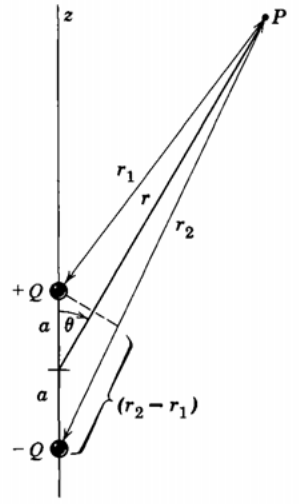


Abb. 29.9 Ein elektrischer Dipol

$$\varphi = \sum_n \varphi_n = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r_1} - \frac{Q}{r_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$

Nach Voraussetzung berücksichtigen wir nur Punkte, für die $r \gg a$ gilt. Aus der Abbildung entnimmt man hierfür

$$r_2 - r_1 \approx 2a\cos\theta \quad \text{und} \quad r_1 r_2 \approx r^2.$$

Damit reduziert sich die Beziehung für das Potential auf

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2a\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{p\cos\theta}{r^2}, \tag{29.11}$$

wobei wir für $2aQ$ den Betrag des Dipolmoments eingesetzt haben. Überall auf der äquatorialen Fläche mit $\theta = 90°$ verschwindet das Potential φ, d. h. es erfordert keinen Arbeitsaufwand, um eine Probeladung längs der Mittelsenkrechten auf der Dipolachse aus dem Unendlichen in die Nähe des Dipols zu verschieben. Bei vorgegebenem r hat das Potential für $\theta = 0$ ein Maximum (größter positiver Wert) und für $\theta = 180°$ ein Minimum (größter negativer Wert). Man beachte, daß das Potential nicht einzeln von a und Q abhängt, sondern nur von ihrem Produkt p.

Es ist sinnvoll, jede Ladungsanordnung, für die das Potential eines entfernten Punktes durch Gl. 29.11 angegeben werden kann, als einen elektrischen Dipol zu bezeichnen. Wie wir gerade gesehen haben, gilt diese Gleichung für zwei nahe beieinanderliegende Punktladungen. Aber auch bei anderen Anordnungen ist das der Fall. Immer, wenn wir außerhalb einer Kugelschale einen Feldlinienverlauf wie in Abb. 29.10 feststellen, der nach Gl. 29.11 beschrieben werden kann, definieren wir das felderzeugende Objekt im Inneren der Kugelschale als einen Dipol mit seiner Achse auf der zz'-Linie und einem senkrecht nach oben gerichteten Dipolmoment.

Viele Moleküle haben ein Dipolmoment. Für die H_2O-Moleküle in dampfförmigem Wasser beträgt es 6.1×10^{-30} C m. In Abb. 29.11 sind die drei Kerne und die sie umgebenden Elektronenhüllen des Moleküls dargestellt. Das Dipolmoment $\boldsymbol{p}$ wird durch einen Pfeil auf der Symmetrie-

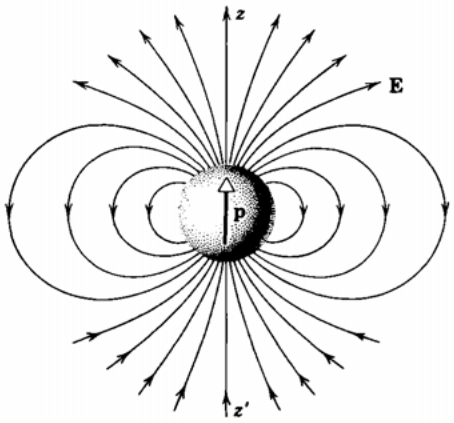


Abb. 29.10 Wenn eine Ladungsverteilung im Inneren der kugelförmigen Hülle das gezeigte Feld erzeugt, handelt es sich dabei um einen elektrischen Dipol mit dem Dipolmoment p.

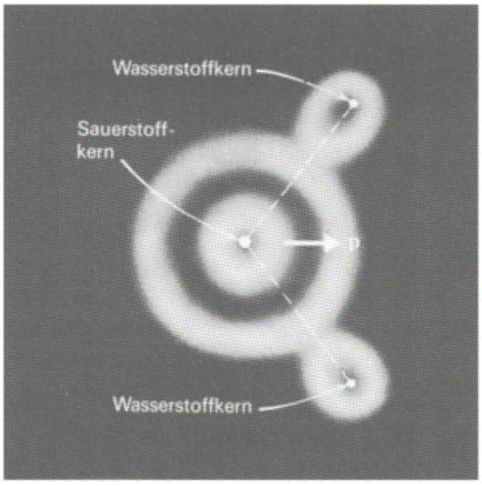


Abb. 29.11 Die Ladungsverteilung in einem Wassermolekül. **p** ist das Dipolmoment des Moleküls.

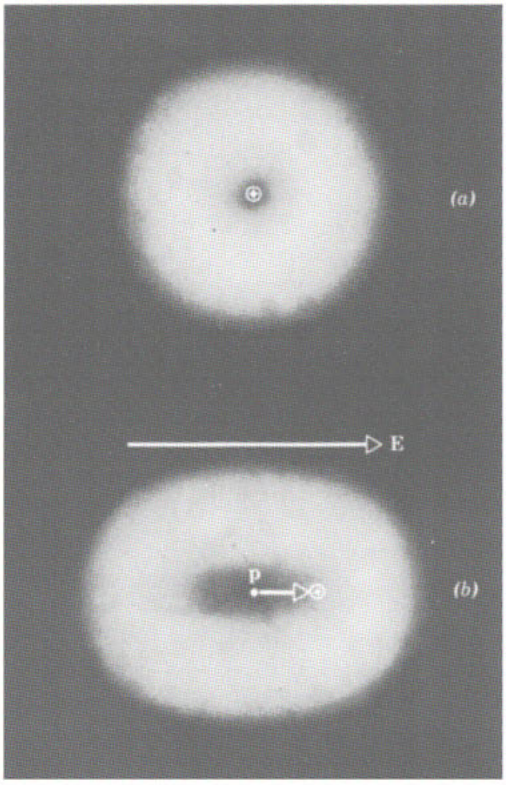


Abb. 29.12 (a) Die Elektronenwolke um einen positiv geladenen Atomkern. (b) Unter der Wirkung eines äußeren elektrischen Feldes verformt sich die Elektronenwolke. Die Zentren der positiven und der negativen Ladung verschieben sich gegeneinander, so daß ein Dipol entsteht.

achse dargestellt. Im Wassermolekül fällt das Zentrum der positiven Ladungen nicht mit dem Zentrum der negativen Ladungen zusammen. Das ist die Ursache für das Auftreten des Dipolmoments.

Atome und auch viele Moleküle besitzen kein permanentes Dipolmoment. Ein Dipolmoment kann jedoch induziert werden, wenn die Atome oder Moleküle in ein äußeres elektrisches Feld gebracht werden. Dadurch werden die Zentren der positiven und der negativen Ladungen voneinander getrennt (Abb. 29.12). Die Atome oder Moleküle werden *polarisiert*, und es entsteht ein *induziertes elektrisches Dipolmoment*. Dieses verschwindet, sobald auch das äußere Feld verschwindet.

Elektrische Dipole spielen nicht nur im atomaren Bereich eine große Rolle. Radioantennen haben oft die Gestalt eines metallischen Leiters oder Stabes, in dem Elektronen hin- und herschwingen. In einem bestimmten Zeitpunkt ist der Draht an einem Ende positiv und am anderen Ende negativ aufgeladen. Eine halbe Schwingungsperiode später hat sich die Polarität an den Enden umgekehrt. Es handelt sich um einen oszillierenden Dipol, da sich das Dipolmoment periodisch ändert.

Beispiel 7

Elektrischer Quadrupol. In Abb. 27.26 und Abb. 27.27 hatten wir Beispiele für elektrische Quadrupole kennengelernt. Ein Quadrupol ist aus zwei Dipolen zusammengesetzt, die oft so angeordnet sind, daß sich ihre Wirkungen in entfernten Punkten fast gegenseitig aufheben. Für den Quadrupol der Abb. 27.26 berechne man das Potential $\varphi(r)$ in Punkten auf der verlängerten Quadrupolachse.

Mit Gl. 29.9 erhält man

$$\varphi = \sum_n \varphi_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r-a} - \frac{2q}{r} + \frac{Q}{r+a}\right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2a^2}{(r-a)(r)(r+a)}.$$

Für weit entfernte Punkte ($r \gg a$) wird der Nenner des Bruches zu r^3, und die Gleichung für das Potential reduziert sich auf

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q_m}{r^3},$$

wobei für $2Qa^2$ das *elektrische Quadrupolmoment* Q_m eingesetzt wurde. Man beachte, daß das Potential im Feld (a) einer Punktladung (Gl. 29.8) mit $1/r$, (b) eines Dipols (Gl. 29.11) mit $1/r^2$ und (c) eines Quadrupols mit $1/r^3$ abnimmt.

Man mache sich weiterhin klar, daß (a) ein Dipol aus zwei gleich großen, aber entgegengesetzten Ladungen besteht, die nicht genau aufeinanderliegen, so daß sich ihre Wirkungen in entfernten Punkten nicht exakt aufheben, daß (b) ein Quadrupol aus zwei Dipolen mit gleich großen, aber entgegengerichteten Dipolmomenten besteht, die nicht genau übereinander liegen und deren Wirkungen sich deshalb in entfernten Punkten nicht exakt aufheben. Dieses Schema läßt sich auf andere Anordnungen ausweiten, z. B. auf *Oktupole* und weitere *Multipole*.

Für beliebige Ladungsanordnungen kann man das Potential in einer Entfernung, die groß gegenüber den Dimensionen der Ladungsanordnung ist, immer als Summe von Potentialbeiträgen eines Monopols (Einzelladung), eines Dipols, eines Quadrupols, usw. angeben. Eine solche *Multipolentwicklung* stellt bei vielen komplizierten Problemen eine brauchbare Lösungsmethode dar.