Konstruktionen versus Positionen

Band I

Spezielle Wissenschaftstheorie

KONSTRUKTIONEN VERSUS POSITIONEN

Beiträge
zur Diskussion um die Konstruktive Wissenschaftstheorie
herausgegeben von

Kuno Lorenz

Band I

Spezielle Wissenschaftstheorie

W DE G

Walter de Gruyter · Berlin · New York
1979

Gedruckt mit Unterstützung
der Wissenschaftlichen Gesellschaft des Saarlandes e. V.

CIP-Kurztiteleintragung der Deutschen Bibliothek

Konstruktionen versus Positionen : Beitr. zur Diskussion um d. Konstruktive Wissenschaftstheorie ; [Paul Lorenzen zum 60. Geburtstag] / hrsg. von Kuno Lorenz — Berlin, New York : de Gruyter.
ISBN 3-11-006655-6

NE: Lorenz, Kuno [Hrsg.]; Lorenzen, Paul: Festschrift

Bd. 1. Spezielle Wissenschaftstheorie. — 1. Aufl. — 1978.

Printed in Germany.

Satz und Druck: Kupijai & Prochnow, Berlin; Einband: Wübben, Berlin.

Paul Lorenzen
zum 60. Geburtstag

VORWORT

Zu den hier gesammelten Beiträgen habe ich im Frühjahr 1974 die Freunde und Gesprächspartner, darunter die ehemaligen und gegenwärtigen Schüler von Paul Lorenzen, aus Anlaß dessen 60. Geburtstags am 24. März 1975 eingeladen.

Meine Bitte war, zur Diskussion um die konstruktive Wissenschaftstheorie aus der Sicht der jeweils eigenen Arbeit Stellung zu nehmen, damit der gegenwärtige Dialogstand in seinen Grundzügen einmal dokumentiert vorliegt und anhand dieser Beiträge gesichtet und kritisch geprüft werden kann. Thematisch erstreckt sich die international geführte Diskussion von Logik über Grundlagen der Mathematik und Physik bis hin zu Ethik und Grundsätzen eines Verständnisses der philosophischen Tradition unter Einschluß der Kulturwissenschaften.

Allen Autoren, die dieser Bitte gefolgt sind, möchte ich auch öffentlich sehr herzlich für diese ihre Mitwirkung danken. Ihre Beiträge werden es möglich machen, die Frage zu beantworten, welche Thesen zur Zeit als vorläufig gesichert und daher akzeptiert, welche als unhaltbar und welche als weiterhin kontrovers angesehen werden müssen.

Noch eine traurige Nachricht bin ich dem Leser mitzuteilen schuldig: Von den Autoren sind Hermann Zeltner und auch Wilhelm Kamlah, Erlanger Kollegen von Paul Lorenzen, zwischen Manuskripteingang und Drucklegung gestorben. Noch vor dem Umbruch starb auch der Senior unter ihnen, Paul Bernays aus Zürich. Für die Korrekturen trägt hier allein der Herausgeber die Verantwortung.

Schließlich soll nicht verschwiegen werden, daß die Debatte um die konstruktive Wissenschaftstheorie in den verflossenen Jahren auch viele durchaus nicht-rationale, von individuellen Vorlieben und Mutmaßungen der Gesprächspartner auf beiden Seiten gespeiste Teilstücke enthalten hat und weiter enthält, die den in dieser Debatte sich sowohl vollziehenden wie sich darstellenden allmählichen Wandel des Wissenschaftsverständnisses einer rationalen Prognostik weitgehend entziehen.

Wissenschaftliche oder gar wissenschaftstheoretische Diskussionen sind nicht deshalb, weil hier scheinbar keines Einzelnen Sache vertreten wird, scheinbar keine persönlichen Interessen eine Rolle spielen, schon ›vernünftig‹, nämlich ihrer Struktur nach Einwänden ohne Ansehen der Person zugänglich. Die Bildungsgeschichten auch von Wissenschaftlern gleichen sich durchaus nicht und sind nur stückweise – in einer eigenen wissenschaftlichen Anstrengung – ineinander übersetzbar. Die Vernünftigkeit kann stets nur als ein mehr oder weniger deutlich sichtbarer Zug mündlicher wie schriftlicher Argumentationen begriffen werden. Wenn der Leser den vorliegenden Diskussionsbeiträgen in diesem Sinne folgt, wird er ihnen den größtmöglichen Nutzen abgewinnen.

Danken möchte der Herausgeber noch ausdrücklich der Wissenschaftlichen Gesellschaft des Saarlandes e.V., ohne deren erheblichen Druckkostenzuschuß die Veröffentlichung in der gegenwärtigen Situation des Verlagsgewerbes nicht möglich gewesen wäre.

Ebenso schuldet der Herausgeber Frau S. KLEDZIK, sowie den Herren Dr. D. GERHARDUS, B. PHILIPPI, M.A., und Dr. A. ROS Dank für ihre unentbehrliche Hilfe bei der Vorbereitung der Manuskripte für die Drucklegung einschließlich der Mühen des Korrekturlesens.

Dem Verlag Walter De Gruyter schließlich gebührt Dank sowohl für die Bereitwilligkeit, mit der er den zahlreichen Wünschen des Herausgebers entgegengekommen ist, wie für die dabei erwiesene Geduld.

Saarbrücken, im Herbst 1977

KUNO LORENZ

INHALT

Band I
Spezielle Wissenschaftstheorie

Mathematik

Logik

Physik

Band II

Allgemeine Wissenschaftstheorie

Zeichen- und handlungstheoretische Aspekte

Historisch-methodologische Aspekte

KUNO LORENZ

EINLEITUNG

Als Anfang der sechziger Jahre PAUL LORENZEN, von Kiel kommend, in Erlangen die philosophische Zusammenarbeit mit WILHELM KAMLAH als Paradigma einer auch in der gegenwärtigen Philosophie nicht nur wünschenswerten, sondern möglichen und ein Stück weit schließlich sogar wirklichen sachlichen Gemeinsamkeit jenseits der hergebrachten philosophischen Schulen begreifen wollte, ahnte niemand, daß damit der Grundstein wiederum einer philosophischen Schule, der heute sogenannten ›Erlanger Schule‹ gelegt würde.

Als zugehörige Programmschrift gilt der wissenschaftlichen Öffentlichkeit die von KAMLAH und LORENZEN gemeinsam verfaßte ‚Logische Propädeutik. Vorschule des vernünftigen Redens' (in der 2., verbesserten und erweiterten Auflage, Mannheim 1973, Einleitung und Kapitel I–VI von KAMLAH, Kapitel VII von LORENZEN), auch wenn für die dort schon angekündigte ›praktische Hauptschule‹ die beiden Autoren durchaus verschiedene Wege eingeschlagen haben [KAMLAH in seinem Buch ‚Philosophische Anthropologie. Sprachkritische Grundlegung und Ethik' (Mannheim 1972), LORENZEN in seinem mit O. SCHWEMMER verfaßten Band ‚Konstruktive Logik, Ethik und Wissenschaftstheorie' (Mannheim 1973, ^{2}1975)], so daß die Gemeinsamkeit einer sprachkritischen Haltung allein noch nicht über die Fortsetzung in einer sich ›konstruktiv‹ nennenden Wissenschaftstheorie entscheidet, die distinktiven Merkmale gegenüber den andernorts gegenwärtig vertretenen wissenschaftstheoretischen Methodologien und Teleologien im konkreten Fall daher jeweils erst aufgesucht werden müssen.

Es bedarf für jede Fragestellung einer Detailanalyse, um im Verfahren der Antwortfindung die in der zeitgenössischen Diskussion, auch innerhalb der ›Erlanger Schule‹, strittigen Punkte bestimmen zu können. Wenn gleichwohl im Titel dieser Veröffentlichung mit dem Ausdruck ‚Konstruktion' das Gegenüber zu einer ›Position‹ charakterisiert sein soll, so mag dies, billigt man großzügig eine grobe Vereinfachung, damit gestützt werden, daß für die Begründung von Behauptungen, den ›Positionen‹, in der konstruktiven Wissenschaftstheorie nicht wieder bloß auf Annahmen oder bereits Zugestandenes, also andere ›Positionen‹, zurückgegriffen wird, daß vielmehr geeignete Handlungen, die ›Konstruktionen‹, und seien es zuweilen auch nur Worterklärungen, den Aussagen, um deren Prüfung es geht, ›zugrunde liegen‹.

Die Zurückführung des theoretischen Geltungsproblems (die Frage nach dem ›Sein‹ *und* dem ›Sollen‹) auf technisches Können und praktisches Wollen ist für die Behandlung wissenschaftstheoretischer Fragestellungen in der konstruktiven Wissenschaftstheorie charakteristisch und verweist damit zugleich auf ihre große Nähe zum Pragmatismus in der ursprünglichen, an KANT und dem Common-Sensism orientierten Fassung bei C. S. PEIRCE.

Kein Wunder daher, daß die konstruktive Behandlung vieler Einzelfragen, etwa in den Grundlagen der Mathematik oder in den Grundlagen der Sozialwissenschaften, nur an wenigen Stellen von einer der gegenwärtig geübten Standardbehandlungen, etwa in der Beweistheorie oder in der Systemtheorie, abweicht, daß andererseits aber wiederum von denjenigen, die konstruktiv verfahren, eine Fülle untereinander streitiger Antwortversuche auf Einzelfragen vorgelegt werden, die es verbieten, in der konstruktiven Wissenschaftstheorie den Versuch eines philosophischen Systems zu sehen, gar noch mit HUGO DINGLER als modernem Stammvater. Vielmehr gilt die von WITTGENSTEIN im Vorwort seines *Tractatus* formulierte Zusammenfassung „Was sich überhaupt sagen läßt, läßt sich klar sagen; und wovon man nicht reden kann, darüber muß man schweigen", wird sie nicht, wie von WITTGENSTEIN seinerzeit beabsichtigt, auf die These, allein in den exakten Wissenschaften – Naturwissenschaften und Mathematik – ließe sich etwas sagen, beschränkt, als Richtschnur guter konstruktiver wie auch guter, sich nicht ausdrücklich im angegebenen Sinne ‚konstruktiv' nennender wissenschaftstheoretischer Arbeit.

Die nachfolgend zusammengestellten Beiträge konzentrieren sich auf gegenwärtig im Dialog der konstruktiven Wissenschaftstheorie mit anderen wissenschaftstheoretischen Ansätzen strittige Fragen, wobei solche allgemeiner Natur ebenso wie spezielle innerhalb der Grundlagen verschiedener Einzelwissenschaften zu etwa gleichen Teilen abgehandelt werden. Naturgemäß erlauben die speziellen Fragen eine höhere Genauigkeit in der begrifflichen und argumentativen Behandlung als die sich präzisem Zugriff regelmäßig wesentlich stärker entziehenden Fragen allgemeiner Art.

Deshalb stehen die Beiträge zur Speziellen Wissenschaftstheorie, gegliedert in die Abteilungen *Mathematik*, *Logik* und *Physik*, vornean und bilden den Inhalt von Band I; in Band II folgen dann, gegliedert in zwei Abteilungen: *zeichen- und handlungstheoretische Aspekte* sowie *historisch-methodologische Aspekte*, die Beiträge zur Allgemeinen Wissenschaftstheorie.

1. *Zur Diskussion um Logik, Semiotik und Linguistik*

Versucht man Herkunft und Folgen des in der *Logischen Propädeutik* skizzierten Programms einer methodisch vorgehenden Philosophie kritisch abzuschätzen, so ist zunächst zu bemerken, daß hier an eine philosophische

Tradition angeknüpft wird, die Philosophie und Wissenschaften nicht als getrennte Disziplinen versteht, sondern als Tätigkeiten, die ›nur‹ durch den Grad ihrer Differenzierung und die daraus folgende Beschränkung auf besondere Gegenstandsbereiche und dafür charakteristische Aussageformen unterschieden sind. Weder wird Philosophie als eine eigene ›Grund‹wissenschaft noch als eine ›Über‹- (oder ›Meta‹-)wissenschaft angesehen, die dann entweder nur wieder als – spekulativ verfahrende – Ontologie oder modisch als – empirisch orientierte – Wissenschaftswissenschaft auftreten kann.

Vielmehr artikuliert sich das philosophische Interesse an der besonderen Weise, wie wissenschaftliche Ansprüche, gleich welcher Art, erhoben und eingelöst werden können, und dabei sind die ausgesprochenen und unausgesprochenen Behauptungen darüber, was wissenschaftlichem Anspruch überhaupt zugänglich sein könne, ausdrücklich miteingeschlossen. Hinzu kommt der bewußte Einsatz des in den letzten hundert Jahren zunächst von der formalen Logik dann von der Analytischen Philosophie herausgebildete Werkzeug der logischen Analyse sprachlicher Ausdrücke für alle Fragen, die sich stellen, wenn das Phänomen der Entstehung einer wissenschaftlich fundierten Weltauffassung und einer vernünftig orientierten Lebensführung verständlich gemacht und das Maß seiner Berechtigung begründet werden soll.

Von daher war es naheliegend, erst einmal den Argumentationen zur Sicherung mit wissenschaftlichem Anspruch verbundener Behauptungen besondere Aufmerksamkeit zu schenken, und das hieß, die pragmatische Basis für logisches Schließen aufzusuchen. Diese Fragestellung führte zur Ausarbeitung der dialogischen Begründung der formalen Logik unter Einschluß der Modallogik und in ihrem Gefolge zu einer Wahrheitstheorie, die im gegenwärtigen Disput zwischen einem konsensorientierten und einem korrespondenzorientierten Wahrheitsbegriff – im Beitrag von ILTING thematisiert – zu vermitteln beansprucht.

Aus der Fülle daraus erwachsender Einzelfragen, die – systematisch – zum Beispiel die Art und Weise der Auszeichnung der intuitionistischen vor der klassischen Logik oder das Verständnis der Modalitäten, insbesondere bei zeitabhängigen Aussagen, und – historisch – zum Beispiel die adäquate Rekonstruktion von Lehrstücken der aristotelischen Logik oder das Verständnis der tarskischen Wahrheitsdefinition betreffen, sind in den Beiträgen der Abteilung *Logik* von v. WEIZSÄCKER, MURPHY, ROBINSON, BUHL, ANGELELLI und RAGGIO einige herausgegriffen und teils ganz speziell, teils in einem größeren Zusammenhang behandelt worden.

Probleme noch vor dem Aufbau der formalen Logik, nämlich bei der Frage nach der Verankerung der Dialogregeln in einer Argumentationspraxis, werden im Beitrag von KAMBARTEL erörtert, Probleme nach ihrem Aufbau, wenn es die Grundbegriffe einer Theorie der Wahrscheinlichkeit – allerdings noch ohne ihren Zusammenhang mit der Modallogik – zu bestimmen gilt, im Beitrag von MEDINA.

Es hat sich frühzeitig herausgestellt, daß die Konzentration auf Fragen des logischen Schließens für die Ausgangsfrage nach dem Aufbau, den Bedingungen und der praktischen Verankerung wissenschaftlicher Argumentationen, kurz: für die Lösung des theoretischen Geltungsproblems, eine Beschränkung darstellt, unter der die Herausbildung der wissenschaftlichen Leistungen aus der Alltagspraxis nicht zureichend verstanden werden kann.

So blieb insbesondere ungeklärt, wie sich die ja auch in den Wissenschaften verwendete reiche grammatische Struktur natürlicher Sprachen zu der durch relativ wenige Bausteine und eine einfache Syntax charakterisierten logischen Grammatik verhält; der von PAUL LORENZEN beschrittene Weg des Aufbaus einer methodisch von der natürlichen Sprache grundsätzlich unabhängigen ›Orthosprache‹ für wissenschaftliche Zwecke, also einer methodisch geordneten Sprache, die als begründete Metasprache für beliebige Disziplinen taugt, ist auch innerhalb der konstruktiven Wissenschaftstheorie umstritten, vermag er doch den argumentativen Status der gleichwohl für die Motivation der Schrittfolge in Anspruch genommenen üblichen Sprachmittel – das sind die intern ›Parasprache‹ und extern ›protreptische Sprache‹ genannten Hilfsmittel – nicht allgemein überzeugend anzugeben.

Es war daher fast zwangsläufig, daß sich auf der Grundlage des insbesondere von WILHELM KAMLAH ausführlich erläuterten und in seinem hier vorliegenden Beitrag noch einmal ausdrücklich an einem Anwendungsproblem explizierten Verständnis der Sprachhandlungen als schematischer Zeichenhandlungen eine Reihe von Arbeiten mit der Einbettung von Zeichenhandlungen in das allgemeine Geflecht menschlicher Handlungen und Handlungszusammenhänge befaßt hat und die Entstehung von Zeichen in einem anthropologischen Zusammenhang zu rekonstruieren versucht. Der Beitrag von GERHARDUS geht dabei der besonderen welterschließenden Rolle ästhetischer Zeichenhandlungen nach und hat dabei Berührungen mit den Schlußüberlegungen von HABERMAS.

Der sachlich enge, methodisch jedoch kontroverse Zusammenhang mit Thesen der Sprechakttheorie, in der von J. R. SEARLE vorgelegten Fassung, ist Gegenstand des Beitrags von SCHNEIDER. Von einem methodisch genau entgegengesetzten Standpunkt, unter voller Ausnutzung der formallogischen Hilfsmittel in der Metasprache, schlägt R. M. MARTIN in seinem Beitrag eine Erweiterung der üblichen logischen Grammatik um eine Logik der Präpositionen vor und versucht dabei, unter anderem in kritischer Auseinandersetzung mit LORENZEN, nachzuweisen, daß mindestens diese Erweiterung schon zur Verfügung stehen müsse – nämlich beim Verständnis der Verwendungsregeln für sprachliche Ausdrücke –, um die Orthosprache überhaupt funktionsfähig zu machen.

An dieser Stelle kristallisiert sich einer der wichtigsten gegenwärtigen Streitpunkte um das Programm der konstruktiven Wissenschaftstheorie, nämlich wie das Verhältnis von praktischen Sprachregeln zu ihrer theoretischen Beschreibung methodisch zu bestimmen sei.

Von der Antwort auf diese Frage nach dem umstrittenen Primat der Praxis vor der Theorie, oder, genauer noch: von der eine kontrollierbare Lösung erst möglich machenden sinnvollen Fragestellung zu diesem Problem, wird es abhängen, ob die Diskussion um die konstruktive Wissenschaftstheorie selbst zu einem Paradigma wissenschaftlichen Argumentierens sich entwickeln kann.

2. *Zur Diskussion um Pragmatik, Ethik, Wissenschaftsgeschichte und Methodologie*

Schon im Zusammenhang der Verhältnisbestimmung zwischen der Lehre von den Sprachhandlungen in der konstruktiven Wissenschaftstheorie und der zeitgenössischen Sprechakttheorie – gerade auch bei der zentralen, von SCHNEIDER erörterten Frage nach dem Status der Prädikation – ließ sich nicht ausklammern, daß herkömmlich ‚normativ' genannte Überlegungen eine entscheidende Rolle spielen. Der umfangreiche Beitrag von APEL dient vor allem einer Erörterung der fragwürdigen SEARLE'schen Behauptung über die Implizierbarkeit präskriptiver Sätze aus deskriptiven.

Handlungen, und also auch Sprachhandlungen, lassen sich nämlich in mindestens zweierlei Hinsicht betrachten, unter dem ›technischen‹ Gesichtspunkt des Könnens – hier kommen insbesondere die für die individuelle und soziale Erziehung erforderlichen Vermittlungsprozesse: Lehren und Lernen, in den Blick – und unter dem ›praktischen‹ Gesichtspunkt des Wollens – hier ist der Ausgangspunkt einer an Bedürfnissen und ihrer Befriedigung orientierten praktischen Philosophie. Dabei ist die mögliche gegenseitige Verständigung über Können und Wollen – unter dem Titel der ›kommunikativen Kompetenz‹ gegenwärtig intensiv diskutiert – in ihrer methodischen Stellung beim Aufbau der Ethik noch nicht hinreichend geklärt.

Besonders zwei Fragen sind es, die eine erhebliche Aufmerksamkeit beanspruchen: Zum einen geht es darum, ob die Anerkennung eines ›Vernunftprinzips‹ oder der ›Wille zur Vernunft‹, d.h. die Bereitschaft zu einer niemanden auszeichnenden gemeinsamen Beratung von Handlungsvorschlägen, als eine individuelle Entscheidung zu gelten hat, die selbst keiner Argumentation zugänglich oder bedürftig ist. Zum anderen geht es darum, ob der bisher in der konstruktiven Wissenschaftstheorie explizierte Begriff der praktischen Beratung, gerade weil damit der Gleichheitsgrundsatz schon in die Vorbedingungen eingeht, überhaupt von der die Vernünftigkeit gegenseitiger

Beziehungen offenbar einschränkenden, biologischen und sozialen Differenz der menschlichen Subjekte zureichend Kenntnis nehmen kann, die beanspruchte dialogische Vernunft wiederum nur eine – transzendental verkappte – monologische ist.

Betroffen sind von diesen beiden Fragen, die unter anderem und teilweise in einem erheblich verallgemeinerten Rahmen in den Beiträgen von APEL, HABERMAS, ILTING und SCHWEMMER behandelt werden, auch die Rekonstruktion von KANTS Kategorischem Imperativ – der Gegenstand von PATZIGS Studie – und das Verständnis von PLATONS Zurückweisung des Ideologieverdachts gegenüber dem Gleichheitsgrundsatz im Dialog *Gorgias* – Gegenstand des Beitrags von ZELTNER.

Der damit auch in der Diskussion um die konstruktive Wissenschaftstheorie lautgewordene Zweifel an der Reichweite der von Philosophie und Wissenschaft beanspruchten Vernunft hat zu grundsätzlichen methodologischen Stellungnahmen herausgefordert, die im Beitrag von WOHLRAPP zu einer an der Unterscheidung von ‚Forschung' und ‚Darstellung' orientierten Abgrenzung zwischen konstruktiver und analytischer Methode, im Beitrag von GLASER mit Hilfe von Rekonstruktionen hegelscher und marxscher Verfahren zu einer Abgrenzung zwischen konstruktiver und dialektischer Methode geführt haben, während KRÜGER in seinem Beitrag die Diskussion um die konstruktive Wissenschaftstheorie selbst einer methodischen Analyse unterzieht und dabei auf noch nicht zureichend verstandene Aspekte des Dialogprinzips für Verständigungsprozesse im Bereich theoretischer *und* praktischer Angelegenheiten aufmerksam macht.

Nimmt man jetzt hinzu, daß Verständigungsprozesse nicht nur als gegenwärtige Ereignisse, sondern langfristig in historischen Dimensionen sich abspielen, so entstehen neue Fragen, die unter dem Titel ‚Vernunft in der Geschichte' zu einer methodischen Rekonstruktion historischer Prozesse auffordern und gegenwärtig besonders bei der Untersuchung der den Wissenschaftswandel regierenden Faktoren im Zentrum des Interesses stehen.

Der Zusammenhang der faktischen Genese mit der von LORENZEN zum Zweck der Rekonstruktion als leitendes Prinzip vorgeschlagenen ›normativen Genese‹ von individuellen und institutionellen Handlungszusammenhängen – dabei noch ganz abgesehen vom ungelösten Problem der begründeten sprachlichen Repräsentation von Genesen – ist umstritten und in seiner Abhängigkeit von der den Wissenschaftsbegriff seit DILTHEY begleitenden Disjunktion zwischen verstehender – an Zielen orientierter – und erklärender – an Ursachen orientierter – Methode bislang nicht geklärt. Hier stellen die Beiträge von RIEDEL, MITTELSTRASS und GATZEMEIER Überlegungen zur Verfügung, mit denen in die Diskussion um die Vorschläge von WRIGHTS zur praktischen Begründung und um den modernen Historismus in der Wissenschaftsgeschichtsschreibung bei KUHN und FEYERABEND eingegriffen wird.

3. *Zur Diskussion um Mathematik und Physik*

Im besonderen Zusammenhang der Herausbildung der modernen strukturtheoretischen, an der axiomatischen Methode orientierten Mathematik versteht sich die konstruktive Wissenschaftstheorie als Erbin der ›genetischen‹ Methode in Arithmetik und Analysis. Mit den Mitteln der Kalkültheorie, ergänzt um die Verfahren der dialogischen Logik, wird ein Aufbau der Arithmetik und Analysis vorgeschlagen, der sich eignet, für die verschiedenen hierher gehörenden axiomatischen Strukturen konstruktive Modelle zu liefern, unabhängig von ihrer derzeit üblichen Interpretation innerhalb einer axiomatischen Mengenlehre.

Obgleich die Frage nach der Existenz eines konstruktiven Modells für die Mengenlehre selbst, sofern dafür nicht prädikativ eingeschränkte Systeme, z.B. die verzweigte Typentheorie, zugrundegelegt werden, noch immer offen ist, werden eine ganze Reihe spezieller metamathematischer Probleme im Umkreis der Grundlagen der klassischen Analysis gegenwärtig erfolgreich behandelt. Von besonderer Bedeutung für die Klärung der Reichweite ›konstruktiver‹ Verfahren jenseits der mittlerweile erfolgreich etablierten rekursiven Arithmetik und Analysis sind die Versuche zur Präzisierung des Begriffs ‚Prädikativität'. Hier macht FEFERMAN in seinem Beitrag einen ausführlich begründeten Vorschlag zur Formalisierung von ‚prädikativ' – zugleich mit dem Nachweis der Vollständigkeit und Konsistenz des aufgestellten Formalismus –, während KREISEL in Auseinandersetzung mit LORENZEN und unter Bezug auf das ursprüngliche HILBERT-Programm die Konsequenzen für die Frage der Rechtfertigung mathematischer Verfahren erörtert. Kurze Bemerkungen zu einem Problem der kombinatorischen Logik und zum Zusammenhang des Begründungsproblems in Objekt- und Metatheorie finden sich bei CURRY und N. M. MARTIN. Die konstruktive Behandlung der PERRONschen Integrationstheorie im Beitrag von ZAHN darf als Beispiel für die Verwendung der konstruktiven Methode innerhalb der klassischen Analysis gelten.

Die Besonderheit des Zahlbegriffs – in seiner Bildung und in seiner Verwendung – ist Gegenstand der den Konstruktionsprozeß für natürliche Zahlen kritisch würdigenden Beiträge von THIEL und MESCHKOWSKI. Von BERNAYS wird in einer grundsätzlichen Stellungnahme zum konstruktiven Programm in Arithmetik und Analysis zu bedenken gegeben, ob nicht erst die radikale Arithmetisierung der Analysis diejenigen Probleme geschaffen hat, die im Disput zwischen konstruktiver und axiomatischer Analysis zur Lösung anstehen; es ist noch nicht abzusehen, in welcher Weise die Anerkennung analytischer Grundbegriffe wie ‚stetig' etc. als von Hause aus geometrisch das Begründungsproblem der Mathematik entscheidend zu ändern vermag.

Das wird vor allem davon abhängen, welche Richtung die Diskussion um die Auszeichnung der euklidischen Geometrie vor den logisch-möglichen

Alternativen und vielleicht sogar von der empirisch-wirklichen Geometrie, sofern von dieser ein präziser Begriff sich wird bilden lassen, schließlich nimmt.

Einige der zahlreichen Probleme, die sich stellen, wenn der Vorschlag LORENZENS, die Grundbegriffe der Geometrie durch geeignete Homogenitätsprinzipien einzuführen, auf seine Tragfähigkeit hin überprüft werden soll, sind Gegenstand der Beiträge von LAUGWITZ, LENK und INHETVEEN. An dieser Stelle wird auch über die Art und Weise des Übergangs beziehungsweise des Zusammenhangs zwischen apriorischen – Selbsterzeugtes behandelnden – und empirischen – Aufgefundenes darstellenden – Theorien, insbesondere also über den Zusammenhang von Mathematik und Physik und damit über die Stellung einer ›Protophysik‹ entschieden.

Den Anspruch der Protophysik in ihren bislang ausgearbeiteten Teilen, insbesondere angesichts des noch ungelösten Problems ihrer Beziehung zur Relativitätstheorie, erörtern MITTELSTAEDT und A. KAMLAH in ihren Beiträgen, während JANICH hier einen neuen, Einwände gegen ältere Vorschläge berücksichtigenden vielversprechenden Versuch zur protophysikalischen Bestimmung des Begriffs der Masse unternimmt.

Die besondere, gegenwärtig intensiv diskutierte Frage nach einer möglichen Rückwirkung von der – empirisch fundierten – Quantentheorie auf die – apriorisch begriffene – Logik in Gestalt einer Quantenlogik schließlich ist Gegenstand des Beitrags von HÜBNER.

Damit ist der Anschluß an die weit ausgreifenden Überlegungen von WEIZSÄCKERS zum Verhältnis von Erkenntnistheorie, Logik, Mathematik und Physik gewonnen und der Argumentationszusammenhang aller Beiträge erneut sichtbar gemacht.

In der Fortsetzung der hier in einem repräsentativen Ausschnitt dokumentierten Diskussion um die konstruktive Wissenschaftstheorie wird sich entscheiden, in welchem Ausmaß die gegenwärtigen Streitpunkte sachlich fundiert und nicht bloß Ausdruck von Mißverständnissen aufgrund einer verschiedenen Sprachlogik der Argumentationspartner gewesen sind.

MATHEMATIK

PAUL BERNAYS

BEMERKUNGEN ZU LORENZEN'S STELLUNGNAHME IN DER PHILOSOPHIE DER MATHEMATIK

In seinen Überlegungen über die Grundlagen der Mathematik knüpft LORENZEN an die WEYL'sche Schrift ›Das Kontinuum‹ an. Hier polemisiert WEYL gegen die Anwendung der imprädikativen Verfahren[1] in der Analysis und schlägt einen deduktiven Rahmen für eine prädikative Analysis vor, welcher im Unterschied zu dem Verfahren in den ›Principia mathematica‹ keine Stufentheorie erfordert.

LORENZEN hat diese Gedanken weiter entwickelt und besonders in seinem Buche ›Differential und Integral‹ (1965) eine ansprechende Art der prädikativen Begründung der Analysis ohne Stufen-Unterscheidung vorgeführt[2].

Das hier angewandte regulative Prinzip besteht, kurz gesagt, darin, daß der Gebrauch des ›tertium non datur‹ für die Individuengattung der natürlichen Zahlen zugelassen wird – wie dieses auch in der genannten WEYL'schen Schrift geschieht –, während für die Gattungen der Funktionen und der Mengen die für den BROUWER'schen Intuitionismus charakteristischen Beschränkungen des logischen Operierens angewandt werden. Die hieraus resultierenden Einschränkungen gegenüber dem üblichen Verfahren der Analysis sind nur gering.

Die von LORENZEN verwendete Methodik für die Analysis steht in Zusammenhang mit seinen Gedanken zur Philosophie der Mathematik, die er in verschiedenen seiner Publikationen auseinandergesetzt hat. Eine besonders elementare, freilich nur kurze Darstellung seiner Gedanken bietet die Kieler Vorlesung ›Wie ist Philosophie der Mathematik möglich?‹.

Seine Kritik richtet sich hier insbesondere gegen die Verwendung des Aktual-Unendlichen. Diese sei, so erklärt er, »nur schwer mit der sonst grundsätzlich anerkannten instrumentalen Auffassung allen wissenschaftlichen Denkens zu vereinen.«

Diese instrumentale Auffassung ist aber schwerlich generell anerkannt und ist wohl auch nicht zutreffend. Die Wissenschaft ist eine geistige Erfahrung der Menschheit, und ihre Bedeutung erschöpft sich nicht darin, daß sie Mittel

[1] Imprädikativ nennt man die Kennzeichnung einer reellen Zahl mittels einer Bedingung, welche eine Bezugnahme auf die Gesamtheit der reellen Zahlen – in der Form eines Allsatzes oder Existenzsatzes – enthält.

[2] In seinem Buche ›Einführung in die operative Logik und Mathematik‹ (1955) verwendet LORENZEN zur Begründung der Analysis eine Art von Stufentheorie durch Konstruktion von ›Sprachschichten‹.

für die Erreichung von Zwecken liefert. Die Zwecke, die wir uns setzen, sind ja wesentlich mitbedingt durch die Vorstellungen, die wir von unserer Situation haben. Und diese Vorstellungen werden ja durch die Wissenschaft wesentlich beeinflußt.

LORENZEN betrachtet die instrumentale Auffassung insbesondere von der Mathematik als eine Auswirkung der KANTischen Philosophie. So erklärt er, bezüglich der Arithmetik habe KANT »die aus dem Hellenismus stammende Lehre, die auch von LEIBNIZ aufgenommen worden war, die Zahlen seien als Ideen Gedanken Gottes, zerstört. Seit KANT ist Gott kein Mathematiker mehr. Die Mathematik wird vielmehr . . . zu einem Instrument des endlichen Menschen.«

Hiervon ist aber nur ein Teil zutreffend. Nach KANT ist in der Tat die Mathematik etwas Menschliches, aber nicht ein Instrument des Menschen, sondern beruht auf einer Anlage des Menschen, an die er für alle wissenschaftliche Erkenntnis gebunden ist und durch welche sein Erkennen in gewisser Hinsicht beschränkt ist.

Für LORENZEN bildet jedoch die instrumentale Auffassung von der Wissenschaft nur ein beiläufiges Argument. Seine Erörterungen, in denen er insbesondere die »philosophische Bedingtheit der Mathematik« darlegt, sind von dieser Auffassung nur teilweise abhängig. Die drei Fälle, an denen er diese Bedingtheit bespricht, können wir auch hier für unsere Betrachtung zur Leitlinie des Gedankenganges nehmen. Es sind die folgenden, in der Grundlagendiskussion strittigen Momente:

1. Die Verwendung des ›tertium non datur‹ in der Arithmetik.
2. Die Verwendung des Begriffs der Potenzmenge.
3. Die Verwendung von Axiomensystemen, deren Widerspruchsfreiheit nicht bewiesen ist.

1. Wie man weiß, ist die Verwendung des ›tertium non datur‹ in bezug auf unendliche Gesamtheiten, insbesondere schon in der Arithmetik, von L. E. J. BROUWER angefochten worden, und zwar in der Form einer Opposition gegen das traditionelle logische Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten. Gegenüber dieser Opposition ist zu bemerken, daß sie ja auf einer Umdeutung der Negation beruht. BROUWER vermeidet die übliche Negation nicht-A, und nimmt stattdessen ›A ist absurd‹. Es ist dann klar, daß eine allgemeine Alternative ›Jede Aussage A ist wahr oder ist absurd‹ nicht berechtigt ist. Eine solche ist aber auch in der traditionellen Logik niemals aufgestellt worden. Daß man aber die gewöhnliche Negation tatsächlich braucht, zeigt sich insbesondere in den Argumentationen, in denen die Ablehnung des ›tertium non datur‹ motiviert wird. Da ist immer davon die Rede, daß man eventuell einen zahlentheoretischen Allsatz *nicht* beweisen kann, aber auch *nicht* ein Gegenbeispiel zur Verfügung hat, wobei man dann an Beispiele wie diejenigen des großen FERMAT'schen

Satzes oder des GOLDBACH'schen Satzes denkt. Hier ist aber das zweimalige *nicht* doch schwerlich im Sinne der Absurdität zu verstehen.

Man kann jedoch die Anfechtung des ›tertium non datur‹ in der Zahlentheorie auch ohne die Bestreitung des logischen Prinzips vom ausgeschlossenen Dritten motivieren, indem man darauf hinweist, daß die Vorstellung von der Gesamtheit der natürlichen Zahlen als einem scharf abgegrenzten Bereich eine Art von Extrapolation bildet. Was die anschauliche Zahlvorstellung uns liefert, ist doch nur ein *progressus in indefinitum*. Wir können von jeder Zahl zu einer noch weiteren fortschreiten und können auch durch die Rechenoperationen weitere Zahlen gewinnen; aber eine Überschau über alles so Resultierende ist uns, zum mindesten von der arithmetischen Vorstellung her, nicht gegeben. Die Vorstellung von der Zahlenreihe als einem mathematischen Gegenstand stellt somit eine begriffliche Extrapolation der arithmetisch anschaulichen Zahlvorstellung dar.

Mit dieser Feststellung ergibt sich aber nur, daß die Anwendung des ›tertium non datur‹ in der Arithmetik nicht etwas Selbstverständliches ist, nicht aber daß sie unberechtigt ist.

Eine Art der Rechtfertigung, die auch von LORENZEN gewürdigt wird, liegt vor in den beweistheoretischen Nachweisen der Widerspruchsfreiheit für die axiomatisierte Zahlentheorie, welche auf dem HILBERT'schen Gedanken beruhen, die Formalisierung des logischen Schließens, wie sie durch die symbolische Logik erfolgt, zu Nachweisen der Widerspruchsfreiheit zu verwerten, welche im Rahmen arithmetischer Anschaulichkeit vollzogen werden. Freilich hat sich gezeigt, daß man hierfür nicht mit so elementaren kombinatorischen Methoden auskommt, wie sie dem ›finiten Standpunkt‹ entsprechen, von dem aus HILBERT ursprünglich die Beweistheorie auszuführen gedachte, daß vielmehr Erweiterungen des finiten Standpunktes, d.h. verstärkte Methoden der konstruktiven Mathematik erforderlich sind. Andrerseits gehen aber auch die Ergebnisse solcher Widerspruchsfreiheitsbeweise über den Bereich der Zahlentheorie hinaus. Ein Widerspruchsfreiheitsbeweis dieser Art wurde auch von LORENZEN geliefert.

Es ist übrigens zu bemerken, daß für die elementare Zahlentheorie die Anwendung des ›tertium non datur‹ nicht erforderlich ist. Die typisch zahlentheoretischen Beweise lassen sich im Rahmen des finiten Standpunktes führen. So sagt auch GENTZEN einmal in seiner Abhandlung ›Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie‹ (Mathematische Annalen, Bd. 112, Heft 4 (1936), Ende des III. Abschnitts): »Die Aufgabe des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie ist also mehr eine Begründung von an sich möglichen als von wirklich vorkommenden Schlüssen.« Freilich ist zu beachten, daß die betreffenden Schlußweisen, d.h. die Anwendungen des ›tertium non datur‹ in bezug auf die natürlichen Zahlen, zwar nicht in der reinen Zahlentheorie, wohl aber in der Analysis wesentlich erfordert werden.

2. In der Kritik des Begriffes der Potenzmenge geht LORENZEN von der prädikatenlogischen Einführung der Mengen aus. Die Prädikate denkt er sich durch symbolische Formeln dargestellt. Von den Prädikaten kann man ja zu den Mengen durch den Abstraktionsprozeß übergehen, welcher umfangsgleichen Prädikaten dieselbe Menge zuordnet. Die Schwierigkeit für die Bildung der Potenzmenge von einer Menge M, d. h. der Menge aller Teilmengen von M, sieht nun LORENZEN darin, daß die Gesamtheit aller möglichen Formeln, welche Prädikate von Elementen von M ausdrücken, vorausgesetzt wird. Nach LORENZEN macht die Mathematik bei der Verwendung der Potenzmenge implizite die Voraussetzung, daß die Gesamtheit ihrer sprachlichen Mittel unabhängig von uns eindeutig abgegrenzt sei.

Diese Betrachtungsweise entspricht aber gar nicht der üblichen Auffassung von der Potenzmenge. Nehmen wir etwa als Menge M die Menge der Punkte innerhalb eines Kreises, so wird ja deren Potenzmenge nicht als eine Mannigfaltigkeit von Formeln gedacht, sondern als eine solche von Punktmengen. Daß wir für jede von diesen Punktmengen einzeln eine Definition haben, wird keineswegs vorausgesetzt.

Die im Operieren mit der Potenzmenge verwendete Vorstellung, daß die Teilmengen einer Menge M in ihrer Gesamtheit ein mathematisches Objekt bilden, ist freilich nicht ohne weiteres mit dem Begriff der Teilmenge, der seinerseits unproblematisch ist, gegeben, und erst recht ist es nicht etwas Selbstverständliches, wenn der Übergang von einer Menge zu ihrer Potenzmenge wie eine simple, beliebig iterierbare Operation, analog etwa zu derjenigen des Übergangs von einer Zahl zur nächsten, betrachtet wird.

Die Möglichkeit eines Zählens über das Unendliche der Zahlenreihe hinaus hat freilich CANTOR aufgezeigt. Damit aber kommt man nicht zu der Potenzmenge der Zahlenreihe, sondern zu den Ordnungszahlen der zweiten Zahlenklasse. Bei der Bildung der Potenzmenge der Zahlenreihe wird dagegen der Schritt vollzogen von der Unendlichkeit des Abzählbaren zur Unendlichkeit des Kontinuums. Die Vorstellung des Kontinuums ist zunächst ja eine geometrische Idee, wie wir sie aus den räumlichen (den eindimensionalen und den mehrdimensionalen) Mannigfaltigkeiten gewinnen. Im mathematischen Gebrauch wird das Kontinuum ja vor allem repräsentiert durch die Mannigfaltigkeit der reellen Zahlen.

Der übliche Allgemeinbegriff der reellen Zahl wird aber von den Kritikern der Analysis, und insbesondere auch von LORENZEN beanstandet. Diese Kritik richtet sich im Grunde dagegen, daß durch den Begriff der reellen Zahl keine restlose Arithmetisierung der geometrischen Vorstellungen geliefert wird. Es ist jedoch die Frage, ob eine restlose Arithmetisierung tatsächlich erfordert wird.

Zur Erörterung dessen können wir an den methodischen Gedanken der analytischen Geometrie anknüpfen. In dieser werden ja die geometrischen

Größen auf Zahlgrößen zurückgeführt. Die Vorstellung von der Zahlgröße ist aber hierbei nicht strikt arithmetisch, sie ist vielmehr nur diejenige einer Maßgröße, d.h. einer Größe von der Dimension Null: die Maßzahl ist das Verhältnis einer Größe zu einer gewählten Einheitsgröße der gleichen Art. Der Sinn der Einführung dieser Verhältnisgrößen liegt ja darin, daß man sich unabhängig macht von der Verschiedenheit der Größenarten. So dienen die Maßzahlen gleichermaßen zur Kennzeichnung von Längengrößen, Flächengrößen, Volumina, usw.:

Zu den Größen einer Größenart gehören insbesondere diejenigen, die in einem ganzzahligen Verhältnis zu der Einheitsgröße stehen und für welche die Maßzahl entweder eine natürliche Zahl oder eine Bruchzahl ist. Könnten wir uns auf solche Größen beschränken, so wäre eine strikte Arithmetisierung der Größenlehre ganz unproblematisch. Wie wir wissen, ist das nicht der Fall; jedoch besteht eine Art von Ersatz dafür, sofern für die Größen – wie es in der Geometrie und auch in der Physik im allgemeinen geschieht – die Gültigkeit des eudoxisch-archimedischen Postulates vorausgesetzt wird, wonach von zwei Größen der betrachteten Größenart eine jede durch ein ganzzahliges Vielfaches der anderen übertroffen wird. Aufgrund dieser Voraussetzung für eine Größenart ergibt sich, daß jede Größe c dieser Art eindeutig bestimmt ist durch die Gesamtheit derjenigen Brüche $\frac{m}{n}$, für welche das m-fache der Einheitsgröße kleiner ist als das n-fache von c. Eine solche Gesamtheit hat die bekannten Eigenschaften[3] eines ›DEDEKIND'schen Schnittes‹. Als Maßzahlen können wir somit die Mengen von Brüchen nehmen, welche diese Eigenschaften besitzen.

Wie steht es nun hierbei mit der Arithmetisierung?
Man könnte denken, sie sei vollständig erreicht, da die Maßzahlen durch Mengen von Brüchen gebildet werden. Aber die Forderung einer strikten Arithmetisierung kann weitergehen, indem man verlangt, daß die Definition eines jeden Schnittes arithmetisch sei, d.h. frei von einer Bezugnahme auf eine durch den Schnitt zu kennzeichnende Größe.

Eine solche independent arithmetische Definition von Schnitten ist nun zwar in der Tat bei den geläufigen Gebrauchsfällen möglich. So besteht ja die Maßzahl für die Länge der Diagonalen des Einheitsquadrates aus der Menge derjenigen Brüche $\frac{m}{n}$ für welche m^2 kleiner ist als $2n^2$, und für die Maßzahl π der Fläche eines Kreises mit der Einheitslänge als Radius hat man etliche

[3] Die Eigenschaften sind:

a) Wenn ein Bruch dazugehört, dann auch jeder gleichgroße und jeder kleinere Bruch.

b) Zu jedem zugehörigen Bruch gibt es einen größeren zugehörigen.

c) Mindestens ein Bruch gehört dazu, aber nicht jeder Bruch.

Rechenausdrücke, aus deren jedem sich eine arithmetische Definition des zu π gehörigen Schnittes (d.h. der Menge der Brüche, die kleiner als π sind) entnehmen läßt. Aber einen allgemeinen Beweis dafür, daß jeder Schnitt sich independent arithmetisch definieren läßt, besitzt man nicht.

Wenn man nun daraufhin, um eine strikte Arithmetisierung der Größenlehre zu erzwingen, die als Maßzahlen dienenden Mengen von Brüchen (Schnitte) auf solche beschränkt, die sich independent arithmetisch definieren lassen, so hat man zunächst die Schwierigkeit, daß der Bereich der möglichen arithmetischen Definitionen von Schnitten nicht deutlich abgegrenzt ist. Diesem Umstande, auf den ja auch LORENZEN, wie schon erwähnt, hinweist, kann man dadurch begegnen, daß man eine bestimmte Art der Abgrenzung der Begriffsbildungen trifft, die eventuell anhand der symbolischen Logik präzisiert werden kann.

Solche Abgrenzungen sind tatsächlich, und zwar unter verschiedenen methodischen Gesichtspunkten, ausgeführt worden. Es ergeben sich auf diese Weise verschiedene, mehr oder minder einschränkende Behandlungsweisen der Analysis. Diese haben alle ihr mathematisches Interesse als arithmetische Disziplinen. Jedoch besteht keine Gewähr dafür, daß auf solche Weise die Struktur des Kontinuums angemessen dargestellt wird. Hierfür kommt es auf die Gesamtheit der Schnitte, nicht auf die einzelnen Definitionen an. Die Mannigfaltigkeit der einzelnen, in einem abgegrenzten Rahmen möglichen Definitionen von Schnitten, ist ja gar nicht notwendig dem Kontinuum isomorph.

Wir können uns aber diesen Schwierigkeiten entziehen. Wir brauchen die Kennzeichnung der Maßzahlen durch Schnitte nicht im Sinne einer restlosen Zurückführung auf die Zahlentheorie aufzufassen, sondern können hier die Anwendung eines intuitiven Mengenbegriffes als etwas methodisch Zusätzliches gelten lassen[4].

Die Anwendung des Mengenbegriffes hat in mehrfacher Weise zu erfolgen, indem man zunächst, zur Gewinnung des Allgemeinbegriffes der Maßzahl, den Begriff eines Schnittes bildet als einer Teilmenge von der Menge der Brüche mit den erwähnten Schnitteigenschaften. Für die Gewinnung der *Menge* der Maßzahlen braucht man dann die Potenzmenge der Zahlenreihe, von der man mittels der Numerierbarkeit (Abzählbarkeit) der Brüche zur Potenzmenge von der Menge der Brüche übergeht und aus dieser dann, durch Verwendung der charakterisierenden Eigenschaften des Schnittes, eine geeignete Aussonderung vollzieht. Von der Menge der Maßzahlen gelangt man dann in

[4] Die hier für die DEDEKIND'sche Methode der Darstellung der Maßzahlen durch Schnitte angestellte Überlegung läßt sich mit entsprechenden Modifikationen für die Darstellung der Maßzahlen, nach CANTOR, durch ›Fundamentalreihen‹, d.h. konvergente (nach LORENZENS Bezeichnung: konzentrierte) Folgen von Brüchen, oder auch für die Darstellung durch unendliche Dezimalbrüche durchführen.

üblicher Weise zur Menge der reellen Zahlen, welche wir als eine quasiarithmetische Repräsentation der Menge der Punkte einer Geraden – man spricht von der ›Zahlengeraden‹ – ansehen können.

Für die hier wesentliche Einführung der Potenzmenge der Zahlenreihe braucht man sich nicht unbedingt auf ein allgemeines Potenzmengenaxiom zu berufen, sondern kann die Postulierung dieser speziellen Potenzmenge als durch unsere geometrische Vorstellung des Kontinuums motiviert ansehen, welche durch die Potenzmengenbildung in Verbindung gebracht wird mit unseren elementaren Zahlvorstellungen.

3. Wenden wir uns nun zur Erörterung der Axiomatik. LORENZEN spricht mit Kritik von der ›totalen Axiomatik‹, d. h. der Axiomatik als genereller Methode der Mathematik, wonach man in einer Theorie jeweils von einem System von Begriffen und Sätzen ausgeht, welche ohne weiteres als Grundlage für die Beweise genommen werden, d. h. ohne daß man sich um eine erkenntnistheoretische Rechtfertigung bemüht.

Ein Beispiel einer *motivierten* Axiomatik gibt LORENZEN in seiner Abhandlung ›Das Begründungsproblem der Geometrie als Wissenschaft der räumlichen Ordnung‹ (Philosophia naturalis, Bd. 6, Heft 4, 1961). In dieser entwickelt er, unter Anknüpfung an Gedanken von HUGO DINGLER, eine Methode der axiomatischen Begründung der EUKLIDischen Geometrie, welche von vornherein von der Raumgeometrie ausgeht, und bei welcher die leitende Idee ist, die Begriffe der Ebene, der Orthogonalität und der Parallelität durch Bedingungen der *Homogenität* zu charakterisieren, welche sich formal durch Formelschemata ausdrücken lassen. Das Schema der Parallelität (Parallelität von Ebenen) z. B. besagt, daß wenn P ein Punkt auf einer Geraden h in der Ebene E_1 und P' ein Punkt auf einer Geraden h', gleichfalls in E_1 ist, und wenn E_1 parallel zu der Ebene E_2 ist, dann jede zutreffende Aussage über P, h und E_1, E_2 – (sie darf keine weiteren freien Parameter enthalten) – gleichermaßen für P', h', E_1, E_2 zutrifft. – Der Begriff der Kongruenz wird nicht als Grundbegriff eingeführt, sondern ist hier ein definierter Begriff.

Diese Art der Axiomatisierung der Geometrie, mit Hilfe von Bedingungen der Homogenität, ist gewiß sehr gewinnend und ihre theoretische Verfolgung sehr lohnend. Überdies ist die Abhandlung in grundsätzlicher Hinsicht bedeutsam. Sie bedeutet zunächst eine Loslösung von der (von LORENZEN selbst anderenorts befürworteten) bloß instrumentalen Auffassung von der Wissenschaft. Außerdem aber wird hier dem geometrischen Denken ein Eigenrecht zuerkannt, im Gegensatz zu der heute verbreiteten Tendenz, die spezifische Rolle des Geometrischen aus der Mathematik und überhaupt aus der Wissenschaft zu eliminieren.

LORENZEN wendet sich mit Recht gegen die Aufspaltung der Geometrie in eine physikalische und eine bloß formal-abstrakte Theorie. Auf diese Weise wird in der Tat das spezifisch Geometrische ignoriert. Die Tendenz hierzu erklärt sich wohl, mindestens zum Teil, daraus, daß man den Schwierigkeiten einer angemessenen Charakterisierung der geometrischen Anschauung zu entgehen sucht. Was die Lehre KANTS von der reinen Anschauung betrifft, so weist LORENZEN darauf hin, daß diese nicht in einer für eine Begründung der Geometrie ausreichenden Weise durchgeführt ist[5]. Er findet eine Direktive für eine Begründung der Geometrie in den Gedanken HUGO DINGLERS, jedoch schließt er sich diesem nicht restlos an.

Bei DINGLERS Begründung der Geometrie steht die Frage der konkreten Realisierung der geometrischen Grundbegriffe im Vordergrund. LORENZEN dagegen erklärt, daß für seine Begründung der Geometrie die Frage nach der Realisierung »nur zur Verdeutlichung der homogenen Grundformen dienen« soll. So sagt er auch: »... jede Realisierung in einem Material wird ... immer unvollkommen sein. Der Geometer blickt – im Sinne PLATONS gesprochen – nicht auf die Realisierung im Material, sondern auf die Idee selbst, auf die reine Form. Erst durch das Wissen um die Homogenität wird die Anschauung realisierter Formen zu einer reinen Anschauung. Nur das Auge des Geistes ist dieser reinen Anschauung fähig.«

Diese Formulierung ist teilweise der Auffassung PLATONS, teilweise derjenigen von KANT angepaßt. Der intendierte Sachverhalt ist jedenfalls kompliziert. In dem, was wir geometrische Anschauung nennen, findet ein Zusammenspiel von Sensuellem und Geistigem statt, dessen genauere Modalitäten wohl kaum schon endgültig erforscht sind[6].

Die Komplikation des Sachverhaltes besteht unter anderem darin, daß verschiedene Schichten der Anschaulichkeit zu unterscheiden sind. Das Erfassen der topologischen Beziehungen ist fundamentaler als das der metrischen Verhältnisse.

LORENZEN behandelt die topologischen Relationen in der genannten Abhandlung etwas stiefmütterlich. Er erwähnt Beispiele von Zwischenaxiomen (Axiome für die Beziehung ›Die Ebene E liegt zwischen den Punkten P und Q‹) und fährt dann fort: »Solche topologischen Axiome sind für das Problem der

[5] Charakteristisch hierfür ist, daß KANT sich mit der Frage des Parallelenaxioms, die zu seiner Zeit schon lebhaft diskutiert wurde, anscheinend nicht beschäftigt hat; er hat dazu gar nicht Stellung genommen. Man kann darum aber auch nicht sagen, daß durch die Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrie eine Behauptung von KANT widerlegt wurde.

[6] Einen erheblichen Beitrag zu dieser Forschung bilden die von JEAN PIAGET angestellten Untersuchungen über die Entwicklung der räumlichen Vorstellungen beim heranwachsenden Menschen.

Apriorität der Geometrie nicht entscheidend, weil niemand im Ernst behaupten wird, sie seien Urteile a posteriori, d. h. sie seien evtl. durch Erfahrung, insbesondere durch physikalische Messungen, widerlegbar.« Hierzu mag man bemerken, daß doch die Messungen letztlich auf Feststellungen von Zwischenbeziehungen hinauskommen, wobei die Gesetze der Zwischenbeziehung als etwas sozusagen Selbstverständliches genommen werden. Die topologischen Begriffe sind gewissermaßen *vorgängig* gegenüber denjenigen des Metrischen, ebenso aber auch gegenüber den Begriffen der Ebene, der Orthogonalität und der Parallelität.

Ein solcher Begriff des Vorgängigen ist anspruchsloser und weniger problematisch als derjenige des Apriorischen. Wenn man sich zu diesem anspruchsloseren Begriff versteht, so wird das Problem der Apriorität der Geometrie ersetzt durch dasjenige der Erforschung des erkenntnistheoretischen Status der Geometrie. Wir müssen in Betracht ziehen, daß eine strikte Alternative von a priori und a posteriori eventuell gar nicht angemessen ist, daß wir vielmehr Anlaß haben, von *geistiger Erfahrung* zu sprechen, insofern nämlich auch im Gebiete des theoretischen Denkens das Probieren eine wesentliche Rolle spielt[7].

Zu der Komplikation im Erkenntnistheoretischen kommt diejenige des Axiomatischen; sie besteht in der großen Mannigfaltigkeit der Möglichkeiten für eine axiomatische Begründung der Geometrie. Eine solche kann unter sehr verschiedenen Leitgedanken erfolgen. Doch selbst wenn, wie bei LORENZEN, der Gesichtspunkt der Homogenität als Leitgedanke genommen wird, so ist damit keineswegs schon eine bestimmte Axiomatisierung der Geometrie festgelegt: weder in bezug auf die Wahl der Grundobjekte noch auf die der Grundbeziehungen und der Axiome.

Im übrigen ist ja die Axiomatik nicht auf die Geometrie beschränkt. Wir waren (im Abschnitt 3) ausgegangen von der Betrachtung der Axiomatik im allgemeinen und der Kritik, die LORENZEN an der ›totalen Axiomatik‹ übt.

Vergegenwärtigen wir uns das Typische des axiomatischen Verfahrens. Seine Anwendung kommt allenthalben da in Betracht, wo in einem Forschungsgebiet eine Reichhaltigkeit von Beziehungen vorliegt und Aussicht besteht, durch eine schematische Fixierung des Gegenstandsbereiches sowie von Sätzen über diesen, die als zugestanden angesetzt werden, eine präzisere deduktive Behandlung zu ermöglichen. Eine Verschärfung des axiomatischen

[7] Bei der hiernach sich ergebenden Ansicht bleibt die Anerkennung des Elementes des Schöpferischen im Erkenntnisprozeß erhalten, nur wird dieses nicht als eine von vornherein fest gegebene Erkenntnis angenommen, sondern als eine reaktiv auf empirische Anregungen erfolgende Bildung von Vorstellungen und Begriffen, die auch der Wandlung unterworfen sein können. Für das einzelne Individuum ist freilich vieles schon durch die Erbanlage bestimmt.

Verfahrens besteht darin, daß das Axiomensystem so angelegt wird, daß man in den Beweisen von der Bedeutung der Grundbegriffe der Theorie abstrahieren kann. Neuerdings geht man ja in dieser Richtung noch einen Schritt weiter, indem man mittels der logischen Symbolik noch das Deduzieren formalisiert. Eine Art von Umkehrung dieses Verfahrens findet in der Semantik statt, wo man Interpretationen (Modelle) formalisierter Axiomensysteme aufsucht.

Der methodische Sinn einer Axiomatisierung der ursprünglichen Art liegt in der deutlicheren Fixierung eines Erkenntnisstandes oder eines Programmes hinsichtlich einer Theorie. Durch das Axiomensystem wird eine Struktur der betrachteten Gegenständlichkeit beschrieben. Bei der verschärften Form der Axiomatik wird von der Gegenständlichkeit abstrahiert und nur die formale Struktur festgehalten.

In der Mathematik betreibt man auch eine etwas andere Art der Axiomatik. Man untersucht direkt Komplexe von Strukturbedingungen im Hinblick auf mögliche Verwendungen in Theorien. Ein solcher Komplex von Strukturbedingungen ergibt eine *explizite Definition* eines Strukturbegriffes (eines Begriffes der ›zweiten Stufe‹, im Sinne der symbolischen Logik). So liefern die Axiome der Gruppentheorie die Definition des Begriffes der ›Gruppe‹, die Axiome der Verbandstheorie die Definition dessen, was man einen ›Verband‹ nennt. Solche Definitionen sind nicht implizite, sondern explizite Definitionen.

Die Rolle der Axiomatik ist jedoch nicht immer die, daß sie der Konstituierung einer Theorie dient; Axiomatisierungen erfolgen auch für bereits entwickelte Theorien, ja dieser Fall ist sogar in der Mathematik der vorherrschende. Schon bei den Griechen hat ja die geometrische Forschung nicht mit dem Werk von EUKLID begonnen; es wurde durch dieses vielmehr eine bestimmte Systematik des Beweisens geschaffen. Die Zahlentheorie, die durch GAUSS, JACOBI, DIRICHLET und andere schon weit entwickelt war, wurde erst viel später durch DEDEKIND und PEANO axiomatisiert. Und für die durch CANTOR geschaffene und ausgebildete Mengenlehre wurde erst danach von ZERMELO ein Axiomensystem aufgestellt.

Ein wesentlicher Aspekt der Axiomatik, der insbesondere bei DEDEKIND hervortritt, ist der, daß durch eine geeignete Axiomatik das rein Strukturelle fixiert wird, dasjenige was LORENZEN an einer zuvor zitierten Stelle die ›reine Form‹ genannt hat. Solche reinen Formen kommen durch die Idealisierungen zustande. Nicht nur für die Geometrie, auch für die Zahlentheorie und für die Analysis gibt es solche reinen Formen. Unter diesem Aspekt ist es unangemessen zu fragen, was die natürlichen Zahlen bzw. was die reellen Zahlen sind. Man kann hier zur Antwort nur sagen, daß die natürlichen Zahlen und entsprechend die reellen Zahlen die Individuen je einer bestimmten Struktur sind und diese Struktur dann axiomatisch beschreiben.

Neben der beschreibenden Axiomatik steht die Gebrauchsaxiomatik, die nicht eine reine Form kennzeichnet, sondern die Verfahrensweisen einer nach Regeln des Vorgehens abgegrenzten Theorie festlegt.

LORENZEN stellt der axiomatischen Mathematik die operative Mathematik gegenüber. Diese Entgegensetzung ist aber leicht mißverständlich. Einmal gibt es doch operative Axiomatik; z.B. eine Hauptgattung der Axiome EUKLIDS, die αἰτήματα, handeln zumeist von Konstruktionen. Sodann ist dasjenige, was an die Stelle des axiomatischen Verfahrens tritt, nicht notwendig operativ. So kann die operative Kennzeichnung der natürlichen Zahlen durch ein Erzeugungsverfahren für gewisse Figuren ja auch ersetzt werden durch eine anschauliche Beschreibung dieser Figuren. Durch beide Methoden wird das gleiche bewirkt, nämlich eine Normierung des Gegenstandsbereichs der Theorie, welche der Aufstellung eines anschaulichen Modells für die intendierte Struktur gleichkommt, und zugleich auch die Einstellung auf jene elementare Methodik, die HILBERT als den finiten Standpunkt bezeichnete.

Für die Behandlung der elementaren Zahlentheorie ist die Beschränkung auf die finiten Methoden natürlich und angemessen. Jedoch, diesen methodischen Standpunkt, oder den etwas erweiterten des Intuitionismus, auch für die Theorien des Kontinuierlichen und überhaupt für die gesamte Mathematik als verbindlich zu fordern, dieses wäre nur dann berechtigt, wenn wir für die Mathematik keine anderen intuitiven Ausgangspunkte zur Verfügung hätten als das von BROUWER als ›Urintuition‹ bezeichnete Element der Anschaulichkeit. Tatsächlich bilden doch auch unsere Vorstellungen vom Kontinuierlichen, diejenigen von Kurven und Flächen, die des Sich-Schneidens, der Berührung, der Projektion, usw., alle diese geometrischen Vorstellungen Elemente des mathematisch Intuitiven.

Dieses wird wohl zugegeben, jedoch man meint, daß die anschaulich geometrischen Vorstellungen zwar für das mathematische Forschen heuristisch wertvoll, jedoch für die endgültige Darstellung der mathematischen Theorien grundsätzlich entbehrlich seien, da sie durch die Methoden der Algebra und die Theorie der reellen Zahlen eliminiert würden. Wir haben uns jedoch klargemacht, daß in der Theorie der reellen Zahlen keine restlose Arithmetisierung stattfindet, daß vielmehr hierbei die Mengenlehre die Rolle eines Vermittlers zwischen den geometrischen und den arithmetischen Vorstellungen übernimmt. Die Algebra andererseits ist gegenüber dem Unterschied des Geometrischen vom Arithmetischen gewissermaßen neutral.

Die hiermit sich ergebende Auffassung ist, daß die Heranziehung der Mengenlehre für die Begründung der Theorie der reellen Zahlen geometrisch motiviert ist. Die idealisierende Vorstellung ist dabei diejenige, daß die Maßzahlen der Strecken durch unbegrenzt verfeinerte Messungen bestimmt werden. Man kann übrigens sich auch die Messungen – wie es bei den HILBERT'schen

Streckenrechnungen geschieht – durch geometrische Konstruktionen ersetzt denken.

Wenn dem Verfahren der üblichen Analysis Imprädikativität vorgeworfen wird, so beruht das darauf, daß man sich für die Theorie der reellen Zahlen nicht auf die Art der Idealisierung einlassen will, welche in der Vorstellung der Repräsentation des Kontinuums durch die ›Zahlengerade‹ liegt. Im Sinne dieser Idealisierung bilden die reellen Zahlen ein Kontinuum, welches demjenigen der Punkte einer Geraden isomorph ist. Denkt man sich dagegen die reellen Zahlen repräsentiert durch Definitionsformeln für Mengen bzw. für Folgen von Brüchen (oder von rationalen Zahlen), Definitionsformeln in einer formalen Sprache, so bilden diese – darin ist gewiß LORENZEN zuzustimmen – nur eine indefinite Gesamtheit. Eine solche ist aber zur Repräsentation des Kontinuums nicht geeignet.

Die Kritiker der klassischen Analysis fordern eine verstärkte Arithmetisierung der Analysis. Es ist aber doch möglich, die klassische Analysis im Sinne einer engeren Verschmelzung von Geometrie und Arithmetik aufzufassen, welche ebensogut eine Einheit der Theorie ergibt wie eine restlose Arithmetisierung. Diese Verschmelzung von Geometrie und Arithmetik wird gewonnen durch eine Quasi-Arithmetisierung der Geometrie, wobei, wie schon gesagt wurde, die Mengentheorie eine vermittelnde Rolle hat.

Die Geometrie geht ja über dasjenige, was in den Axiomensystemen der EUKLIDischen Geometrie axiomatisiert wird, in den Gebieten der Differentialgeometrie und der Topologie weit hinaus. Es erscheint nicht als angemessen, die Geometrie einfach als Anwendungsgebiet der Arithmetik zu betrachten, entsprechend wie eine außerhalb der Mathematik liegende Theorie.

Es ist ein großer Bereich von Theorien, der durch die Vereinigung von Arithmetik und Geometrie umfaßt wird. Er enthält zunächst die elementare und die algebraische Zahlentheorie, dann die Analysis und die analytische Zahlentheorie; sodann die analytische Geometrie, die projektive Geometrie, die algebraische Geometrie sowie die Differentialgeometrie; ferner auch die algebraische und die mengentheoretische Topologie.

Teilweise methodisch abgesondert von den genannten Theorien, teilweise aber auch mit ihnen sich überschneidend, sind die Theorien der reinen Algebra, insbesondere die Gruppentheorie, die Verbandstheorie und die Theorie der BOOLE'schen Algebra, welche einen hypothetischen Charakter haben und eine jede von einer Axiomatik jener zuvor erwähnten Art ausgeht, durch die je ein Komplex von Strukturbedingungen in eine explizite Definition eines Begriffes der zweiten Stufe zusammengefaßt und der deduktiven Behandlung unterworfen wird.

Was die Mengenlehre betrifft, so ist sie in den bisher genannten Bereichen noch nicht in vollem Umfang, wenigstens nicht notwendigerweise, eingeschlossen. Es läßt sich in einer deutlichen Weise derjenige Teil der Mengenlehre, der methodisch über die klassische Analysis hinausgeht, absondern.

Überlegen wir, was hier das methodisch Weitergehende ausmacht. Dieses Weitergehende besteht nicht schon in dem Aktual-Unendlichen noch auch im Überabzählbaren. Das Aktual-Unendliche haben wir bereits in der geläufigen Auffassung der Analysis, z. B. schon bei dem Punktgitter in der Ebene, gebildet von den Punkten mit ganzzahligen Koordinaten. LORENZEN vermeidet in seiner Begründung der Analysis das Aktual-Unendliche; aber seine Behandlung der Geometrie mit der Auffassung der Ebene als eines homogenen Gebildes legt die Vorstellung des Aktual-Unendlichen zum mindesten nahe. Auch das Überabzählbare ist der üblichen Auffassung der Analysis angemessen, wenigstens sofern diese eine Theorie des Kontinuums enthalten soll. Der Unterschied des Überabzählbaren vom Abzählbaren entspricht ja in befriedigender Weise demjenigen des Kontinuierlichen vom Diskreten.

Die Überschreitung der Analysis durch die Mengenlehre besteht auch nicht in der Anwendung des Auswahlaxioms. Das Auswahlaxiom kommt bei verschiedenen Beweisen der Analysis zur Verwendung, z. B. wenn man zeigen will, daß für die obere Grenze g einer beschränkten (nicht notwendig stetigen) einstelligen reellen Funktion eine Folge von Argument-Werten $x_1, x_2, \ldots$ existiert, derart daß die Folge der Funktionswerte $f(x_1), f(x_2), \ldots$ dem Werte g zustrebt. Auch sind diese Anwendungen durchaus anschaulich.

Der Eindruck, daß das Auswahlaxiom über die Analysis hinausführe, ist dadurch erweckt worden, daß mit seiner Hilfe die Existenz von Wohlordnungen des Kontinuums bewiesen wird. Dabei muß aber die Art der Anwendung des Auswahlaxioms beachtet werden. Dieses besagt ja in der ZERMELO'schen Fassung, daß für eine Menge von Mengen eine Repräsentantenmenge existiert. Um die Existenz einer Wohlordnung des Kontinuums zu beweisen, hat man das Auswahlaxiom auf die Menge der Teilmengen des Kontinuums anzuwenden. Man muß also die Gesamtheit der Teilmengen des Kontinuums als Menge zur Verfügung haben, was durch das allgemeine Potenzmengenaxiom bewirkt wird.

Hier kommt nun zur Geltung, was in unserer Erörterung über die Potenzmenge hervorgehoben wurde: daß für die Einführung der Menge der reellen Zahlen sowie der Punktmengen in der Ebene und im Raume das allgemeine Potenzmengenaxiom nicht erfordert wird, vielmehr nur die Postulierung der Potenzmenge der Zahlenreihe. Diese kann übrigens im Rahmen der Mengenlehre durch eine Verstärkung des Unendlichkeitsaxioms der Mengenlehre erfolgen[8].

[8] Das Unendlichkeitsaxiom besagt ja, daß die natürlichen Zahlen eine Menge bilden. Es genügt nun, statt dessen zu fordern, daß es eine Menge gibt, welche jede Menge von natürlichen Zahlen als Element hat, um daraus (mit den sonstigen

Das verstärkte Unendlichkeitsaxiom kann – entsprechend, wie wir dieses schon früher bezüglich des speziellen Potenzmengenaxioms feststellten – von den geometrischen Vorstellungen her motiviert werden. (Bereits das übliche Unendlichkeitsaxiom überschreitet die reine Zahlentheorie und erhält vom Geometrischen her seine Motivierung.)

Eine geometrische Motivierung besteht dagegen nicht mehr für das allgemeine Potenzmengenaxiom, welches generell die Bildung der Potenzmenge zu einer Menge aufs Transfinite überträgt.[9]

Somit läßt sich auf eine methodisch sinnvolle Weise eine Abgrenzung der Analysis gegenüber der weitergehenden Mengenlehre, d.h. gegenüber der allgemeinen Theorie der Kardinalzahlen und Ordinalzahlen bewirken.

Die allgemeine Kardinalzahltheorie findet übrigens in der üblichen Axiomatik der Mengenlehre (auch einschließlich des Ersetzungsaxioms) keine definitive Begrenzung. Die diesbezüglichen, in reichhaltiger Entwicklung stehenden Untersuchungen sind noch unabgeschlossen.

In unserer Betrachtung der Axiomatik sind wir auf die zuvor erwähnte, von LORENZEN kritisierte totale Axiomatik gar nicht zu sprechen gekommen. Das mag seine Rechtfertigung darin finden, daß jene totale Axiomatik nicht in der tatsächlich geübten mathematischen Praxis wesentlich ist, vielmehr nur einen Standpunkt in der Philosophie der Mathematik bildet, nämlich jene durch die Möglichkeit der Formalisierung der mathematischen Beweise hervorgerufene Doktrin des ›Formalismus‹, wonach die Mathematik in nichts anderem besteht als in der Ausführung formaler Deduktionen nach konventionellen Regeln und aus den Deduktionen sich nichts anderes ergibt als die Gewinnbarkeit der jeweiligen Endformeln mittels der benutzten Regeln. Es ist ersichtlich, daß diese Doktrin unnötig nihilistisch gefaßt ist und daß in dieser das Moment des Operativen in einseitiger Weise überbetont ist. Indem LORENZEN sich gegen die ›totale Axiomatik‹ wendet, trifft er damit zugleich die Doktrin des Formalismus, und er zeigt damit, daß er den von ihm betonten Gesichtspunkt des Operativen doch nicht in einseitiger Ausschließbarkeit angewendet wissen will.

Überhaupt mögen die angestellten Überlegungen bei näherem Zusehen zeigen, daß die darin ausgedrückten Ansichten denjenigen LORENZENS viel näher stehen, als es aufgrund verschiedener Abweichungen im einzelnen scheinen kann.

mengentheoretischen Axiomen) sowohl die Aussage des Unendlichkeitsaxioms wie die des speziellen Potenzmengenaxioms zu gewinnen.

9 Die generelle Bildung der Potenzmenge ist auch noch nicht gegeben durch die rein logische Bildung der Gesamtheit (›Klasse‹) der Teilmengen einer Menge, wie sie sich ohne weiteres aus dem *Begriff* der Teilmenge ergibt.

HERBERT MESCHKOWSKI

DIE ZAHL ALS ARCHETYPUS

1. *Die natürliche Zahl im Aufbau der Mathematik*

Am Eingang des MITTAG-LEFFLER-Instituts in Djursholm befindet sich die Inschrift:

> Die Zahl ist Anfang und Ende des Denkens,
> Mit dem Gedanken wird die Zahl geboren,
> Über die Zahl hinaus reicht der Gedanke nicht.

Aus diesen Sätzen könnte man die Meinung herauslesen, daß alle durch Denken zu lösenden Probleme auf mathematische Gesetzlichkeiten zurückzuführen seien. Wir wollen den Djursholmer Sätzen eine bescheidenere, innermathematische Deutung geben. Ihnen liegt die Auffassung zugrunde, daß jedenfalls alle *mathematischen* Erkenntnisse aus dem *Grundprozeß des Zählens* zu begründen seien. Damit wären die Versuche gerechtfertigt, die Mathematik ›konstruktiv‹ oder auch ›operativ‹ aus elementaren Grundansätzen zu fundieren.

Zur Begründung der Thesen könnte man LEIBNIZ zitieren[1]:

> Manches weist keine Teile auf und entzieht sich somit der Messung ...
> Dagegen gibt es nichts, was nicht der Zahl unterworfen wäre. Die Zahl ist daher gewissermaßen eine metaphysische Grundgestalt.

Es ließen sich auch noch viele andere Forscher von PYTHAGORAS bis KRONECKER anführen, und schließlich könnte man auf die Einsichten der modernen Physik verweisen, die ja die Gesetzlichkeiten im atomaren Bereich durch Relationen zwischen *ganzen* Zahlen deuten will.

In der modernen Mathematik hat sich aber die mengentheoretische Betrachtungsweise des BOURBAKI-Kreises weitgehend durchgesetzt. Man versteht die Mathematik als *Mengenlehre*, da es ja immer und in allen Disziplinen so oder so um Mengen und ihre Relationen geht. CANTOR hatte zwar seine Theorie ursprünglich als eine ›neue Provinz‹ der Mathematik entwickelt, als eine Theorie des *Transfiniten*. Aber die Mathematiker unseres Jahrhunderts fanden heraus, daß man schließlich die ganze Mathematik als Mengenlehre deuten und damit einheitlich fundieren kann. Es verdient bemerkt zu werden, daß sich auch diese Auffassung schon bei CANTOR findet. Kürzlich wurde

[1] Zitiert nach [19], S. 57.

eine frühe Fassung der Cantorschen Theorie der Ordnungszahlen veröffentlicht[2]. Sie unterscheidet sich in der Sache nur unwesentlich von der späteren Zusammenfassung in den Annalen 46 vom Jahre 1895. Aber in dieser frühen Darstellung findet sich (a.a.O. S. 84) der folgende bemerkenswerte Satz über die ›Typenlehre‹:

> Sie bildet einen wichtigen und großen Teil der *reinen Mengenlehre* (Théorie des ensembles), also auch der *reinen Mathematik*, denn letztere ist nach meiner Auffassung nichts anderes als *reine Mengenlehre*.

Wir fragen nun nach dem Standort der Theorie der natürlichen Zahlen in dieser ›reinen Mengenlehre‹ und suchen danach in einem modernen Axiomensystem. Meist benutzt man heute eine moderne Fassung des klassischen Systems von ZERMELO-FRAENKEL, wie wir sie bei ABIAN [1] oder auch (in variierter Form) in [13] finden.

Erst das siebente[3] Axiom, das ›Unendlichkeitsaxiom‹, gibt Gelegenheit, die natürlichen Zahlen einzuführen. Sie werden (nach J. VON NEUMANN[4]) mit Hilfe der leeren Menge $\emptyset$ so erklärt:

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad & 0=\emptyset,\\
& 1=\{\emptyset\},\\
& 2=\{0,1\},\\
& 3=\{0,1,2\},\\
& \dots\\
& \dots\\
& \dots\\
& \dots\\
& \dots
\end{aligned}
$$

Es erscheint durchaus unnatürlich, daß die nach Ansicht von Mathematikern aller Epochen grundlegenden natürlichen Zahlen erst so spät und dann noch als Produkt eines ›Unendlichkeitsaxioms‹ auftreten. Man kann versuchen, diese Stilwidrigkeit zu mildern, indem man die Mengenlehre zunächst für endliche Systeme aufbaut. Dann kann man die VON NEUMANNschen natürlichen Zahlen ohne Benutzung eines ›Unendlichkeitsaxioms‹ nach der Erklärung (1) einführen. Wir haben diese Möglichkeit in [16] (S. 12ff.) dargestellt.

Im modernen mengentheoretisch fundierten Anfangsunterricht benutzt man einen anderen Zugang zum Zahlbegriff. Man geht aus von *verschiedenen* Objekten a, b, c, ... und erklärt die natürlichen Zahlen als Äquivalenzklassen:

[2] Acta Math. 124, 1970, S. 66–107.

[3] In der Zählung von ABIAN das sechste.

$$
\begin{aligned}
(2)\quad & 1 = |\{a\}|,\\
& 2 = |\{a, b\}|,\\
& 3 = |\{a, b, c\}|,\\
& \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

3 ist danach die Menge aller Mengen, die zur Menge $\{a, b, c\}$ äquivalent sind[5]. Die Bildung solcher Äquivalenzklassen ist freilich nur unter gewissen Voraussetzungen zulässig. Man muß (um Antinomien zu vermeiden) die Möglichkeit der Mengenbildung durch geeignete axiomatische Vorschriften einschränken. Das kann z.B. dadurch geschehen, daß man nur *endliche* Mengen zuläßt.

Damit ist aber die Möglichkeit, den Zahlbegriff durch die Terminologie der modernen (mengentheoretischen) Mathematik zu fundieren, noch nicht erschöpft. Man kann z.B. (nach einem Vorschlag von KIRSCH) von der Addition von ›Längen‹ (›freien Strecken‹) ausgehen und etwa die Zahl 2 durch die Abbildung

$$a \longmapsto a + a$$

erklären, ausführlicher[6]:

(3) $2 = \{(a, a + a), a \in F\}$.

Dabei steht F für die zugrundegelegte Menge der ›freien Strecken‹.

Nach der zuerst erwähnten Erklärung des Zahlbegriffs ist die natürliche Zahl 2 die *eine* Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; nach der (heute in der Schule üblichen) ist sie eine *Menge von Mengen*. Die dritte Möglichkeit schließlich deutet die Zahl als *Operator* (als Funktion).

Man kann schließlich den Zahlbegriff formal axiomatisch fundieren, wie dies etwa durch PEANO oder HILBERT[7] geschehen ist.

Einen besonders einfachen Zugang zur Reihe der natürlichen Zahlen findet man, wenn man mit LORENZEN ([11] S. 6ff.) „von den primitiven Notationen der Steinzeit" ausgeht und die Ziffern einfach durch Striche erklärt:

(4) $1 = |, 2 = ||, 3 = |||, \ldots\ldots$

Damit ist der Grund für eine moderne ›operative‹ Begründung des elementaren Rechnens gelegt.

[4] Diese Definition wurde zuerst mitgeteilt in einem Brief vom 15. 8. 1923 an ZERMELO. Er ist veröffentlicht in [13], S. 271 ff.

[5] Diese Definition findet sich zuerst bei G. CANTOR in einem Brief an G. PEANO vom 21. 9. 1895.

[6] Näheres darüber in [12], S. 267f.

[7] Vgl. [12], S. 41 bzw. [6] Bd. 3, S. 192ff.

Fassen wir zusammen: Es gibt eine verwirrende Fülle von Möglichkeiten, den Zahlbegriff durch moderne Formalismen zu erklären. Es erscheint bemerkenswert, daß keine der hier erwähnten Definitionen der formalistischen Mathematik älter als 100 Jahre ist. Die großen Zahlentheoretiker EULER und GAUSS z.B. haben die mengentheoretische Bedingung des Zahlbegriffs noch nicht gekannt, und sie hatten auch kein Axiomensystem für die Menge **N** der natürlichen Zahlen. Und doch haben sie tiefliegende Gesetzlichkeiten der Menge **N** herausgefunden. Und schon über 2000 Jahre vorher haben die Pythagoreer wichtige Eigenschaften der Zahlenreihe richtig beschrieben. Es erscheint deshalb berechtigt, nach einem nicht durch Formalismen zu beschreibenden ›Seinsgrund‹ der Zahlenreihe zu fragen.

Alle solche Überlegungen führen notwendig auf Fragestellungen, die man nicht durch Rechenergebnisse mathematischer Kalküle beantworten kann. Die Mathematiker hatten sich allerdings gerade deshalb formalistischen Verfahren zugewandt, um ungesicherte philosophische Prämissen zu vermeiden. Inzwischen hat sich aber herausgestellt[8], daß man die Widerspruchsfreiheit der formalen Zahlentheorie nicht durch die Mittel des Systems selbst begründen kann. Der reine Formalismus bietet zwar gewichtige methodologische Vorteile bei der Darstellung mathematischer Theorien, aber er bleibt doch leer, da man nicht einmal die ›Richtigkeit‹ der formalen Systeme absolut beweisen kann. Es liegt deshalb nahe, nach dem ›Quentchen Metaphysik‹ zu fragen[9], ohne das eine Fundierung exakter Forschung nicht möglich zu sein scheint.

2. *Die Archetypen*

Es ist bemerkenswert, daß eine Reihe von modernen Physikern bei den Untersuchungen über das Wesen der Materie und über den Charakter der ›Naturgesetze‹ auf Ergebnisse geführt wurden, die man als einen Rückgriff auf die klassische Ideenlehre PLATONS bezeichnen muß. So weist HEISENBERG darauf hin, daß die Aussagen über die Theorie der Materie „durch eine Reihe von Symmetrieforderungen charakterisiert sein wird". Man kann nicht gut sagen, daß die Elementarteilchen selbst „aus Materie bestehen", sie sind vielmehr „die einzig möglichen Formen der Materie"[10]. Das Wesentliche, was die moderne Physik über die ›Substanz‹ aussagen kann, sind also Symmetrieeigenschaften. Es sind nicht gerade die Symmetrieeigenschaften der platonischen Körper, aber doch jeweils Grundeigenschaften gewisser mathematischer Strukturen. Damit rückt die moderne Physik in die Nähe der klassischen Ideenlehre. Das spricht PAULI besonders deutlich aus[11]:

[8] Näheres darüber z.B. in [14], S. 112ff.
[9] Nach einem Satz von CANTOR. Siehe [13], S. 114.
[10] [3], S. 34ff.
[11] Zitiert nach [3], S. 46.

„Es handelt sich bei der Naturwissenschaft der Neuzeit also um eine christliche Weiterbildung der ›lichten Mystik‹ PLATONS, in der der eigentliche Grund von Geist und Materie in den Urbildern gesucht wird."

Ähnliche Ergebnisse findet man in den Schriften ([4], [5]) von HEITLER, aber auch bei MARCH und anderen Forschern.

Für unsere Fragestellungen besonders wichtig scheinen uns die viel zu wenig beachteten Ergebnisse der Zusammenarbeit des Physikers PAULI mit dem Psychologen C. G. JUNG zu sein. JUNG hat mit empirischen Methoden nachzuweisen versucht, daß es eine „allgemeine seelische Grundlage überpersönlicher Natur" gibt, das „kollektive Unbewußte"[12]. In dieser „mindestens ganzen Völkern und Zeiten gemeinsamen" Schicht sind die „Archetypen" angesiedelt, die „urtümlichen Bilder", die JUNG als „Vorstufe der Ideen" oder auch als ihren „Mutterboden" charakterisiert.

Der Begriff des ‚Archetypus' ist nicht von JUNG erfunden worden. Er nimmt vielmehr einen schon in der philosophischen Literatur des Altertums oft gebrauchten Begriff auf, um ihm im Rahmen seiner psychologischen Theorie eine neue Deutung zu geben.

PAULI hat nun[13] darauf hingewiesen, daß dieser Begriff des ‚Urbildes' auch in der frühen mathematischen Literatur vorkommt, u.a. im EUKLID-Kommentar von PROKLOS und bei KEPLER. PROKLOS spricht z.B. von den „in der Seele vorhandenen" „Urbildern der Zahlen, Figuren, Verhältnisse und Bewegungen"[14]. Er versteht diese Archetypen offenbar als erklärende Umschreibungen der platonischen Ideen.

Es dürfte von Nutzen sein, wenn wir uns die Bedeutung des Begriffs ‚Archetypus' in der antiken Literatur verdeutlichen[15]. Man findet ihn ([8], S. 12) u.a. bei PHILO JUDAEUS und bei IRENAEUS (Adv. Haer. 2, 7, 4). In der gegen die Ketzer gerichteten Schrift des Kirchenvaters findet sich das Zitat:

„Mundi fabricator non a semetipso fecit haec,
sed de alienis archetypis transtulit."

Offenbar zitiert IRENAEUS hier einen Gnostiker, der von dem Schöpfer der Welt (unserer Welt) glaubt, daß er ›fremde Urbilder‹ übertrug, offenbar Urbilder aus anderen ›höheren‹ Welten. Die Beziehung des so verstandenen Archetypus (des ›zuerst Geprägten‹) zur platonischen Idee ist offensichtlich.

In den Schriften KEPLERS findet man (wie besonders PAULI immer wieder unterstrichen hat) einen Brückenschlag von den Begriffsbildungen der Antike zur modernen exakten Forschung. KEPLER zitiert (sehr ausführlich[16])

[12] Näheres darüber in [7] und [8].
[13] Vgl. dazu [18] und [20].
[14] PROKLOS wird hier nach KEPLER zitiert: [9], S. 209ff.
[15] Für philologische Hinweise danke ich Herrn J. SUIN DE BOUTEMARD.
[16] Vgl. [9], S. 209–212.

den EUKLID-Kommentar von PROKLOS und beschreibt den Prozeß der exakten Erkenntnis so ([9], S. 120f.):

> „Erkennen heißt, das äußerlich Wahrgenommene mit den inneren Ideen zusammenbringen und ihre Übereinstimmung beurteilen, was Proclus sehr schön ausgedrückt hat mit dem Wort ‚Erwachen' wie von einem Schlaf. Wie nämlich das uns außen Begegnende uns erinnern macht an das, was wir vorher wußten, so locken die Sinneserfahrungen, wenn sie erkannt werden, die intellektuellen und innen vorhandenen Gegebenheiten hervor, so daß sie in der Seele aufleuchten, während sie vorher wie verschleiert in potentia dort verborgen waren. Wie aber sind sie hineingekommen? Alle Ideen oder Formbegriffe... sind mit eingeboren, so wie etwa den Pflanzenformen die Zahl der Blätter mit eingeboren wird oder die Zahl der Kammern im Apfel."

Der Begriff ‚Archetypus' findet sich mehrfach bei KEPLER, so z.B. in einem Brief an HEGULONTIUS[17]:

> „Die geometrischen Figuren sind ewig, die geometrischen Sätze von Ewigkeit her wahr im Geiste Gottes. Ergo quanta sunt mundi archetypus."

Greifen wir nun die eingangs zitierten Äußerungen von Mathematikern über das Wesen der Zahl wieder auf! Wenn LEIBNIZ die Zahl eine ›metaphysische Grundgestalt‹ nennt, wenn KRONECKER von der Zahl sagt, sie sei „vom lieben Gott gemacht"[18], wenn STUDY erklärt, daß „die Welt der Zahl nicht ein menschliches Produkt" sei[19], wenn schließlich die Intuitionisten die Mathematik aus der Urintuition des Zählens herleiten wollen[20], dann haben wir in diesen Aussagen moderne Umschreibungen der alten Lehre von den Archetypen. Es erscheint wichtig, daß sie durch JUNG eine neue, psychologische Deutung erfährt: Die Archetypen ›wohnen‹ im kollektiven Unbewußten, und damit würde verständlich, daß sie im frühen Kindesalter als etwas ›Gegebenes‹ hingenommen werden. Der Versuch, im mengentheoretischen Anfangsunterricht die Zahl als Name für eine Klasse von Mengen einzuführen, erscheint wie ein überflüssiger Gewaltakt. Natürlich ist es durchaus bemerkenswert, daß man die Zahlen auch als Äquivalenzklassen deuten kann, aber muß man das den Sechsjährigen beibringen? Sollte man

[17] Zitiert nach [20], S. 121.

[18] Das berühmte Zitat stammt aus einem Vortrag, den K. auf der Berliner Naturforscher-Versammlung 1886 hielt. Jahresber. DMV 2, S. 19.

[19] Zitat nach [19], S. 102.

[20] CURRY hat den Intuitionisten vorgeworfen, sie gehen von einer metaphysischen Grundkonzeption aus, weil sie an einen Gott, die ›Intuition‹ glauben. Vgl. dazu [14], S. 91.

nicht die Kinder zunächst bei jenem naiven Zahlverständnis lassen, mit dem die Menschheit einige Jahrtausende ausgekommen ist?[21]

Aber kehren wir zurück zur Fundierung der Mathematik! Darf man hoffen, im Archetypus ‚Zahl' eine Grundlage für die *gesamte* Mathematik gefunden zu haben? Die modernen konstruktivistischen und operativen Verfahren werden ja meist mit der Absicht entwickelt, die ganze Mathematik aus einer einfachen Grundkonzeption zu entwickeln.

3. *Das Kontinuum*

Bei PROKLOS (s.o.!) ist nicht nur von den Urbildern für die Zahlen, sondern auch für die „Figuren, Verhältnisse und Bewegungen" die Rede. Und KEPLER beschränkt den Begriff des Archetypus ausdrücklich *auf die Geometrie.* Er bezeichnet die Geometrie als den „Archetypus des Kosmos" ([9], S. 121), will aber den Zahlen nicht den gleichen Stellenwert zusprechen (a.a.O., S. 213):

> „Über die Zahlen freilich möchte ich mich auf keinen Streit einlassen. Vielmehr hat ARISTOTELES hierin die Pythagoreer mit Recht widerlegt. Denn für ihn sind die Zahlen etwas, was bei der geistigen Betätigung an zweiter oder gar dritter und vierter Stelle kommt, sowie etwas, von dem man keine Grenze angeben kann. Auch haben die Zahlen nichts an sich, was sie nicht von den Quantitäten oder von anderen wirklichen und realen Wesen oder auch von verschiedenen Setzungen des Geistes empfangen hätten."

In dieser Hinsicht werden die modernen Vertreter der exakten Wissenschaften KEPLER kaum folgen wollen, nachdem die Atomphysik die pythagoreische Grundkonzeption auf so eindrucksvolle Weise bestätigt hat. Es fällt uns schwer, den großen Astronomen in seiner Abwertung des Zahlbegriffs zu verstehen.

Hier muß daran erinnert werden, daß für KEPLER solche geometrische Konstruktionsverfahren zulässig waren, die *Zirkel und Lineal* benutzten. Er wußte bereits, daß man ein reguläres Siebeneck nicht mit diesen Hilfsmitteln konstruieren konnte, und er war deshalb davon überzeugt, daß Gott daher auch eine solche Figur nicht ›zur Ausschmückung der Welt‹ benutzen könnte. Andererseits waren mit Zirkel und Lineal Konstruktionen möglich, die nicht rationale Streckenverhältnisse lieferte (Seite und Diagonale eines Quadrates z.B.). Daher kam er zu der Meinung, daß „die gantze Natur vnd alle himmlische Zierligkeit in der Geometria symbolisirt sey" ([9], S. 15).

[21] Man wird dieser Auffassung am besten gerecht, wenn man im Anfangsunterricht entweder ›naiv‹ vorgeht und das vorgegebene Zahlverständnis ausbaut oder aber von den oben genannten Möglichkeiten zur Fundierung des Zahlbegriffs die einfachste auswählt: Das ist die von LORENZEN vorgeschlagene operative Begründung. Näheres zur Schulmathematik in [15], Kap. VII.

Wir sind heute in der Lage, die Geometrie analytisch zu deuten und damit durch den Zahlbegriff zu begründen. Es spricht aber einiges dafür, auch die Grundbegriffe der Geometrie als eigenständige ›Urbilder‹ gelten zu lassen.

Dafür spricht schon die Tatsache, daß die klassische griechische Geometrie viel älter ist als die schwieriger[22] zu fundierende Koordinatengeometrie DESCARTES'. Freilich: Die Axiomatik EUKLIDS benutzt noch (unausgesprochen) anschauliche Elemente und gibt keine Fundierung der Stetigkeitseigenschaften der Geraden. Aber auch das kann heute durch eine eigenständige Axiomatisierung erledigt werden[23].

Es ist für unsere Überlegungen wichtig zu bemerken, daß eine befriedigende begriffliche Darstellung des ›Kontinuums‹ erst in jüngster Zeit gelungen ist. Wir finden bei BOLZANO und CANTOR Hinweise auf die vergeblichen Bemühungen mittelalterlicher Denker (Nikolaus VON CUES, Thomas VON AQUINO), das Wesen des Kontinuums zu beschreiben. Sie verlieren sich in Paradoxien, und erst BOLZANO wagt eine explizite Definition[24]. Sie ist aber immer noch unzulänglich. Erst CANTOR erfaßt das Wesentliche, wenn er das Kontinuum als eine *perfekte zusammenhängende* Menge von Punkten des Raumes charakterisiert.

Es erscheint für unsere Überlegungen bemerkenswert, daß die Mathematiker und Philosophen eine *Vorstellung* vom Kontinuum hatten, lange bevor sie in der Lage waren, diesen Begriff präzis zu definieren. Sie *sahen* etwas (mit den ›Augen des Geistes‹), was sie in Begriffen noch nicht fixieren konnten. Dieser Umstand legt es nahe, von den vor den formellen Definitionen gegebenen *Archetypen der Geometrie* zu sprechen. Auch bei den Zahlen haben wir eine ähnliche Situation: Die Mathematiker erforschten ihre Gesetze lange bevor sie es für nötig hielten, der Zahlentheorie ein axiomatisches Fundament zu geben oder gar die Zahl mengentheoretisch zu definieren.

Es wird zuweilen versucht, die Entstehung der Mathematik aus den Erfahrungen mit der materiellen Welt zu erklären. In der Tat läßt sich nachweisen, daß bei der Entstehung der geometrischen Grundbegriffe physikalische Erkenntnisse im Spiel waren. Es gibt[25] da Bezüge zwischen der mathematischen Terminologie und der Technik der frühen Musikinstrumente. Man kann aber die Geometrie nicht einfach als das Ergebnis eines Abstraktionsprozesses deuten. Es gibt ja für die geometrischen Urbilder kein Gegen-

[22] Man beachte, daß zu einer korrekten Begründung der analytischen Geometrie eine Theorie der reellen Zahlen gehört.

[23] Vgl. dazu z. B. [12], S. 160ff.

[24] Näheres darüber und über die hier benutzten topologischen Begriffe findet man in [13], Kap. IV.

[25] Vgl. dazu [17], Kap. III 3.

stück in der physikalischen Wirklichkeit. Das wußte schon PROKLOS. Er schreibt in seinem EUKLID-Kommentar[26]:

> „Denn sage mir, wo findet sich unter den Sinnendingen das Unteilbare (Punkt), das Breitenlose (Linie), das Tiefenlose (Fläche), oder wo die Gleichheit der Strecken vom Mittelpunkt aus, wo genaue Rechtwinkligkeit? Ich sehe nirgends etwas hiervon; alles Sinnliche ist gemischt und vermengt, nichts ist rein und von seinem Gegenteil frei."

Und er schließt daraus:

> „Man muß also annehmen, daß die Seele selber Erzeugerin der mathematischen Begriffe ist. Wenn sie aber nun im Besitz der Urbilder diesen Sein und Wesen gibt, so daß das Erzeugen nichts anderes ist als das Hervorbringen der Begriffe, die in der Seele schon vorhanden waren, dann werden wir mit PLATO in Übereinstimmung sein, und das wahre Wesen der mathematischen Dinge ist gefunden."

4. *Die Freiheit des Mathematikers*

KEPLER wollte nur die ›Objekte‹ der Geometrie als Urbilder gelten lassen und verwies[27] die Zahlen auf die „zweite oder gar dritte und vierte Stelle". In neuerer Zeit hat man mehrfach versucht, durch konstruktive Verfahren die gesamte Mathematik von der ›Urintuition‹ des Zählens her aufzubauen. Andere moderne Mathematiker gehen zwar keineswegs immer konstruktiv vor, wollen aber die Geometrie als eigenständige Disziplin ausschalten, die Deduktionen EUKLIDS und HILBERTS durch die Theorie der linearen Vektorräume ersetzen.

Wir meinen: Die Mathematiker sind nicht gut beraten, wenn sie Einheitlichkeit um jeden Preis erstreben. Wir gingen aus von der Einsicht, daß bei der von den Formalisten erreichten Einheitlichkeit der Zahlbegriff nicht am rechten Platz steht. Er erscheint als ein ›Abfallprodukt‹ des Unendlichkeitsaxioms. Ebenso halten wir den Versuch nicht für glücklich, die gesamte Mathematik nur aus der Grundoperation des Zählens zu begründen. Und die Verbannung EUKLIDS aus dem mathematischen Unterricht würde dazu führen, daß wichtige Bildungsmöglichkeiten verschüttet werden. Die Auseinandersetzung zwischen HILBERT und FREGE zum Beispiel über das Wesen der Axiome wird nur dem verständlich, der die Auseinandersetzung über das Parallelenaxiom kennt.

Wir möchten wünschen, daß die Einsicht CANTORS sich in der Zukunft durchsetze: *Das Wesen der Mathematik liegt gerade in ihrer Freiheit*[28]. Wir

[26] Zitiert nach [9], S. 210.
[27] [9], S. 213.
[28] Ges. Abhandlungen, Hildesheim 1962, S. 182.

haben die Freiheit, die Mathematik so oder so *einheitlich* aufzubauen, aber wir müssen dann in Kauf nehmen, daß Wesentliches verzerrt wird oder mindestens am falschen Platz steht. Wir müssen uns auch damit abfinden, daß manche Disziplinen der Mathematik viel schwerfälliger darzustellen sind, wenn wir unsere ›Arbeitsmittel‹ einschränken.

Es erscheint geboten, immer wieder zu den ›Urbildern‹ zurückzugehen, aus denen die mathematischen Disziplinen entstanden. Die Frage liegt nahe, ob denn die ›Zahlen und Figuren‹ die einzigen Urbilder sind, ob nicht die Mathematik die Kraft haben könnte, noch weitere andersartige Archetypen zu verarbeiten.

Wir halten das für möglich und möchten als Beispiel die von CANTOR eingeführten transfiniten Zahlen (Ordnungs- und Kardinalzahlen) nennen. CANTOR hatte 1884 seinem Lehrer KRONECKER gegenüber[29] die Ansicht vertreten, daß die ›Existenz‹ dieser transfiniten Zahlen ebenso gesichert sei wie die der natürlichen Zahlen. Jahrzehnte später, in einem Brief[30] an Mrs. CHISHOLM-YOUNG spricht er erneut „von der festen Dinglichkeit" der Ordnungs- und Kardinalzahlen. Die ersten Definitionen dieser transfiniten Zahlen waren freilich so vage, daß das Mißtrauen KRONECKERS und anderer Forscher heute durchaus verständlich erscheint. Wir haben an anderer Stelle die mancherlei Wandlungen der grundlegenden Definitionen dargestellt[31] und wollen uns hier mit der Feststellung begnügen, daß CANTOR seine Zahlen schon 1879 ›hatte‹[32], aber noch Jahrzehnte brauchte, bis er (für die Ordnungszahl) zu einer Definition durchdrang, die auch heute noch anerkannt wird. Er betont in einem Brief an JOURDAIN, daß bei diesen Begriffsfindungen auch das „Unterbewußtsein eine Rolle" spiele. Man könnte hier einen frühen Bezug auf das JUNGsche kollektive Unbewußte sehen. Aber hier ging es jedenfalls nicht um Einsichten, die schon vorher „mindestens ganzen Völkern und Zeiten gemeinsam" waren. CANTOR hat – um die Sprache PLATONS zu reden – in der Welt der Ideen einen Bereich ›entdeckt‹, den vor ihm noch niemand gesehen hatte. Und der Weg von den ersten Visionen bis zur begrifflichen und axiomatischen Fundierung war weit. Immerhin kann man in diesem Fall die Entwicklung vom ersten vagen Erkennen des Urbildes bis zu einer brauchbaren Definition und schließlich zu einer Einordnung in ein geeignetes formales System deutlich verfolgen. Bei den *klassischen* Urbildern ist das nicht mehr möglich. Heute ist die Theorie der transfiniten Zahlen ebenso gut (oder auch: ebenso schlecht) gesichert wie etwa die klassische Analysis. Die bekannten Antinomien sind ausgeschaltet, aber ein allgemeiner Beweis für die Widerspruchsfreiheit der Theorie ist nicht (absolut) möglich.

[29] Vom 9. 3. 1907; veröffentlicht in [13], S. 240f.

[30] Der Mathematikunterricht 17, 1971, S. 31.

[31] [17], Kap. X 5.

[32] Siehe dazu Jahresbericht DMV 73, 1971, S. 128.

Fassen wir zusammen. Angeregt durch die Untersuchungen der Physiker über das Problem der Substanz findet sich heute auch bei einigen Mathematikern die Neigung, die Frage nach der Realität der mathematischen ›Objekte‹ neu zu stellen. Nach der Ernüchterung über das Scheitern der Versuche, die *Widerspruchsfreiheit* formaler Systeme (absolut) zu beweisen, wird die Frage nach der *Wahrheit* mathematischer Aussagen wieder interessant. Es gibt Versuche, einen ›reformierten‹ Platonismus (›platonism with little p‹) zu begründen[33]. Hier kann ein (von PAULI angeregter) Brückenschlag zur Psychologie JUNGS von Nutzen sein. Man kann die Grundbegriffe der Mathematik als *Archetypen des kollektiven Unbewußten* deuten.

Die Reihe der natürlichen Zahlen ist das wohl wichtigste (freilich nicht das einzige) Urbild, das mathematische Forschung fundieren kann. Es erscheint geboten, über dem Ausbau der Formalismen die Bezüge auf die Urbilder nicht zu vernachlässigen. Das ist besonders wichtig für den mathematischen Unterricht an Schulen und Hochschulen.

Literatur

[1] ABIAN, A.: The Theory of Sets and Transfinite Arithmetic. Philadelphia–London 1965.
[2] FRANZ, M.-L. VON: Zahl und Zeit. Stuttgart 1970.
[3] HEISENBERG, W.: Schritte über Grenzen. München 1971.
[4] HEITLER, W.: Naturphilosophische Streifzüge. Braunschweig 1970.
[5] HEITLER, W.: Wahrheit und Richtigkeit in den exakten Wissenschaften. Akad. d. Wiss. u. Lit. Mainz, Jahrg. 1972, Nr. 3.
[6] HILBERT, D.: Gesammelte mathematische Abhandlungen. Berlin–Heidelberg–New York 1970.
[7] JUNG, C. G.: Von den Wurzeln des Bewußtseins. Zürich 1954.
[8] JUNG, C. G.: Bewußtes und Unbewußtes. Fischer-Bücherei 6058, 1958.
[9] KEPLER, J.: Weltharmonik. Darmstadt 1973.
[10] LORENZEN, P.: Einleitung in die operative Logik und Mathematik. Berlin–Göttingen–Heidelberg 1955.
[11] LORENZEN, P.: Differential und Integral. Frankfurt/M. 1965.
[12] MESCHOWSKI, H. (Hg.): Mathematik-Duden für Lehrer. 3. Aufl. Mannheim 1969.
[13] MESCHKOWSKI, H.: Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg CANTORS. Braunschweig 1967.
[14] MESCHKOWSKI, H.: Wandlungen des mathematischen Denkens. 4. Aufl. Braunschweig 1969.
[15] MESCHKOWSKI, H.: 100 Jahre Mengenlehre. dtv-Taschenbuch 4142, 1973.
[16] MESCHKOWSKI, H. und AHRENS, I.: Theorie der Punktmengen. Mannheim 1974.

[33] Näheres darüber in [17], Kap. IX und X.

[17] MESCHKOWSKI, H.: Richtigkeit und Wahrheit in der Mathematik. Mannheim 1974.

[18] PAULI, W.: Aufsätze und Vorträge über Physik und Erkenntnistheorie. Braunschweig 1961.

[19] STECK, M.: Das Hauptproblem der Mathematik. Berlin 1942.

[20] Studien aus dem C. G. JUNG-Institut Zürich IV, Zürich 1952.

CHRISTIAN THIEL

ZUR BESTIMMUNG DER ARITHMETIK

»Die Arithmetik hat es mit dem *Zahlbegriff* zu tun«, schreibt WALTER LIETZMANN in einem verbreiteten Bändchen über ›Das Wesen der Mathematik‹[1], und hält damit nur eine wohl allgemein akzeptierte Bestimmung der Arithmetik als (elementare) Zahlentheorie fest. Besteht diese Meinung zu Recht, so hätte ein Aufbau der Arithmetik mit einer Definition des Wortes 'Zahl' oder, vorsichtiger formuliert, mit der Einführung der Rede über ›Zahlen‹ zu beginnen. Einig ist man sich, daß Zahlen nicht Ziffern oder (bei uns synonym:) Zählzeichen sein sollen, daß jedenfalls Aussagen der Arithmetik nicht von derselben Art sind wie die von einem Zählzeichen handelnde Aussage '0 ist eine ovale Figur'. Um eine genauere Bestimmung des Unterschiedes und damit eine Charakterisierung der arithmetischen Aussagen scheint man sich bisher jedoch nur in den Ansätzen der konstruktiven Wissenschaftstheorie zur Begründung der Arithmetik bemüht zu haben. Dort werden ›Zahlen‹ als Abstrakta[2] aus Zählzeichen eingeführt, so daß die Bestimmung der Zahlen und damit der arithmetischen Aussagen davon abhängt, von welchen Eigenschaften der Zählzeichen in einer arithmetischen Aussage abgesehen, abstrahiert werden soll.

In dem neuesten Kompendium der Erlanger Schule heißt es darüber: »Die Abstraktion, die dazu führt, statt von 'Zählzeichen', wie |, ||, |||, . . . oder 1, 2, 3, . . ., 10, . . . 10^2, . . ., 10^{100} von 'Zahlen' zu reden [. . .] beruht darauf, daß [. . .] die arithmetische Gleichheit (die wir durch $m = n \leftrightharpoons \neg \cdot m < n \vee n < m \cdot$ definiert haben) eine Äquivalenzrelation ist und daß alle Aussagen der Arithmetik invariant bezüglich dieser Gleichheit sind«[3]. Der Rückgang auf die erwähnte Definition zeigt, daß die $<$-Relation inhaltlich als 'Kürzer'-Relation, die arithmetische Gleichheit also als Längengleichheit von Strichlisten verstanden wird. Stillschweigend vorausgesetzt ist dabei eine bereits vorgenommene Abstraktion von der Ausführung der einzelnen Strichlisten.

[1] WALTER LIETZMANN, Das Wesen der Mathematik. Braunschweig 1949, S. 95 (erweiterte Neuauflage von ›Aufbau und Grundlage der Mathematik‹, Leipzig/Berlin 1927, dort S. 56).

[2] Vgl. PAUL LORENZEN, Gleichheit und Abstraktion. Ratio 4 (1962) 77–81, Neudruck in P. LORENZEN, Konstruktive Wissenschaftstheorie, Frankfurt a. M. 1974, S. 190–198.

[3] PAUL LORENZEN und OSWALD SCHWEMMER, Konstruktive Logik, Ethik und Wissenschaftstheorie. Mannheim/Wien/Zürich 1973 (B. I.-Hochschultaschenbuch 700), S. 145, oder S. 201 der 2., verb. Auflage von 1975.

Diese Kontamination zweier verschiedener Abstraktionsprozesse ist neu. In der frühesten mir greifbaren konstruktiven Einführung der Rede über Zahlen schreibt PAUL LORENZEN, daß dabei »von den speziellen Objekten ›abstrahiert‹ wird« und eine Gleichheitsrelation zwischen ›Systemen‹ durch

$$\begin{array}{ll} & \Rightarrow x \sim y \\ \mathfrak{x} \sim \mathfrak{y} & \Rightarrow \mathfrak{x}, x \sim \mathfrak{y}, y \end{array}$$

definiert ist; mit der Folge: »Gilt dann $\mathfrak{x} \sim \mathfrak{y}$, so nennen wir $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ 'längengleich'«[4]. Dies entspricht, auch im stillschweigenden Absehen von der Einzelausführung der Figuren, ganz der zitierten neuesten Darstellung. Von dieser letztgenannten stillschweigenden Abstraktion brauchte man auch keinerlei Aufhebens zu machen, hätte sich nicht in dem Zeitraum zwischen beiden Veröffentlichungen das Schwergewicht eigenartigerweise gerade auf die Figurengleichheit verlagert (sofern nicht die ganze Frage wie in ›Methodisches Denken‹ und sogar in ›Differential und Integral‹ als unwesentlich übergangen wurde[5]). Beispielsweise wird in dem bahnbrechenden Aufsatz ›Gleichheit und Abstraktion‹ (1962) der Rede von Zahlen die Abstraktion aufgrund einer Beziehung der ›Figurengleichheit‹ zugrunde gelegt, die zwischen zwei Figuren besteht, wenn sie »in gleichen Schritten hätten konstruiert werden können«[6]. Ähnlich dürfte die Intention in der ebenfalls 1962 erschienenen ›Metamathematik‹ sein, wo der Hinweis auf die Rolle der »Wiedererkennbarkeit«[7] nahelegt, daß an eine Abstraktion mit Invarianz bezüglich der Ausführung von Figuren gedacht ist. Ganz in demselben Sinne habe ich selbst seit 1968 von der »Konstruktionsgleichheit« von Ziffern gesprochen und z. B. 1971 den fraglichen Abstraktionsschritt von der Rede über Zählzeichen zur Rede über Zahlen so dargestellt, daß wir »hierbei nur noch auf die Konstruktionsschritte achten, die Unterschiede in der Ausführung der Ziffern aber ignorieren«[8].

[4] PAUL LORENZEN, Einführung in die operative Logik und Mathematik. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1955 ([2]1969), S. 133f.

[5] PAUL LORENZEN, Methodisches Denken. Ratio 7 (1965) 1–23, Neudruck in ›Methodisches Denken‹ (Aufsatzsammlung), Frankfurt a.M. 1969 und 1974, S. 24–59; ders.: Differential und Integral. Eine konstruktive Einführung in die klassische Analysis. Frankfurt a.M. 1965.

[6] S. 193 des Neudrucks (vgl. Anm. 2).

[7] PAUL LORENZEN, Metamathematik. Mannheim 1962 (B.I.-Hochschultaschenbuch 25), S. 14f.

[8] CHRISTIAN THIEL, Das Begründungsproblem der Mathematik und die Philosophie. In F. KAMBARTEL und J. MITTELSTRASS (Hg.), Zum normativen Fundament der Wissenschaft. Frankfurt a.M. 1973, S. 91–114 (Zitat S. 110).

Schon eine kurze Reflexion auf die Verwendung arithmetischer Aussagen hätte jedoch zeigen können, daß man deren Sinn durch keine der beiden genannten Invarianzforderungen erfaßt. Sieht man für die Geltung arithmetischer Aussagen die Unabhängigkeit von der jeweiligen Ausführung der Zählzeichen mit einem gewissen Recht als trivial an, so bindet man sie andererseits mit der Bezugnahme auf die Längengleichheit von Zählzeichen unnötigerweise an einen ganz bestimmten Typ von Zählsystemen. Daß es nicht nur auf die *Ausführung* der Zählzeichen, sondern auch auf die Wahl bestimmter *Figuren* als Zählzeichen nicht ankommt, hatte ich noch 1971 zu berücksichtigen versucht mit der an arithmetische Aussagen (mit einem Zählzeichen »*m*«) gestellten Forderung nach Invarianz gegenüber der Ersetzung »von *m* durch zu *m* ›arithmetisch gleiche‹ Zählzeichen, d.h. solche, die nach den gleichen Schritten wie *m* in einem Zählzeichenkalkül mit den beiden Regeln '$\Rightarrow z$', '$X \Rightarrow Xz$' hergestellt sind (wobei X Variable für schon hergestellte Zählzeichen ist und z Mitteilungsvariable für Einzelexemplare der speziellen Zählzeichen, z.B. Striche '|', auf deren Verwendung man sich vorher geeinigt hat«[9]. Auch diese Bestimmung würde jedoch schon auf ein Zählsystem nicht mehr zutreffen, das mit den Regeln

$$\begin{array}{l} \Rightarrow \mathrm{oo} \\ X \Rightarrow \begin{array}{c} X \\ X \end{array} \end{array}$$

(wobei X nichtleere Eigenvariable ist) operierte, also die Zählzeichen

$$\mathrm{oo},\ \begin{array}{c}\mathrm{oo}\\ \mathrm{oo}\end{array},\ \begin{array}{c}\mathrm{oo}\\ \mathrm{oo}\\ \mathrm{oo}\\ \mathrm{oo}\end{array},\ \ldots \text{ verwendete.}$$

Die einzige mir bekannte Darstellung, die diese Schwierigkeit durch einen Rückgang auf den beabsichtigten *Gebrauch* der Zählzeichen wenigstens ins Auge faßt, ist die ›Einführung in die Mathematik‹ von HELMUT SEIFFERT[10]. Gerade der Verzicht auf die Untersuchung der zur Herstellung von Zählzeichen benötigten Regeln ist freilich auch das Manko dieser Darstellung. Man könnte ja zunächst meinen, worauf es ankäme, wäre die allen zum Zählen geeigneten Regelsystemen gemeinsame *Struktur*, und etwa an eine eineindeutige

9 CHRISTIAN THIEL, Arithmetik. In J. RITTER (Hg.), Historisches Wörterbuch der Philosophie, Band 1 (A–C), Basel/Stuttgart und Darmstadt 1971, Sp. 517f. (Zitat Sp. 517).

10 HELMUT SEIFFERT, Einführung in die Mathematik. Zahlen und Mengen. München 1973 (Insbes. ›Das Problem der Zählbarkeit‹, S. 25f. und ›Die Abstraktion‹, S. 27f.).

gegenseitige Abbildbarkeit solcher Regelsysteme von der folgenden Art denken:

$$\begin{array}{llll} A_1: & \Rightarrow | & \longleftrightarrow & A_2: \quad \Rightarrow + \\ F_1: & n \Rightarrow n| & \longleftrightarrow & F_2: \; m \Rightarrow +m \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{llll} A_1: & \Rightarrow | & \longleftrightarrow & A_3: \quad \Rightarrow \mathrm{oo} \\ F_1: & n \Rightarrow n| & \longleftrightarrow & F_3: \; X \Rightarrow \begin{array}{c} X \\ X \end{array} \end{array}$$

(mit m, n und X als nichtleeren Eigenvariablen).

Daß auch das nicht ausreicht, macht man sich sofort am Dezimalsystem (mit arabischen Ziffern) klar, dessen Ziffern keineswegs nach einem Regelsystem erzeugbar sind, das nur aus einer Anfangsregel und einer einzigen Fortsetzungsregel besteht. Andererseits ist klar, daß die wahren Aussagen der Arithmetik auch dann gelten sollen, wenn wir sie unter Verwendung der Dezimalnotation ausdrücken (wie es ja gegenwärtig auf der ganzen Welt vorwiegend geschieht). Das bedeutet aber, daß sich die ›Struktur‹ der Regelsysteme, die zur Herstellung von Zählzeichen geeignet sind, nicht auf die soeben versuchte einfache Weise erfassen läßt.

Was dabei zu fordern ist, macht man sich einfacher als am Dezimalsystem an dem prinzipiell gleichartigen *Dualsystem* klar. Die in diesem System verwendeten Zählzeichen lassen sich nach dem Regelsystem

$$\begin{array}{lr} A: & \Rightarrow 1 \\ B: & e \Rightarrow 1n \\ C: & x0 \Rightarrow x1 \\ D: & x0e \Rightarrow x1n \end{array}$$

konstruieren (wobei e für eine aus lauter 1-Figuren, n für eine aus lauter 0-Figuren bestehende Figurenfolge steht und e und n in ein und derselben Regelanwendung jeweils die gleiche Anzahl von Figuren enthalten sollen; x ist nichtleere Eigenvariable). Metamathematische Eleganz schnöde verachtend sehen wir davon ab, daß man noch A als Spezialfall von B und C als Spezialfall von D auffassen kann, indem man zuläßt, daß e und n auch die Länge Null haben, d.h. für leere Figurenfolgen stehen dürfen. Nach diesem Regelsystem konstruiert man also Zählzeichen wie folgt:

$$\overset{A}{\Rightarrow} 1 \overset{B}{\Rightarrow} 10 \overset{C}{\Rightarrow} 11 \overset{B}{\Rightarrow} 100 \overset{C}{\Rightarrow} 101 \overset{D}{\Rightarrow} 110 \overset{C}{\Rightarrow} 111 \overset{B}{\Rightarrow} 1000 \overset{D}{\Rightarrow} \ldots$$

Es ist klar, daß dieses Regelsystem (mit völlig einwandfreien Zählzeichenregeln) nicht in eine eineindeutige Zuordnung zu einem Regelsystem wie dem aus A_1 und F_1 bestehenden gebracht werden kann und in diesem Sinn eine andere Struktur hat. Dennoch gibt es eine ganz offensichtliche Beziehung beider Regelsysteme. Zwar haben nicht die beiden Regelsysteme selbst, dafür aber die von ihnen erzeugten Zählzeichenreihen ›die gleiche Struktur‹, nämlich in dem Sinne, daß jedes Zählzeichen eine genau bestimmte ›Stelle‹ in der vom jeweiligen Regelsystem erzeugten lückenlosen und unverzweigten ›Kette‹ von Zählzeichen einnimmt, daß es in dieser Kette an ›soundsovielter Stelle‹ auftritt und dadurch eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Zählzeichen je zweier solcher Ketten ermöglicht wird. Damit ist auch der Anschluß an die beim konstruktiven Ansatz zur Begründung der Arithmetik vielberufene *Zählpraxis* erreicht, da es ersichtlich genau diese Eigenschaft ist, die ein Regelsystem zur Herstellung von Zählzeichen geeignet macht, durch die Anzahlen von Dingen in Dingsystemen und Stellen oder Plätze in Reihen eindeutig feststellbar und mitteilbar gemacht werden sollen.

Wie läßt sich nun an den Regelsystemen selbst kontrollieren, ob sie diese Eignung besitzen? Die Ketteneigenschaft des erzeugten Zählzeichenvorrates wird dann und nur dann gesichert sein, wenn es genau eine Anfangsregel gibt und *wenn auf jedes Ergebnis einer Regelanwendung die Prämisse genau einer Regel des Regelsystems anwendbar ist* (eine Formulierung, die impliziert, daß jede Fortsetzungsregel genau eine Prämisse hat). Dies ist bei unserem Regelsystem für das Dualsystem erfüllt: die Anwendungsergebnisse der Regel A haben die Form '1', also die Form der Prämisse von B, die Anwendungsergebnisse von B haben die Form '$1n$' und damit der Prämisse von C, die Anwendungsergebnisse von C haben die Form '$x1$' und damit, wenn in ihnen eine Figur 0 auftritt, die Form der Prämisse von D, andernfalls von B; die Anwendungsergebnisse von D schließlich haben die Form '$x1n$' und damit die Form der Prämisse von C. Ein Regelsystem mit dieser Eigenschaft möge ein *kohärentes Regelsystem* heißen. Unter der *›natürlichen Zuordnung‹* der durch zwei kohärente Regelsysteme K_1 und K_2 erzeugten Zählzeichenketten sei die Zuordnung verstanden, die dem durch die Anfangsregel von K_1 erzeugten Zählzeichen das durch die Anfangsregel von K_2 erzeugte Zählzeichen, und danach *schrittweise* jedem durch eine Fortsetzungsregel von K_1 erzeugten Zählzeichen das durch die ihr aufgrund der Kohärenzeigenschaft eindeutig entsprechende Fortsetzungsregel von K_2 erzeugte Zählzeichen zuordnet. Die zur Bestimmung der arithmetischen Aussagen und damit der Arithmetik erforderliche Invarianz läßt sich dann formulieren als *Invarianz gegenüber Ersetzung aller in einer arithmetischen Aussage auftretenden Zählzeichen durch die ihnen bei der natürlichen Zuordnung zu einem anderen kohärenten Regelsystem entsprechenden Zählzeichen.* Die Unabhängigkeit von der Ausführung der Zählzeichen bleibt dabei als trivial und für die arithmetischen Aussagen auch nicht charakteristisch unausdrücklich unterstellt. Festgehalten sei nur noch, daß die von SEIFFERT betrachtete Verwendung paarweise verschiedener Gegenstände des täglichen Gebrauchs zum Zählen, wobei wir "von dem ›eigentlichen‹ Gebrauch [. . .] *absehen* und uns nur auf ihren Gebrauch *›als‹ Zählgegenstände* konzentrieren" (a. a. O., S. 28), nur scheinbar umfassender ist: zur Formulierung arithmetischer Aussagen könnten verschiedene Gegenstände des täglichen Gebrauchs nur dienen, wenn ihre Verwendung selbst gewissen Regeln der von uns beschriebenen Art unterworfen würde.

PETER ZAHN

KONSTRUKTIVE BEGRÜNDUNG DER PERRONSCHEN INTEGRATIONSTHEORIE

0. *Grundlagen*

Dieser Arbeit liegt ein Zahlensystem zugrunde, das in groben Zügen mit den Zahlensystemen von H. WEYL in [5] und von P. LORENZEN in [3] übereinstimmt. Die reellen Zahlen werden hierbei aus gewissen rationalen Folgen $r_* = (r_1, r_2, \ldots), s_*, \ldots$ durch Abstraktion wie folgt gewonnen. Mit Variablen k, l, m, n für natürliche Zahlen $1, 2 \leftrightharpoons 1', 3 \leftrightharpoons 1'', \ldots$ und einer Variablen ε für positiv-rationale Zahlen wird gesetzt

$$\lim_n r_n \in \mathbf{R} \leftrightharpoons \bigwedge_\varepsilon \bigvee_k \bigwedge_{m,n>k} |r_m - r_n| < \varepsilon$$

$$\lim_n r_n = \lim_n s_n \leftrightharpoons \bigwedge_\varepsilon \bigvee_k \bigwedge_{n>k} |r_n - s_n| < \varepsilon$$

$$\lim_n r_n > \lim_n s_n \leftrightharpoons \bigvee_\varepsilon \bigvee_k \bigwedge_{n>k} r_n > s_n + \varepsilon$$

$$(\lim_n r_n \dot{\pm} \lim_n s_n) \leftrightharpoons \lim_n (r_n \dot{\pm} s_n) \qquad \text{usw.}$$

Die Figuren $\lim_n r_n$, für die $\lim_n r_n \in \mathbf{R}$ gilt, heißen *reelle Zahlen.* Es werden nur solche Aussagen $A(x)$ über reelle Zahlen x eingeführt, die *invariant* sind in bezug auf die soeben definierte Gleichheit in $\mathbf{R}$. D.h. für reelle Zahlen x, y gilt

$$x = y \wedge A(x) \Rightarrow A(y).$$

Für das hier gewählte Zahlensystem ist es wesentlich, daß zur Darstellung der rationalen Zahlenfolgen r_* und der reellen Zahlen $\lim_n r_n$ nur solche rationalen Zahlenterme r_n (i.a. mit der freien Variablen n) verwendet werden, die sich in einer Sprache 1. Stufe darstellen (kennzeichnen) lassen. Diese Sprache nenne ich die *primäre* Sprache. Ihre Aussagen und Formeln enthalten nur Variable für natürliche oder rationale Zahlen, jedoch noch keine Variablen für Mengen, Folgen, reelle Zahlen usw., da diese Objekte erst nach Vollendung der Konstruktion der primären Sprache gewonnen werden. Um dann z.B. über ›alle‹ oder ›einige‹ reelle Zahlen sprechen zu können, benötigen wir als Erweiterung der primären noch eine sekundäre Sprache. Diese erhalten wir durch Einführung von (neuen) Variablen für reelle Zahlen, für primäre (evtl. auch mehrfache) rationale Zahlenfolgen sowie für primäre Mengen und Relationen rationaler Zahlen. Redet man jedoch z.B. über ›alle‹ oder ›einige‹ reelle Funktionen (s.u.) oder Mengen reeller Zahlen, die in der sekundären Sprache darstellbar sind, so werden dabei (neue) Variable für diese Funktionen oder Mengen verwendet. Diese Variablen gehören einer tertiären Sprache an. – Nachdem so sukzessive nur wenige (endlich viele) Sorten von Variablen eingeführt worden sind, kann man in der dadurch erweiterten Sprache z.B. die konstruktive Analysis sowie die konstruktive Maß- und Integrationstheorie in ähnlicher Weise durchführen wie in H. WEYL [5], in P. LORENZEN [3], [1] und in P. ZAHN [6], [7].

Die primäre Sprache darf nicht zu eng sein. Sie muß z.B. die Darstellung der Addition $(+)$ in $\mathbf{N} \leftrightharpoons \{1, 2, 3, \ldots\}$ gestatten. Mit der Schreibweise $(k, l, m) \in (+)$ für $k + l = m$ soll gelten

$$(1, l, n) \in (+) \Leftrightarrow n = l'$$

$$(k', l, n) \in (+) \Leftrightarrow \bigvee_m ((k, l, m) \in (+) \wedge n = m').$$

Allgemeiner benötigen wir in der primären Sprache die Darstellbarkeit ein- oder mehrstelliger Relationen $R \subseteq \mathbf{N} \times \cdots \times \mathbf{N}$, die Bedingungen folgender Art genügen:

$$(1, n_1, \ldots, n_i) \in R \Leftrightarrow A(n_1, \ldots, n_i)$$

$$(k', n_1, \ldots, n_i) \in R \Leftrightarrow B(k, n_1, \ldots, n_i, R),$$

$i \geqq 0$, wobei $A(\ldots)$ und $B(\ldots)$ primäre Formeln sind. In $B(k, \ldots, R)$ darf R schon selbst vorkommen, aber nur in Teilprimformeln der Gestalt $(k, \ldots) \in R$. Auf deren Gültigkeit wird also die Gültigkeit von $(k', \ldots) \in R$ ›rekursiv‹ zurückgeführt. Hierbei beachte man, daß k' der ›Nachfolger‹ von k ist. Die angegebene Kennzeichnung von R ist also nicht zirkelhaft.

Wir beschränken uns hier auf die engste primäre Sprache, in der neben der Gleichheit in $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ Relationen R dieser Art darstellbar sind, und die abgeschlossen ist in bezug auf die Verknüpfungen ihrer Formeln und Aussagen mittels der logischen Junktoren und Quantoren. Die ›Indefinitheit‹ der Möglichkeiten zu sukzessiven Erweiterungen dieser Sprache wird hier nirgends benutzt. Wer jedoch das LORENZENsche System aus [3] kennt, kann im folgenden die Termini ‚primär' – ‚sekundär' auch durch ‚definit' – ‚indefinit' ersetzen.

Die Gültigkeit der Aussagen unserer Theorie kann definiert werden als ihre Herleitbarkeit in einem geeigneten halbformalen Regelsystem oder als ihre dialogische Verteidigbarkeit (vgl. P. LORENZEN [2]). Legt man dabei eine geeignete Interpretation der Junktoren und Quantoren zugrunde, so gelten u.a. alle klassisch-logisch wahren Aussagen. (Vgl. auch P. ZAHN [7].)

Wenn in dieser Arbeit von Zahlenfolgen bzw. Zahlendoppelfolgen die Rede ist, sind stets Folgen $(a_1, a_2, \ldots) = a_* = \lim_n r_{*n}$ bzw. Doppelfolgen $a_{*\dagger} = \lim_n r_{*\dagger n}$ gemeint, die durch einen primären rationalen Term r_{kn} bzw. r_{kmn} gegeben sind. Ferner betrachten wir nur solche reellen Funktionen f und Folgen f_* reeller Funktionen, für die es zu jeder Zahlenfolge a_* (mit Gliedern aus der Urbildmenge von f) eine Zahlenfolge b_* bzw. Doppelfolge $b_{*\dagger}$ gibt, so daß für alle m, n gilt

$$f(a_m) = b_m$$

bzw. $$f_n(a_m) = b_{mn}.$$

Entsprechendes sei auch verabredet, wenn $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ statt $\mathbf{R}$ zugrundegelegt wird. (Für alle Funktionen, deren Existenz im folgenden behauptet wird, kann man leicht einsehen, daß es sich um Funktionen dieser Art handelt. Das gleiche gilt für Funktionenfolgen usw.)

Z. B. für Funktionen $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ist also der Term $f(r)$ mit einer Variablen r für rationale Zahlen primär darstellbar, und somit existiert z. B. das Supremum

$$\sup_{r \in \mathbf{Q}} f(r) \in \bar{\mathbf{R}}.$$

Die folgenden Ausführungen sind eine Übertragung ins Konstruktive der entsprechenden Abschnitte aus dem Buch [4] von I. P. NATANSON. Die LEBESGUEsche Maß- und Integrationstheorie wird dabei als bekannt vorausgesetzt (vgl. [1], [6]).

1. *Definition des* PERRON-*Integrals*

1.1. Vorbereitungen

Das P-Integral (PERRON-Integral) einer Funktion

$$f: [a, b] \to \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}, \quad [a, b] \subseteq \mathbf{R},$$

wird definiert mit Hilfe sogenannter Unterfunktionen $U: [a, b] \to \mathbf{R}$ und Oberfunktionen $V: [a, b] \to \mathbf{R}$, zu denen insbesondere die Stammfunktionen von f gehören. Für $x \in [a, b]$ setzt man

$$(1) \quad \begin{cases} \bar{D}U(x) \leftrightharpoons \inf\limits_{\delta > 0} \sup\limits_{\substack{0 < |h| < \delta \\ a \leq x+h \leq b}} \dfrac{U(x+h) - U(x)}{h} \\[2ex] \underline{D}V(x) \leftrightharpoons \sup\limits_{\delta > 0} \inf\limits_{\substack{0 < |h| < \delta \\ a \leq x+h \leq b}} \dfrac{V(x+h) - V(x)}{h} \end{cases}$$

und nennt U eine *Unter-* und V eine *Oberfunktion* von f, wenn U und V stetig sind und für alle $x \in [a, b]$ gilt

$$(2)\quad \begin{cases} U(a) = 0 & V(a) = 0 \\ \bar{D}U(x) < +\infty & \underline{D}V(x) > -\infty \\ \bar{D}U(x) \leqq f(x) & \underline{D}V(x) \geqq f(x). \end{cases}$$

Damit auch in unserer konstruktiv erzeugten Menge $\bar{\mathbf{R}}$ alle in (1) vorkommenden Infima und Suprema für beliebige Funktionen $U: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ und $V: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ existieren, verabreden wir, daß in (1) und im folgenden h eine Variable für *rationale* und (um eine vereinfachte Notation zu gestatten) *von Null verschiedene* Zahlen sein soll. (δ, ε verwende ich weiterhin als Variable für positiv-rationale Zahlen.)

Setzt man (bei festem x)

$$Q(y) \leftrightharpoons \frac{U(x+y) - U(x)}{y}$$

für $y \neq 0$ und $a \leqq x + y \leqq b$ (hierzu analoge Bedingungen führe ich im folgenden nicht mehr an), so ist für *stetige* U auch Q stetig (außer bei Null). Man überlegt sich leicht, daß dann

$$\sup_{|h| < \delta} Q(h)$$

sogar das Supremum *aller* Werte $Q(y)$ mit $0 < |y| < \delta$ ist. D.h. unsere Verabredung, h in (1) als Variable nur für rationale Zahlen zu verwenden, ist praktisch belanglos. Für

$$S(y) \leftrightharpoons \sup_{|h| < y} Q(h)$$

zeigt man ferner leicht, daß S eine wachsende Funktion darstellt (d.h. $S(x) \leqq S(y)$ für $x \leqq y$) und daher $\inf_{\delta} S(\delta)$ sogar das Infimum aller Werte $S(y)$ mit reellem $y > 0$ ist.

1.2. Def.

Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$, $a \leqq b$, heißt *P-integrierbar* (Perron-integrierbar), wenn es Funktionenfolgen U_*, V_* derart gibt, daß für alle n U_n eine Unter- und V_n eine Oberfunktion von f ist und

$$\lim_{n} (V_n(b) - U_n(b)) = 0$$

gilt. Dann soll das Folgenpaar (U_*, V_*) ein *P-Gerüst* von f heißen. – Man sagt auch, f sei P-integrierbar *über* $[a, b]$, wenn $f: M \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ und $[a, b] \subseteq M \subseteq \mathbf{R}$ gilt und $f | [a, b]$ (dies sei die Einschränkung von f auf $[a, b]$) P-integrierbar ist.

1.3. Satz

Ist (U_*, V_*) ein P-Gerüst von f, dann sind die Folgen U_* und V_* konvergent und es gilt

$$\lim_n U_n = \lim_n V_n.$$

Beweis. (U_*, V_*) sei ein P-Gerüst von $f\colon [a,b] \to \bar{\mathbf{R}}$. Nach dem später angeführten Hilfssatz 1.8 wachsen alle Funktionen $V_n - U_m$. Wegen $V_n(a) - U_m(a) = 0$ ist also $U_m \leqq V_n$. Es folgt

$$V_m - V_n \leqq V_m - U_m \leqq V_m(b) - U_m(b).$$

Wegen $\lim\limits_m (V_m(b) - U_m(b)) = 0$ gibt es also für alle ε ein k, so daß für alle $m, n > k$ gilt $|V_m - V_n| < \varepsilon$ und $|V_m - U_m| < \varepsilon$. Daraus folgt die Behauptung.

1.4. Satz

Sind (U_{1*}, V_{1*}) und (U_{2*}, V_{2*}) P-Gerüste von f, so gilt

$$\lim_n U_{1n} = \lim_n U_{2n} = \lim_n V_{1n} = \lim_n V_{2n}.$$

Beweis. Wieder nach 1.8 gilt $U_{1n} \leqq V_{2n}$ und $U_{2n} \leqq V_{1n}$ für alle n, und somit nach 1.3

$$\lim_n V_{1n} = \lim_n U_{1n} \leqq \lim_n V_{2n} = \lim_n U_{2n} \leqq \lim_n V_{1n}.$$

1.5. Def.

Ist (U_*, V_*) ein P-Gerüst von $f | [a,b]$, $f\colon M \to \bar{\mathbf{R}}$, $[a,b] \subseteq M$, so sei

$$P\int_a^b f = \lim_n U_n(b) = \lim_n V_n(b).$$

das *P-Integral* von f über $[a,b]$.

Nach 1.2 und 1.3 existiert das P-Integral für P-integrierbare Funktionen, und nach 1.4 ist es eindeutig bestimmt. Da 1.5 nur insoweit eine explizite Definition von

$$P\int_a^b f$$

liefert, als für $f | [a,b]$ ein P-Gerüst (U_*, V_*) effektiv angegeben worden ist, haben wir i. a. das Symbol

$$P\int_a^b f$$

als einen sog. Kennzeichnungsterm aufzufassen. Sätze

$$A(P\int_a^b f)$$

(wobei $A(x)$ eine Formel mit der frei vorkommenden Zahlenvariablen x sei) lesen wir also etwa wie folgt: Ist (U_*, V_*) ein beliebiges P-Gerüst von $f|[a,b]$, so gilt $A(\lim_n V_n(b))$.

1.6. Hilfssatz

Sind F und G Funktionen von $[a,b]$ in $\mathbf{R}$ und gilt

$$\underline{D}F(x) > -\infty, \quad \underline{D}G(x) > -\infty, \quad x \in [a,b],$$

so gilt

$$\underline{D}(F+G)(x) \geqq \underline{D}F(x) + \underline{D}G(x).$$

Beweis. Es sei

$$Q(h) \leftrightharpoons \frac{F(x+h)-F(x)}{h}, \quad R(h) \leftrightharpoons \frac{G(x+h)-G(x)}{h},$$

$$I(\delta) \leftrightharpoons \inf_{|h|<\delta} Q(h), \quad J(\delta) \leftrightharpoons \inf_{|h|<\delta} R(h)$$

$(a \leqq x \leqq b,\ a \leqq x+h \leqq b)$. Für alle h mit $|h| < \delta$ gilt

$$I(\delta) + J(\delta) \leqq Q(h) + R(h).$$

Hieraus folgt

$$I(\delta) + J(\delta) \leqq \inf_{|h|<\delta} \big(Q(h) + R(h)\big).$$

Da I, J fallende Funktionen sind, erhalten wir für $\delta_1 \leqq \delta_2$ sukzessive

$$I(\delta_1) + J(\delta_2) \leqq I(\delta_1) + J(\delta_1) \leqq \sup_\delta \big(I(\delta) + J(\delta)\big)$$

$$\sup_\delta I(\delta) + J(\delta_2) \leqq \sup_\delta \big(I(\delta) + J(\delta)\big)$$

$$\sup_\delta I(\delta) + \sup_\delta J(\delta) \leqq \sup_\delta \big(I(\delta) + J(\delta)\big),$$

d.h. $\underline{D}F(x) + \underline{D}G(x) \leqq \underline{D}(F+G)(x)$.

1.7. Hilfssatz

Sind U und V Funktionen von $[a,b]$ in $\mathbf{R}$ und gilt

$$\bar{D}U(x) < +\infty, \quad \underline{D}V(x) > -\infty, \quad x \in [a,b],$$

so ist

$$\underline{D}(V-U)(x) \geqq \underline{D}V(x) - \bar{D}U(x).$$

Beweis. Nach 1.6 gilt $\underline{D}(V+(-U))(x) \geqq \underline{D}V(x) + \underline{D}(-U)(x)$. Wegen $\underline{D}(-U)(x) = -\bar{D}U(x)$ folgt daraus die Behauptung.

Nun können wir den folgenden schon benutzten Hilfssatz beweisen:

1.8. Hilfssatz

Ist U eine Unterfunktion und V eine Oberfunktion ein und derselben Funktion $f: [a,b] \to \mathbf{R}$, so wächst die Differenzenfunktion $V-U$. Folglich ist $U \leqq V$ (wegen $U(a) = V(a)$).

Beweis. Nach 1.1 (2) und 1.7 folgt aus der Voraussetzung

$$\underline{D}(V-U) \geqq \underline{D}V - \bar{D}U \geqq 0.$$

Es sei

$$W \leftrightharpoons V - U.$$

Wegen $\underline{D}W \geqq 0$ kann nun gezeigt werden, daß W eine wachsende Funktion ist. Wir nehmen irgendein ε, setzen

$$W_\varepsilon(x) \leftrightharpoons W(x) + \varepsilon \cdot x$$

und nehmen an, es wäre

$$W_\varepsilon(a) > W_\varepsilon(b).$$

Ist dann $c = \frac{1}{2}(a+b)$, $a < b$, so gilt

$$W_\varepsilon(a) > W_\varepsilon(c) \quad \text{oder} \quad W_\varepsilon(c) > W_\varepsilon(b).$$

Im Falle $W_\varepsilon(a) > W_\varepsilon(c)$ sei $a_1 = a$, $b_1 = c$; anderenfalls sei $a_1 = c$, $b_1 = b$. Ferner sei $c_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$. Nun gilt wieder

$$W_\varepsilon(a_1) > W_\varepsilon(c_1) \quad \text{oder} \quad W_\varepsilon(c_1) > W_\varepsilon(b_1).$$

Nun sei $a_2 = a_1$, $b_2 = c_1$ für $W_\varepsilon(a_1) > W_\varepsilon(c_1)$; anderenfalls sei $a_2 = c_1$, $b_2 = b_1$. – Die Fortsetzung dieses Verfahrens führt zu primären reellen Folgen a_*, b_*, da sich z. B. die Folgenglieder a_n durch die natürlichen Zahlen

$$k_n = \frac{a_n - a}{b - a} \cdot 2^n$$

repräsentieren lassen. Für alle n gilt dann

$$W_\varepsilon(a_n) > W_\varepsilon(b_n),\; [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n],\; b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Daher existiert

$$c \leftrightarrows \lim_n a_n (= \lim_n b_n),$$

und für alle n gilt offenbar

$$c \in [a_n, b_n],$$

also

$$W_\varepsilon(a_n) > W_\varepsilon(c) \quad \text{oder} \quad W_\varepsilon(c) > W_\varepsilon(b_n).$$

Im ersten Falle sei $y_n = a_n - c(<0)$, anderenfalls sei $y_n = b_n - c(>0)$. Jedenfalls ist dann

$$Q_n \leftrightarrows \frac{W_\varepsilon(c+y_n) - W_\varepsilon(c)}{y_n} < 0.$$

Nach der Definition von $\underline{D}W(c)$ und dem Ergebnis am Ende von 1.1 gibt es zu ε ein δ, so daß für $0 < |y| < \delta$ gilt

$$\frac{W(c+y) - W(c)}{y} > \underline{D}W(c) - \varepsilon.$$

Für genügend große n wird $0 < |y_n| < \delta$, also

$$Q_n = \frac{\big(W(c+y_n) + \varepsilon \cdot (c+y_n)\big) - \big(W(c) + \varepsilon \cdot c\big)}{y_n}$$
$$= \varepsilon + \frac{W(c+y_n) - W(c)}{y_n} > \underline{D}W(c) \geqq 0.$$

Widerspruch. Also ist obige Annahme, es wäre $W_\varepsilon(a) > W_\varepsilon(b)$ falsch, d.h. für alle ε gilt $W(a) + \varepsilon \cdot a \leqq W(b) + \varepsilon \cdot b$, also $W(a) \leqq W(b)$. Entsprechend zeigt man auch $W(x) \leqq W(y)$ für alle x, y mit $a \leqq x < y \leqq b$.

1.9. Satz

Ist F eine Stammfunktion von $f: [a, b] \to \mathbf{R}$, so ist f P-integrierbar, und es gilt

$$P\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Beweis. Die Funktionen $U_n \leftrightarrows V_n \leftrightarrows F - F(a)$ bilden ein P-Gerüst von f.

1.10. *Beispiel* einer Funktion, die P-integrierbar, aber nicht L-integrierbar (d. h. LEBESGUE-integrierbar) ist. Es sei $F\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ mit $F(0)=0$ und

$$F(x) = x^2 \cdot \cos\frac{\pi}{x^2} \quad \text{für} \quad 0 < x \leqq 1.$$

F besitzt überall in $[0,1]$ eine endliche Ableitung F', weil insbesondere

$$F'(0) = \lim_{x \to 0}\left(x \cdot \cos\frac{\pi}{x^2}\right) = 0$$

ist. Die Funktion $f \leftrightharpoons F'$ ist also P-integrierbar, jedoch nicht L-integrierbar, da das L-Integral (LEBESGUE-Integral)

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx = \infty$$

ist. Denn für

$$a_n \leftrightharpoons \sqrt{\frac{2}{4n+1}}, \qquad b_n \leftrightharpoons \sqrt{\frac{1}{2n}}$$

ergibt sich

$$\int_{a_n}^{b_n} |f(x)|\,dx = \frac{1}{2n}.$$

Da die Intervalle $[a_n, b_n]$ einander fremd sind, folgt daraus

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx = \sum_n \frac{1}{2n} = \infty.$$

2. *Grundeigenschaften des P-Integrals*

2.1. Satz

Vor. f sei P-integrierbar über $[a,b]$, und es sei $a < c < b$.

Beh. f ist P-integrierbar über $[a,c]$ und über $[c,b]$, und es gilt

$$P\int_a^b f = P\int_a^c f + P\int_c^b f.$$

Beweis. (U_*, V_*) sei ein P-Gerüst von $f|[a,b]$. Dieses liefert nach 1.3 auch ein P-Gerüst von $f|[a,c]$. Also ist f P-integrierbar über $[a,c]$, und es gilt

$$P\int_a^c f = \lim_n U_n(c) = \lim_n V_n(c).$$

Als Unter- bzw. Oberfunktionen von $f|[c,b]$ dienen in $[c,b]$

$$U_n - U_n(c), \qquad V_n - V_n(c).$$

Wegen

$$\begin{aligned} 0 &\leqq (V_n(b) - V_n(c)) - (U_n(b) - U_n(c)) \\ &\leqq V_n(b) - U_n(b) \end{aligned}$$

ist f auch über $[c,b]$ P-integrierbar, und es gilt

$$P\int_c^b f = \lim_n (V_n(b) - V_n(c)) = P\int_a^b f - P\int_a^c f.$$

2.2. Satz

Vor. Es sei $a < c < b$, und die Funktion f sei P-integrierbar über $[a,c]$ und über $[c,b]$.

Beh. Dann ist f auch über $[a,b]$ P-integrierbar.

Beweis. Für f sei (U_{1*}, V_{1*}) ein P-Gerüst über $[a,c]$ und (U_{2*}, V_{2*}) ein P-Gerüst über $[c,b]$. Für die Funktionen U_n, V_n mit

$$U_n(x) = \begin{cases} U_{1n}(x) & \text{für } a \leqq x \leqq c \\ U_{1n}(c) + U_{2n}(x) & \text{für } c < x \leqq b, \end{cases}$$
$$V_n(x) = \begin{cases} V_{1n}(x) & \text{für } a \leqq x \leqq c \\ V_{1n}(c) + V_{2n}(x) & \text{für } c < x \leqq b \end{cases}$$

gilt

$$\begin{aligned} &\lim_n (V_n(b) - U_n(b)) \\ &= \lim_n (V_{1n}(c) - U_{1n}(c)) + \lim_n (V_{2n}(b) - U_{2n}(b)) = 0. \end{aligned}$$

Ferner erkennt man leicht, daß die Ungleichungen

$$\bar{D}U_n(x) < \infty, \qquad \bar{D}U_n(x) \leqq f(x),$$
$$\underline{D}V_n(x) > -\infty, \qquad \underline{D}V_n(x) \geqq f(x)$$

insbesondere auch für $x = c$ gelten. Daher ist (U_*, V_*) ein P-Gerüst von $f|[a,b]$.

2.3. Satz

Vor. f sei P-integrierbar über $[a,b]$, und es sei $c \in \mathbf{R}$.

Beh. Dann ist auch die Funktion $c \cdot f$ P-integrierbar über $[a,b]$ mit
$P\int\limits_a^b (c\cdot f) = c \cdot P\int\limits_a^b f$.

Beweis. Für $c=0$ folgt der Satz aus $P\int\limits_a^b 0 = 0$, und dies ergibt sich daraus, daß die Konstante 0 eine Stammfunktion von sich selbst ist.

Nun sei $c<0$, und (U_*, V_*) sei ein P-Gerüst von $f|[a,b] \to \mathbf{R}$. Für alle n ist dann $c \cdot U_n$ eine Oberfunktion und $c \cdot V_n$ eine Unterfunktion von $c \cdot f$. Es gilt

$$\lim_n (c \cdot U_n(b) - c \cdot V_n(b)) = -c \cdot \lim_n (V_n(b) - U_n(b)) = 0,$$

und somit ist $(c \cdot V_*, c \cdot U_*)$ ein P-Gerüst von $c \cdot f$. Daraus folgt

$$P\int\limits_a^b (c\cdot f) = \lim_n c \cdot V_n(b) = c \cdot \lim_n V_n(b) = c \cdot P\int\limits_a^b f.$$

Schließlich sei $c>0$. Wegen $c=(-1)(-c)$, $-1<0$, $-c<0$ folgt in diesem Falle die Behauptung aus dem soeben schon Bewiesenen.

2.4. Satz

Vor. f und g seien P-integrierbar über $[a,b]$, und die Summe $f+g$ sei in $[a,b]$ nirgends unbestimmt (d.h. für kein $x \in [a,b]$ sei $f(x)=\infty$, $g(x)=-\infty$ oder vice versa).

Beh. Dann ist $f+g$ P-integrierbar, und es gilt
$P\int\limits_a^b (f+g) = P\int\limits_a^b f + P\int\limits_a^b g$.

Beweis. Ist (U_{1*}, V_{1*}) ein P-Gerüst von f und (U_{2*}, V_{2*}) ein P-Gerüst von g, so erweist sich $(U_{1*}+U_{2*}, V_{1*}+V_{2*})$ als ein P-Gerüst von $f+g$. Hieraus ergibt sich die Behauptung von selbst.

2.5. Satz

Vor. f sei P-integrierbar über $[a,b]$, und für fast alle $x \in [a,b]$ sei $f(x)=g(x)$ (d.h. die Menge aller $x \in [a,b]$ mit $f(x) \neq g(x)$ habe das LEBESGUE-Maß Null), $g:[a,b] \to \bar{\mathbf{R}}$.

Beh. g ist P-integrierbar mit

$$P\int_a^b f = P\int_a^b g.$$

Bew. Es sei $N :\Leftrightarrow \{x \in [a,b];\ f(x) \neq g(x)\} \neq \emptyset$. Nach Vor. ist das L-Maß (LEBESGUE-Maß) von N gleich Null. Daher gibt es nach dem folgenden Hilfssatz 2.6 eine stetig wachsende Funktion $S:[a,b] \to \mathbf{R}$, deren Ableitung $S' = \infty$ in N ist. Dabei dürfen wir $S(a)=0$ und $S(b)=1$ annehmen. (Denn anderenfalls gilt dies für die Funktion

$$\frac{S-S(a)}{S(b)-S(a)}$$

statt für S.) Nun sei

$$U_n^0 :\Leftrightarrow U_n - \frac{1}{n} \cdot S$$

$$V_n^0 :\Leftrightarrow V_n + \frac{1}{n} \cdot S.$$

Es wird gezeigt, daß (U_*^0, V_*^0) ein P-Gerüst von g ist. Weil S wächst, gilt $\underline{D}V_n^0 \geqq \underline{D}V_n + \frac{1}{n} \cdot \underline{D}S \geqq \underline{D}V_n > -\infty$ in $[a,b]$ sowie $\underline{D}V_n^0 \geqq f = g$ in $[a,b]\backslash N$. In N gilt noch $\underline{D}V_n^0 = \infty \geqq g$. Also ist V_n^0 eine Oberfunktion von g, und entsprechend erweist sich U_n^0 als eine Unterfunktion von g. Ferner gilt

$$V_n^0(b) - U_n^0(b) = V_n(b) - U_n(b) + \frac{2}{n},$$

also

$$\lim_n (V_n^0(b) - U_n^0(b)) = 0.$$

Somit ist (U_*^0, V_*^0) ein P-Gerüst von g. Schließlich gilt

$$P\int_a^b g = \lim_n V_n^0(b) = \lim_n V_n(b) = P\int_a^b f.$$

Zu zeigen ist noch:

2.6. Hilfssatz

Vor. $N \subseteq [a,b]$, N hat das L-Maß Null.

Beh. Es gibt eine stetige, wachsende Funktion $S:[a,b] \to \mathbf{R}$ mit $S'(x) = \infty$ für alle $x \in N$.

Beweis. λ sei das L-Maß. Wegen $\lambda N = 0$ gibt es eine Folge $B_* = \bigcup_n]p_{*n}, q_{*n}[$ offener Bereiche (mit rationalen Doppelfolgen $p_{*\dagger}$, $q_{*\dagger}$), so daß $N \subseteq B_k$ für alle k und $\lim\limits_k \lambda B_k = 0$ gilt. k_n sei das kleinste k mit $\lambda B_k < 2^{-n}$, und es sei $C_n \leftrightharpoons B_{k_n}$. Für alle n gilt also

$$N \subseteq C_n \quad \text{und} \quad \lambda C_n < 2^{-n}.$$

Ferner sei

$$f_n(x) = \lambda(C_n \cap [a,x]).$$

Die Funktionen f_n sind stetig, wachsend und erfüllen in $[a,b]$ die Ungleichungen $0 \leqq f_n < 2^{-n}$. Daher ist auch die Funktion

$$S \leftrightharpoons \sum_n f_n$$

stetig und wachsend, und in $[a,b]$ gilt $0 \leqq S < 1$.

Für $x \in N$ und genügend kleine δ ist $[x, x+\delta] \subseteq C_\nu$, also

$$f_\nu(x+\delta) = \lambda\big((C_\nu \cap [a,x]) + (C_\nu \cap]x, x+\delta])\big)$$
$$= f_\nu(x) + \delta.$$

Ebenso zeigt man für genügend kleine δ

$$f_\nu(x-\delta) = f_\nu(x) - \delta,$$

und damit insgesamt

$$\frac{f_\nu(x \pm \delta) - f_\nu(x)}{\pm\delta} = 1.$$

Daher gilt für alle n und genügend kleine $|h|$:

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} \geqq \sum_{\nu \leqq n} \frac{f_\nu(x+h) - f_\nu(x)}{h} = n,$$

also $S'(x) = \infty$.

2.7. Satz

Jede P-integrierbare Funktion ist fast überall endlich.

Beweis. U und V sei eine Unter- bzw. Oberfunktion der P-integrierbaren Funktion f, und es sei $W \leftrightharpoons V - U$. Nach dem Hilfssatz 1.7 gilt

$$\underline{D} W \geqq \underline{D} V - \bar{D} U.$$

Ist in einem Punkte x aber $f(x)=\infty$, so ist erst recht $\underline{D}V(x)=\infty$; wegen $\bar{D}U(x)<\infty$ ist dann also

$$\underline{D}W(x)=\infty.$$

Diese Gleichung gilt auch in jedem Punkte x, in dem $f(x)=-\infty$ ist. Somit ist die Menge der Punkte x, in denen $|f(x)|=\infty$ ist, in der Menge der Punkte x mit $\underline{D}W(x)=\infty$ enthalten, und der vorliegende Satz folgt daraus, daß $\underline{D}W=\infty$ nur in einer Menge vom L-Maße Null gelten kann, was der noch folgende wichtige Satz 2.10 aussagt. Dessen Beweis wird mit Hilfe der nächsten beiden Hilfssätze gelingen.

Anmerkung. Die Sätze 2.5 und 2.7 machen im Satz 2.4 die einschränkende Voraussetzung überflüssig, daß die Summe $f+g$ in $[a,b]$ nirgends unbestimmt sein darf. Denn weil die Summanden f, g fast überall endlich sind, kann man auf der Restmenge vom Maße Null $f(x)+g(x)$ durch Null ersetzen.

2.8. Hilfssatz

In $\mathbf{R}$ gibt es zu jedem offenen Bereich $B\subseteq]c,d[$ mit c, $d\in\mathbf{R}$ und $c\leqq d$ reelle Folgen a_*, b_*, so daß

$$B=\sum_n\,]a_n, b_n[,\quad a_n, b_n\notin B,\quad c\leqq a_n\leqq b_n\leqq d$$

für alle n gilt, wobei die Intervalle $]a_n, b_n[$ einander fremd sind.

Im folgenden verwenden wir p, q, r, s, t, p_1, ... als Variable für rationale Zahlen.

Beweis. B sei ein offener Bereich. Definitionsgemäß heißt dies, daß es primäre rationale Folgen p_*, q_* mit $B=\bigcup_n\,]p_n, q_n[$ gibt. Für $x\in\bar{\mathbf{R}}$ sei ferner

$$a=a(x)=\inf\{p;\,]p, x]\subseteq B\}$$

$$b=b(x)=\sup\{q;\, [x, q[\,\subseteq B\}.$$

Dieses Infimum und dieses Supremum existieren in $\bar{\mathbf{R}}$, da die angeführten rationalen Zahlenmengen primär sind. Dies beweist man (da z. B. $[x, q[\,=\bigcup_m\left[x, q-\frac{1}{m}\right]$ ist) mit Hilfe des Überdeckungssatzes von Heine-Borel (siehe [3]):

$$[x,y]\subseteq\bigcup_n\,]p_n, q_n[\;\Leftrightarrow\;\bigvee_k\, [x,y]\subseteq\bigcup_{n<k}\,]p_n, q_n[.$$

Beh. 1. $\quad]a,b[\subseteq B.$

Beweis. Für $a<y\leqq x$ gibt es nach der Definition von a ein p mit $a\leqq p<y\leqq x$ und $]p,x]\subseteq B$; hieraus folgt aber $y\in B$. Somit ist $]a,x]\subseteq B$, und ebenso beweist man $[x,b[\subseteq B$.

Beh. 2. $\quad a, b\notin B.$

Beweis. Wäre $a\in B$, so gäbe es r, s mit $a\in\,]r,s[\subseteq B$. Nach der Definition von a gäbe es ferner ein $p<s$ mit $]p,x]\subseteq B$. Dann wäre aber (wegen $r<a\leqq p<s$) $]r,x]\subseteq\,]r,s[\,\cup\,]p,x]\subseteq B$, also $a\leqq r<a$. – Ebenso zeigt man $b\notin B$.

Nun sei $r_n \leftrightharpoons \frac{1}{2}(p_n+q_n)$, $a_n\leftrightharpoons a(r_n)$, $b_n\leftrightharpoons b(r_n)$. Wegen

$]p_n, r_n]\cup[r_n, q_n[\,=\,]p_n, q_n[\subseteq B$ ist $]p_n, q_n[\subseteq\,]a_n, b_n[$

nach den Definitionen von a_n und b_n, also nach Beh. 1

$$B=\bigcup_n\,]p_n, q_n[\subseteq\bigcup_n\,]a_n, b_n[\subseteq B.$$

Schließlich sei $B\subseteq\,]c,d[$, $c\leqq d$ und $a'_n=a_n$, $b'_n=b_n$, falls $\emptyset\neq\,]a_n, b_n[\,\neq\,]a_m, b_m[$ für alle $m<n$; $a'_n=c=b'_n$, falls $]a_n, b_n[\,=\emptyset$ oder $]a_n, b_n[\,=\,]a_m, b_m[$ für ein $m<n$. Dann ist

$$B=\bigcup_n\,]a_n, b_n[\,=\sum_n\,]a'_n, b'_n[$$

mit $a'_n, b'_n\notin B$, $c\leqq a'_n\leqq b'_n\leqq d$ und einander fremden Intervallen $]a'_n, b'_n[$.

Denn ist nicht $a'_n=c=b'_n$, so ist $\emptyset\neq\,]a_n, b_n[\subseteq\,]c,d[$ und $a'_n=a_n$, $b'_n=b_n$, also $c\leqq a'_n\leqq b'_n\leqq d$. – Ferner sei jetzt $y\in\,]a'_m, b'_m[\,\cap\,]a'_n, b'_n[$. Wäre $a'_m<a'_n$, so wäre $a'_m<a'_n<y<b'_m$, also $a'_n\in\,]a'_m, b'_m[\subseteq B$. Wegen $a'_n\notin B$ ist also $a'_m\geqq a'_n$. Ebenso ist $a'_n\geqq a'_m$ und $b'_m=b'_n$, also insgesamt $]a'_m, b'_m[\,=\,]a'_n, b'_n[\,\neq\emptyset$. Hieraus folgt $a'_m=a_m$, $b'_m=b_m$, $a'_n=a_n$, $b'_n=b_n$ und schließlich $m=n$ (d.h. weder $m<n$ noch $n<m$).

2.9. Hilfssatz

Vor. $g:[a,b]\to\mathbf{R}$ sei stetig;

$$M=\{x\in\,]a,b[;\ \bigvee_{r\in\,]x,b[} g(r)>g(x)\}.$$

Beh. Es gibt reelle Folgen a_*, b_* mit

$$M=\sum_k\,]a_k, b_k[,\quad a_k\leqq b_k,\quad g(a_k)\leqq g(b_k)\quad\text{für alle } k$$

und einander fremden offenen Intervallen $]a_k, b_k[$.

Beweis. $M =]a, b[\cap \bigcup_{r \in]a, b[} (]-\infty, r[\cap g^{-1}(]-\infty, g(r)[))$ ist wegen der Stetigkeit von g ein offener Bereich, und somit gilt nach 2.8

$$M = \sum_k]a_k, b_k[$$

für ein Paar a_*, b_* reeller Folgen, wobei $a_k \leqq b_k$ und a_k, $b_k \notin M$ für alle k ist.

Zu zeigen ist nur noch: $g(a_k) \leqq g(b_k)$ für alle k. Hierfür nehmen wir an, es wäre $g(a_k) > g(b_k)$. Dann gibt es ein ε mit

$$g(a_k) > g(b_k) + \varepsilon.$$

Nun sei

$$c = \sup \{r \in]a_k, b_k[;\ g(r) > g(b_k) + \varepsilon\}.$$

Diese Menge ist nicht leer (da g stetig ist) und durch b_k nach oben beschränkt. Somit ist $c \in]a_k, b_k]$. Ferner gilt, wieder wegen der Stetigkeit, $g(c) \geqq g(b_k) + \varepsilon$, also $c \in]a_k, b_k[\subseteq M$. Daher gibt es ein $r \in]c, b[$ mit $g(r) > g(c) \geqq g(b_k) + \varepsilon$. Wäre auch $r < b_k$, also $r \in]a_k, b_k[$, so wäre $r \leqq c$ nach der Definition von c. Also ist $r \in]b_k, b[$. Wegen $g(r) > g(b_k)$ folgt daraus $b_k \in M$. Widerspruch. Somit ist unsere Annahme, es wäre $g(a_k) > g(b_k)$, falsch.

2.10. Satz von LEBESGUE

Jede stetige wachsende Funktion $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ ist fast überall differenzierbar, d. h. fast überall in $[a, b]$ gilt $\underline{D}f = \bar{D}f < \infty$.

Beweis. Es sei

$$\bar{D}^+ f(x) \leftrightharpoons \inf_\delta \sup_{0 < h < \delta} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\bar{D}^- f(x) \leftrightharpoons \inf_\delta \sup_{-\delta < h < 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

und entsprechend seien nach $\underline{D}^+ f(x)$ und $\underline{D}^- f(x)$ definiert. Es genügt zu zeigen, daß fast überall

$$\bar{D}^+ f < \infty \quad \text{und} \quad \bar{D}^+ f \leqq \underline{D}^- f$$

gilt. Wendet man nämlich die zweite Ungleichung auf die Funktion $\langle -f(-x) \rangle_{x \in [a, b]}$ an, so folgt, daß fast überall auch

$$\bar{D}^- f \leqq \underline{D}^+ f$$

gilt, und nun erhält man insgesamt

$$\bar{D}^+ f \leqq \underline{D}^- f \leqq \bar{D}^- f \leqq \underline{D}^+ f \leqq \bar{D}^+ f < \infty.$$

Beh. 1. $\bar{D}^+ f < \infty$ fast überall.

Beweis. Für $M \leftrightharpoons \{x \in]a, b[;\ \bar{D}^+ f(x) > T\}$ genügt es zu zeigen, daß

(1) $\lambda M \leqq \frac{1}{T}(f(b) - f(a))$

für alle $T > 0$ gilt. – Aus $\bar{D}^+ f(x) > T$ folgt für ein $h > 0$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > T.$$

Da f stetig ist, gibt es also ein rationales $s \in]x, b[$ mit

$$f(s) - f(x) > T \cdot (s - x).$$

Für

$$G(x) = f(x) - T \cdot x$$

heißt dies

$$G(s) - G(x) = f(s) - f(x) - T \cdot (s - x) > 0.$$

Da auch G stetig ist, läßt sich der letzte Hilfssatz 2.9 anwenden. Es gibt also reelle Folgen a_*, b_* mit

$$M \subseteq \sum_n]a_n, b_n[, \quad a_n \leqq b_n \quad \text{und} \quad G(a_n) \leqq G(b_n)$$

also

$$f(b_n) - f(a_n) \geqq T \cdot (b_n - a_n).$$

Da die Intervalle $]a_n, b_n[$ einander fremd sind und f wächst, erhalten wir

$$f(b) - f(a) \geqq \sum_n (f(b_n) - f(a_n)) \geqq T \cdot \sum_n (b_n - a_n) \geqq T \cdot \lambda M,$$

womit (1) und also auch Beh. 1 bewiesen ist.

Beh. 2. $\bar{D}^+ f \leqq \underline{D}^- f$ fast überall.

Beweis. Die Menge aller $x \in]a, b[$ mit $\underline{D}^- f(x) < \bar{D}^+ f(x)$ ist die Vereinigung der Mengen

$$N = \{x \in]a, b[;\ \underline{D}^- f(x) < t < T < \bar{D}^+ f(x)\},$$

wobei (t, T) alle Paare rationaler Zahlen durchläuft. Wegen der primären Abzählbarkeit der Menge dieser Paare genügt es zu zeigen, daß für jedes Paar (t, T) die Menge N das L-Maß Null hat.

Für $\underline{D}^{-}f(x) < t$ gibt es ein rationales $r \in]a, x[$ mit
$f(x) - f(r) < t \cdot (x - r)$.

Für die Funktion $g : [-b, -a] \to \mathbf{R}$ mit
$g(-x) = f(x) - t \cdot x$
gilt also

$$g(-x) - g(-r) = f(x) - f(r) - t \cdot (x - r) < 0.$$

Nun sei

$$M^1 = \{x \in]a, b[; \bigvee_{r \in]a, x[} g(-x) < g(-r)\}.$$

Es ist also $N \subseteq M^1$. Nach dem Hilfssatz 2.9 gibt es reelle Folgen a_*, b_* mit

$$M^1 = \sum_m]a_m, b_m[, \ a_m \leqq b_m, \ g(-b_m) \leqq g(-a_m),$$

also

$$f(b_m) - f(a_m) \leqq t \cdot (b_m - a_m).$$

Für $x \in]a_m, b_m[$ und $\bar{D}^{+}f(x) > T$ gibt es ein rationales $s \in]x, b_m[$ mit
$f(s) - f(x) > T \cdot (s - x)$.
Für die Funktion G mit

$$G(x) = f(x) - T \cdot x$$

folgt daraus

$$G(s) - G(x) = f(s) - f(x) - T \cdot (s - x) > 0.$$

Nun sei

$$M_m^2 = \{x \in]a_m, b_m[; \bigvee_{s \in]x, b_m[} G(s) > G(x)\},$$
$$M^2 = \sum_m M_m^2.$$

Es ist also $N \cap]a_m, b_m[\subseteq M_m^2 \subseteq]a_m, b_m[$ und somit $N \subseteq M^2 \subseteq M^1$. – Eine auf der Hand liegende Verallgemeinerung der Beweise von 2.8 und 2.9 zeigt, daß es reelle Doppelfolgen $a_{*\dagger}$, $b_{*\dagger}$ gibt mit

$$M_m^2 = \sum_n]a_{mn}, b_{mn}[, \ G(a_{mn}) \leqq G(b_{mn}), \ a_{mn} \leqq b_{mn},$$

also

$$f(b_{mn}) - f(a_{mn}) \geqq T \cdot (b_{mn} - a_{mn}).$$

Da die Funktion f wächst, erhält man insgesamt

$$T\cdot\lambda M^2=T\cdot\sum_{m,n}(b_{mn}-a_{mn})\leqq\sum_{m,n}\big(f(b_{mn})-f(a_{mn})\big)$$
$$\leqq\sum_m\big(f(b_m)-f(a_m)\big)\leqq t\cdot\sum_m(b_m-a_m)=t\cdot\lambda M^1,$$

also

$$\lambda M^2\leqq\frac{t}{T}\cdot\lambda M^1.$$

hierbei und im folgenden sei $N\neq\emptyset$ und somit

$$T>t>0.$$

Setzt man nun dieses Verfahren fort, indem man abwechselnd die Funktionen g und G verwendet, so erhält man beliebig viele Intervallsummen

$$M^1\supseteq M^2\supseteq M^3\supseteq M^4\supseteq\cdots\supseteq N$$

mit

$$\lambda M^{2k+1}\leqq\lambda M^{2k}\leqq\frac{t}{T}\cdot\lambda M^{2k-1},$$

also

$$\lambda N\leqq\lambda M^{2k}\leqq\left(\frac{t}{T}\right)^k\cdot\lambda M^1$$

und schließlich $\lambda N=0$.

Anmerkung. In 2.10 kann man auf die Voraussetzung der Stetigkeit verzichten. Für den Beweis dieser Verallgemeinerung benötigt man eine Verallgemeinerung des Hilfssatzes 2.9 sowie den Satz: Jede wachsende Funktion $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ ist fast überall stetig. – In diesem Zusammenhang sei an unsere Einschränkung des Funktionsbegriffes (am Ende von § 0) erinnert. – Das hier Gesagte ist in [6] ausführlich dargestellt.

3. *P-Integralfunktionen*

3.1. Def.

F heißt die *P-Integralfunktion* von f, wenn $f:[a,b]\to\bar{\mathbf{R}}$ P-integrierbar ist, $F:[a,b]\to\mathbf{R}$ und

$$F(x)=P\int_a^x f$$

für alle $x\in[a,b]$ gilt.

3.2. Satz

Jede P-Integralfunktion ist *stetig*.

Beweis. (U_*, V_*) sei ein P-Gerüst von $f:[a, b] \to \mathbf{R}$. Da die Differenzfunktionen $V_n - U_m$ wachsen, gilt für jedes $x \in [a, b]$ die Abschätzung

$$0 \leqq V_n(x) - U_m(x) \leqq V_n(b) - U_m(b)$$

und folglich auch

$$U_m(x) \leqq P\int_a^x f \leqq V_n(x).$$

Weiter erhält man für alle $x, y \in [a, b]$

$$|P\int_a^x f - P\int_a^y f| \leqq |P\int_a^x f - V_n(x)| + |V_n(x) - V_n(y)| + |V_n(y) - P\int_a^y f|$$
$$\leqq 2 \cdot |V_n(b) - U_n(b)| + |V_n(x) - V_n(y)|.$$

Für ein (genügend großes) n wird $|V_n(b) - U_n(b)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Für alle y, die genügend nahe bei x liegen, wird auch $|V_n(x) - V_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ wegen der Stetigkeit von V_n.

3.3. Satz

Für jede Unterfunktion U, jede Oberfunktion V und die P-Integralfunktion F derselben Funktion f sind

$$F - U \quad \text{und} \quad V - F$$

wachsende Funktionen.

Beweis. Es sei $f:[a, b] \to \bar{\mathbf{R}}$, $a \leqq x \leqq y \leqq b$. Die Funktion $V - V(x)$ ist dann in $[x, y]$ Oberfunktion von $f|[x, y]$. Daraus folgt

$$F(y) - F(x) = P\int_x^y f \leqq V(y) - V(x)$$

und somit

$$V(x) - F(x) \leqq V(y) - F(y).$$

Mit der Differenz $F - U$ verfährt man analog.

3.4. Satz

Jede P-integrierbare Funktion ist fast überall gleich der Ableitung ihrer P-Integralfunktion.

Beweis. F sei die P-Integralfunktion und (U_*, V_*) sei ein P-Gerüst von $f:[a, b] \to \bar{\mathbf{R}}$. Für genügend große n ist

$$V_n(b) - F(b) < \varepsilon^2.$$

Wir halten ein solches n fest und setzen

$$V = V_n, \quad R = V - F.$$

R ist nach 3.2 und 3.3 eine stetig wachsende und also nach 2.10 fast überall in $[a, b]$ differenzierbare Funktion. Daher sind die Funktionen $\underline{D}R$ und $\bar{D}R$ meßbar, und fast überall in $[a, b]$ ist $\underline{D}R = \bar{D}R$. Daraus folgt die Meßbarkeit der Mengen $[\underline{D}R > \varepsilon]$ ($\leftrightharpoons \{x \in [a, b]; \underline{D}R(x) > \varepsilon\}$), $[\bar{D}R > \varepsilon]$ sowie

$$\lambda[\underline{D}R > \varepsilon] = \lambda[\bar{D}R > \varepsilon].$$

Nach dem folgenden Hilfssatz 3.5 und der Wahl von R ist das L-Integral

$$\int_a^b \underline{D}R d\lambda \leqq R(b) - R(a) = R(b) < \varepsilon^2.$$

also

$$\varepsilon \cdot \lambda[\underline{D}R > \varepsilon] \leqq \int^{[\underline{D}R > \varepsilon]} \underline{D}R d\lambda \leqq \int_a^b \underline{D}R d\lambda < \varepsilon^2$$

und somit

$$\lambda[\bar{D}R > \varepsilon] = \lambda[\underline{D}R > \varepsilon] < \varepsilon.$$

Im Falle $\underline{D}F(x) < \underline{D}V(x) - \varepsilon$ gilt $\underline{D}F(x) < \infty$; wegen $\underline{D}V > -\infty$ ist daher $\underline{D}V(x) - \underline{D}F(x)$ für kein $x \in [\underline{D}F < \underline{D}V - \varepsilon]$ ein unbestimmter Ausdruck. Nach 1.7 ist ferner $\underline{D}F(x) \geqq \underline{D}V(x) - \bar{D}R(x)$ für $\bar{D}R(x) < +\infty$. Nun erhalten wir

$$[\underline{D}F < f - \varepsilon] \subseteq [\underline{D}F < \underline{D}V - \varepsilon] = [\underline{D}V - \underline{D}F > \varepsilon] \subseteq [\bar{D}R > \varepsilon],$$

also

$$[\underline{D}F < f] = \bigcup_n \left[\underline{D}F < f - \frac{\varepsilon}{2^n}\right] \subseteq \bigcup_n \left[\bar{D}R > \frac{\varepsilon}{2^n}\right],$$

$$\lambda[\underline{D}F < f] \leqq \sum_n \lambda\left[\bar{D}R > \frac{\varepsilon}{2^n}\right] \leqq \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

für alle ε, d.h. $\lambda[\underline{D}F < f] = 0$. Daher ist fast überall $\underline{D}F \geqq f$. Nimmt man Unterfunktionen statt Oberfunktionen, so erhält man in analoger Schlußweise fast überall $\bar{D}F \leqq f$, also insgesamt $\underline{D}F \leqq \bar{D}F \leqq f \leqq \underline{D}F$, d.h. $F' = f$ fast überall.

3.5. Hilfssatz

Ist f eine in $[a, b]$ wachsende reelle Funktion, so sind ihre Derivierten $\underline{D}f$ und $\bar{D}f$ in $[a, b]$ meßbar, und es gilt

$$\int_a^b \underline{D}f d\lambda \leqq f(b) - f(a).$$

Beweis. Für jede wachsende Funktion $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ sind die Mengen $[f > \varrho] \cap [a, b]$ entweder leer oder Intervalle. Daher ist f meßbar. Folglich sind auch $\underline{D}f$ und $\bar{D}f$ meßbar, und somit sind die L-Integrale

$$\int_a^b \underline{D}f d\lambda \quad \text{und} \quad \int_a^b \bar{D}f d\lambda$$

definiert. Für $x > b$ sei noch $f(x) = f(b)$ gesetzt. Für $x \in [a, b]$ gilt dann

$$\underline{D}f(x) \leqq \varliminf_n \left(n \cdot \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right)\right),$$

und nach dem Lemma von FATOU erhalten wir hieraus

$$\int_a^b \underline{D}f d\lambda \leqq \varliminf_n \left(n \cdot \int_a^b \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right) dx\right).$$

Da f monoton ist, sind die folgenden Integrale sogar RIEMANN-Integrale, und daher erhält man nacheinander (da f wächst)

$$\int_a^b f\left(x + \frac{1}{n}\right) dx = \int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x)\, dx,$$

$$\int_a^b \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right) dx = \int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\, dx - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot f(b) - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\, dx \leqq \frac{1}{n} \cdot (f(b) - f(a)).$$

Schließlich folgt

$$\int_a^b \underline{D}f\, d\lambda \leqq f(b) - f(a).$$

Als Folgerungen aus dem Bisherigen erhalten wir die nächsten beiden Sätze.

3.6. Satz

Jede P-integrierbare Funktion ist meßbar.

Beweis. Setzt man

$$F(x) = P \int_a^x f \qquad \text{für} \quad a \leqq x \leqq b$$

$$F(x) = F(b) \qquad \text{für} \quad x > b,$$

so erhält man für fast alle $x \in [a, b]$

$$f(x) = \lim_n \left(n \cdot \left(F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)\right)\right),$$

d.h. f ist fast überall in $[a, b]$ der Grenzwert einer Folge stetiger Funktionen, also einer meßbaren Funktionenfolge.[1]

3.7. Satz

Jede Unterfunktion U und jede Oberfunktion V einer P-integrierbaren Funktion ist fast überall differenzierbar.

Beweis. Mit denselben Bezeichnungen wie eben ist zunächst

$$V = (V - F) + F.$$

Jeder der beiden Summanden ist aber fast überall differenzierbar. – Für U schließt man analog.

4. *Vergleich des P-Integrals mit dem L-Integral*

An einem Beispiel haben wir bereits gesehen, daß es P-integrierbare Funktionen gibt, die nicht L-integrierbar sind. Um zu zeigen, daß aber alle L-integrierbaren Funktionen auch P-integrierbar sind, benötigen wir zwei Hilfssätze.

4.1. Hilfssatz

Vor. Die Funktion v sei L-integrierbar über $[a, b]$, und es sei $V: [a, b] \to \mathbf{R}$,

$$V(x) = \int_a^x v \, d\lambda \qquad \text{für} \quad x \in [a, b].$$

v sei bei $x_0 \in [a, b]$ halbstetig nach unten.

[1] Eine Funktionenfolge f_* heißt meßbar, wenn der Mengenterm $[f_n > r] \leftrightharpoons \{x \in [a, b]; f_n(x) > r\}$ meßbar ist. Das heißt, daß es primäre rationale Terme S, T, U, V ($S = S(k, m, n, r), \ldots$) gibt, so daß für alle Werte der Variablen n, r die Menge $[f_n > r]$ für $k \to \infty$ approximiert wird zugleich von außen von den offenen Bereichen $\bigcup_m \,]U, V[$ und von innen von den abgeschlossenen Bereichen $[a, b] \setminus \bigcup_m \,]S, T[$:

$$\bigcup_k \left([a, b] \setminus \bigcup_m \,]S, T[\right) \subseteq [f_n > r] \subseteq \bigcap_k \bigcup_m \,]U, V[,$$

$$\lim_k \lambda\left(\bigcup_m \,]S, T[\cap \bigcup_m \,]U, V[\right) = 0.$$

Beh. $\underline{D}V(x_0) \geqq v(x_0)$.

Beweis. Wir dürfen $v(x_0) > -\infty$ voraussetzen, da anderenfalls nichts mehr zu beweisen ist. Zu jedem $r < v(x_0)$ gibt es wegen der Halbstetigkeit ein δ, so daß für alle $x \in [a, b]$ aus $|x - x_0| < \delta$ folgt $v(x) > r$. Für $x \in [a, b]$ und $0 < x - x_0 < \delta$ ist dann

$$\int_{x_0}^{x} v\, d\lambda \geqq r \cdot (x - x_0),$$

woraus

$$\frac{V(x) - V(x_0)}{x - x_0} \geqq r$$

folgt, und diese Ungleichung erhält man auch für $0 < x_0 - x < \delta$, $x \in [a, b]$. Somit ist

$$\underline{D}V(x_0) \geqq r \qquad \text{für alle} \quad r < v(x_0),$$

und hieraus folgt die Behauptung.

4.2. Hilfssatz

f sei L-integrierbar über $[a, b]$. Dann gibt es eine Folge v_* von Funktionen $v_n : [a, b] \to \mathbf{R}$ mit folgenden Eigenschaften (a)–(d):

(a) v_n ist halbstetig nach unten.

(b) $v_n > -\infty$.

(c) $v_n \geqq f$.

(d) v_n ist L-integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b v_n d\lambda < \int_a^b f d\lambda + \frac{1}{n}.$$

Beweis. 1. Fall: f sei nichtnegativ und beschränkt, etwa

$$0 \leqq f < s \qquad \text{in} \quad [a, b].$$

Ferner sei

$$c_n \Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{n \cdot (b - a + 1)}, \quad m_n \cdot c_n > s,$$

$$M_{nk} \Leftrightarrow [(k-1) \cdot c_n \leqq f < k \cdot c_n].$$

Zu jeder dieser Mengen gibt es – wegen der Meßbarkeit von f – einen offenen Bereich B_{nk} mit

$$B_{nk} \supseteq M_{nk}, \; \lambda B_{nk} < \lambda M_{nk} + \frac{1}{k \cdot 2^k},$$

$B_{nk} = \bigcup_l]r_{nkl}, s_{nkl}[$ für geeignete dreifache primäre rationale Folgen $r_{*\dagger}, s_{*\dagger}$.

Nun sei

$$C_{nk} \leftrightharpoons B_{nk} \cap [a, b],$$

und $\chi_{nk} \leftrightharpoons \chi C_{nk}$ sei die Indikatorfunktion von C_{nk}, d.h. $\chi_{nk}(x) = 1$ für $x \in C_{nk}$, $\chi_{nk}(x) = 0$ sonst. χ_{nk} ist halbstetig nach unten, da die Mengen B_{nk} offen sind.

Wir zeigen, daß für

$$v_n \leftrightharpoons c_n \cdot \sum_{k \leqq m_n} k \cdot \chi_{nk}$$

die Folge v_* die Eigenschaften (a)–(d) hat.

Zunächst sieht man sofort, daß v_n nichtnegativ, halbstetig nach unten und nach oben beschränkt ist. Für $x \in [a, b]$ gibt es ferner ein $k \leqq m_n$ mit $x \in M_{nk} \subseteq C_{nk}$, also $\chi_{nk}(x) = 1$ und daher

$$v_n(x) \geqq c_n \cdot k > f(x).$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned}
\int_a^b v_n d\lambda &= c_n \cdot \sum_{k \leqq m_n} k \cdot \lambda C_{nk} \\
&< c_n \cdot \sum_{k \leqq m_n} k \cdot \left(\lambda M_{nk} + \frac{1}{k \cdot 2^k}\right) \\
&< \sum_{k \leqq m_n} c_n \cdot (k-1) \cdot \lambda M_{nk} + c_n \left(\sum_{k \leqq m_n} \lambda M_{nk} + 1\right) \\
&\leqq \sum_{k \leqq m_n} c_n \cdot (k-1) \cdot \lambda M_{nk} + c_n \cdot ((b-a)+1) \\
&\leqq \sum_{k \leqq m_n} \int^{M_{nk}} f d\lambda + \frac{\varepsilon}{n} \\
&\leqq \int_a^b f d\lambda + \frac{\varepsilon}{n}.
\end{aligned}$$

Wählt man $\varepsilon \leqq 1$, so ist hiermit im 1. Falle alles bewiesen. – Für das Folgende ist es wesentlich, daß sich der bisherige Beweis auch auf Funktionenfolgen statt Funktionen f übertragen läßt.

2. Fall: $f \geqq 0$ in $[a, b]$. (f braucht jetzt aber nicht mehr beschränkt zu sein.) Nun sei

$$g_m \leftrightharpoons \inf(f, m),\ f_1 \leftrightharpoons g_1,\ f_{m+1} \leftrightharpoons g_{m+1} - g_m.$$

Die Funktionenfolge f_* ist meßbar, nichtnegativ und beschränkt, und es ist

$$f = \sum_\mu f_\mu.$$