

de Gruyter Lehrbuch

Kahmen · Vermessungskunde

Heribert Kahmen

Vermessungskunde

18., völlig neu bearbeitete und erweiterte Auflage



Walter de Gruyter
Berlin · New York 1993

O. Univ. Prof. Dr.-Ing. Heribert Kahmen
Institut für Landesvermessung und Ingenieurgeodäsie
der Technischen Universität Wien
Gußhausstr. 27 – 29/127
A-1040 Wien · Österreich

Auflagen

1. Auflage 1910
2. Auflage 1920
3. Auflage 1922
4. Auflage 1926
5. Auflage 1932
6. Auflage 1938
7. Auflage 1942
8. Auflage 1943
9. Auflage 1949
10. Auflage 1958
11. Auflage 1962
12. Auflage 1965
13. Auflage 1969
- ~~14. Auflage 1972~~
15. Auflage 1976
16. Auflage 1985
17. Auflage 1988

© Gedruckt auf säurefreiem Papier, das die
US-ANSI-Norm über Haltbarkeit erfüllt.

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Kahmen, Heribert:

Vermessungskunde / Heribert Kahmen. — 18., völlig neu bearb.
und erw. Aufl. — Berlin ; New York : de Gruyter, 1993

(De Gruyter Lehrbuch)

ISBN 3-11-013732-1 kart.

ISBN 3-11-013733-X Gb.

© Copyright 1993 by Walter de Gruyter & Co., D-1000 Berlin 30

Dieses Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Printed in Germany.

Satz: D. L. Lewis, Berlin. Druck: Gerike GmbH, Berlin.

Buchbinderische Verarbeitung: Lüderitz & Bauer, Berlin 61.

Meiner Frau Mechthild
und meinen Kindern
Ansgar, Henriette und Benedikt

Vorwort

Der hier neu vorgelegte Band Vermessungskunde ist eine Neubearbeitung der bisher in der "Sammlung Götschen" erschienenen Bände Vermessungskunde I, II und III. Verfasser der 1. bis 9. Auflage des Bandes I, der 1. bis 7. Auflage des Bandes II und der 1. bis 6. Auflage des Bandes III (1910–1949) war Prof. Dr.-Ing. Paul Werkmeister. Von 1959–1982 setzte Prof. Dr.-Ing. Walter Großmann die Neubearbeitung fort, für den Band I bis zur 15. Auflage, den Band II bis zur 12. Auflage und den Band III bis zur 11. Auflage. Seit 1983 übernahm Prof. Dr.-Ing. Heribert Kahmen die Weiterbearbeitung der Bände, die zu diesem Zeitpunkt schon eine Geschichte und Tradition von mehr als siebenzig Jahren aufweisen konnten; er bearbeitete den Band I bis zur 17., den Band II bis zur 14. und den Band III bis zur 12. Auflage.

Weitgehende Neuorientierungen und Schwerpunktverschiebungen in den 80er und beginnenden 90er Jahren im Berufsbild des Vermessungsingenieurs machten bei dem nun vorliegenden Lehrbuch eine Neugliederung des Stoffgebietes und eine Überarbeitung der Fachsprache notwendig. Während in der Vergangenheit das amtliche Vermessungswesen im Vordergrund gestanden hatte, öffnete sich mittlerweile ein weites Feld mit interessanten, technisch anspruchsvollen Herausforderungen auf verschiedenen Gebieten des Bauingenieurwesens, des Maschinenbaus, der Geowissenschaften und anderer technischer Disziplinen.

Bei der Entwicklung des neuen Konzepts wurde auch der Beschluß gefaßt, die drei Bände zukünftig gemeinsam als ein geschlossenes Lehrbuch erscheinen zu lassen. Das neu vorgelegte Buch umfaßt 21 Kapitel mit insgesamt 699 Seiten. Nach einem einführenden Kapitel über Grundbegriffe des Meßwesens und der Geodäsie behandelt das 2. Kapitel elementare Bausteine geodätischer Instrumente. In Kapitel 3–5 werden die Instrumente und Meßverfahren für die Richtungs- und Streckenmessung dargestellt. Neuere Instrumente dieser Art arbeiten mit elektrischen Sensoren und lassen daher von der Aufnahme der Meßwerte im Feld bis zur Übernahme in Informationssysteme oder bis zur Herstellung von Karten und Plänen weitgehend automatische Arbeitsprozesse zu. Höchste Entwicklungsstufen der Meßsysteme haben Robotereigenschaften und werden daher Meßroboter genannt. Die folgenden Kapitel 6–8 führen den Inhalt konsequent weiter, indem von den Meßverfahren zu den Berech-

nungsmethoden übergegangen wird. Sie behandeln Koordinatensysteme und das Berechnen von Lagepunkten in Bezug auf diese, wobei Kapitel 6 als einfache Einführung dient. Die Kapitel 9–15 befassen sich mit dem weiten Spektrum der Höhenmeßverfahren. Kapitel 9 gibt zunächst einen Überblick und führt grundlegende Definitionen ein. Den Übergang zu 3D-Verfahren liefern die Kapitel 16–18. Es handelt sich hierbei um die topographische Geländevermessung und die Positionierung feststehender und bewegter Objekte mit Satellitenverfahren. Im Zusammenhang mit der topographischen Geländeaufnahme wird auch auf spezielle Instrumente eingegangen, die gelegentlich bei Aufgaben kleineren Umfangs und auf Expeditionen zum Einsatz kommen. Insbesondere die Satellitenverfahren eröffnen heute ein weites Spektrum neuer Aufgaben, das von Arbeiten des amtlichen Vermessungswesens über die Ingenieurvermessung bis zur Navigation von Land- und Wasserfahrzeugen reicht. Da heute der Vermessungsingenieur nicht nur nationale, sondern auch vielfach länderübergreifende Aufgaben lösen muß, behandelt das 19. Kapitel einführend den historischen Aufbau sowie die Weiterentwicklung nationaler, kontinentaler und globaler Festpunktfelder. Mit der Absteckung, der Übertragung von Plänen und anderen technischen Objekten in die Natur, beschäftigt sich Kapitel 20. In Kapitel 21 wird in die Methoden der Ingenieurvermessung eingeführt und die Vielfalt der dort anfallenden Aufgaben exemplarisch behandelt.

Besonderer Dank gebührt: Herrn Dr. Karbe und Frau Wendland von dem Verlag de Gruyter für zahlreiche Gespräche und ihre Bemühungen bei der Neugestaltung des Buches, meiner Frau Mechthild und Herrn Dipl.-Ing. Retscher für ihre geduldige Mitarbeit beim Korrekturlesen.

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	XV
1 Grundlagen	1
1.1 Einleitung	1
1.2 Messen, Grundbegriffe und Definitionen	1
1.3 Maßsysteme und Maßeinheiten	4
1.4 Fehlerrechnung und Bilden von Mittelwerten	13
1.5 Bezugsflächen	34
2 Bestandteile geodätischer Meßinstrumente	37
2.1 Die Libellen	37
2.2 Die Abbildung durch Linsen, Spiegel und Prismen	49
2.4 Stative und Befestigungseinrichtungen geodätischer Instrumente	70
3 Der Theodolit und das Messen von Richtungen und Winkeln	73
3.1 Richtungen, Horizontal-, Vertikal- und Positionswinkel	73
3.2 Der Theodolit	74
3.3 Analoge Theodolite	84
3.4 Digitale Theodolite	96
3.5 Einrichtungen des Theodolits für die Vertikalwinkelmessung	112
3.6 Klassifizierung der Theodolite	120
3.7 Horizontieren und Zentrieren der Meßgeräte	123
3.8 Untersuchung und Berichtigung des Theodolits für die Horizontalwinkelmessung	130
3.9 Die Horizontalwinkelmessung	139
3.10 Orientierung mit Vermessungskreiseln	145
4 Distanzmessung mit Distanzmeßgeräten	154
4.1 Längenmessung mit Stahlmaßstäben	154
4.2 Längenmessung mit Stahlmeßbändern und Drähten	158
4.3 Distanzmessung mit elektromagnetischen Wellen	171
4.4 Indirekte Längenmessung mit Basislatte	206

X *Inhaltsverzeichnis*

5	Elektronische Tachymeter und Meßroboter	210
5.1	Elektronische Tachymeter	210
5.2	Meßroboter	216
6	Lagevermessung für großmaßstäbige Karten	225
6.1	Bezeichnungen von Punkten und Ausfluchten von Geraden	225
6.2	Absetzen von festen Winkeln	228
6.3	Vermessungsverfahren	233
6.4	Einfache Koordinatenberechnungen	240
6.5	Grundrißkartierung und -zeichnung	250
6.6	Flächenberechnung	257
7	Grundaufgaben der ebenen Koordinatenrechnung, Koordinatensysteme	274
7.1	Rechtwinklige Koordinaten, Polarkoordinaten	274
7.2	Koordinatentransformation	277
7.3	Systeme rechtwinkliger Koordinaten	283
8	Bestimmung von Lagepunkten	295
8.1	Arten der Punktbestimmung	295
8.2	Unsicherheiten bei der Bestimmung und Definition von Lagepunkten	299
8.3	Vorbereitende Berechnungen	300
8.4	Punktbestimmung durch Richtungsmessungen	310
8.5	Punktbestimmung durch Distanzmessung	324
8.6	Punktbestimmung durch kombinierte Richtungs- und Distanzmessungen	331
8.7	Polare Aufnahme von Objektpunkten	337
8.8	Polygonometrische Punktbestimmung	343
8.9	Punktbestimmung in Netzen	363
9	Verfahren der Höhenmessung und Höhensysteme	365
9.1	Einführung	365
9.2	Höhensysteme und Definitionen der Höhen	366
10	Instrumente und Geräte zum Nivellieren, Modellbildung	373
10.1	Grundprinzip und einfache Geräte	373
10.2	Nivelliere mit Libellenhorizontierung	374
10.3	Nivelliere mit Kompensator	386
10.5	Nivelliere mit rotierendem Laser	411

10.6	Nivelliertachymeter	415
10.7	Nivellierlatten	416
11	Nivellierverfahren	422
11.1	Höhenausgangsfläche und Höhenfestpunkte	422
11.2	Festpunktnivellements	426
11.3	Nivellierverfahren in Sonderfällen	436
11.4	Genauigkeit des Nivellements	441
11.5	Längs- und Querprofile	447
11.6	Flächennivellements	452
12	Trigonometrische Höhenmessung	454
12.1	Grundgleichung der trigonometrischen Höhenmessung	454
12.2	Messen von Vertikalwinkeln	455
12.3	Trigonometrische Höhenübertragung auf kurze Entfernungen	460
12.4	Trigonometrische Höhenübertragung über große Entfernungen	465
12.5	Trigonometrisches Nivellement	475
13	Höhenmessung mit Satellitenverfahren	477
14	Barometer und barometrische Höhenmessung	479
14.1	Physikalische Grundlagen	479
14.2	Die Quecksilber- oder Hg-Barometer	480
14.3	Verbesserung der Rohablesungen am Hg-Barometer	481
14.4	Barometer mit Membrandose	484
14.5	Verbesserung der Rohablesungen an den Membrandosenbarometern	489
14.6	Ermittlung von Höhenunterschieden aus Barometermessungen	493
14.7	Ermittlung von Höhenunterschieden aus Altimetermessungen	499
14.8	Genauigkeit der barometrischen Höhenmessung	503
15	Hydrostatisches Nivellement	506
15.1	Die einfache Schlauchwaage	506
15.2	Die Präzisionsschlauchwaage	507
16	Spezielle Instrumente für topographische Vermessungen	514
16.1	Tachymetertheodolite	515

XII *Inhaltsverzeichnis*

16.2	Die Reduktionstachymeter	521
16.3	Bussolen und Bussolentachymeter	523
16.4	Meßtisch und Kippregel	526
16.5	Tachymeter mit Basis im Stand des Beobachters	528
17	Topographische Vermessungen	532
17.1	Karteninhalte	532
17.2	Digitale Geländemodelle	534
17.3	Erfassen der Geländeformen	536
17.4	Kartenherstellung	557
17.5	Genauigkeit der Geländeaufnahme	559
18	3D-Positionsbestimmung mit Satellitenverfahren	562
18.1	Bahnen künstlicher Erdsatelliten	562
18.2	Satellitensysteme für Positionsbestimmungen und Navigation	566
18.3	Beobachtungsgleichungen für die Punktbestimmung	577
18.4	Auswertemodelle für absolute und relative Punktbestimmungen	586
18.5	Kinematische Punktbestimmung	589
18.6	Genauigkeit der statischen und kinematischen Punktbestimmung mit dem Satellitensystem GPS	590
19	Grundlagen der Landesvermessung	591
19.1	Referenzsysteme und das geodätische Datum	591
19.2	Ältere Lagefestpunktfelder	592
19.3	Erneuerung der Lagefestpunktfelder	596
19.4	Neuere globale, europäische und nationale terrestrische Referenzsysteme	598
20	Absteckungsverfahren	603
20.1	Absteckung von einer frei gewählten Messungslinie aus	603
20.2	Absteckung von einem achsnahen Polygonzug aus	605
20.3	Absteckung von einem frei wählbaren Standpunkt aus	608
21	Ingenieurgeodäsie	610
21.1	Aufgaben und Besonderheiten der Ingenieurgeodäsie	610
21.2	Ingenieurgeodätische Arbeiten bei Verkehrsanlagen	611
21.3	Erdmassenberechnung	649
21.4	Abstecken von Ingenieurbauten	660

21.5 Überwachungsmessungen	683
Literaturverzeichnis	700
Index	710
Tabellenanhang	719

Symbolverzeichnis

1. Meßwerte

R	Richtungen
Z	Zenitwinkel
D^A	am Entfernungsmesser abgelesene Distanz
T, T'	Temperatur des trockenen bzw. feuchten Thermometers
p	Luftdruck

2. Abgeleitete bzw. reduzierte Meßergebnisse

r	Richtungen
r°	orientierte Richtungen
t	Richtungswinkel
z	Zenitwinkel
z'	Zenitwinkel (beeinflußt durch Refraktion)
D	geometrische Weglänge
S^R	Schrägstrecke
S^0	Strecke in Meereshöhe
S	ellipsoidische Länge
s	Strecke im Gauß-Krüger-Koordinatensystem
H	Höhe über NN
ΔH	Höhendifferenz
β	Brechungswinkel (Polygonzug)

3. Koordinaten

rechtwinklige Koordinaten

x, y, z	in nordorientierten Abbildungssystemen
$x', y'; \xi, \eta$	in örtlichen Systemen
X, Y, Z	in äquatorialen Systemen

Polarkoordinaten

s, t	in nordorientierten Abbildungssystemen
s', t'	in örtlichen Systemen

4. Statistik

$s^2(\cdot)$	empirische Varianz
$\sigma^2(\cdot)$	theoretische Varianz
$s(\cdot)$	empirische Standardabweichung
$\sigma(\cdot)$	theoretische Standardabweichung
σ_p	Standardabweichung eines Punktes

1 Grundlagen

1.1 Einleitung

Die Vermessungskunde befaßt sich mit der Vermessung und Berechnung größerer oder kleinerer Teile der Erdoberfläche und ihrer Darstellung in digitalen Geländemodellen Karten und Plänen. Man unterteilt die Vermessungskunde in die Erdmessung, die Landesvermessung und die Detailvermessung (Land- oder Feldmessung). Die beiden erstgenannten Gebiete, bei denen die Bestimmung der Figur und des Schwerefeldes der Erde von besonderer Bedeutung sind, werden auch als Geodäsie bezeichnet. Ganz allgemein gliedern die vermessungstechnischen Arbeiten sich in Horizontal- oder Lagemessungen, Vertikal- oder Höhenmessungen und kombinierte, d.h. 3D-Vermessungen. Bei hohen Genauigkeitsanforderungen kommt häufig noch die Zeit als vierter Parameter hinzu.

Eine wichtige Aufgabe der Vermessungstechnik ist die Herstellung von Landesvermessungs- und Kartenwerken. Dazu gehören in erster Linie die vorwiegend in den Maßstäben 1:500, 1:1000 und 1:2000 gezeichneten Karten, die insbesondere die Lage, die rechtmäßigen Grenzen und die Bebauung der Grundstücke nachweisen, und die in den Maßstäben von 1:5000 bis etwa 1:250 000 stehenden topographischen Karten, die vor allem eine Geländedarstellung enthalten. Daneben gibt es Spezialkartenwerke für Siedlungsräume, Verkehrsanlagen, Wasserbauten und zahlreiche andere Zwecke.

Die Vermessung in bezug auf erdfeste Koordinatensysteme und die Herstellung von Karten und Plänen sind die Grundlage allen Planens und Bauens. Für die spezielle Bauplanung, für die Absteckung der Bauelemente, für die Baukontrolle und für die Schlußabnahme sind häufig zusätzlich noch besondere Baumessungen notwendig.

1.2 Messen, Grundbegriffe und Definitionen

Der Ablauf einer Messung ist einerseits durch das Erfassen und Darstellen physikalischer Größen, andererseits durch das Zuordnen einer Maßzahl

2 1 Grundlagen

gekennzeichnet. Der Größe X wird die Maßzahl x als Vielfaches der Vergleichsgröße N , dem sogenannten Normal, zugeordnet

$$X = x \cdot N.$$

Für die Definition gilt analog:

$$[d] = [-] \cdot [d].$$

Für den Ablauf einer Messung müssen zwei Fundamentalvoraussetzungen erfüllt sein:

- die zu messende Größe muß eindeutig definiert sein
- das Normal muß durch eine Konvention festgelegt sein [1.3].

Die charakteristischen Merkmale eines Meßvorganges zeigt Abb. 1.1. In dem idealisierten Schema a) wird der Meßvorgang nur durch die Meßgröße und das Normal beeinflusst. Abb. 1.1b gibt ein fehlerbehaftetes Meßsystem wieder.

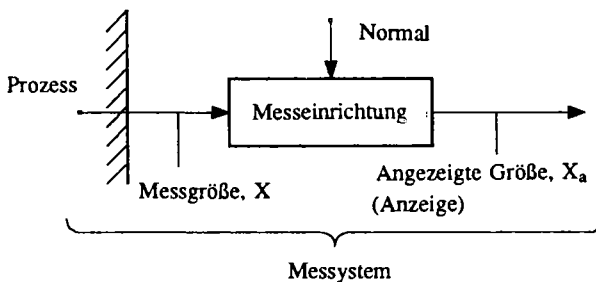


Abb. 1.1a Schema des fehlerfreien Meßvorganges

In Anlehnung an die DIN-Normen (*DIN 1319*) seien folgende Begriffe zusammengestellt:

Meßgröße: Die Meßgröße ist die physikalische Größe, die durch die Messung erfaßt wird (z.B. Höhe, Länge, Temperatur, ...).

Anzeige: Die Anzeige ist die an einer Skala abgelesene Marke oder an einer Ziffernanzeigeeinrichtung abgelesene Größe. Die Anzeige kann in Einheiten der Meßgröße, in Skalenteilen oder in Ziffernschritten angegeben werden.

Anzeigebereich: Der Anzeigebereich umfaßt die Meßwerte, die am Anzeigeelement abgelesen werden können.

Meßbereich: Der Meßbereich umfaßt den Teil des Anzeigebereichs, in dem Fehler innerhalb vorgeschriebener Fehlergrenzen bleiben.

Meßwert: Der Meßwert ergibt sich aus der Anzeige; er ist das Produkt aus Zahlenwert und Meßgröße (z.B. 10 m).

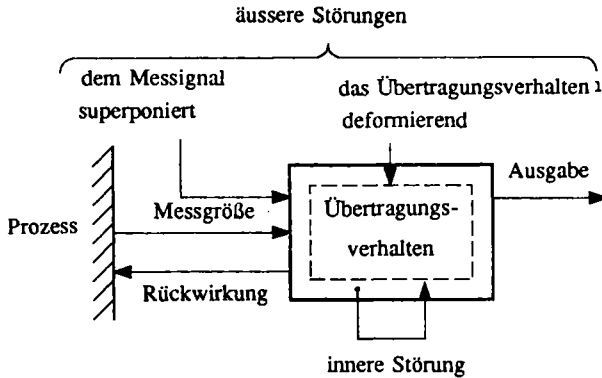


Abb. 1.1b Schema des fehlerbehafteten Meßvorganges

Meßergebnis: Das Meßergebnis erhält man mit Meßwerten aus vorgegebenen Beziehungen.

Meßeinrichtung: Eine Meßeinrichtung ist die Gesamtheit der für die Messung benutzten Komponenten wie: Sensoren, Steuerrechner, Auswerterechner, Anzeigeeinheit, ...

Meßsystem: Das Meßsystem umfaßt einerseits die Meßeinrichtung und andererseits den Bereich des Prozesses, der durch den Meßvorgang beeinflusst wird (vgl. Abb. 1.1).

Meßgerät: Das Meßgerät ist ein Baustein, welcher Teil oder Ganzes einer Meßeinrichtung sein kann.

Meßprinzip: Das Meßprinzip umfaßt das physikalische Phänomen, das seiner Messung zugrunde liegt.

Meßverfahren: Das Meßverfahren umfaßt die Funktionsweise einer Meßeinrichtung. Man unterscheidet analoge und digitale, direkte und indirekte Meßverfahren.

Wie schon am Anfang dieses Kapitels beschrieben wurde, ist der Meßwert das Produkt der Maßzahl x und der Dimension des zugehörigen Normals. Bei einem Meßvorgang wird die Information über diese Maßzahl durch Signale übertragen.

Analoge Meßverfahren enthalten diese Informationen in der direkten Zuordnung der Maßzahl der Meßgröße zur Maßzahl der physikalischen Größe des Signals; nicht die Maßzahl selbst, sondern eine analoge Größe wird verarbeitet. Für *digitale Meßverfahren* ist charakteristisch, daß sie die Ziffer der Maßzahl verarbeiten und ausgeben. Die Abb. 3.20, 3.21 und 3.28 sind z.B. typische Beispiele für die *analoge Meßwertausgabe*. Die Ablesung am Display eines digitalen Theodoliten ist typisch für die *digitale Meßwertausgabe*.

Bei digitalen Verfahren wird die Maßzahl abgesehen von Rundungsfehlern fehlerfrei verarbeitet. Bei analogen Verfahren muß noch die Analog/Digital Wandlung zwischengeschaltet werden, wobei die Genauigkeit dieses Schrittes von der Genauigkeit der Interpolation abhängt.

Direkte Meßverfahren kann man daran erkennen, daß der gesuchte Meßwert einer Meßgröße durch unmittelbaren Vergleich mit der Meßgröße gewonnen wird (Beispiel: Längenmessung).

Indirekte Meßverfahren sind dadurch charakterisiert, daß der gesuchte Meßwert aus andersartigen physikalischen Größen auf der Basis physikalischer Gesetzmäßigkeiten abgeleitet wird (Beispiel: Brechungsindex).

Abb. 1.1b zeigt das Schema eines fehlerbehafteten Meßsystems. Eine Vielzahl von Störeinflüssen kann wirksam werden. Ein erster Störeinfluß ergibt sich durch die Rückwirkung der Meßeinrichtung auf den Prozeß, der beobachtet wird. Wird z.B. die Lage eines Gegenstandes mit einem Meßband beobachtet, das an diesem befestigt ist, so kann bereits die Zugspannung des Meßbandes Formveränderungen des Objektes und damit scheinbare Verschiebungen vortäuschen. Man unterscheidet noch zwischen äußeren Störungen und inneren Störungen.

Sehr häufig treten dem Meßsignal sich überlagernde äußere Störungen auf. Typisch hierfür sind z.B. Verfälschungen der Richtungsmessung mit einem Theodolit oder der Distanzmessung mit einem elektronischen Distanzmesser, indem die Atmosphäre die physikalischen Eigenschaften der Meßsignale ändert. Zusätzlich müssen deformierende äußere Störungen in Betracht gezogen werden; es sind dies Störungen, die das Übertragungsverhalten der Meßeinrichtung beeinflussen. Unter dem Übertragungsverhalten versteht man die Beziehung zwischen der Ein- und Ausgangsgröße einer Meßeinrichtung. So kann z.B. die Umgebungstemperatur oder die Sonneneinstrahlung die Übertragungseigenschaften der Mechanik eines Theodolits oder Nivelliergerätes beeinflussen. Innere Störungen können vielfältige Ursachen haben, z.B. die Reibung von Lagern oder das Spiel mechanischer Übertragungseinrichtungen.

Die Art und Handhabung der Fehlereinflüsse ist sehr komplex und wird überblicksweise in [1.4] behandelt.

1.3 Maßsysteme und Maßeinheiten

1.3.1 Vom Archivmeter zum Einheitensystem SI

Auf Vorschlag der Pariser Akademie der Wissenschaften beschloß im Jahre 1791 die damalige französische Nationalversammlung, ein einheitliches Längenmaß ein-

zuführen, das dem zehnmillionsten Teil eines Erdmeridians gleichen und "Meter" heißen sollte. Die Größe des Meters wurde in den nächsten Jahren aus mehreren Gradmessungen abgeleitet. Damit es aber jederzeit zu reproduzieren war, wurde ein Prototyp aus Platin hergestellt und im französischen Staatsarchiv niedergelegt. Dieses "Archivmeter" ist die Grundlage des Metersystems, auf das außer dem Längenmaß auch die Einheiten des Flächenmaßes, des Raummaßes und des Gewichts bezogen wurden.

Das Metersystem wurde in den nächsten Jahrzehnten von mehreren Staaten übernommen. In Deutschland wurde es auch durch die Maß- und Gewichtsordnung für den Norddeutschen Bund vom 17. 8. 1868 eingeführt, die mit ihrem Inkrafttreten am 1. 1. 1872 für das ganze damalige Deutsche Reich verbindlich wurde.

Um die internationale Anerkennung des Metersystems weiter zu betreiben, schlossen im Jahre 1875 die damaligen Teilnehmerstaaten die "Internationale Meter-Konvention" ab und luden alle Staaten der Erde zum Beitritt ein. Die Staaten einigten sich ferner auf die Einrichtung eines Internationalen Büros für Maß und Gewicht in Breteuil bei Paris; doch sollte die Entscheidungsbefugnis über neue Vorlagen den Zusammenkünften der Delegierten der Teilnehmerstaaten verbleiben, die fortan als "Generalkonferenz für Maß und Gewicht" bezeichnet wurden.

Als erste größere Aufgabe erarbeitete das Büro in 10-jährigen Versuchen einen neuen Meterprototyp mit X-förmigem Querschnitt aus Platin-Iridium, der das Meter noch genauer festlegen sollte als das Archivmeter. Diesen Stab erklärte die 1. Generalkonferenz (1889) zum neuen internationalen Meterprototyp und definierte das Meter als den Abstand zweier auf den Prototyp von Breteuil angebrachten Strichmarken bei 0°C. Von diesem Prototyp erhielten alle der Konvention beigetretenen Staaten eine Kopie. Angesichts der fortschreitenden Vertiefung der physikalischen Grundlagen und der steigenden Genauigkeitsansprüche hat auch diese Definition sich auf die Dauer als nicht ausreichend erwiesen. Sie wurde daher, ohne daß die Länge des Meters geändert wurde, abgelöst durch den Beschluß der 11. Generalkonferenz für Maß und Gewicht vom 14. Oktober 1960. Danach ist das Meter das 1 650 763,73fache der Wellenlänge der von den Atomen des Nuklids ^{86}Kr , eines Isotops des Edelgases Krypton mit der Masse 86, beim Übergang vom Zustand 5d zum Zustand $2p_{10}$ ausgesandten Strahlung. Diese Strahlung läßt sich unter bestimmten Voraussetzungen mit der sogenannten *Engelhard-Lampe* realisieren, die sich dabei in einem Kältebad von 63 Kelvin befindet.

Die 13. Generalkonferenz für Maß und Gewicht definierte 1967 die "Atomsekunde" mit dem Cäsiumatom 133. Mit Hilfe der Cäsiumfrequenz wurden jetzt Zeitmessungen mit relativen Unsicherheiten von 10^{-13} bis 10^{-14} möglich. Gleichzeitig entstanden hochgenaue Techniken, Längenmessungen auf Laufzeitmessungen elektromagnetischer Wellen zurückzuführen. Nicht zuletzt aus dem Grunde wurde auf der 15. Generalkonferenz für Maß und Gewicht 1975 ein Wert für die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen im Vakuum neu festgesetzt. Er beträgt $c = 299\,792\,458\text{ m/s}$. Es waren jetzt nochmals die Voraussetzungen

für eine neue Definition des Meters gegeben. So beschloß man auf der 17. Generalkonferenz für Maß und Gewicht 1983 in Paris die Definition: Das Meter ist die Länge der Strecke, die Licht im leeren Raum während der Dauer von $1/299\,792\,458$ Sekunden durchläuft.

In den Jahrzehnten nach 1875 wurden unabhängig von der Meterkonvention, in deren Zuständigkeit lediglich die Einheiten Meter, Quadratmeter, Kubikmeter und Kilogramm fielen, die elektromagnetischen Einheiten Volt, Ampere, Ohm und Watt eingeführt. 1901 erkannte der italienische Physiker Giovanni Giorgi, daß man aus diesen Einheiten und den mechanischen Einheiten Meter, Kilogramm und Sekunde ein kohärentes (= eng zusammenhängendes) Einheitensystem mit nur vier Grund- oder Basiseinheiten bilden könne, wenn man nur die Definitionen der elektromagnetischen Einheiten etwas anders formulierte. Später wurden noch rund 15 weitere Einheiten, darunter das Kelvin für die thermodynamische Temperatur und die Candela für die Lichtstärke, festgelegt. Alle diese Einheiten aber ließen sich nach dem Vorgang von Giorgi auf (z.Zt.) 7 Basiseinheiten reduzieren.

Diesem großartigen System erteilte im Jahre 1954 die 10. Generalkonferenz für Maß und Gewicht ihre Zustimmung. Die 11. Generalkonferenz (1960) gab ihm den Namen "Système International d'Unités", abgekürzt SI. In der Bundesrepublik Deutschland wurde das System durch das Gesetz über die Einheiten im Meßwesen vom 2. 7. 1969 und die Ausführungsverordnung zu diesem Gesetz vom 26. 6. 1970 eingeführt (Ledersteger 1956; Straßer 1974; Bayer-Helms 1974; Winter 1974; Simmerding 1970).

In den nun folgenden Abschnitten sind die Regelungen zusammengestellt, die das Vermessungswesen an irgend einer Stelle berühren.

1.3.2 Grundlegende Vorschriften des Einheitengesetzes

Das SI kennt nach §§ 2 und 3 des Gesetzes die folgenden 7 Basiseinheiten und Einheitenzeichen

für die Länge	das Meter	= m
für die Masse	das Kilogramm	= kg
für die Zeit	die Sekunde	= s
für die elektrische Stromstärke	das Ampère	= A
für die thermodynamische Temperatur	das Kelvin	= K
für die Lichtstärke	die Candela	= cd
für die Stoffmenge	das Mol	= mol.

Nach § 5 des Gesetzes und dem 2. Abschnitt der Ausführungsverordnung können aus den 7 Basiseinheiten durch Multiplikation mit 1 oder mit einem von 1 verschiedenen Faktor neue Einheiten abgeleitet werden. Durch Multiplikation mit dem Faktor 1 entstehen die kohärenten Einheiten des SI, z.B.

für die Fläche	1 m^2
für die Geschwindigkeit	1 m s^{-1}
für die Beschleunigung	1 m s^{-2}
für die Kraft	1 m kg s^{-2} , genannt 1 Newton (N)
für den Druck	$1 \text{ m}^{-1} \text{ kg s}^{-2} = 1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ Pascal (Pa)}$.

Nicht kohärente Einheiten können mit einer ganzzahligen Potenz von 10 oder mit einer anderen Zahl zusammengesetzt werden, z.B.

die Fläche 10^2 m^2	$= 1 \text{ a}$
die Beschleunigung 10^{-2} m s^{-2}	$= 1 \text{ Gal}$
die Kraft $10^{-5} \text{ m kg s}^{-2}$	$= 10^{-5} \text{ N} = 1 \text{ dyn}$
der Druck $10^5 \text{ m}^{-1} \text{ kg s}^{-2}$	$= 10^5 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ bar}$

und

die Kraft $9,806\,65 \text{ m kg s}^{-2}$	$= 9,806\,65 \text{ N} = 1 \text{ kp}$
der Druck $101\,325 \text{ m}^{-1} \text{ kg s}^{-2}$	$= 101\,325 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ atm}$.

Nach § 6 des Gesetzes lassen sich aus den vorgenannten Einheiten durch Vorsätze dezimale Vielfache und Teile bilden und durch Vorsatzzeichen folgendermaßen kennzeichnen:

	Vorsatz	Vorsatz- zeichen		Vorsatz	Vorsatz- zeichen
10^1	Deka	da	10^{-1}	Dezi	d
10^2	Hekto	h	10^{-2}	Zenti	c
10^3	Kilo	k	10^{-3}	Milli	m
10^6	Mega	M	10^{-6}	Mikro	μ
10^9	Giga	G	10^{-9}	Nano	n
10^{12}	Tera	T	10^{-12}	Piko	p.

1.3.3 Die alten und die neuen Maßeinheiten in der Vermessungstechnik

1.3.3.1 Die Einheiten des Längen-, Flächen- und Volumenmaßes

Diese sind in ihrer 1875 von der Meterkonvention erarbeiteten Form durch das Einheitengesetz bestätigt. Lediglich die Einheiten des Längenmaßes sind um einige Zehnerpotenzen nach oben und unten erweitert worden. Nach dem Einheitengesetz und der Ausführungsverordnung gilt nunmehr folgendes:

8 1 Grundlagen

a) Die SI-Einheit des Längenmaßes ist die Basiseinheit Meter (m). Aus ihr folgen mit dem Vorsatzzeichen unter [1.3.2]

1 Dekameter = 10^1 m = 1 dam	1 Dezimeter = 10^{-1} m = 1 dm
1 Hektometer = 10^2 m = 1 hm	1 Zentimeter = 10^{-2} m = 1 cm
1 Kilometer = 10^3 m = 1 km	1 Millimeter = 10^{-3} m = 1 mm
1 Megameter = 10^6 m = 1 Mm	1 Mikrometer = 10^{-6} m = 1 μ m
1 Gigameter = 10^9 m = 1 Gm	1 Nanometer = 10^{-9} m = 1 nm
1 Terameter = 10^{12} m = 1 Tm	1 Pikometer = 10^{-12} m = 1 pm.

b) Die SI-Einheit des Flächenmaßes ist die abgeleitete Einheit Quadratmeter (m^2). Aus ihr folgt mit den obigen Vorsatzzeichen

1 Ar = 10^2 m^2 = 1 a	1 Quadratdezimeter = 10^{-2} m^2 = 1 dm^2
1 Hektar = 10^4 m^2 = 1 ha	1 Quadratzentimeter = 10^{-4} m^2 = 1 cm^2
1 Quadratkilometer = 10^6 m^2 = 1 km^2 usw.	1 Quadratmillimeter = 10^{-6} m^2 = 1 mm^2 usw.

c) Die SI-Einheit des Volumenmaßes ist die abgeleitete Einheit Kubikmeter (m^3). Daraus sind mit den Vorsätzen in 1.3.2 das dm^3 , das cm^3 und das mm^3 usw. abgeleitet worden. Zu Fläche und Volumen bestimmt die Ausführungsverordnung:

Die Flächenmaße Ar (a) und Hektar (= Hektoar: ha) werden als abgeleitete Maßeinheiten für Grundstücksflächen beibehalten (§ 48). Die amtliche Begründung hierzu bezieht sich ausdrücklich auf den Ausweis der Grundstücksflächen in den Grundbüchern.

1.3.3.2 Die SI-Einheiten des ebenen Winkelmaßes

Sie weichen von den überkommenen Maßeinheiten in unterschiedlicher Weise ab. Daher müssen – schon im Hinblick auf die vorhandene Literatur – der bisherige und der neue Zustand einander gegenübergestellt werden. Bislang wurden benutzt: die Sexagesimalteilung, die Zentesimalteilung und das Arcus- oder Bogenmaß. Im einzelnen sind die beiden ersten Systeme folgendermaßen aufgebaut:

die Sexagesimalteilung:	1 Vollkreis = 360° (Grad)
$1^\circ = 60'$ (Minuten)	$1' = 60''$ (Sekunden)
die Zentesimalteilung:	1 Vollkreis = 400^g Neugrad oder Gon
$1^g = 100^c$ (Neuminuten)	$1^c = 100^{cc}$ (Neusekunden),

wobei das hochgestellte c als Abkürzung für “centi” stand.

Die Sexagesimalteilung ist wegen ihrer engen Beziehungen zur Astronomie und zum Gradnetz der Erdoberfläche mit ihren bisherigen Einheiten Grad, Minute und Sekunde und deren Zeichen in das SI unverändert übernommen worden. Die früher gerne benutzten Bezeichnungen Altgrad, Altminute und Altsekunde sind fortgefallen.

Die Zentesimalteilung kennt als SI-Einheit nur noch das Gon (Einheitenzeichen gon); die Bezeichnungen Neugrad, Neuminute und Neusekunde sind ebenfalls fortgefallen. Die Bruchteile des Gon sind im SI im Prinzip als Dezimale des Gon darzustellen; doch ist es mit den in 1.3.2 angegebenen Vorsätzen erlaubt, das Zenti-gon (Einheitenzeichen cgon) und das Milligon (Einheitenzeichen mgon) zu bilden. Ein Einheitenzeichen für die ehemalige Neusekunde (cc) gibt es nicht. Vielmehr ist künftig

$$1^{cc} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ gon} = 0,1 \text{ mgon}.$$

Für den rechten Winkel oder den "Rechten" ist das Einheitenzeichen 1° geschaffen worden.

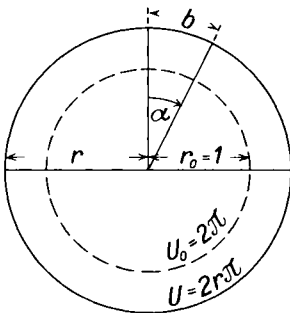


Abb. 1.2 Definition des Bogenmaßes

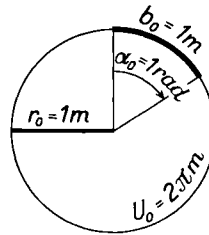


Abb. 1.3 Das Bogenmaß im Einheitskreis

Das Bogenmaß eines Winkels, die dritte der überkommenen Winkleinheiten, ist das Verhältnis des Bogens b , den die Schenkel eines Winkels α aus einem um seinen Scheitelpunkt geschlagenen Kreis ausschneiden, zu dem Kreishalbmesser r (Abb. 1.2). Die Einheit des Bogenmaßes ist der Winkel, für den dieses Verhältnis gleich 1 ist, d.h. für den $b = r$ ist. Dieser Winkel wird als "Radiant" bezeichnet, weil er entsteht, wenn der Halbmesser eines Kreises auf seinem Umfang abgewickelt wird. Das Bogenmaß des vollen Winkels ist daher 2π , das des rechten $\pi/2$.

Das Bogenmaß ist also der Quotient zweier Längen, und wohl deshalb ist der Radiant (Einheitenzeichen rad) im SI, das die Anzahl der Basiseinheiten möglichst klein halten möchte, zur (abgeleiteten) SI-Einheit des ebenen Winkels erklärt worden. Etwas spezieller als im vorigen Absatz heißt es im § 5 der Ausführungsverordnung: "1 Radiant ist gleich dem ebenen Winkel, der als Zentriwinkel eines

Kreises vom Halbmesser 1 m aus dem Kreis einen Bogen der Länge 1 m ausschneidet". Zur Veranschaulichung dieses Satzes sind in Abb. 1.3 (Einheitskreis) der Zentriwinkel α , der zugehörige Bogen b und der Halbmesser r mit dem Index Null ($_0$) versehen worden.

Um aber dem Bedürfnis der Praxis nach den Einheiten der Sexagesimal- und Zentesimalteilung gerecht zu werden, sind – ebenfalls in § 5 a.a.O. – aus dem Radianen noch folgende Einheiten abgeleitet, bei deren Erläuterung für das Wort Einheitenzeichen hier die Abkürzung Ez benutzt ist.

(1.1)

1 Vollwinkel (kein EZ.)	$= 2\pi \text{ rad}$	$= 360^\circ = 400 \text{ gon}$
1 Rechter (Ez.: L)	$= \pi/2 \text{ rad}$	$= 90^\circ = 100 \text{ gon}$
1 Grad (Ez.: $^\circ$)	$= \frac{\pi}{180} \text{ rad}$	$= 90\text{ster Teil des Rechten}$
1 Minute (Ez.: $'$)	$= \frac{\pi}{180 \cdot 60} \text{ rad}$	$= 60\text{ster Teil des Grades}$
1 Sekunde (Ez.: $''$)	$= \frac{\pi}{180 \cdot 60^2} \text{ rad}$	$= 60\text{ster Teil der Minute}$
1 Gon (Ez.: gon)	$= \frac{\pi}{200} \text{ rad}$	$= 100\text{ster Teil des Rechten}$
1 Zentigon (Ez.: cgon)	$= \frac{\pi}{200 \cdot 10^2}$	$= 100\text{ster Teil eines Gon}$
1 Milligon (Ez.: mgon)	$= \frac{\pi}{200 \cdot 10^3}$	$= 1000\text{ster Teil eines Gon.}$

1.3.3 Vermessungstechnische Sonderzeichen

Die Reziproken der in (1.1) auftretenden Quotienten $\pi/180^\circ$ und $\pi/200 \text{ gon}$ – allgemein $\pi/2^L$ – werden in der Geodäsie so häufig benutzt, daß dafür das Symbol ϱ eingeführt ist, und zwar ist

$$180/\pi = \varrho^{(\circ)} \text{ (lies } \varrho \text{ in Grad)} \parallel 200/\pi = \varrho^{(\text{gon})} \text{ (lies } \varrho \text{ in Gon)}. \quad (1.2)$$

Zu einer ersten Anwendung entnehme man der Abb. 1.2 den Ansatz

$$\alpha : b = 4^L : 2\pi.$$

Im *Einheitskreis* (Abb. 1.3) folgt daraus wegen $b_0 = r_0 = 1$ für einen Winkel $\alpha_0 = 1 \text{ rad}$, wenn die jeweiligen Winkeleinheiten eingesetzt werden,

$$\alpha = \frac{2^L}{\pi}; \quad \alpha^{(\circ)} = \frac{180^\circ}{\pi}; \quad \alpha^{(\text{gon})} = \frac{200 \text{ gon}}{\pi}.$$

Die Winkelwerte der ϱ im Sexagesimal- und Zentesimalsystem sind demnach gleich denen des Radianen in den entsprechenden Maßsystemen. Zahlenmäßig sind diese Werte

$$\begin{array}{ll}
 \varrho^{(\circ)} = 57,295779... & \varrho^{(\text{gon})} = 63,661977... \\
 \varrho^{(')} = 3437,7467... & \varrho^{(\text{cgon})} = 6366,1977... \\
 \varrho^{(')} = 206264,8... & \varrho^{(\text{mgon})} = 63661,977...
 \end{array} \quad (1.3)$$

Für eine zweite Anwendung ergibt sich aus Abb. 1.2

$$b : 2r\pi = \alpha : 4^{\circ}.$$

Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung mit 2π , so erhält man mit (1.2) die in der Vermessungstechnik viel benutzte Formel

$$b : r = \alpha : \varrho, \quad (1.4)$$

in die b und r bzw. α und ϱ jeweils mit den einander entsprechenden Einheiten einzusetzen sind.

Zahlenbeispiel: Eine 150 m lange Achse soll um 12 cgon verschwenkt werden. Um welchen linearen Betrag b wird dadurch das freie Ende der Achse seitwärts verlegt? Die Gleichung (1.4) ergibt mit dem $\varrho^{(\text{gon})}$ aus (1.3)

$$b^{(m)} = r^{(m)} \frac{\alpha^{(\text{gon})}}{\varrho^{(\text{gon})}} = \frac{150 \cdot 12 \cdot 10^{-2}}{63,66} = 0,283 \text{ m}.$$

Eine dritte Sonderanwendung ist der Übergang auf andere Winkleinheiten. Die Umwandlung von Grad oder Gon in die Einheit Radiant und umgekehrt ist in der Vermessungstechnik kaum erforderlich. Auch der Übergang von der Sexagesimalteilung in die Zentesimalteilung und umgekehrt verliert an Bedeutung, weil das Sexagesimalsystem in der Vermessungspraxis nur noch selten gebraucht wird. Zum Übergang vom Sexagesimal- in das Zentesimalsystem gibt es zahlreiche Tafeln. Bequemer ist heute das Umrechnen mit einem elektronischen Taschenrechner unter Verwertung nachstehender Identitäten:

$$\begin{array}{ll}
 1^{\circ} = 10/9 \text{ gon} = 1,111 \dots \text{ gon} & 1 \text{ gon} = 0,9^{\circ} \\
 1' = 1,85185185 \dots \text{ cgon} & 1 \text{ cgon} = 0,54' \\
 1'' = 0,308641975308 \dots \text{ mgon} & 1 \text{ mgon} = 3,24''
 \end{array}$$

Auch hierfür wird man zweckmäßig zuvor die Sexagesimalminuten und -sekunden in Dezimale des Grades verwandeln.

Für Überschlagrechnungen merke man:

$$1' \approx 2 \text{ cgon}; \quad 1'' \approx 0.3 \text{ mgon} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ gon}.$$

In der Bautechnik werden die Höhenunterschiede meistens in Prozenten des Längenunterschiedes oder durch das Steigungsmaß $1 : n$, seltener durch den Neigungswinkel α , ausgedrückt. In runden Werten bestehen folgende Zusammenhänge:

%	1	2	3	5	10	25	50	100
α (gon)	0,6	1,3	1,9	3,2	6,3	16,1	29,5	50
1:n	1:100	1:50	1:33 1/3	1:20	1:10	1:4	1:2	1:1

Man beachte ferner bei Benutzung fremdsprachlicher Literatur:

im Englischen ist Grad \rightarrow degree, gon \rightarrow grade,

im Französischen Grad \rightarrow degré, gon \rightarrow grade.

1.3.4 Seltener gebrauchte SI-Einheiten

1.3.4.1 Die (abgeleitete) SI-Einheit des räumlichen Winkels

Die SI-Einheit des räumlichen Winkels ist nach § 6 der Ausführungsverordnung der Steradian (Einheitenz. sr). 1 Steradian ist gleich dem räumlichen Winkel, der als gerader Kreiskegel mit der Spitze im Mittelpunkt einer Kugel vom Halbmesser 1 m aus der Kugeloberfläche eine Kalotte der Fläche 1 m² ausschneidet.

1.3.4.2 Die (abgeleitete) SI-Einheit des Drucks

Die SI-Einheit des Drucks oder der mechanischen Spannung, die in der Vermesungstechnik vor allem für die barometrische Höhenmessung gebraucht wird, ist nach § 20 a.a.O. das Pascal (Einheitenz.: Pa). 1 Pascal ist gleich dem auf eine Fläche gleichmäßig wirkenden Druck, bei dem senkrecht auf die Fläche 1 m² die Kraft 1 N = 1 Newton ausgeübt wird. 10⁵ Pa sind gemäß [1.3.2] 1 Bar (bar), 10² Pa 1 Millibar (mbar).

Die Einheiten technische Atmosphäre (at), physikalische Atmosphäre (atm), Torr (torr), Meter-Wassersäule (mWs), Millimeter-Quecksilbersäule (mm Hg) waren nur noch bis Ende 1977 zugelassen.

1.3.4.3 Die Basiseinheit der (thermodynamischen) Temperatur (T)

Die Basiseinheit der Temperatur, auch Kelvintemperatur genannt, ist nach § 3 des Einheitengesetzes das Kelvin (Einheitenzeichen K). Dieses ist definiert als der 273,16^{te} Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes des Wassers.

Hierzu vermerkt das Normblatt DIN 1301 S.11: Die Einheit, das Kelvin, gilt auch für die Angabe von Temperaturdifferenzen. – Als Celsius-Temperatur (t) wird die besondere Differenz einer beliebigen thermodynamischen Temperatur T gegenüber der Temperatur $T_0 = 273,15$ K bezeichnet. Es ist also

$$t = T - T_0 = T - 273,15 \text{ K.}$$

Bei der Angabe von Celsius-Temperaturen sind der Einheitenname Grad Celsius und das Einheitenzeichen °C anzuwenden. Die Differenz Δt zweier Celsius-Temperaturen, z.B. der Celsius-Temperaturen $t_1 = T_1 - T_0$ und $t_2 = T_2 - T_0$, ist

$$\Delta t = t_1 - t_2 = T_1 - T_2 = \Delta T.$$

Eine derartige Temperaturdifferenz ist nicht mehr auf die dynamische Temperatur T_0 bezogen, somit keine Celsius-Temperatur im Sinne der Definition nach der ersten der beiden obigen Gleichungen.

1.3.4.4 Die (gesetzliche) SI-Einheit der Zeit

Die SI-Einheit der Zeit ist gem. [1.3.2] die Sekunde (Einheitenzeichen s); von dieser werden folgende Vielfache abgeleitet:

1 Minute (min) = 60 s, 1 Stunde (h) = 60 min = 3600 s,

1 Tag (d) = 24 h = 86400s; h von lat. hora, d von lat. dies.

Die Vorsatzzeichen in [1.3.2] sind auf dezimale Vielfache oder Teile der Zeiteinheiten nicht anzuwenden.

1.3.4.5 Die (abgeleitete) SI-Einheit der Frequenz

Die SI-Einheit der Frequenz ist nach § 12 der Ausführungsverordnung das Hertz (Einheitenzeichen Hz). 1 Hertz ist gleich der Frequenz eines Schwingungsvorgangs der Periodendauer 1 s. Zur Kennzeichnung von Vielfachen und Teilen dienen die Vorsatzzeichen in [1.3.2].

1.4 Fehlerrechnung und Bilden von Mittelwerten

1.4.1 Die Aufgabe der Fehlerrechnung

Die geodätischen Messungen müssen im Hinblick auf ihren jeweiligen Zweck mit einer bestimmten Genauigkeit ausgeführt und gegen Irrtümer gesichert sein. Völlig fehlerfreie Messungen sind infolge der Mängel der Meßgeräte und der Unvollkommenheit der menschlichen Sinne nicht möglich. Die Messungen werden daher in der Regel mehrere Male wiederholt und möglichst noch durch zusätzliche Messungen gestützt, indem man z.B. außer den Katheten noch die Hypotenuse mißt, oder neben zwei Dreieckswinkeln, die man braucht, auch den dritten beobachtet.

Bei der Auswertung der Messungen entsteht die Aufgabe,

1. aus den Beobachtungen den günstigsten Mittelwert der gesuchten Größe abzuleiten,
2. eine Maßzahl für die Genauigkeit einer einzelnen Messung oder ihre "Streuung" anzugeben,
3. die Genauigkeit oder die Streuung des Mittelwertes und seinen "Vertrauensbereich" abzuschätzen.

1.4.2 Fehlerarten

Die Messungsfehler unterteilt man nach Art ihrer Entstehung in grobe, systematische und zufällige Fehler.

Grobe Fehler sind grob fehlerhafte Ablesungen an den Meßinstrumenten, Zielverwechslungen und dergleichen. Sie werden durch Kontrollmessungen entdeckt und ausgeschieden.

Systematische Fehler verfälschen das Meßergebnis stets in demselben Sinne. Sie werden hervorgerufen durch unzureichende Eichung und einseitige Handhabung der Meßinstrumente sowie durch einsinnig wirkende Einflüsse von Temperatur, Luftdruck usw. auf das Meßinstrument oder den zu messenden Gegenstand. Diese Fehler lassen sich in allen Regelfällen durch Eichung der Meßinstrumente, Wahl geeigneter Meßverfahren und rechnerisches Berücksichtigen der einsinnigen Einflüsse zum größten Teil eliminieren.

Als *zufälligen Fehler* einer Messung betrachtet man die Summe der nach dem Ausscheiden der groben und der systematischen Fehler übrigen unbekannten "Elementarfehler", die auf begrenzte Schärfe der menschlichen Sinne, Unvollkommenheiten der Meßinstrumente, unkontrollierbare Veränderungen der äußeren Umstände und gelegentlich auch des Gegenstandes der Messung zurückzuführen sind. Die zufälligen Fehler werden ebenso oft positives wie negatives Vorzeichen annehmen und sind im Sinne der mathematischen Statistik *stochastisch unabhängige Veränderliche*. Trotz ihrer scheinbaren Regellosigkeit unterliegen sie den Gesetzen des Zufalls.

Abb. 1.4 läßt die Verteilung der wahren Fehler ε_i [1.4.3] erkennen, die bei 160 Beobachtungen desselben Winkels gemacht wurden. Die ε_i sind dazu ihrer Größe nach in die auf der Abszissenachse angedeuteten Gruppen von je 0,1 mgon Breite eingeordnet, und über den Abszissenabschnitten sind Rechtecke eingezeichnet, deren Höhe der Anzahl der in die

betreffende Gruppe fallenden Fehler proportional ist. Wie die so entstandene Treppenkurve (= Histogramm) zeigt, ist die Häufigkeit, mit der ein Fehler ε auftritt, eine Funktion seiner Größe. Diese Erscheinung ist von C. F. Gauß in das nach ihm benannte Fehlergesetz

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} \quad (1.5)$$

gebracht worden, in dem $\varphi(\varepsilon)$ die relative – d.h. prozentuale – Häufigkeit des Auftretens, e die Basis der natürlichen Logarithmen und h eine Konstante ist, die die Messungsgenauigkeit charakterisiert. Die danach zu erwartende theoretische Fehlerverteilungskurve ist in Abb. 1.4 als durchlaufende Kurve eingezeichnet; sie stimmt mit der aus den Messungen gewonnenen Treppenkurve gut überein. Das gilt für alle größeren Messungsreihen, die überwiegend zufällige Fehler aufweisen. Solche Messungsreihen besitzen in der Sprache der Statistik eine *Normalverteilung*. Die überwiegend durch zufällige Fehler verursachten Messungswidersprüche aber lassen sich nach der auf C. F. Gauß zurückgehenden *Methode der kleinsten Quadrate* willkürfrei ausgleichen.

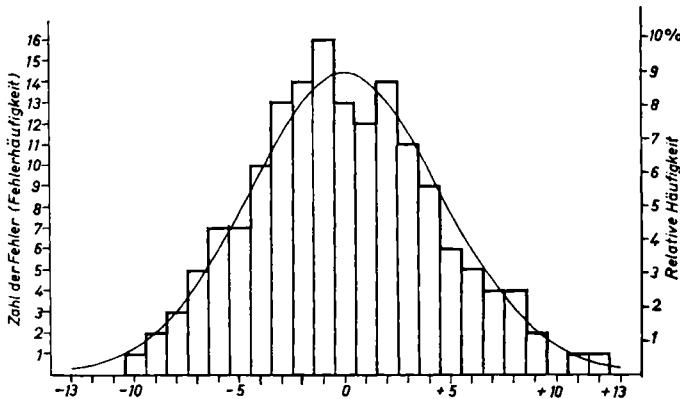


Abb. 1.4 Histogramm eines wiederholt gemessenen Winkels

1.4.3 Mittelwerte und Streuungsmaße

Die Einzelergebnisse l_i , die sich ergeben würden, wenn man eine Größe beliebig oft ($n \rightarrow \infty$) durch gleichgenaue, unabhängige und nur mit zufälligen Fehlern behaftete Messungen bestimmte, werden um einen ge-

wissen *Mittelwert* ξ schwanken, den man den *Erwartungswert* oder auch den *wahren Wert* der Größe nennt. Da jedoch in allen Regelfällen nur eine begrenzte Anzahl von Messungen (eine Stichprobe vom Umfang n) vorliegt, benutzt man als Näherungswert für den wahren Wert das *arithmetische Mittel*

$$\hat{x} = \frac{1}{n} (l_1 + l_2 + \cdots + l_n) = \frac{1}{n} [l]^*. \quad (1.6)$$

Für die nach dem Bilden des arithmetischen Mittels *übrigbleibenden Fehler* oder *Verbesserungen*

$$v_1 = \hat{x} - l_1; \quad v_2 = \hat{x} - l_2; \quad \dots; \quad v_n = \hat{x} - l_n$$

gilt, daß deren Quadratsumme $[vv]$ ein Minimum wird, also

$$[vv] = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 = \text{Min.} \quad (1.7)$$

Das ist gleichzeitig die Grundforderung der Methode der kleinsten Quadrate, aus der das arithmetische Mittel sich als Sonderfall herleiten läßt.

Um gemäß [1.4.2] Ziff. 2 ein *Maß für die Streuung* einer einzelnen Messung l_i zu bekommen, betrachtet man – zunächst für $n \rightarrow \infty$ – die Abweichungen der Beobachtungen l_i von dem wahren Wert ξ , die sogenannten *wahren Fehler*

$$\varepsilon_1 = \xi - l_1; \quad \varepsilon_2 = \xi - l_2; \quad \dots; \quad \varepsilon_n = \xi - l_n$$

und definiert als Genauigkeitsmaß für eine einzelne Messung l_i die “*theoretische Standardabweichung*”

$$\sigma = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}; \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.8)$$

Die ε_i sind jedoch in allen Regelfällen nicht bekannt; man muß daher auf die in [1.4.3] eingeführten übrigbleibenden Fehler v_i zurückgehen und erhält daraus aufgrund einer statistischen Abschätzung anstelle von σ den Näherungs- oder Schätzwert

$$s = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}, \quad (1.9)$$

der als “*empirische Standardabweichung*” einer einzelnen Beobachtung bezeichnet wird**.

* In der Fehlerrechnung verwendet man nach dem Vorbild von C. F. Gauß gern eckige Klammern als Summenzeichen.

** In der Vergangenheit wurde in der Regel die Bezeichnung mittlerer Fehler verwendet.

Das arithmetische Mittel aus n Beobachtungen hat, wie in [1.4.4] begründet werden wird, die Standardabweichung

$$s(\hat{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}}. \quad (1.10)$$

Damit sind die in [1.4.1] gestellten Aufgaben für den Fall gleich genauer Beobachtungen gelöst.

1.4.4 Das Fehlerfortpflanzungsgesetz

Neben der Standardabweichung einer einzelnen Messung wird oftmals auch die Standardabweichung einer Funktion gemessener Größen benötigt. Das leistet das *Fehlerfortpflanzungsgesetz*.

Lineare Funktionen: Gegeben seien die Messungen l_1 und l_2 sowie deren Standardabweichungen σ_1 und σ_2 . Gesucht werde die Standardabweichung $s(x)$ der Funktion

$$x = l_1 + l_2. \quad (1.11)$$

Zur Berechnung von $s(x)$ geht man zurück auf die Definitionsgleichung (1.8) und unterstellt, die l_i in (1.11) seien die Mittel aus ν Urmessungen mit den wahren Fehlern $\varepsilon'_1, \varepsilon''_1 \dots \varepsilon^{(\nu)}_1$ bzw. $\varepsilon'_2, \varepsilon''_2 \dots \varepsilon^{(\nu)}_2$, wobei unter ν eine sehr große Zahl verstanden sei. Dann bestehen ν Gleichungen von der Form $\varepsilon_x = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, aus denen durch Quadrieren, Aufaddieren und Division durch ν folgt

$$\frac{[\varepsilon_x \varepsilon_x]}{\nu} = \frac{[\varepsilon_1 \varepsilon_1]}{\nu} + \frac{[\varepsilon_2 \varepsilon_2]}{\nu} + \frac{2[\varepsilon_1 \varepsilon_2]}{\nu}.$$

Die 3 ersten Ausdrücke ergeben nach (1.8) die Werte $\sigma(x)^2$, σ_1^2 und σ_2^2 . Im letzten Ausdruck werden die gemischten Produkte, da nur zufällige Fehler, d.h. stochastisch unabhängige Variable vorausgesetzt sind, im Durchschnitt gleich oft positiv und negativ sein und sich daher beim Aufaddieren so weitgehend tilgen, daß der Ausdruck, zumal nach Division durch ν , gegen Null geht. Also bleibt

$$\sigma(x)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2.$$

Ersetzt man dann noch, wie beim Übergang von (1.8) auf (1.9), die σ durch die entsprechenden Schätzwerte s , so erhält man zur Berechnung eines Schätzwertes für die Standardabweichung der in (1.11) erhaltenen

Summe x die Regel

$$s(x)^2 = s_1^2 + s_2^2. \quad (1.12)$$

Anwenden desselben Gedankenganges auf die Funktion

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \cdots + \alpha_n l_n \\ \text{gibt} \quad s(x)^2 &= \alpha_1^2 s_1^2 + \alpha_2^2 s_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 s_n^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Man beachte folgende Sonderfälle:

a) Ist $s_1 = s_2 = \cdots s_n = s$, so wird

$$s(x)^2 = [\alpha\alpha] s^2. \quad (1.14)$$

b) Sind ferner alle α_i entweder $+1$ oder -1 , so ist

$$s(x)^2 = ns^2 \quad \text{oder} \quad s(x) = s\sqrt{n}. \quad (1.15)$$

Dieser Fall tritt z.B. beim Nivellement und bei der Streckenmessung auf. In Worten lautet die Regel:

Werden mehrere gleich genaue Einzelmessungen zu einer Summe oder Differenz vereinigt, so wächst die Standardabweichung des Ergebnisses mit der Quadratwurzel aus der Anzahl der Einzelmessungen.

c) Bringt man die Gleichung (1.6) in die Form

$$\hat{x} = \frac{l_1}{n} + \frac{l_2}{n} + \cdots \frac{l_n}{n},$$

wobei alle $s_i = s$ sind, so folgt daraus nach (1.13) für $s(\hat{x})^2$ der bereits in (1.10) angegebene Wert

$$s(\hat{x})^2 = \frac{s^2}{n^2} + \frac{s^2}{n^2} + \cdots \frac{s^2}{n^2} \quad \text{oder} \quad s(\hat{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}}. \quad (1.10)$$

In Worten: Wird ein und derselbe Gegenstand n mal mit gleicher Genauigkeit gemessen, so geht die Standardabweichung des arithmetischen Mittels mit der Quadratwurzel aus der Anzahl der Wiederholungen zurück.

Der Leser möge die Fälle b) und c) wohl auseinanderhalten. Vgl. auf S. 19 die Beispiele 1 und 2.

Nichtlineare Funktionen macht man gewöhnlich mit Hilfe der Taylorschen Reihe linear und wendet auf das Ergebnis die Gleichung (1.13) an. Das Fehlerfortpflanzungsgesetz lautet dann in seiner allgemeinsten Form:

Für $x = f(l_1, l_2 \dots l_n)$ ist

$$\sigma(x)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial l_1} \right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_2} \right)^2 \sigma_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial l_n} \right)^2 \sigma_n^2. \quad (1.16)$$

Zahlenbeispiele:

1. Bei einer Längenmessung mit einem 20 m-Meßband ist die von dem ungenauen Aneinanderlegen des Meßbandes herrührende Standardabweichung einer einzelnen Meßbandlage gleich 2 mm. Wie groß ist die Standardabweichung einer Strecke vom 100 m?

$$\text{Aus (1.15) folgt: } s_{100} = 2\sqrt{5} = 4 \text{ mm.}$$

2. Eine Strecke von 160 m wurde viermal unabhängig gemessen. Eine einzelne Messung hat die Standardabweichung 12 mm. Wie groß ist die Standardabweichung des arithmetischen Mittels aus den 4 Messungen?

$$\text{Aus (1.10) folgt: } s(\hat{x}) = \frac{12}{\sqrt{4}} \text{ mm} = 6 \text{ mm.}$$

3. Gegeben ist $a = 87,46$. Wie groß ist die Standardabweichung von $x = \lg a$, wenn $s(a) = 0,04$ ist?

Aus (1.16) folgt:

$$s(x) = \frac{d \lg a}{da} s(a) = \frac{\text{Mod}}{a} s(a) = \frac{0,4343}{87,46} \cdot 0,04 = 0,00020.$$

4. Die Seiten eines Rechtecks und ihre Standardabweichungen sind $a = 39,12 \text{ m}$, $b = 71,38 \text{ m}$, $s(a) = 0,02 \text{ m}$ und $s(b) = 0,04 \text{ m}$. Gesucht sind die Fläche des Rechtecks und ihre Standardabweichung.

Aus $F = ab$ folgt gem. (1.16) $s(F)^2 = (bs(a))^2 + (as(b))^2$ und mit den gegebenen Zahlen $F = 2792 \text{ m}^2$ mit $s(F)^2 = 2,1 \text{ m}^2$.

5. Im Dreieck ABC sind gemessen $b = 221,41 \text{ m}$, $c = 166,14 \text{ m}$ und $\alpha = 54,2110 \text{ gon}$, wobei $s(b) = 0,06 \text{ m}$, $s(c) = 0,05 \text{ m}$ und $s(\alpha) = 4,0 \text{ mgon}$ ist. Gesucht sind die Seite a und ihre Standardabweichung.

Aus $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$ folgt gem. (1.16)

$$s(a)^2 = \left(\frac{b - c \cos \alpha}{a} s(b) \right)^2 + \left(\frac{c - b \cos \alpha}{a} s(c) \right)^2 + \left(\frac{bc \sin \alpha}{a} \cdot \frac{s(\alpha)}{\varrho} \right)^2$$

und mit den gegebenen Zahlen $a = 167,80 \text{ m}$ mit $s(a) = 0,04 \text{ m}$.

1.4.5 Ausgleichung direkter Beobachtungen von gleicher Genauigkeit

Ist eine Größe mehrfach gemessen worden, so müssen die Messungen zur Lösung der Aufgaben in [1.4.3] nach (1.6), (1.9) und (1.10) ausgeglichen werden. Um mit kleinen Zahlen rechnen zu können, führt man für die Unbekannte einen Näherungswert x_0 ein und setzt $x = x_0 + \delta x$. Bezeichnet man dann die Messungsgrößen anstatt mit l_i künftig mit L_i , so hat man die Ausgangsgleichung

$$L_i + v_i = x_0 + \delta x. \quad (1.17)$$

Darin bringt man L_i nach rechts und erhält die *Fehlergleichung*

$$v_i = \delta x - (L_i - x_0) = \delta x - l_i, \quad (1.18)$$

in der l_i eine neue Bedeutung erhalten hat.

Damit ergibt sich folgendes Rechenschema: Bilde

- | | |
|--|--|
| 1. die Absolutglieder | $-l_i = -(L_i - x_0)$ |
| 2. den Mittelwert | $\delta x = \frac{1}{n}[l]$ |
| 3. die übrigbleibenden Fehler | $v_i = \delta x - l_i$ |
| 4. die $[v]$ -Probe | $[v] = 0$ |
| 5. die $[vv]$ -Proben | $[vv] = [ll] - [l]\delta x = [ll] - \frac{[l]^2}{n}$ |
| 6. die Standardabweichung einer Messung | $s = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$ |
| 7. die Standardabweichung des Mittelwertes | $s(\hat{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}}$ |

und setze als Schlußprobe die gewonnenen Ergebnisse in Gleichungen (1.17) ein, die erfüllt sein müssen.

Zahlenbeispiel: Zur Bestimmung eines Winkels seien die in Spalte 1 des nachstehenden Schemas eingetragenen Beobachtungen gemacht. Als Näherungswert werde $x_0 = 52,350$ gon *eingeführt*.

L_i	$l_i =$ $L_i - x_0$	$v_i = \delta x - l_i$		vv	ll
		+	-		
1	2	3		4	5
gon	mgon	mgon	mgon	mgon ²	mgon ²
52,356	+ 6		5,3	28	36
52,348	- 2	2,7		07	04
52,346	- 4	4,7		22	16
52,347	- 3	3,7		14	09
52,352	+ 2		1,3	01	04
52,355	+ 5		4,3	18	25
	+ 4	11,1	10,9	90	94

$$\delta x = \frac{+4}{6} = 0,7 \text{ mgon}; [v] = 0,2; \text{ soll} = \text{Null}.$$

$$[vv] = 94 - 4 \cdot \delta x = 94 - \frac{4^2}{6} = 91; \text{ soll} = 90.$$

Ausgleichsergebnisse: $\hat{x} = x_0 + \delta x = 52,351 \text{ gon}$;

$$s = \sqrt{\frac{0,90}{6-1}} = \pm 0,004 \text{ gon}; s(\hat{x}) = \frac{0,004}{\sqrt{6}} = 0,0013 \text{ gon}.$$

1.4.6 Ausgleichung direkter Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit

1.4.6.1 Einführen von Gewichten

Ist eine Messungsgröße mehrere Male mit *verschiedener* Genauigkeit beobachtet worden, müssen beim Bilden des Mittelwertes die Genauigkeitsverhältnisse oder – in der Sprache der Ausgleichungsrechnung – die *Gewichte* der einzelnen Messungen berücksichtigt werden. Eine Messung habe das Gewicht p , wenn sie die gleiche Standardabweichung hat wie das arithmetische Mittel aus p tatsächlichen oder fingierten Standardmessungen mit dem Gewicht 1. Mithin gilt im Hinblick auf (1.10) für die

Messungen $L_1, L_2 \dots L_n$ mit den Gewichten $p_1, p_2 \dots p_n$ der Ansatz

$$p_1 : p_2 \dots : p_n = \frac{\sigma^2}{\sigma_1^2} : \frac{\sigma^2}{\sigma_2^2} \dots : \frac{\sigma^2}{\sigma_n^2}. \quad (1.19)$$

Die Gewichte sind also den Quadraten der Standardabweichungen umgekehrt proportional. Die Standardabweichungen einer Messung vom Gewicht 1 wird *Gewichtseinheitsfehler* genannt und gewöhnlich mit σ_0 bezeichnet. Zur Berechnung des Gewichts p_i einer Beobachtung L_i mit der Standardabweichung σ_i hat man dann die Gleichung

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}. \quad (1.20)$$

Die Gewichtseinheit wählt man so, daß die Gewichte möglichst wenig von 1 abweichen. Gebräuchliche Gewichtseinheiten sind die Gewichte einer Streckenmessung von 100 m, eines Nivellements von 1 km und das Gewicht eines in beiden Fernrohren einmal beobachteten Winkels.

Aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz (1.13) folgt mit den aus (1.20) abzuleitenden Werten der σ_i^2 das *Gewichtsfortpflanzungsgesetz*

$$\frac{1}{p_x} = \frac{\alpha_1^2}{p_1} + \frac{\alpha_2^2}{p_2} + \dots + \frac{\alpha_n^2}{p_n}. \quad (1.21)$$

Multipliziert man eine Beobachtung L_i mit der Wurzel aus ihrem Gewicht, so erhält nach (1.21) der Ausdruck

$$L_i \sqrt{p_i} \quad (1.22)$$

das Gewicht 1.

Dieser Ausdruck wird als *normierte oder standardisierte Variable* bezeichnet.

Zahlenbeispiel: In einem Dreieck wurde Winkel α mit $s(\alpha) = 0,6$ mgon und Winkel β mit $s(\beta) = 0,4$ mgon beobachtet. Gefragt ist a) wie groß ist p_β , wenn $p_\alpha = 1$ gesetzt wird; b) wie groß ist p_γ für $\gamma = 200$ gon $-\alpha - \beta$?

$$\text{Zu a) } p_\alpha : p_\beta = \frac{1}{0,6^2} : \frac{1}{0,4^2} = \frac{0,36}{0,36} : \frac{0,36}{0,16}; \quad p_\beta = 2,2.$$

$$\text{Zu b) } \frac{1}{p_\gamma} = \frac{1}{p_\alpha} + \frac{1}{p_\beta} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2,2} = 1,45; \quad p_\gamma = 0,7.$$

1.4.6.2 Das gewogene Mittel

Um einen Mittelwert aus Messungen verschiedenen Gewichts zu erhalten, ersetzt man wegen (1.22) die Minimumsbedingung (1.7) durch die allgemeine Forderung

$$[vvp] = \text{Minimum.} \quad (1.23)$$

An die Stelle des einfachen Mittels (1.6) tritt dann, wenn man wie in (1.17) einen Näherungswert x_0 abspaltet, als Mittelwert aus n Messungen L_i mit verschiedenen Gewichten das *gewogene Mittel*

$$\hat{x} = \frac{L_1 p_1 + L_2 p_2 + \cdots + L_n p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = x_0 + \frac{[lp]}{[p]} = x_0 + \delta x. \quad (1.24)$$

Die Standardabweichungen einer Beobachtung vom Gewicht 1 bzw. vom Gewicht p_i sind gemäß (1.9) und (1.22)

$$s_0 = \pm \sqrt{\frac{[vvp]}{n-1}} \quad \text{bzw.} \quad s_i = \pm \frac{s_0}{\sqrt{p_i}}. \quad (1.25)$$

Die Standardabweichung und das Gewicht des gewogenen Mittels sind

$$s(\hat{x}) = \pm \frac{s_0}{\sqrt{[p]}} \quad \text{bzw.} \quad p_x = [p]. \quad (1.26)$$

Der *Rechenweg* entspricht durchaus dem Verfahren in 1.4.5. Hinzu kommt lediglich, daß jede Fehlergleichung ihr besonderes Gewicht hat. Dadurch treten im nachstehenden Zahlenbeispiel an die Stelle von [1.4.5] Ziffer 2., 6. und 7. die Gleichungen (1.24) bis (1.26); es erscheinen zusätzlich die Spalten lp und vp ; und vv und ll werden durch vvp und llp ersetzt. Ferner erhalten die $[v]$ -Probe und die $[vv]$ – vgl. [1.4.5] Ziffer 4. und 5. – die Formen

$$[vp] = 0 \quad (1.27)$$

$$[vvp] = [llp] - [lp]\delta x = [llp] - \frac{[lp]^2}{[p]}. \quad (1.28)$$

Zahlenbeispiel: Ein Winkel wurde am 1. Tage 8mal, am 2. Tage 4mal, am 3. Tage 12mal und am 4. Tage 8mal gemessen. Man erhielt als Tagesmittel der Reihe nach 40,1714 gon, 40,1718 gon, 40,1721 gon und 40,1725 gon. Gesucht sind der Mittelwert und seine Standardabweichung.

Als Näherungswert sei 40,17 gon gewählt. Die Gewichtseinheit sei ein viermal gemessener Winkel. Damit erhält man:

p	$l_i =$ $L_i - x_0$	lp	$v_i =$ $\delta x - l_i$	vp		vvp	llp
				+	-		
1	2	3	4	5		6	7
	mgon	mgon	mgon	mgon	mgon	mgon ²	mgon ²
2	1,4	2,8	+ 0,6	1,2		0,72	3,92
1	1,8	1,8	+ 0,2	0,2		0,04	3,24
3	2,1	6,3	- 0,1		0,3	0,03	13,23
2	2,5	5,0	- 0,5		1,0	0,50	12,50
8		15,9		1,4	1,3	1,29	32,89

$$\delta x = \frac{15,9}{8} = 1,988 \text{ mgon}; \quad [vp] = +0,1 \text{ mgon (soll = Null)}$$

$$[vvp] = 32,89 - 15,9 \cdot \delta x = 32,89 - \frac{15,9^2}{8} = 1,29; \quad \text{soll } 1,29.$$

(Beachte : Damit die $[vvp]$ -Probe stimmt, muß δx auf 1 bis 2 Stellen genauer berechnet werden, als sachlich notwendig ist).

Ausgleichsergebnisse:

$$\hat{x} = 40,17 \text{ gon} + 0,002 \text{ gon} = 40,1720 \text{ gon};$$

$$s_0 = \sqrt{\frac{129}{4-1}} = 0,7 \text{ mgon}; \quad s(\hat{x}) = \frac{s_0}{\sqrt{[p]}} = \frac{7}{\sqrt{8}} = 0,24 \text{ mgon}.$$

1.4.7 Ausgleichung von direkten Beobachtungen mit einer Summenbedingung

Oftmals müssen die ausgeglichenen Werte mehrerer Messungen L_i einer mathematischen Bedingung genügen, z.B. muß die Summe der den Horizont füllenden Winkel 400 gon betragen, und eine Nivellementsleife, die zum Ausgangspunkt zurückgeführt wird, muß mit Null abschließen. Für die Ausgleichung solcher Messungen ergibt das Prinzip des gewogenen Mittels folgenden Weg:

Ist S der Sollwert und $[L]$ die Summe aus den Ergebnissen der n die Summe bildenden Messungen, so wird der *Widerspruch* $w = [L] - S$ bei

lauter gleichgewichtigen Messungen auf alle Einzelmessungen zu gleichen Teilen verteilt. Die Standardabweichungen einer ursprünglichen Messung L_i bzw. die einer ausgeglichenen Messung x_i sind

$$s_i = \frac{w}{\sqrt{n}} \quad \text{bzw.} \quad s(x_i) = s_i \sqrt{1 - \frac{1}{n}}. \quad (1.29)$$

Bei ungleichen Gewichten der Einzelmessungen dagegen wird der Widerspruch proportional zu den reziproken Gewichten $1/p_i$ verteilt. Die Standardabweichung einer ursprünglichen Messung von Gewicht 1 bzw. die einer ausgeglichenen Messung x_i sind dann

$$s_0 = w : \sqrt{\left[\frac{1}{p} \right]} \quad \text{bzw.} \quad s(x_i) = \frac{s_0}{\sqrt{p_i}} \sqrt{1 - \frac{1}{p_i} : \left[\frac{1}{p} \right]}. \quad (1.30)$$

1.4.8 Berechnung der Standardabweichungen aus Doppelmessungen

Oftmals werden der Sicherheit halber n gleichartige Größen (Winkel, Strecken, Höhenunterschiede, Flächeninhalte usw.) je zweimal mit gleicher Genauigkeit beobachtet. L_i und ε_i seien die Beobachtungen und die wahren Fehler der ersten Serie, L'_i und ε'_i die der zweiten Serie. Beobachtung plus wahrer Fehler ergeben laut Definition den wahren Wert einer Größe. Also muß sein

$$L_i + \varepsilon_i = L'_i + \varepsilon'_i \quad \text{oder} \quad L_i - L'_i = d_i = -\varepsilon_i + \varepsilon'_i.$$

Mithin sind die $d_i = -\varepsilon_i + \varepsilon'_i$ als die Differenz $L_i - L'_i$ bekannt. Werden die n möglichen Gleichungen für die d_i zuerst quadriert, dann aufsummiert und schließlich durch n geteilt, so erhält man, weil wie in [1.4.4] die gemischten Glieder gegen Null gehen,

$$\frac{[dd]}{n} = s^2 + s'^2.$$

Da aber s und s' , wenn beide Male nach dem gleichen Verfahren gemessen wird, als gleich angenommen werden können, erhält man bei gleichgewichtigen Messungen als Standardabweichung einer einzelnen

Beobachtung

$$s = \sqrt{\left[\frac{dd}{2n} \right]}. \quad (1.31)$$

als Standardabweichung einer aus beiden Messungen gemittelten Beobachtung

$$s_M = \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{dd}{n} \right]}. \quad (1.32)$$

Bei Messungen mit *verschiedenen* Gewichten ist die Standardabweichung einer Beobachtung vom Gewicht 1

$$s_0 = \sqrt{\frac{[ddp]}{2n}}. \quad (1.33)$$

Beim Nivellement ist das Gewicht, da die Standardabweichung nach der Regel bei (1.15) mit der Wurzel aus der nivellierten Strecke wächst, gemäß (1.21) der Strecke umgekehrt proportional; also ist, wenn die Strecke R_i heißt, $p_i = 1/R_i$.

Für die Fehlerrechnung ergeben sich dann die in [11.4.1] abgeleiteten Formeln.

1.4.9 Ausgleichsalgorithmus für vermittelnde Beobachtungen*

Die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen wendet man an, wenn mehrere Unbekannte gemeinsam zu bestimmen sind und die Anzahl der Beobachtungen größer ist als die der Unbekannten. In vielen Fällen sind nicht die Unbekannten selbst beobachtet worden, sondern andere Größen, die mit ihnen in einem funktionalen Zusammenhang stehen. So werden z.B. beim trigonometrischen Einschneiden Winkel gemessen; als Unbekannte aber werden die Koordinaten des Neupunktes N bestimmt [vgl. Bd. II, Kap. 5]. Zur Lösung drückt man zunächst in den Fehlergleichungen die Beobachtungen durch die Unbekannten aus. Alsdann werden die dabei auftretenden Verbesserungen ν aufgrund der Forderung $[\nu\nu]$ zum Minimum ausgeglichen.

Ein einfaches Beispiel für das Aufstellen von Fehlergleichungen ist bereits in [1.4.5] gegeben. Nachfolgend soll ein Lösungsweg für die Bestimmung mehrerer Unbekannter beschrieben werden. Für jede Beobachtung

* Für die Beschreibung wird die Matrizenschreibweise verwendet. Eine kurze Einführung findet man im Anhang G.

L_i erhält man eine Fehlergleichung. Bei mehreren Unbekannten x, y, z haben diese, falls ein linearer Zusammenhang $L_i + \nu_i = f_i(x, y, z)$ gegeben ist, die Form

$$\begin{aligned} L_1 + \nu_1 &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ L_2 + \nu_2 &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ &\vdots \\ L_m + \nu_m &= a_{m1}x + a_{m2}y + a_{m3}z, \end{aligned} \quad (1.34)$$

wobei die a_{ij} die bekannten Koeffizienten (vgl. z.B. 1.43) beschreiben. Der Index i bezeichnet die Beobachtungen, j die Unbekannten.

In Matrizenschreibweise hat (1.34) die Form

$$\mathbf{L} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (1.35)$$

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix} = \mathbf{L}, \quad \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \vdots \\ \nu_m \end{bmatrix} = \mathbf{v}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{x}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \end{bmatrix} = \mathbf{A}.$$

Nach Anwenden der Methode der kleinsten Quadrate erhält man aus (1.35) für gleichwertige Beobachtungen die Normalgleichungen

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{L} = 0 \quad (1.36)$$

und daraus die Unbekannten

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{L}). \quad (1.37)$$

(^: Schätzwert)

Von besonderem Interesse in der Gleichung (1.37) ist die Kofaktormatrix $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$. Mit dieser berechnet man die Varianz-Kovarianzmatrix der Unbekannten:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z^2 \end{bmatrix} = \sigma_0^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}. \quad (1.38)$$

Die Größen in der Diagonalen sind die Varianzen der Unbekannten, die seitwärts liegenden die Kovarianzen. Der Faktor σ_0^2 ist eine Konstante. Eine unverzerrte Schätzung für die Konstante ist die empirische Varianz

$$s_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}{n - u}, \quad (1.39)$$

wobei

n : Anzahl der Beobachtungen,

u : Anzahl der Unbekannten ist.

Bei einer ausreichenden Anzahl von Überbestimmungen ($n - u > 5$) kann s_0^2 in (1.38) an Stelle von δ_0^2 verwendet werden.

Die Verbesserungen erhält man nach (1.35) aus

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{L}. \quad (1.40)$$

Bei Beobachtungen mit unterschiedlichen Gewichten erhält man an Stelle von (1.36), (1.37), (1.38):

$$\left(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} = 0, \quad (1.36a)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L}, \quad (1.37a)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z^2 \end{bmatrix} = \sigma_0^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{N}^{-1} \quad (1.38a)$$

mit

$$\begin{bmatrix} P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_n \end{bmatrix} = \mathbf{P}$$

und

$$s_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n - u}. \quad (1.39a)$$

Sind die ursprünglichen Fehlergleichungen (1.34)

$$L_i + \nu = f_i(x, y, z)$$

nicht linear, so werden sie – mit Hilfe der Taylorschen Reihe für mehrere Unbekannte – linear gemacht. Nach Einführen von Näherungswerten

$$x = x_0 + dx, \quad y = y_0 + dy, \quad z = z_0 + dz, \quad (1.41)$$

erhält man an Stelle von (1.34) die linearisierten Fehlergleichungen:

$$L_i + \nu_i = f_i(x_0, y_0, z_0) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)_0 dy + \left(\frac{\partial f_i}{\partial z}\right)_0 dz + \dots \quad (1.42)$$

Setzt man

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)_0 = a_{i1}, \left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)_0 = a_{i2}, \left(\frac{\partial f_i}{\partial z}\right)_0 = a_{i3} \quad (1.43)$$

und

$$L_i - f_i(x_0, y_0, z_0) = l_i, \quad (1.44)$$

so bekommen die umgeformten Fehlergleichungen die Form:

$$\nu_i = a_{i1}dx + a_{i2}dy + a_{i3}dz - l_i. \quad (1.45)$$

Beispiele:*

a) Die ursprünglichen Fehlergleichungen für die von Festpunkten (x_i, y_i) , zu einem Neupunkt (x, y) gemessenen Strecken lauten:

$$s_i + \nu_i = q \sqrt{(y - y_i)^2 + (x - x_i)^2}, \quad (1.46)$$

bzw. nach Einführen von Näherungskordinaten für den Neupunkt N

$$s_i + \nu_i = q_0 \sqrt{(y_0 - y_i + dy)^2 + (x_0 - x_i + dx)^2}.$$

q ist ein Maßstabsfaktor, q_0 ein Näherungswert.

Für die einzelnen Glieder von (1.45) erhält man dann

$$f_i(x_0, y_0) = q_0 \sqrt{(y_0 - y_i)^2 + (x_0 - x_i)^2} = s_i^0;$$

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)_0 = a_{i1} = q_0 \frac{y_0 - y_i}{s_i^0}; \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)_0 = a_{i2} = q_0 \frac{x_0 - x_i}{s_i^0};$$

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial q}\right)_0 = a_{i3} = s_i^0,$$

so daß die umgeformten Fehlergleichungen lauten

$$\nu_i = q_0 \frac{y_0 - y_i}{s_i^0} dy + q_0 \frac{x_0 - x_i}{s_i^0} dx + s_i^0 dq - (s_i - s_i^0). \quad (1.47)$$

b) Bei Richtungsbeobachtungen von Festpunkten (x_i, y_i) zu einem Neupunkt (x, y) gelten die ursprünglichen Fehlergleichungen:

$$\left(r_N^0\right)_i + \nu_i = \arctan \frac{y - y_i}{x - x_i}, \quad (1.48)$$

* vgl. [8.4]

wobei $(r_N^0)_i$ die zum Neupunkt weisenden orientierten Richtungen sind [8.3.2]. Nach Einführen von Näherungswerten

$$y_i = y_0 + dy_i, \quad x_i = x_0 + dx_i$$

erhält man durch Linearisieren

$$\left(r_N^0\right)_i + \nu_i = \arctan \frac{y_0 - y_i}{x_0 - x_i} + \left(\frac{\partial \arctan g}{\partial y}\right)_0 dy + \left(\frac{\partial \arctan g}{\partial x}\right)_0 dx$$

mit

$$g = \frac{y_0 + dy - y_i}{x_0 + dx - x_i},$$

$$\left(\frac{\partial \arctan g}{\partial y}\right)_0 = a_{i1} = + \frac{x_0 - x_i}{(s_i^0)^2} \cdot \frac{200}{\pi},$$

$$\left(\frac{\partial \arctan g}{\partial x}\right)_0 = a_{i2} = - \frac{y_0 - y_i}{(s_i^0)^2} \cdot \frac{200}{\pi},$$

$$(s_i^0)^2 = (y_0 - y_i)^2 + (x_0 - x_i)^2.$$

Setzt man noch $\arctan \frac{y_0 - y_i}{x_0 - x_i} = t_i^0$, so gilt für die umgeformten Fehlergleichungen:

$$\nu_i = \frac{x_0 - x_i}{(s_i^0)^2} \cdot \frac{200}{\pi} dy - \frac{y_0 - y_i}{(s_i^0)^2} \cdot \frac{200}{\pi} dx - \left((r_N^0)_i - t_i^0\right). \quad (1.49)$$

c) Sind auf einem Neupunkt (x, y) Richtungen r_i zu mehreren Festpunkten (x_i, y_i) gemessen, so gilt für die Richtung nach einem beliebigen Punkt:

$$r_i + \nu_i = -\varphi + \arctan \frac{y_i - y}{x_i - x}. \quad (1.50)$$

Die arctan Funktion unterscheidet sich von der in (1.48) auftretenden dadurch, daß im Zähler und Nenner des Quotienten die Vorzeichen vertauscht sind. Im Vergleich zu (1.49) haben daher auch die Koeffizienten der Fehlergleichungen ein umgekehrtes Vorzeichen; der Betrag der Koeffizienten bleibt erhalten, φ ist eine Orientierungsunbekannte. An Stelle von (1.49) erhält man:

$$\nu_i = - \frac{x_0 - x_i}{(s_i^0)^2} \cdot \frac{200}{\pi} dy + \frac{y_0 - y_i}{(s_i^0)^2} \cdot \frac{200}{\pi} dx - (r_i - t_i^0) \quad (1.51)$$

mit

$$t_i^0 = \arctan \frac{y_0 - y_i}{x_0 - x_i} \pm 200\text{gon}.$$

Beim Rückwärtseinschneiden sind nicht nur die Koordinaten des Neupunktes, sondern auch die Orientierung φ der gemessenen Richtungen unbekannt. Das System der Fehlergleichungen kann daher gelöst werden, wenn auch für die Unbekannte φ eine Fehlergleichung aufgestellt ist. Da hierfür keine Beobachtung vorliegt, muß eine fingierte Gleichung eingeführt werden. Diese lautet nach *Schreiber*:

$$\nu_{n+1} = [a_{i1}]_1^n dy + [a_{i2}]_1^n dx - [l_i]_1^n; \quad \text{Gewicht: } p_{n+1} = \frac{1}{[p_i]_1^n}, \quad (1.52)$$

wobei

$$l_i = (r_i - t_i^0).$$

Einzelne Aufgaben kann man nach folgendem Rechenschema lösen: Bilde

- | | |
|---|--|
| (1) Näherungskoordinaten | x_0, y_0 |
| (2) die linearen bzw. nichtlinearen Beziehungen zwischen den Beobachtungen und Unbekannten, d.h. stelle jede Beobachtung als Funktion der Unbekannten auf | $L_i + \nu_i = f_i(x, y, z)$ |
| (3) die Koeffizienten | a_{i1}, a_{i2}, \dots |
| (4) die Absolutglieder | $l_i = L_i - f_i(x_0, y_0, z_0)$ |
| (5) die Matrix der Koeffizienten | \mathbf{A} |
| (6) die Matrix der Absolutglieder | \mathbf{l} |
| (7) die Unbekannten | $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{l}) = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{n}$ |
| (8) die Verbesserungen der Beobachtungen | $\mathbf{v} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}$ |
| (9) die Ausgleichungsprobe | $\mathbf{v}^T \mathbf{v} = -\mathbf{l}^T \mathbf{v}$ |
| (10) die empirische Varianz | $s_0^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{v} / (n - u)$ |
| (11) die Varianz der Unbekannten | $((\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}) s_0^2$ |
| (12) das Endergebnis | $\hat{\mathbf{x}}.$ |

1.4.10 Fehlergrenzen und Vertrauensbereich

Die Fläche unter der Kurve Abb. 1.4 repräsentiert die Gesamtheit aller aufgetretenen Fehler. Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung einen Fehler zwischen den Grenzen $\varepsilon = a$ und $\varepsilon = b$ zu begehen, erhält man

demnach durch Integration von (1.5) zu

$$\bar{\phi}(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{\varepsilon=a}^b e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon. \quad (1.53)$$

Wählt man als Grenzen $a = -u_s \sigma$ und $b = +u_s \sigma$, wobei u_s ein Zahlenfaktor und σ der nach (1.8) für den Fall $n \rightarrow \infty$ gefundene theoretische Wert der Standardabweichung ist, so gewinnt man für bestimmte Werte von u_s die in der Tabelle 1 vermerkten Prozentsätze der Sicherheit S dafür, daß die Beobachtungen in dem Vertrauensbereich

$$x \pm u_s \sigma \quad (1.54)$$

liegen. Nach der letzten Zeile dieser Tabelle wird also der dreifache Wert von σ nur in 0,3% aller Fälle überschritten.

Tabelle 1

u_s	S%
1	68,3
1,96	95
2	95,4
2,58	99
3	99,7

Gestützt auf diese Erkenntnisse und auf langjährige praktische Erfahrungen betrachten die Vermessungsverwaltungen den 3- bis 4fachen Betrag der theoretischen Standardabweichung der verschiedenen Messungsarten als *Fehlergrenze* und schreiben vor, daß Messungen, bei denen die jeweiligen Fehlergrenzen überschritten werden, wiederholt werden müssen [vgl. 4.2.6, 6.7.6.3, 11.4.3]. Diese Vorschrift führt vielfach zu der Auffassung, daß ein Messungsergebnis, bei dem die aus den Messungen selbst errechnete Standardabweichung den durch die Fehlergrenzen gesteckten Rahmen nicht überschreitet, als gesichert angesehen werden kann. Das trifft in dieser Allgemeinheit nicht zu. Aus der begrenzten Zahl der Messungen gewinnt man nämlich nicht den theoretischen Wert σ der Standardabweichung, sondern z.B. nach (1.9) oder (1.31) lediglich den Näherungswert s , und nach [1.4.5] und [1.4.6] den Näherungswert $s(\hat{x})$. s und $s(\hat{x})$ aber sind um so ungenauer, je kleiner die Anzahl f der zu ihrer Berechnung verwandten überschüssigen Messungen ist.

Die mathematische Statistik verzichtet daher auf den Begriff der Fehlergrenze und ermittelt statt dessen für das Messungsergebnis den soge-

nannten *Vertrauensbereich*, dessen untere und obere Grenze beschrieben wird durch die Formel

$$x \pm t_s s(\hat{x}). \quad (1.55)$$

Der darin auftretende Faktor t_s ist eine Funktion der Anzahl f der zur Berechnung von $s(\hat{x})$ benutzten überschüssigen Messungen und des je nach Lage des Falles für erforderlich gehaltenen Sicherheitsprozentsatzes S . Einige Zahlenwerte dieser sog. "Studentschen" Funktion sind in der Tabelle 2 wiedergegeben. In diese geht man ein mit f und findet rechts daneben die Werte für t_s bei $S = 95\%$ und $S = 99\%$.

Tabelle 2

f	Wert von t für	
	$S = 95\%$	$S = 99\%$
1	12,71	63,66
2	4,30	9,92
3	3,18	5,84
4	2,78	4,60
5	2,57	4,03
8	2,31	3,36
10	2,23	3,17
20	2,09	2,85
50	2,01	2,68
∞	1,96	2,58

Der sogenannte Erwartungswert oder wahre Wert der Messungsgröße selbst liegt dann mit *dem gewählten Sicherheitsprozentsatz* S in dem durch (1.36) beschriebenen Bereich.

Zahlenbeispiele:

1. Im Zahlenbeispiel zu [1.4.5] wurden $\hat{x} = 52,351$ gon und

$$s(\hat{x}) = \pm 0,0013 \text{ gon}$$

mit $f = 5$ überschüssigen Beobachtungen berechnet. Also ist der Vertrauensbereich bei 95% Sicherheit:

$$\hat{x} \pm 2,57 \cdot 0,0013 \quad \text{oder} \quad 52,351 \text{ gon} \pm 0,003 \text{ gon},$$

und bei 99% Sicherheit:

$$\hat{x} \pm 4,03 \cdot 0,0013 \quad \text{oder} \quad 52,351 \text{ gon} \pm 0,005 \text{ gon}.$$

Die Unsicherheit des Ergebnisses ist also 3 bzw. 5mal größer als meistens aufgrund der berechneten Standardabweichung angenommen wird.

2. Im Zahlenbeispiel zu [1.4.6.2] ergab sich $\hat{x} = 40,1720$ gon und $s(\hat{x}) = 0,00024$ gon mit $f = 3$. Also ist der Vertrauensbereich bei $S = 95\%$

$$\hat{x} \pm 3,18 \cdot 0,00024 \text{ gon} \quad \text{oder} \quad 40,1720 \text{ gon} \pm 0,0008 \text{ gon}$$

und bei $S = 99\%$

$$\hat{x} \pm 5,84 \cdot 0,00024 \text{ gon} \quad \text{oder} \quad 40,1720 \text{ gon} \pm 0,0014 \text{ gon}.$$

Der Schlußsatz zum vorigen Beispiel gilt entsprechend.

Es überrascht zunächst, daß bei steigenden Ansprüchen an die Sicherheit in beiden Beispielen die Vertrauensgrenzen weiter nach außen gerückt sind und damit das Ergebnis x mit größerer Unsicherheit behaftet zu sein scheint als bei geringeren Ansprüchen. Die Erklärung ist jedoch einfach: Wenn zwischen den Vertrauensgrenzen bei sonst gleichbleibenden Verhältnissen ein größerer Prozentsatz an Sicherheit untergebracht werden soll, so müssen die Grenzen erweitert werden. Wünscht man dagegen das endgültige Messungsergebnis \hat{x} in engeren Grenzen einzuschließen, so muß man – eine aus (1.36) folgende triviale Erkenntnis – entweder durch genaueres Messen für eine kleinere Standardabweichung sorgen oder durch Vermehrung der Zahl der überschüssigen Beobachtungen in der Tabelle 2 zu einem kleineren Wert von t_s kommen.

1.5 Bezugsflächen

Um die zu vermessenden Gegenstände nach Lage und Höhe festlegen zu können, bedarf es einer Ausgangs- oder Bezugsfläche. Hierfür empfiehlt sich, da man die Vertikalachsen der Vermessungsinstrumente mit Hilfe von Pendeln oder Libellen in die Richtung der Schwerkraft zu bringen pflegt, eine Niveaufläche, d.h. eine Fläche, die in jedem ihrer Punkte normal zu der jeweiligen Richtung der Schwerkraft verläuft. Eine Fläche dieser Art ist auf der Erde durch die Oberfläche des Weltmeeres gegeben, das man sich hierzu in einer von Gezeiten, Strömungen usw. freien mittleren Lage ruhend vorzustellen und mittels kommunizierender Röhren unter den Kontinenten fortgesetzt zu denken hat. Diese auf der ganzen Erde eindeutig definierbare Fläche wird in Anlehnung an das griechische Wort für Erde als *Geoid* bezeichnet und als die mathematische Figur der Erde betrachtet (Abb. 1.5).

Die Meeresoberfläche stellt sich nach Maßgabe der Schwerkraft ein. Da diese aber infolge der Massenverteilung im Erdinnern gewisse Unre-

gelmäßigkeiten aufweist, ist auch das Geoid keine regelmäßige Fläche. Es gleicht jedoch mit Abweichungen, die 80 m kaum überschreiten, einem *Umdrehungsellipsoid*, dessen Äquatorhalbmesser im Jahre 1987 während der "General Assembly der I.U.G.G." (Internationale Union für Geodäsie und Geophysik) in Vancouver durch internationale Vereinbarung zu 6 378 137 m festgelegt ist. Als Maß für die Abplattung – das ist die relative Verkürzung der Drehachse gegenüber der Äquatorachse – ist 1 : 298,25 angenommen worden. Die Drehachse ist also nur rund 3‰ kürzer als die Äquatorachse.

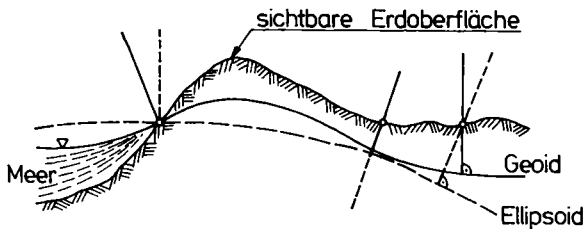


Abb. 1.5 Geoid, Ellipsoid, physische Erdoberfläche

Soll nun ein Ausschnitt aus der *sichtbaren Erdoberfläche* vermessen werden, so denke man sich alle Oberflächenpunkte in der jeweiligen Lotrichtung auf das Geoid projiziert. Als Fläche gilt dann die Projektion des Ausschnitts auf das Geoid. Die horizontale Entfernung zweier Punkte ist die auf dem Geoid zu messende kürzeste Entfernung der Lotfußpunkte; die Höhe (= Meereshöhe) eines Punktes ist sein in der Lotlinie gemessener Abstand vom Geoid, und der Höhenunterschied zweier Punkte ist die Differenz ihrer Meereshöhen.

Angeichts der geringen Unterschiede von Geoid und Umdrehungsellipsoid kann man, sofern man sich auf Länder von mittlerer Größe beschränkt, für Lagemessungen ein Umdrehungsellipsoid als Bezugsfläche nehmen und hat dann den Vorteil, auf einer mathematisch beherrschbaren Fläche rechnen zu können. Für kleinere Länder reicht häufig eine sich der Erdkrümmung im Vermessungsgebiet möglichst eng anschmiegende Kugel aus, und wenn das Vermessungsgebiet 10 km im Quadrat nicht überschreitet, genügt die Ebene als Bezugsfläche.

Bei den Höhenmessungen sind diese Vereinfachungen im allgemeinen nicht erlaubt. Einerseits ist nämlich die Krümmung der Erdoberfläche so bedeutend, daß eine Tangentialebene, die man in irgendeinem Punkt an die als Ellipsoid oder Kugel betrachtete Erde legt, in 35 km Entfernung vom Berührungspunkt bereits rund 100 m von der Erde absteht. Zum

anderen machen die Unterschiede zwischen Ellipsoid und Geoid sich bei der Höhenmessung durchaus bemerkbar. Höhenmessungen werden daher in der Regel auf das Geoid – oder wie man in der Praxis zu sagen pflegt – auf den mittleren Meereshorizont bezogen.

2 Bestandteile geodätischer Meßinstrumente

2.1 Die Libellen

Um die geodätischen Lage- und Höhenmessungen auf die in [1.5] bzw. [3] eingeführten Bezugsflächen beziehen zu können, müssen die Achsen der Meßinstrumente in die Lotrichtung gebracht oder rechtwinklig zu ihr eingerichtet werden. Hierfür bedient man sich in vielen Instrumenten der Libellen, die in unterschiedlichen Ausführungen als Dosenlibellen für Grobeinstellungen und als Röhrenlibellen oder Libellen mit einem Flüssigkeitshorizont für feinere Messungen gefertigt werden. Man unterscheidet analoge und digitale Libellen; die ersteren haben eine analoge, die zweiten eine digitale Meßwertausgabe. Digitale Libellen haben den Vorteil, daß ihre Meßwerte von einem Rechner weiterverarbeitet oder durch Ziffernanzeigeinheiten angezeigt werden können.

2.1.1 Die Dosenlibelle

Eine Dosenlibelle (Abb. 2.1) besteht aus einem in Metall gefaßten runden Glasgefäß, dessen Deckel auf der Innenseite kugelförmig ausgeschliffen und dessen Boden zugeschmolzen ist. Das Gefäß ist bis auf einen kleinen Rest – die Blase – mit Äther oder Alkohol gefüllt. Die Mitte des Gefäßes ist durch einen oder mehrere Kreise angedeutet.

Mit einer justierten Dosenlibelle wird eine auf Stellschrauben ruhende Ebene, z.B. ein Meßtisch, horizontiert und eine durch Stellschrauben gehaltene Vertikalachse lotrecht gestellt, indem man die Libellenblase mit den Stellschrauben zum Einspielen bringt. Die Dosenlibelle ist justiert, wenn eine an den Mittelpunkt der Kugelkappe gelegte Tangentialebene der Auflagenfläche der Libelle parallel ist oder wenn sie normal zu der Vertikal- oder Stehachse verläuft.

Um eine Dosenlibelle zu justieren, läßt man die Blase mit Hilfe der Stellschrauben genau einspielen und bewegt die Libelle (durch Umsetzen auf dem Tisch bzw. Drehen der Stehachse) ganz langsam um 200 gon. Zeigt sich dabei ein Ausschlag, so beseitigt man ihn zur Hälfte mit

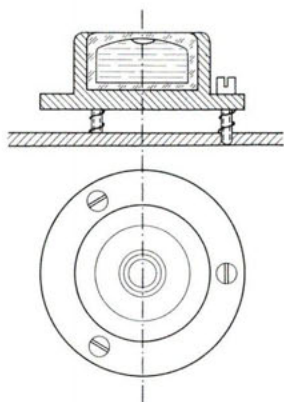


Abb. 2.1 Dosenlibelle

den Stellschrauben, zur Hälfte mit den an der Libellenfassung sichtbaren Justierschrauben.

2.1.2 Die Röhrenlibelle

(1) Röhrenlibellen mit analoger Meßwertausgabe

Eine solche Röhrenlibelle (Abb. 2.2) besteht aus einer in Metall gefaßten zylindrischen Glasröhre, deren Innenseite im oberen Teil tonnenförmig ausgeschliffen ist, so daß sie im Längsschnitt als Kreisbogen erscheint. Die Röhre ist an beiden Enden zugeschmolzen und häufig mit Äther gefüllt bis auf die von Ätherdämpfen eingenommene längliche Blase, die an die jeweils höchste Stelle der Libelle wandert. An der Außenwand des Glaskörpers ist eine Teilung angebracht, deren Striche (Tonnenreifen) bei älteren Libellen 2,26 mm (eine Pariser Linie), bei neueren Libellen 2 mm voneinander entfernt sind. Der Abstand zweier Teilstriche heißt *Pars*. Der Mittelpunkt der Teilung ist der *Normalpunkt* oder die *Mittelmarke*; die in der Mittelmarke in Längsrichtung der Libelle an die innere Wandung gelegte Tangente ist die *Libellenachse*; ihre Projektion auf die Unterseite der Fassung – d.h. auf die Ebene, mit der die Fassung aufliegt – wird als *Setzlinie* bezeichnet. Der Winkel, um den die Libelle geneigt werden muß, damit die Blase um einen Pars weiterläuft, heißt die *Angabe* der Libelle. Sie wird in der Regel in Sexagesimalsekunden angegeben und liegt bei Feinnivellierlibellen bei $5''$, bei mittleren Libellen bei $20''$ und bei einfachen Libellen bei $45''$. Die entsprechenden Schliffhalbmesser sind 82,5 m, 20,6 m und 9,2 m.

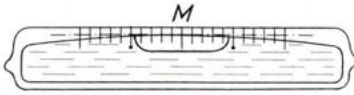


Abb. 2.2a Röhrenlibelle mit analoger Meßwertanzeige

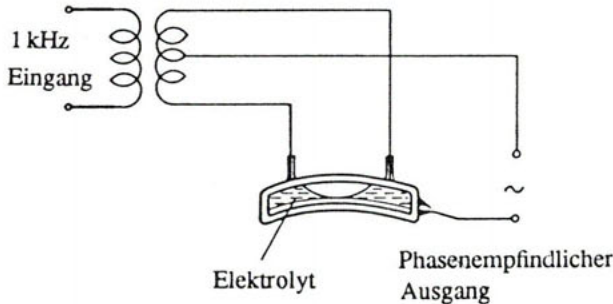


Abb. 2.2b Röhrenlibelle mit digitaler Meßwertanzeige

(2) Digitale Röhrenlibellen

Bei diesem Typ von Röhrenlibellen wird der Neigungswinkel in eine analoge Spannung und diese durch einen Analog/Digital-Wandler in eine digitale Größe umgeformt.

Als Sensor dient eine Elektrolytlibelle (Abb. 2.2b). Die Röhre enthält eine leitende Flüssigkeit und drei in die Glaswand eingeschmolzene Elektroden. An die der Blase zugewandten Elektroden wird gegenphasig eine Wechselspannung (z.B. von 1 KHz) gelegt. Wandert die Blase aus ihrer Mitteneinstellung heraus, so wird die Symmetrie der Wechselstrombrücke gestört und am Ausgang entsteht analog zur Neigung eine Wechselspannung. Die Wechselspannung wird gleichgerichtet und durch einen Analog/Digital-Wandler digitalisiert. Der Meßwert kann dann an einer Ziffernanzeigeeinheit abgelesen werden (Michelbacher 1990).

2.1.3 Libellen mit einem Flüssigkeitshorizont

Bei diesen Libellen handelt es sich um Zwei-Komponenten-Neigungsmesser, mit denen Neigungen in zwei zueinander senkrechten Richtungen bestimmt werden können (Abb. 2.3).

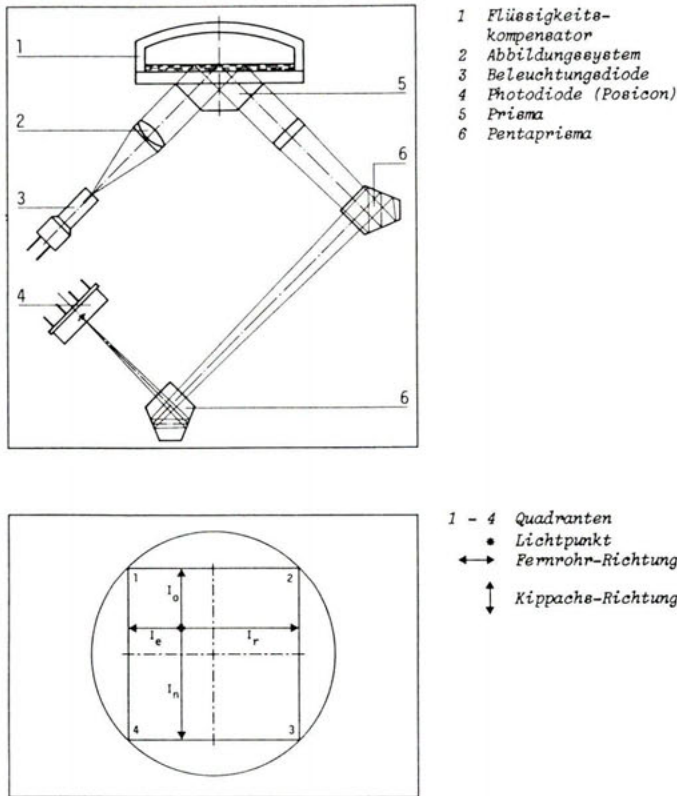


Abb. 2.3 Libelle mit Flüssigkeitshorizont

Das Meßprinzip basiert auf der Reflexion eines Lichtstrahls an einer Flüssigkeitsoberfläche. Der Lichtstrahl einer Lumineszenzdioden wird nach der Reflexion an der Flüssigkeitsoberfläche als Lichtfleck auf eine 4-Quadrantendiode abgebildet. Die Leuchtdiode, der Flüssigkeitsbehälter und die 4-Quadrantendiode sind gehäusefest angebracht; der Lichtpunkt wandert daher über den Detektor, wenn die Libelle unterschiedlich geneigt wird. Neigungen der Libelle werden von der 4-Quadrantendiode (durch je zwei gegenüberliegende Dioden) in den beiden Achsrichtungen als Spannungswerte detektiert. Die Spannungen können durch einen Analog/Digital-Wandler in digitale Meßwerte umgewandelt werden. Befindet sich eine solche Libelle z.B. in einem Theodolit, so ordnet man die eine Achse des Quadrantendetektors in Richtung der Kippachse und die andere in der Ebene der Zielachse an.

2.1.4 Justierung und Gebrauch der Libellen

(1) Justierung und Gebrauch der Röhrenlibellen

Befindet sich die Röhrenlibelle in einer Fassung, die das Umsetzen der Libelle ermöglicht, so heißt sie *Setzlibelle*; mit ihr lassen sich Geraden und Ebenen horizontieren.

Die Setzlibelle ist justiert, wenn die Libellenachse der Setzlinie parallel ist. Wird eine justierte Setzlibelle auf eine horizontale Ebene gesetzt, so spielt die Blase auf die Mittelmarke ein.

Um Einblick in das Verhalten einer Setzlibelle zu gewinnen, stelle man mit Hilfe eines "Legebrettes", d.h. eines schmalen ebenen Brettes, das mit einer Stellschraube um eine horizontale Achse gekippt werden kann (Abb. 2.4), eine um α geneigte Ebene her und setze auf diese Ebene eine um β dejustierte Libelle.

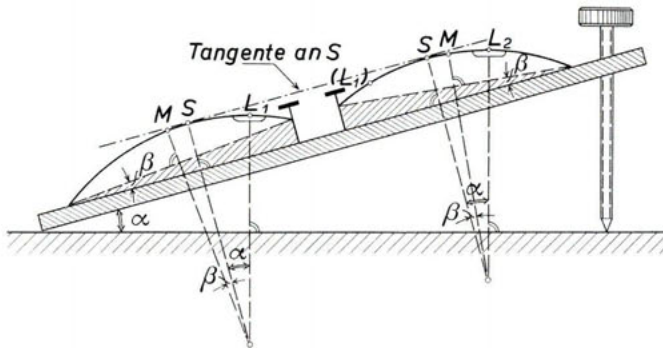


Abb. 2.4 Gebrauch der Setzlibelle

Der Ausschlag L_1 , den die Blase zeigt, ist das Ergebnis von Neigung und Dejustierung; er ist, wie man in Abb. 2.4 links erkennt, gleich $(\alpha + \beta)$. Setzt man die Libelle um (rechts im Bild), so schlägt die Blase um $(\alpha - \beta)$ nach der entgegengesetzten Seite aus. Der Weg der Blase von L_1 bis zur neuen Stellung L_2 beträgt also im Winkelmaß 2α , und wenn man den Punkt in der Mitte des Bogens L_1L_2 , den *Spielpunkt*, mit S bezeichnet, so ist $L_1S = SL_2 = \alpha$. Folglich ist, wenn die Blase im Spielpunkt steht, $\alpha = 0$, d.h. die Ebene ist horizontal. Der Bogen MS aber entspricht, wie man anhand der Zeichnung erkennt, dem Dejustierungswinkel β . Um die Libelle zu justieren, hat man mithin den Bogen MS gleich Null zu machen, oder, anders ausgedrückt, man hat den Spielpunkt mit Hilfe der Libellenjustierungsschraube auf die Mittelmarke zu verlegen.

Die Justierung wird besonders einfach, wenn man zuvor $\alpha = \beta$ macht. Das wird automatisch erreicht, indem man zunächst die Blase mit den Stellschrauben des Legebrettes auf die Mittelmarke einstellt. Setzt man dann um, so schlägt die Blase um $2\alpha = 2\beta$ aus. Jetzt wird eine Hälfte des Ausschlages mit der Stellschraube des Legebrettes beseitigt; dann ist die Setzlinie horizontal. Die andere Hälfte wird fortgeschafft, indem man die Blase mit den Justierschrauben der Libelle wieder auf die Mittelmarke bringt; damit ist die Libelle justiert. Wenn sich nach abermaligem Umsetzen noch ein Ausschlag zeigt, so ist der Vorgang zu wiederholen.

Wird lediglich das Horizontalstellen der Setzlinie ohne Libellenjustierung verlangt, so bestimmt man durch Umsetzen der Libelle den Spielpunkt der Blasenmitte oder eines Blasenendes in Beziehung auf die Setzlinie und stellt die Blase mit Hilfe der Stellschraube des Legebrettes auf den Spielpunkt ein.

Die Vertikalachsenlibelle wird – anders als die Setzlibelle – nicht als selbständiges Gerät gebaut, sondern sie findet sich als Zusatzeinrichtung z.B. an Theodoliten und anderen Instrumenten, deren Vertikalachse mittels einer Vertikalachsenlibelle streng lotrecht gestellt werden soll. Eine Vertikalachsenlibelle ist justiert, wenn die Libellenachse – d.i. die Tangente in M – mit der Vertikalachse einen rechten Winkel bildet (Abb. 2.5). Man erhält den Spielpunkt der Libelle in Beziehung auf die Vertikalachse, indem man durch Drehen der Vertikalachse die Richtung der Libellenachse um 200 gon ändert und den Blasenweg L_1L_2 halbiert.

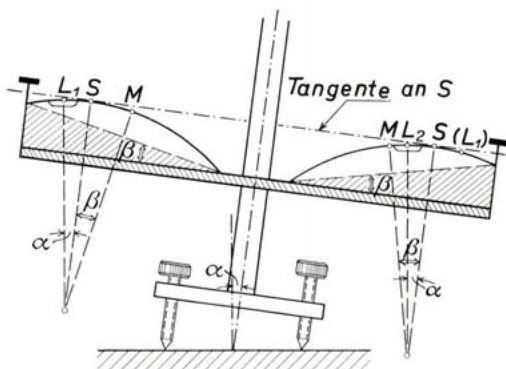


Abb. 2.5 Gebrauch der Vertikalachsenlibelle

Um eine Vertikalachse lotrecht zu stellen und die Vertikalachsenlibelle zu justieren, geht man wie schon zuvor beschrieben, wieder von dem Fall $\alpha = \beta$ aus und hat dann folgende Schritte zu machen:

1. Vertikalachse mit Dosenlibelle genähert aufrichten.
2. Röhrenlibelle parallel zu zwei Fußschrauben stellen und Blase auf Mittelmarke einspielen lassen.
3. Achse nebst Libelle um 200 gon drehen und Ausschlag ablesen.
4. Die Hälfte des Ausschlages mit den Fußschrauben beseitigen; die Blase steht damit im Spielpunkt, und die Achse ist in einer Richtung aufgerichtet.
5. Achse nebst Libelle um 100 gon drehen und Blase mit der dritten Fußschraube auf den vorher bestimmten Spielpunkt bringen; damit ist die Achse auch in der zweiten Richtung aufgerichtet.
6. Zur Probe Achse langsam drehen; bleibt die Blase dann nicht im Spielpunkt stehen, so sind die Vorgänge 2. bis 5. zu wiederholen.
7. Wenn die Blase stehenbleibt, ist die Achse streng lotrecht. Stellt man alsdann die Blase mit den Libellenjustierschrauben auf die Mittelmarke ein, so wird der Spielpunkt auf die Mittelmarke verlegt; die Libelle ist justiert. Bei digitalen Libellen kann die Restabweichung auch gespeichert und rechnerisch in Form einer Korrektur berücksichtigt werden.

(2) Justierung und Gebrauch der Libellen mit einem Flüssigkeitshorizont

Wird eine solche Libelle [vgl. 2.1.3] z.B. in einem Theodolit montiert, so wird sie bei vertikaler Stehachse so justiert, daß die Restausschläge in beiden Achsrichtungen nahezu Null sind. Die Restabweichungen werden wie in [2.1.4(1)] in einer Zweilagennmessung ermittelt; diese können schließlich abgespeichert und von einem Mikroprozessor als Korrektur berücksichtigt werden.

2.1.5 Das Bestimmen der Libellenangabe

Mit der Libellenangabe wird die Genauigkeit der Libellen mit analoger Meßwertausgabe charakterisiert. Die Angabe einer Libelle läßt sich nach unterschiedlichen Verfahren bestimmen. *Libellen, die mit einem Fernrohr fest verbunden sind*, können mit Hilfe eines in der Entfernung s senkrecht aufgestellten Maßstabes (z.B. einer Nivellierlatte) untersucht werden. Man stellt das Instrument so auf, daß eine der drei Fußschrauben zur Latte weist, liest an der Libellenteilung den Stand eines Blasenendes ab und macht mit Hilfe des Fernrohrs am Maßstab die Ablesung l_1 . Dann läßt

man die Blase durch Bewegen der zum Maßstab weisenden Fußschraube um n Pars weiterwandern und liest am Maßstab l_2 ab. Jetzt stellt man die Neigungsänderung in Pars dem aus der Ablesung am Maßstab abzuleitenden Winkel gegenüber und erhält

$$n \text{ pars} = \frac{l_1 - l_2}{s} \varrho'' \quad \text{oder} \quad 1 \text{ pars} = \frac{\varrho''}{ns} (l_1 - l_2).$$

Beispiel: $n = 20$; $s = 18,80 \text{ m}$; $l_1 = 1,397 \text{ m}$; $l_2 = 1,361 \text{ m}$

$$1 \text{ pars} = \frac{206265 \cdot 0,036}{20 \cdot 18,80} = 20''$$

Libellen, die nicht fest mit einem Instrument verbunden sind, kann man auf einem Libellenprüfer untersuchen. Die schematische Darstellung eines Libellenprüfers einfacher Bauart zeigt Abb. 2.6. Er besteht aus einem T-förmigen Träger, besitzt zwei Y-Lager zur Aufnahme der Libellen und kann mittels einer Feinmeßschraube geneigt werden. Die Feinmeßschraube kann z.B. eine Ganghöhe von $\frac{1}{2} \text{ mm}$ und eine Teilung von 100 Teilstrichen haben. Häufig sind die Neigungen unmittelbar in der Einheit ["] abzulesen.

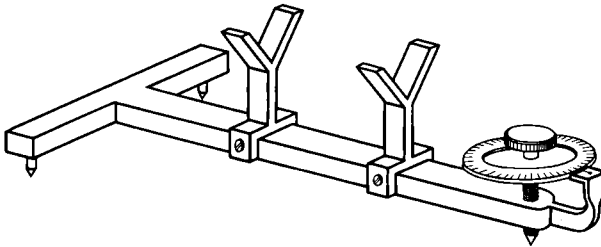


Abb. 2.6 Libellenprüfer

Ist h die Ganghöhe der Schraube und l die wirksame Länge des Libellenprüfers, so bewirkt eine volle Schraubenumdrehung eine Neigungsänderung $k'' = \varrho'' \cdot h/l$, die als Konstante des Libellenprüfers bezeichnet wird. Ist k bekannt, so wird zunächst die Anfangsstellung der Blase abgelesen, und es wird nach t Umdrehungen eine zweite Ablesung gemacht. Dieser Vorgang wird mit kleinen Änderungen in der Ausgangsstellung mehrere Male wiederholt. Ist die Blase im Mittel um n Pars weitergelaufen, so errechnet sich der Wert für 1 Pars oder die Angabe der Libelle aus

$$n \text{ pars} = tk'' \quad \text{oder} \quad 1 \text{ pars} = \frac{t}{n} k''.$$

Beispiel: Bestimmung der Angabe einer Röhrenlibelle. Die Ganghöhe der Schraube ist 0,5 mm, die wirksame Länge 250,0 mm, so daß $k = 400''$ ist. Die Schraubentrommel gestattet Ablesungen auf 0,01 Schraubenumdrehungen.

Trommel- ablesung	t	Libellenablesungen			n
		links	rechts	Mitte	
0,00	0,25	1,7	15,2	8,45	5,10
0,25		6,8	20,3	13,55	
0,02	0,25	2,4	16,0	9,20	4,80
0,27		7,2	20,8	14,00	
0,05	0,25	3,0	16,6	9,80	4,75
0,30		7,7	21,4	14,55	
0,13	0,25	4,6	18,3	11,45	4,90
0,38		9,5	23,2	16,35	
0,23	0,25	6,3	20,0	13,15	5,05
0,48		11,4	25,0	18,20	
				Mittel	4,92

Mithin ist die Angabe $\frac{0,25}{4,92} \cdot 400'' = 20,3''$.

Als behelfsmäßiger Libellenprüfer kann ein Legebrett dienen. Man hat dann zur Ermittlung der Konstanten die Länge l unmittelbar zu messen. Die Ganghöhe h der Schraube bestimmt man, indem man die Schraube auf einem Blatt Papier abdrückt und den Abstand mehrerer Windungen mit einem Millimeterstab mißt.

Abb. 2.7 zeigt einen *Libellenprüfer hoher Präzision*. Ein solcher Libellenprüfer ist erschütterungsfrei auf einem massiven Sockel in einem Raum mit konstanter Temperatur aufzustellen. Drei Feinstellschrauben tragen eine Grundplatte. Die Grundplatte ist über ein mechanisches Hebelsystem mit einem Kipptisch (Meßfläche) verbunden. Mit der Feinmeßschraube kann man die Meßfläche kippen. Das Kippgelenk bilden zwei Blattfedern, über die der Kipptisch und die Grundplatte miteinander verbunden sind. Ein zweiseitiger Hebel, der ebenfalls mit einer Grundplatte durch eine Blattfeder verbunden ist, stützt sich einerseits an der Mikrometerspindel und andererseits am Kipptisch ab.

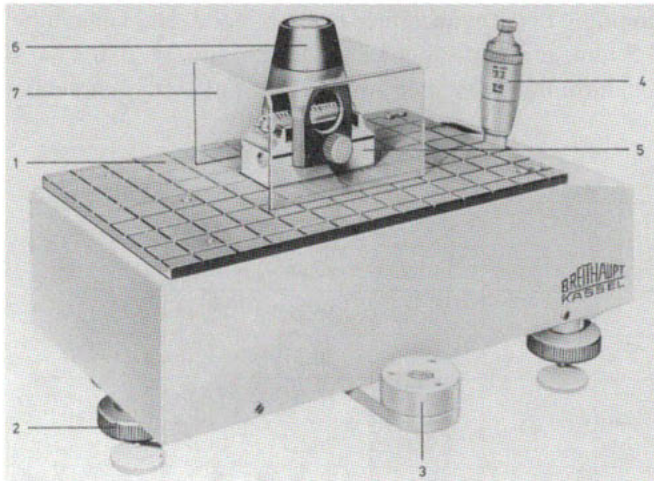


Abb. 2.7 Libellenprüfer Likon (Breithaupt)

(1 Kipptisch, 2 Stellschraube, 3 Dosenlibelle, 4 Feinmeßschraube, 5 Libellenhalter, 6 Ableselupe, 7 Schutzhaube)

Die wichtigsten technischen Daten sind:

Mikrometerintervall:	1''
Meßbereich:	+1500''
	-1000''
max. system. Fehler über den gesamten Meßbereich:	≤5%
max. Belastung:	20 kp.

Mit dem Libellenprüfer lassen sich ungefaßte, gefaßte und fest mit einem Instrument verbundene Libellen prüfen.

2.1.6 Besonderheiten der Röhrenlibellen

a) Die *Libellenteilung* geht bei Gebrauchsinstrumenten in der Regel von der Mitte aus nach beiden Seiten; für feinere Libellen ist sie durchlaufend beziffert. Bei der Ablesung von Libellen mit Mittelteilung hilft man sich, indem man eine Richtung, etwa die zum Fernrohrobjektiv, als +-Richtung betrachtet.

b) *Wendelibellen* sind auf der Oberseite und der Unterseite ausgeschliffen und geteilt, so daß sie in beiden Lagen benutzt werden können. Sie haben deshalb eine obere und eine untere Libellenachse, die parallel sein müssen. Diese Forderung ist bei neueren Libellen bis auf wenige Bogen Sekunden erfüllt.

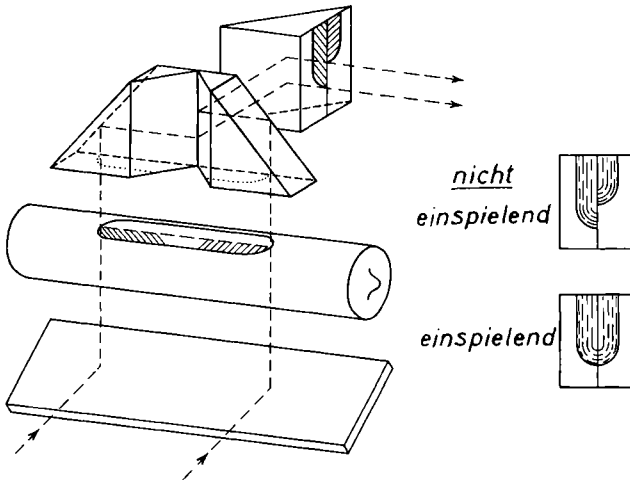


Abb. 2.8 Koinzidenzlibelle

c) *Kammerlibellen* enthalten an einem Ende eine durch eine Scheidewand abgetrennte Kammer, in die ein Teil der Libellenflüssigkeit durch Heben und Senken des Kammerendes überführt werden kann. Dadurch läßt sich die zwangsläufige von der Temperatur der Libellenflüssigkeit abhängige Blasenlänge regulieren. Besser baut man die Libelle in eine isolierende Fassung ein, so daß Temperatureinflüsse möglichst ferngehalten werden.

d) Bei *Koinzidenzlibellen* ist, um eine sehr scharfe Einstellung der Libelle vom Beobachterstand aus zu ermöglichen, über der Libelle ein Prismensystem angebracht, das die Blasenenden in der Längsrichtung spaltet und die Bilder der gespalteten Blasenenden nebeneinanderspiegelt (Abb. 2.8). Wenn man dann durch Bewegen der Fußschrauben des Unterbaus die beiden gespalteten Blasenenden zur Koinzidenz bringt, so daß sie sich zu einer symmetrischen Figur vereinigen, spielt die Libelle ein. Koinzidenzlibellen haben in der Regel keine Teilung. Zur Bestimmung der Angabe mißt man den Blasenweg am Glaskörper mit einem Millimeterstab und bezeichnet als Angabe den Neigungswinkel, der einem Blasenweg von 2 mm entspricht.

e) Die *Reitlibelle* ist eine Nebenform der Setzlibelle. Sie dient zum Horizontieren von zylindrischen Achsen. Anstelle der ebenen Grundfläche hat sie zwei meistens kreisförmig ausgesägte Füße. Setzlinie ist die Verbindungsgerade der Scheitelpunkte.

f) Eine *Libellenkreuzung* liegt vor, wenn die Horizontalprojektion der Achse einer Fernrohrlibelle nicht parallel zur Zielachse ist, oder wenn

die Achse einer Reitlibelle nicht parallel zur zylindrischen Achse verläuft. Man erkennt die Libellenkreuzung daran, daß die Blase beim Hin- und Herwälzen des Fernrohrs – bzw. beim Hin- und Herkippen der Reitlibelle – nach verschiedenen Seiten läuft. Die Libellenkreuzung kann durch seitlich wirkende Justierschrauben beseitigt werden.

2.1.7 Libellen und Kompensatoren

Bis etwa zum Jahre 1950 waren fast alle geodätischen Beobachtungsinstrumente mit Röhrenlibellen ausgestattet, bei denen die Position der Blase an Teilstrichen abgelesen wurde. Die Libellen, insbesondere die feinen Röhrenlibellen der Nivelliere und die Höhenindexlibellen der Theodolite, sind jedoch recht anfällig gegen einseitige Sonneneinstrahlung; sie reagieren ferner stark auf mechanische Störungen durch vorbeifolende Fahrzeuge und durch das Herumtreten des Beobachters um das Instrument. Schließlich müssen die Röhrenlibellen der Feinnivelliere und der Höhenzeiger auch in bereits horizontierten Instrumenten vor jeder Ablesung durch Bestätigung einer zusätzlichen Einstellschraube (Kippschraube) sorgfältig eingespielt werden. Das kostet Zeit und wird leider, insbesondere bei der Vertikalwinkelmessung, des öfteren vergessen.

Aus allen diesen Gründen brachten die Geräte bauenden Firmen in steigendem Umfang Instrument heraus, bei denen nach vorheriger Grobhorizontierung mit Dosenlibellen – die Feinhorizontierung automatisch erfolgt. Das wird erreicht durch den Einbau eines insbesondere der Schwerkraft folgenden optisch-mechanischen Bauelements, für das sich die Bezeichnung *Kompensator* eingebürgert hat. Während aber die Libellen mit den Nivellierfernrohren und den Ablesevorrichtungen der Vertikalkreise durch verhältnismäßig einfache Vorrichtungen verbunden sind, ist bei den Instrumenten mit Kompensatorhorizontierung die Art des Kompensators oftmals maßgebend für den optisch-mechanischen Aufbau des ganzen Instruments. Bei manchen Nivellieren kann der Kompensator geradezu als das Herzstück des Instruments angesehen werden. Aus diesem Grunde wollen wir die Kompensatoren nicht an dieser Stelle besprechen, sondern sie zusammen mit der Beschreibung der Instrumente darstellen und zwar die der Nivelliere in [10] und die der Theodolite in [3].

Bei digitalen Theodoliten verwendet man häufig als Kompensatoren elektronische Libellen, die mit einem Mikroprozessor gekoppelt sind. Nach anfänglicher Grobhorizontierung werden Restabweichungen von dem Mikroprozessor als Korrekturen berücksichtigt.

2.2 Die Abbildung durch Linsen, Spiegel und Prismen

2.2.1 Geometrisch-optische Grundbegriffe

Aus der geometrischen Optik, die hier als bekannt vorausgesetzt wird, werden die für die Fernrohr-optik wichtigsten Beziehungen kurz zusammengestellt:

Eine Linse ist ein von zwei Kugelflächen begrenzter durchsichtiger Glaskörper. Die Verbindung der beiden Kugelmittelpunkte ist die optische Achse der Linse; auf ihr liegt auch der optische Mittelpunkt der Linse.

Linsen, die nach den Rändern dünner werden, heißen *konvexe oder Sammellinsen*; Linsen, die in der Mitte dünner sind als am Rand, heißen *konkave oder Zerstreuungslinsen*. Abb. 2.9 zeigt der Reihe nach eine bikonvexe, plankonvexe, konkavkonvexe sowie eine bikonkave, plankonkave und konvexkonkave Linse.

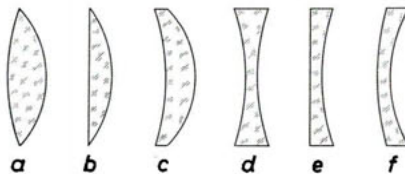


Abb. 2.9 a-c Sammellinsen, d-f Zerstreuungslinsen

Die meisten optischen Instrumente enthalten mehrere Linsen, die zentriert sein müssen. Ein System von Linsen ist zentriert, wenn die optischen Achsen der Linsen einer Geraden angehören.

Die Gesetze für den Gang der Lichtstrahlen durch Linsensysteme werden sehr einfach, wenn man sich auf achснаhe Strahlen beschränkt und – was in der Praxis allerdings meistens nicht zutrifft – unterstellt, daß die Linsen verschieden dünn sind.

Die *Abbildung durch konvexe Linsen* unterliegt dann in großen Zügen folgenden Gesetzen:

a) Lichtstrahlen, die den optischen Mittelpunkt der Linse durchdringen, treten – von einer kleinen Parallelverschiebung bei schrägem Durchgang abgesehen – ungebrochen hindurch.

b) Parallel zur optischen Achse einfallende Strahlen vereinigen sich nach ihrem Austritt aus der Linse in deren Brennpunkt. Verlaufen die Strahlen schräg zur Achse, aber untereinander parallel, so schneiden sie

sich dort, wo der durch den optischen Mittelpunkt einfallende Strahl die Brennebene trifft.

c) Diese Gesetze gelten entsprechend für den Strahlenverlauf in umgekehrter Richtung.

Für die Fernrohroptik sind die nachstehenden Fälle wichtig, bei deren Darstellung, wie üblich, unter a die Gegenstandsweite und b die Bildweite verstanden ist.

1. Fall $a > 2f$: Abbildung durch eine Sammellinse (Abb. 2.10).

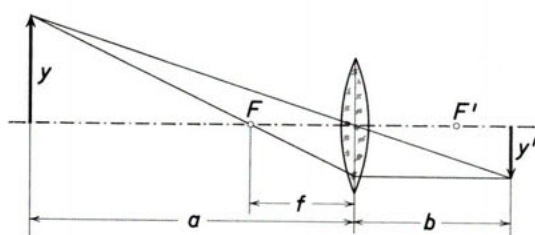


Abb. 2.10

Zur Ableitung der Linsengleichung entnimmt man der Figur $y : y' = (a - f) : f$ und erhält daraus durch Umformung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \quad (2.1)$$

Die Linse entwirft ein reelles verkleinertes umgekehrtes Bild des Gegenstandes, das bei endlichem a hinter der Brennebene entsteht. Die Bildgröße y' errechnet sich aus

$$y' = \frac{b}{a} y.$$

2. Fall $a \leq f$: Die Sammellinse als Lupe (Abb. 2.11). Ist $a < f$, so kommen nicht die Strahlen selbst, sondern ihre rückwärtigen Verlängerungen zum Schnitt. Es entsteht ein virtuelles, aufrechtes, vergrößertes Bild; die Linse wird zur Lupe. Die Bildweite ist negativ, so daß die Lupengleichung lautet

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \quad (2.2)$$

Rückt der Gegenstand in den vorderen Brennpunkt, so wird $a = f$. Die vom Gegenstandspunkt kommenden Strahlen fallen parallel zueinander aus, so daß das Auge eines normalsichtigen Beobachters sich entspannen kann. Er wird die Lupe daher unwillkürlich so halten, daß der Gegenstand

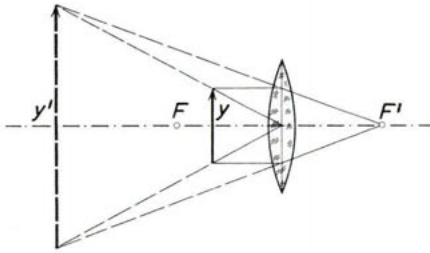


Abb. 2.11

sich im vorderen Brennpunkt befindet. Für diesen Fall läßt sich die Lupe vergrößerung – das ist das Verhältnis der Sehwinkel unter dem ein Gegenstand mit bewaffnetem Auge und unbewaffnetem Auge gesehen wird – leicht angeben: Bei freiem Auge hält der Beobachter den Gegenstand in die günstigste Sehweite w , die beim Normalsichtigen 25 cm beträgt; sein Sehwinkel ist also gleich $y : w$. Der Sehwinkel beim Blick durch die Lupe aber ist gemäß Abb. 2.12 gleich $y : f$. Mithin ist die Lupe vergrößerung

$$v = \frac{y : f}{y : w} = \frac{w}{f}. \quad (2.3)$$

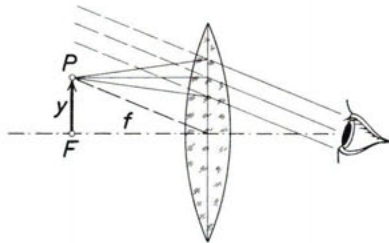


Abb. 2.12

Wirksame Lupen müssen also kurze Brennweiten haben.

Die Abbildung durch konkave Linsen gibt virtuelle, verkleinerte, aufrechte Bilder (Abb. 2.13). Bildweite und Brennweite werden negativ, so daß die Linsengleichung lautet

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{f}. \quad (2.4)$$

Alle achsenparallelen Strahlen weisen nach der Brechung mit ihrer rückwärtigen Verlängerung auf den hinteren Brennpunkt F' .

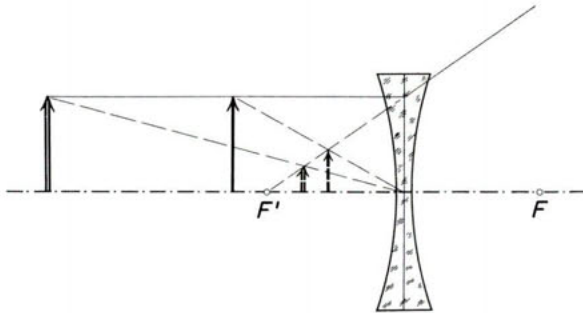


Abb. 2.13

2.2.2 Abbildungsfehler

Die oben beschriebenen Abbildungsgesetze gelten nur für einfarbiges Licht und für Strahlen innerhalb eines schmalen stricknadeldicken Raumes längs der optischen Achse. Andernfalls treten Bildfehler auf, die die Bildgüte verringern oder Lagefehler der Bildorte zur Folge haben.

Achsenparallele Strahlenbündel werden von der Farbabweichung und von der Kugelabweichung betroffen. Bei schräg einfallenden Bündeln kommen Astigmatismus und Bildwölbung und, wenn die Bündel breit sind, außerdem die Koma hinzu. Schließlich tritt bei Abbildung außerhalb der Achse die sogenannte Verzeichnung auf.

a) Die *Farbabweichung* oder *chromatische Aberration* (Abb. 2.14) entsteht, weil der kurzwellige (violette) Teil des weißen Lichtes stärker gebrochen wird als der langwellige (rote) Teil. Infolgedessen sind die Bildorte von der Farbe des Lichtes abhängig, und es erscheinen Bilder mit farbigen Säumen.

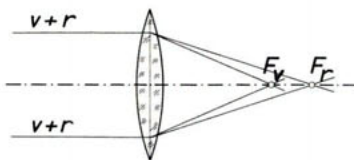


Abb. 2.14 Farbabweichung

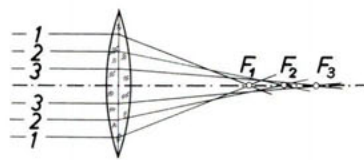


Abb. 2.15 Kugelabweichung

b) Die *Kugelabweichung* oder *sphärische Aberration* (Abb. 2.15) wird dadurch hervorgerufen, daß achsferne Strahlen stärker gebrochen werden als achsnahe Strahlen. Daher sind die Bildorte auf der Achse von der Einfallshöhe des Strahles abhängig. Der Beobachter sieht einen scharfen Kern, der von einem Zerstreuungskreis umgeben ist.

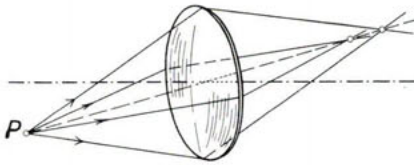


Abb. 2.16 Astigmatismus

c) Der *Astigmatismus* schräger Strahlen – wörtlich übersetzt die Punktlosigkeit – entsteht, weil für außerhalb der Achse liegende Punkte eines Gegenstandes die Brennweite der Linse in den verschiedenen durch die Linsenachse hindurchgehenden Ebenen verschieden groß ist (Abb. 2.16).

d) Unter *Bildwölbung* versteht man den Umstand, daß achsnormale Gegenstandsebenen nicht als Ebenen, sondern als flache Schalen abgebildet werden (Abb. 2.17).

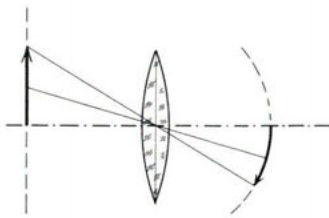


Abb. 2.17 Bildwölbung

e) Die *Koma* ist die sphärische Aberration bei schräg einfallenden Bündeln; der Gegenstandspunkt wird als verwaschener Kern mit einer Art Kometenschweif abgebildet.

f) Die *Verzeichnung* entsteht dadurch, daß die Hauptstrahlen schiefer Bündel mit wachsendem Einfallswinkel so abgelenkt werden, daß sie in der Bildebene zur Bildmitte hin oder von ihr fort versetzt erscheinen. Z.B. wird ein Gegenstandsquadrat tonnen- oder kissenförmig verzeichnet.

Die Verzeichnung spielt bei den geodätischen Meßfernrohren keine große Rolle. Um so beachtlicher ist sie für die Photogrammetrie, wo sie durch äußerst komplizierte Linsensysteme beseitigt werden muß.

2.2.3 Planspiegel- und Reflexionsprismensysteme

Ein Planspiegelsystem besteht aus zwei oder mehreren unter festen Winkeln zusammengebauten Spiegeln. Ein solches System hat zwei Wirkungen:

- die Richtung eines auftreffenden Bündels wird geändert,
- man kann die Bildorientierung ändern, d.h. die Ausrichtung des Bildes gegenüber dem Gegenstand.

In vielen Fällen ersetzt man die Spiegel durch Reflexionsprismen, indem man die Totalreflexion nutzt. Prismen werden bevorzugt verwendet, da sie kompakt sind und praktisch unveränderliche Flächenwinkel haben. Justierhalterungen sind in der Regel überflüssig. Reflexionsprismensysteme erzeugen jedoch die Abbildungsfehler einer Planplatte. Bezüglich der Änderung der Bildorientierung und der Bündelrichtung verhalten sie sich wie Spiegelsysteme. Nachfolgend wird zunächst von Systemen gesprochen, deren Spiegelflächen komplanar sind; sie haben dann eine gemeinsame Einfallsebene. Für die Zeichnungen bedeutet dieses, daß alle Spiegelflächen senkrecht zur Zeichenebene stehen.

2.2.3.1 Änderung der Bündelrichtung

In der Abb. 2.18 erkennt man verschiedene Richtungsänderungen eines Bündels durch Spiegelsysteme. Abb. 2.18a zeigt die Ablenkung an einer einzelnen Spiegelfläche. Die ursprüngliche Strahlrichtung wird um den Winkel δ gedreht. Es gilt:

$$\delta = 180^\circ - 2\varepsilon. \quad (2.5)$$

Erfolgt die Reflexion an zwei unter dem festen Winkel α zueinander angeordneten Spiegelflächen (Abb. 2.18b), so ergibt sich [vgl. auch 6.2.1]:

$$\delta = 2\alpha.$$

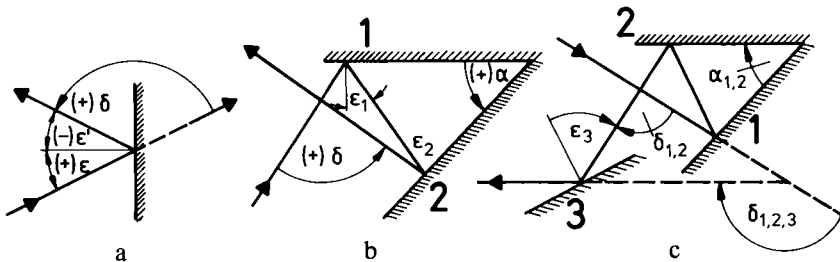


Abb. 2.18 Richtungsänderung eines Bündels durch Spiegelsysteme

Beide Reflexionsvorgänge weisen einen bemerkenswerten Unterschied auf:

- dreht man einen Planspiegel um den Winkel $\Delta\epsilon$, so schwenkt der austretende Strahl um den doppelten Winkel,
- dreht man den Winkelspiegel um eine zur Zeichenebene senkrechte Achse, so ändert sich der Winkel zwischen dem einfallenden und ausfallenden Strahl nicht.

Dreht man das System der Abb. 2.18c, so behält der Strahl hinter der zweiten Fläche seine Richtung bei. Gegenüber diesem Strahl dreht sich jedoch die Fläche 3, was bedeutet, daß sich der Gesamtablenkungswinkel $\delta_{1,2,3}$ mit der Drehung des Systems ändert.

Bei einer geraden Anzahl komplanarer Spiegelungen bewirkt eine Drehung des in sich starren Spiegelsystems um eine senkrechte zur Einfallsebene stehende Achse keine Veränderung der Bündel-Gesamtablenkung. Bei einer ungeraden Anzahl von Spiegelungen ändert sich die Gesamtablenkung.

2.2.3.2 Bildorientierung

Wie Abb. 2.19 zeigt, gibt es in bezug auf einen Gegenstand (Abb. 2.19a) eine Vielzahl von unterschiedlichen Bildorientierungen. Die Abb. 2.19b-e demonstrieren eine Auswahl. Nachfolgend soll in Abb. 2.20 gezeigt werden, wie sich Bildorientierungen durch Spiegelungen ändern. Es soll dabei die perspektivisch dargestellte x -Richtung der L -Figur immer senkrecht zur Zeichenebene nach hinten weisen. Die Lichtrichtung und die positive z -Richtung sollen zusammenfallen. Bei der Betrachtung muß man stets der Strahlrichtung z entgegensehen. Die L -Figuren haben nur symbolische Bedeutung und kennzeichnen keine Bildorte.

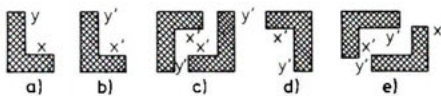


Abb. 2.19 Darstellung verschiedener Bildorientierungen

Eine Spiegelung ergibt nach Abb. 2.20a eine einseitige Bildumkehrung; aus zwei Spiegelungen folgt ein aufrechtes Bild (Abb. 2.20b) oder ein vollständig umgekehrtes Bild (Abb. 2.20c); bei drei Spiegelungen (Abb. 2.20d) erhält man wieder ein einseitig umgekehrtes Bild.

Allgemein gilt: *Bei gerader Anzahl komplanarer Spiegelungen entsteht keine einseitige Bildumkehr. Bei ungerader Spiegelzahl wird nur eine Koordinate umgekehrt.*

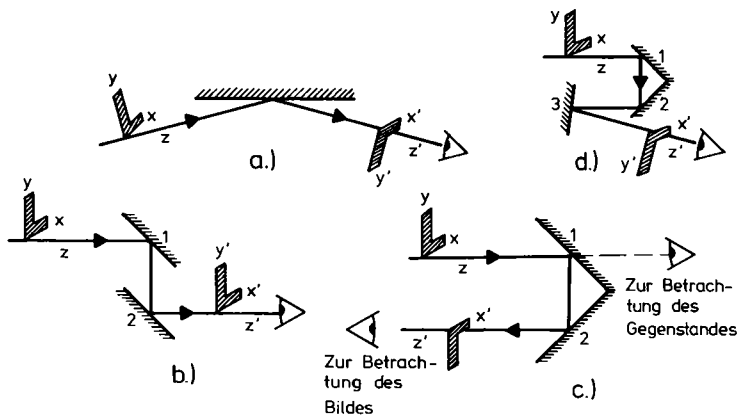


Abb. 2.20 Änderung der Bildorientierung bei Reflexionen

2.2.3.3 Prismen mit Dachkante

Bei den Bildern der Abb. 2.20 wurde bei den Reflexionen stets nur die y -Koordinate beeinflusst. Die x -Koordinate behält ihre Richtung bei. Beide Koordinatenrichtungen kann man beeinflussen, wenn man eine Spiegelfläche durch ein Dachflächenpaar bzw. Dachkantprisma ersetzt. Man hat dann zwei unter 90° zueinander stehende Reflexionsflächen, die in einer Dachkante D zusammenstoßen (Abb. 2.21). Bei der Abb. 2.21a liegt die Dachkante in der Zeichenebene, die beiden Dachflächen schließen mit ihr einen Winkel von $\pm 45^\circ$ ein. Die Dachflächen sind nicht komplanar zu den anderen Prismenflächen. Man erkennt aus Abb. 2.21a: *Die Verwendung eines Dachflächenpaares anstelle einer Spiegelfläche ermöglicht eine zusätzliche einseitige Bildumkehr.*

Abb. 2.21b zeigt das als Rückstrahler verwendbare Tripelprisma mit drei Dachkanten. Ein einfallender Strahl wird nach dreifacher Reflexion um 180° abgelenkt, d.h. er fällt entgegengesetzt zur Einfallsrichtung zurück. Die Richtungsumkehr ist gegenüber Drehungen des Systems um beliebige Achsen invariant. Prismen dieser Art werden sehr vorteilhaft bei der elektrooptischen Distanzmessung eingesetzt.

2.2.3.4 Prismensysteme zur vollständigen Bildumkehr

Die Abb. 2.22a und b zeigen Prismensysteme zur vollständigen Bildumkehr. Das aus zwei rechtwinklig-gleichschenkligen Prismen bestehende Umkehrsystem "Porro 1.Art" nimmt die Höhen- und Seitenumkehrung nacheinander vor (Abb. 2.22a). Bei dem System "Porro 2.Art" handelt es

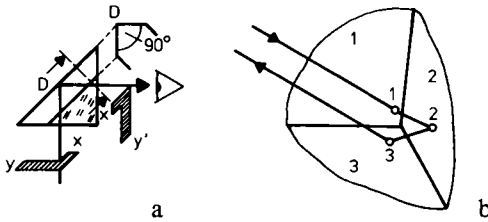
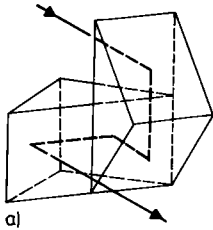
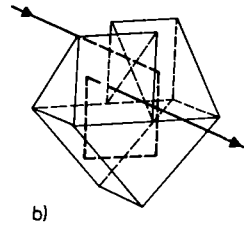


Abb. 2.21 Prismen mit einer oder mehreren Dachkanten

sich um eine Kombination dreier rechtwinkliger Prismen (Abb. 2.22b). Es erfolgen zwei Bilddrehungen um 90° . Prismensysteme dieser Art werden in Fernrohre eingebaut. Das bei der Zwischenabbildung im Fernrohr entstehende vollständig umgekehrte Bild wird durch ein solches Prismensystem wieder aufgerichtet.


Abb. 2.22a Umkehrsystem
"Porro 1. Art"

Abb. 2.22b Umkehrsystem
"Porro 2. Art"

2.2.3.5 Planparallelplatte

Zwei ebene, parallele Flächen 1 und 2 im Abstand D bilden eine Planparallelplatte (Abb. 2.23). Bei einer Planparallelplatte mit dem Brechungsindex n entsteht in Luft die achsiale Bildversetzung:

$$\overline{oo'} = D \frac{n-1}{n}. \quad (2.7)$$

Die Parallelversetzung Δ beträgt $\Delta = \overline{oo'} \cdot \sin \alpha$. Für kleine α gilt daher näherungsweise:

$$\Delta = \alpha \cdot D \left(1 - \frac{1}{n} \right). \quad (2.8)$$

Dieser Zusammenhang kommt im Planplattenmikrometer zur Anwendung, indem kleine Plattendrehungen in kleine Parallelverschiebungen umgesetzt

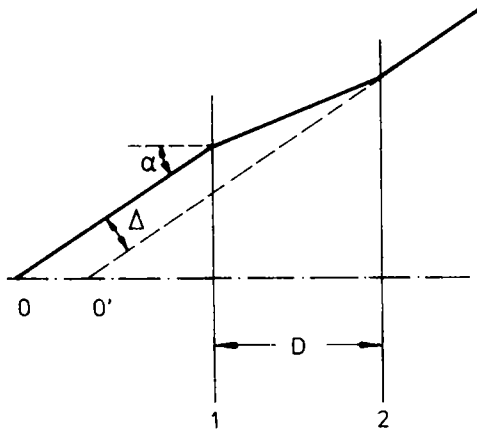


Abb. 2.23 Planparallelplatte in Luft

werden. Mit einem Planplattenmikrometer kann man z.B. den Abstand zwischen einem Teilstrich einer Teilung und einem Indexstrich sehr genau ausmessen. Zum Ablesen von Nivellierlatten oder Teilkreisen eines Theodolits verwendet man z.B. Planplattenmikrometer [3], [10].

2.3 Die Meßfernrohre

2.3.1 Der Aufbau eines Meßfernrohrs

Das Fernrohr besteht in seiner einfachsten, von J. Kepler bereits im Jahre 1611 angegebenen Form, aus zwei zentrierten Sammellinsen, und zwar einer Objektivlinse mit großer und einer Okularlinse mit kleiner Brennweite. Das Objektiv liefert ein umgekehrtes verkleinertes Bild, das durch das Okular betrachtet wird. Für einen in endlicher Entfernung befindlichen Gegenstand ergibt sich daraus der in Abb. 2.24 (oben) gezeichnete Strahlengang, während das untere Bild die Abbildung eines seitlich der Achse liegenden ∞ fernen Gegenstandes zeigt.

Um das Fernrohr zu einem Meßfernrohr umzugestalten und gleichzeitig die Abbildungsfehler möglichst weit herunterzudrücken, sind einige Zusatzeinrichtungen und mehrere Abwandlungen vom ursprünglichen Typ erforderlich.

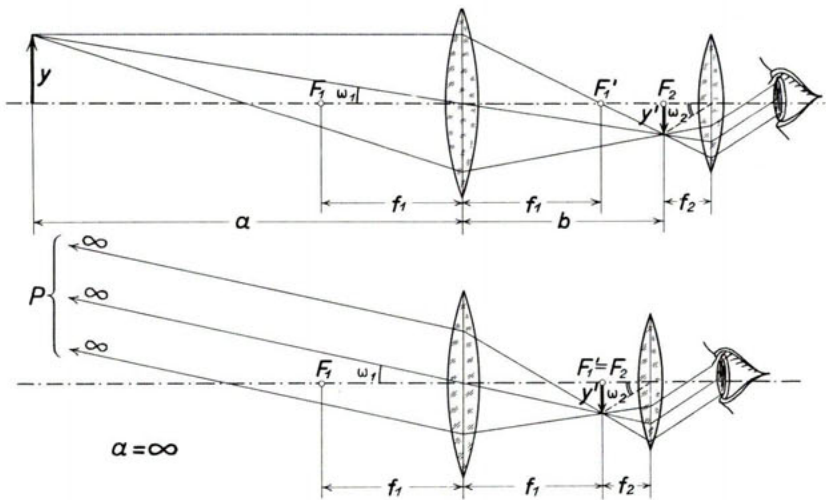


Abb. 2.24 Keplersches Fernrohr

2.3.1.1 Das Strichkreuz

Damit das Fernrohr auf ein Ziel eingestellt werden kann, ist am hinteren Ende eine Glasplatte mit einem feinen Strichkreuz eingebaut, das von 3 oder 4 Justierschrauben gehalten wird (Abb. 2.25). Das Kreuz befindet sich in der Regel kurz vor dem Okular, das zum Scharfsehen ein wenig verstellt werden kann.

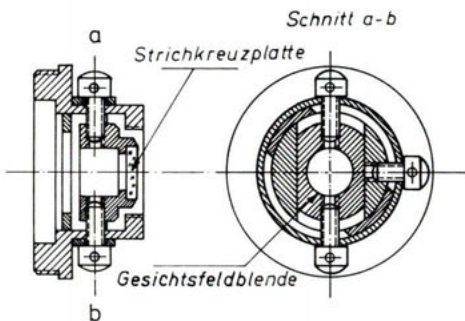


Abb. 2.25 Justierbares Strichkreuz

Optischer Mittelpunkt des Objektivs und Schnittpunkt der Striche bestimmen die Ziellinie. Um diese erforderlichenfalls parallel der Achse einer Fernrohrlibelle oder senkrecht zur Kippachse eines Theodolits machen

zu können, wird das Strichkreuz von einem Ring gehalten, der mit Hilfe von Justierschrauben geringfügig verschoben werden kann (Justierung der Ziellinie).

2.3.1.2 Die Zwischenlinse

Wenn das Ziel in endlicher Entfernung liegt, entsteht das Bild hinter der Brennebene des Objektivs, und zwar um so weiter nach hinten, je näher der Gegenstand rückt.

Das Strichkreuz ist normalerweise – abgesehen von kleinen Justierbewegungen senkrecht zur optischen Achse – fest in dem Fernrohr angebracht*. Das vom Objektiv erzeugte Bild muß daher durch eine Zusatzeinrichtung in die Strichkreuzebene verlegt werden. Hierzu ist zwischen der Objektivlinse und ihrem hinteren Brennpunkt eine – meistens schwach negative – Zwischenlinse eingebaut, die die vom Objektiv gesammelten Strahlen ein wenig zerstreut (Abb. 2.26). Die Strahlen vereinigen sich infolgedessen erst etwas später, d.h. das Bild entsteht weiter hinten, und zwar um so weiter, je näher die Zwischenlinse dem Objektiv ist.

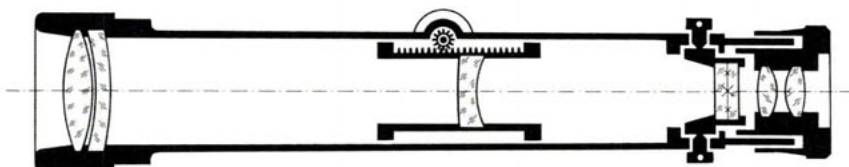


Abb. 2.26 Fernrohr mit Zwischenlinse

2.3.1.3 Objektiv und Okular

Sie werden zur Bekämpfung von Farbabweichung und Kugelabweichung aus mehreren Linsen mit verschiedener Brechkraft und verschiedenen Halbmessern zusammengesetzt. Bei Okularen wird zur Minderung der Farbabweichung außerdem ein Abstand zwischen den Einzellinsen gelassen.

Als *Objektiv* wurde bei geodätischen Instrumenten früher überwiegend der von Fraunhofer angegebene Typ verwandt, der aus einer bikonvexen Linse aus dem verhältnismäßig schwach brechenden Kronglas ($n = 1,52$) und einer konkavkonvexen Linse aus dem stark brechenden Flintglas ($n =$

* In älteren Theodoliten war es gemeinsam mit dem Okular verschiebbar angebracht.