Aufgaben zur Statistischen Physik und Theorie der Wärme

Aufgaben zur Statistischen Physik und Theorie der Wärme

mit Rechenweg und Lösungen

bearbeitet von
K.-P. Charlé und H. U. Zimmer

herausgegeben von
W. Muschik

Ausgewählte Aufgaben aus

F. Reif
Grundlagen der
Physikalischen Statistik und der
Physik der Wärme

Walter de Gruyter · Berlin · New York · 1979

Bearbeiter:

Dr. rer. nat. Klaus-Peter Charlé
Fritz-Haber-Institut der Max-Planck-Gesellschaft
Faradayweg 4–6
1000 Berlin 33

Dipl.-Phys. Horst-Ulrich Zimmer
Meßkircherstraße 213
7794 Wald

Herausgeber:

Professor Dr. Wolfgang Muschik
Institut für Theoretische Physik
Technische Universität Berlin
1000 Berlin 12

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Aufgaben zur statistischen Physik und Theorie der Wärme mit Rechenweg und Lösungen: ausgew. Aufgaben aus F. Reif Grundlagen der physikalischen Statistik und der Physik der Wärme/bearb. von K.-P. Charlé u. H.-U. Zimmer. Hrsg. von W. Muschik. – Berlin, New York: de Gruyter, 1979.
ISBN 3-11-006562-2
NE: Charlé, Klaus-Peter [Bearb.]; Muschik, Wolfgang [Hrsg.]; Reif, Frederick: Grundlagen der physikalischen Statistik und der Physik der Wärme

Printed in Germany.
Einbandentwurf: Thomas Bonnie, Hamburg. Satz: Composersatz Verena Boldin, Aachen.
Druck: Color-Druck, Berlin. Bindearbeiten: Dieter Mikolai, Berlin.

Vorwort

Diese Aufgabensammlung enthält detailliert ausgearbeitete Lösungen von Aufgaben aus dem Bereich der statistischen Physik und der Thermodynamik. Die Aufgaben sind dem Buch von
F. Reif, Grundlagen der Physikalischen Statistik und der Physik der Wärme, Verlag Walter de Gruyter Berlin, 1976,
entnommen, das keine Lösungswege enthält. Im Zusammenhang mit der deutschsprachigen Ausgabe des genannten Lehrbuches haben die Herren Dr. rer. nat. K.-P. Charlé und Dipl.-Phys. H. U. Zimmer unter Verwendung der zugehörigen amerikanischen Lösungssammlung* eine Auswahl unter den Aufgaben vorgenommen, sie teilweise umformuliert und die Wege zu ihrer Lösung vollständig neu bearbeitet. Die Auswahl der Aufgaben erfolgte so, daß die Sammlung das Gesamtgebiet des Reifschen Buches möglichst dicht überdeckt. Dabei wurde darauf geachtet, daß die ausgewählten Aufgaben den Stoff vertiefen und ergänzen und daß insbesondere Anwendungsbeispiele auch höheren Schwierigkeitsgrades enthalten sind. Die Bearbeitung der Aufgaben wurde so ausführlich gehalten, daß Rückverweise auf das Reifsche Lehrbuch vermieden werden konnten, d. h., die Aufgabensammlung ist autonom und kann auch unabhängig vom Lehrbuch benutzt werden. So finden sich in ihr auch Lösungen von Aufgaben aus dem
Berkeley Physik Kurs 5, Statistische Physik.
Wie auch das Reifsche Buch ist die vorliegende Sammlung zur
Einführung in die statistische Physik und in die Theorie der Wärme für Studenten aller Semester der Physik, der Chemie und der Physikalischen Ingenieurwissenschaft bestimmt. Welchen Stellenwert Reif seiner Aufgabensammlung beimißt, geht aus der folgenden Bemerkung hervor:
Es ist unerläßlich, daß der Student einen beträchtlichen Anteil dieser Aufgaben löst, wenn er ein tieferes Verständnis des Stoffes erlangen will und nicht nur eine beiläufige Kenntnis.
Da jedoch Regelstudienzeit und Studienverkürzung dem Studenten eine Selbstbeschäftigung mit insbesondere anspruchsvolleren Übungsaufgaben erschweren und teilweise unmöglich machen, ist die detaillierte Ausarbeitung dieser Aufgabensammlung

---

*R. F. Knacke, Solutions to Problems to accompany F. Reif's Fundamentals of Statistical and Thermal Physics McGraw Hill Book Company, New York, 1965.

geeignet, ihm eine Hilfe beim Kennenlernen von Lösungswegen und häufig verwendeten Modellvorstellungen zu sein, die er sich sonst aus Zeitmangel nicht erarbeiten kann. In diesem Sinne möge diese Aufgabensammlung den Studenten – und nicht nur ihnen – nützlich sein.

Berlin, im Januar 1979 W. Muschik
Institut für Theoretische Physik
Technische Universität Berlin

Inhaltsverzeichnis

1. Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung (Einführung in die statistische Methode)

1.1 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit drei Würfeln insgesamt höchstens 6 Augen zu werfen?

1.1 Es gibt insgesamt $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ verschiedene Möglichkeiten, drei Würfel zu werfen, wobei jede dieser Möglichkeiten die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzt. Die Würfe, die eine Summe von höchstens 6 ergeben, sind

Wurf	1,1,1	1,1,2	1,1,3	1,1,4	1,2,2	1,2,3	2,2,2
Anzahl der Permutationen	1	3	3	3	3	6	1

Die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Ereignis ist allgemein gegeben durch das Verhältnis der Zahl der für das betreffende Ereignis günstigen Möglichkeiten zur Zahl der insgesamt vorhandenen (gleichwahrscheinlichen) Möglichkeiten. Da es hier insgesamt 20 Permutationen und damit 20 für das betreffende Ereignis (nämlich einen Wurf mit höchstens 6 Augen) günstige Möglichkeiten gibt, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$W = \frac{20}{216} = \frac{5}{54}.$$

1.2 Bei einem Spiel werden sechs ideale Würfel geworfen. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man dabei

a) genau eine Eins,
b) mindestens eine Eins,
c) genau zwei Einsen

wirft.

1.2 a) Durch das Würfeln werden *unabhängige* Ereignisse produziert, so daß nach dem Multiplikationstheorem der Wahrscheinlichkeitsrechnung gilt:

(Die Wahrscheinlichkeit, beim Werfen von 6 Würfeln mit einem *bestimmten* Würfel eine Eins zu werfen und mit den 5 anderen keine Eins) = (Wahrscheinlichkeit, mit dem betreffenden Würfel eine Eins zu werfen) $\cdot$ (Wahrscheinlichkeit, mit jedem der 5 übrigen Würfel keine Eins zu werfen) $= (1/6)\,(1 - 1/6)^5$.

Da es insgesamt 6 (gleichwahrscheinliche und einander ausschließende) Möglichkeiten gibt, mit *einem* von 6 Würfeln eine Eins zu werfen und mit den 5 übrigen Würfeln irgendeine andere Ziffer, ergibt sich nach dem Additionstheorem der Wahrscheinlichkeitsrechnung für die gesuchte Wahrscheinlichkeit, mit *irgendeinem* von 6 Würfeln als einzigem eine Eins zu werfen,

$$W_a = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^5 = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0{,}402.$$

b) Die Wahrscheinlichkeit, mit 6 Würfeln mindestens *eine* Eins zu werfen, ist 1 minus die Wahrscheinlichkeit für das Gegenteil, nämlich mit *keinem* der 6 Würfel eine Eins zu werfen; also

$$W_b = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0{,}667.$$

c) Aus ähnlichen Überlegungen wie in a) folgt: Da es beim Werfen von 6 Würfeln $6!/4!2!$ einander ausschließende und jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $(1/6)^2 \cdot (1 - 1/6)^4$ behaftete Möglichkeiten gibt, mit 2 Würfeln eine Eins zu werfen und mit den restlichen 4 Würfeln irgendeine andere Ziffer, ist nach dem Additionstheorem die gesuchte Wahrscheinlichkeit dafür, daß dies auf *irgendeine* Weise geschieht,

$$W_c = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^4 \cdot \frac{6!}{4!2!} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0{,}201.$$

1.6 Man betrachte das Problem der Zufallsbewegung mit $p = q$ und bezeichne mit $m = n_1 - n_2$ die Gesamtverschiebung nach rechts. Wie groß sind bei insgesamt N Einzelverschiebungen die Mittelwerte $\overline{m}$, $\overline{m^2}$, $\overline{m^3}$ und $\overline{m^4}$?

1.6 Die Berechnung des Mittelwertes $\overline{m^n}$ (mit $n \epsilon N$) läßt sich wegen

$$m = 2n_1 - N \tag{1}$$

auf die Berechnung der Mittelwerte $\overline{n_1^k}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) zurückführen. In der Aufgabe ist der maximale n-Wert $n = 4$, so daß die Mittelwerte $\overline{n_1}$, $\overline{n_1^2}$, $\overline{n_1^3}$ und $\overline{n_1^4}$ benötigt werden. Da die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die möglichen n_1-Werte die Binomialverteilung ist, erhält man

a)

$$\begin{aligned}\overline{n_1} &= \sum_{n_1=0}^{N} n_1 \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} (1-p)^{N-n_1} \\ &= \sum_{n_1=1}^{N} n_1 \cdot \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} (1-p)^{N-n_1} \qquad (2) \\ &= Np \sum_{n_1=1}^{N} \frac{(N-1)!}{(n_1-1)!\,(N-n_1)!} p^{n_1-1}(1-p)^{N-n_1}.\end{aligned}$$

Mit der Substitution

$$n_1 - 1 = m$$

wird daraus

$$\overline{n_1} = Np \sum_{m=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{m!\,(N-1-m)!} p^m (1-p)^{N-1-m}$$

$$= Np\,[p + (1-p)]^{N-1} = Np. \qquad (3)$$

Ganz entsprechend lassen sich auch die Summenausdrücke für die höheren Mittelwerte von n_1 durch geeignetes Umformen immer wieder auf die einfache Binomialreihe zurückzuführen

b) $$\overline{n_1^2} = \sum_{n_1=0}^{N} n_1^2 \cdot \frac{N!}{n_1!\,(N-n_1)!} p^{n_1} (1-p)^{N-n_1}$$

$$= \sum_{n_1=1}^{N} n_1 \cdot \frac{N!}{(n_1-1)!\,(N-n_1)!} p^{n_1} (1-p)^{N-n_1}.$$

Mit der Substitution

$$n_1 - 1 = m$$

wird dann

$$\overline{n_1^2} = \sum_{m=0(=1)}^{N-1} m \cdot \frac{N!}{m!\,(N-1-m)!} p^{m+1} (1-p)^{N-1-m} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{N-1} \frac{N!}{m!\,(N-1-m)!} p^{m+1} (1-p)^{N-1-m}$$

$$= N(N-1)p^2 \sum_{m=1}^{N-1} \frac{(N-2)!}{(m-1)!\,(N-1-m)!} p^{m-1} (1-p)^{N-1-m} +$$

$$+ Np \sum_{m=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{m!\,(N-1-m)!} p^m (1-p)^{N-1-m}$$

$$= N(N-1)p^2 \sum_{k=0}^{N-2} \frac{(N-2)!}{k!(N-2-k)!} p^k (1-p)^{N-2-k} +$$

$$+ Np \sum_{m=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{m!\,(N-1-m)!} p^m (1-p)^{N-1-m}$$

$$= N(N-1)p^2\,[p + (1-p)]^{N-2} + Np\,[p + (1-p)]^{N-1}$$

$$= N(N-1)p^2 + Np. \qquad (4)$$

Die in a) und b) durchgeführte Methode zur Berechnung der Mittelwerte $\overline{n_1^k}$ ist zwar im Prinzip für jedes $k \epsilon N$ durchführbar, wird für höhere k-Werte jedoch sehr umständlich. Schneller und systematischer führt der folgende Weg zum Ziel. Betrachtet man die durch

$$F_k(p, q) = \sum_{n_1=0}^{N} n_1^k \binom{N}{n_1} p^{n_1} q^{N-1} \tag{5}$$

definierte Funktion der beiden *unabhängigen* Variablen p und q, so gilt offenbar

$$\overline{n_1^k}(p) = F_k(p, 1-p). \tag{6}$$

Der komplizierte Summenausdruck in der Definitionsgleichung (5) läßt sich nun wegen

$$\begin{aligned} n_1^k p^{n_1} &= n_1^{k-1} \cdot n_1 p^{n_1} = n_1^{k-1} \cdot \left(p \frac{\partial}{\partial p}\right) p^{n_1} \\ &= n_1^{k-2} \left(p \frac{\partial}{\partial p}\right) n_1 p^{n_1} = n_1^{k-2} \; p\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^2 p^{n_1} \\ &= \ldots \\ &= \left(p \frac{\partial}{\partial p}\right)^k p^{n_1} \end{aligned} \tag{7}$$

umformen, so daß man für $F_k(p, q)$ den handlicheren Ausdruck

$$\begin{aligned} F_k(p, q) &= \left(p \frac{\partial}{\partial p}\right)^k \sum_{n_1=0}^{N} \binom{N}{n_1} p^{n_1} q^{N-n_1} \\ &= \left(p \frac{\partial}{\partial p}\right)^k (p+q)^N \end{aligned} \tag{8}$$

erhält. Wegen (6) ist damit die Berechnung der Mittelwerte $\overline{n_1^k}$ auf die Berechnung relativ einfacher Differentialausdrücke zurückgeführt.

c) Für k = 3 erhält man aus (8)

$$\begin{aligned} F_3(p, q) &= \left(p \frac{\partial}{\partial p}\right)^3 (p+q)^N \\ &= \left(p \frac{\partial}{\partial p}\right)^2 [pN(p+q)^{N-1}] \\ &= \left(p \frac{\partial}{\partial p}\right) [pN(p+q)^{N-1} + p^2 N(N-1)(p+q)^{N-2}] \\ &= pN(p+q)^{N-1} + 3p^2 N(N-1)(p+q)^{N-2} + \\ &\quad + p^3 N(N-1)(N-2)(p+q)^{N-3} \end{aligned} \tag{9}$$

und damit aus (6)

$$\overline{n_1^3} = pN + 3p^2 N(N-1) + p^3 N(N-1)(N-2) \tag{10}$$

d) Aus der letzten Zeile von (9) ergibt sich für k = 4

$$F_4(p,q) = \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right) F_3(p,q)$$

$$= pN(p+q)^{N-1} + 7p^2 N(N-1)(p+q)^{N-2} + \tag{11}$$
$$+ 6p^3 N(N-1)(N-2)(p+q)^{N-3} +$$
$$+ p^4 N(N-1)(N-2)(N-3)(p+q)^{N-4}$$

und daraus mit (6)

$$\overline{n_1^4} = pN + 7p^2 N(N-1) + 6p^3 N(N-1)(N-2) +$$
$$+p^4 N(N-1)(N-2)(N-3). \tag{12}$$

Wie man sich leicht klarmacht, sind die „ungeraden" Mittelwerte von m für $p = q = ½$ aus Symmetriegründen Null. Für die verbleibenden „geraden" Mittelwerte folgt aus (1)

$$\overline{m^2} = \overline{(2n_1 - N)^2} = 4\,\overline{n_1^2} - 4\overline{n_1}N + N^2$$

$$\overline{m^4} = \overline{(2n_1 - N)^4} = 16\,\overline{n_1^4} - 32\,N\overline{n_1^3} + 24\,N^2\,\overline{n_1^2} - 8N^3\,\overline{n_1} + N^4. \tag{13}$$

Mit den Ergebnissen (3), (4), (10) und (12) ergibt sich daraus schließlich für $p = ½$

$$\overline{m^2} = N$$
$$\overline{m^4} = 3N^2 - 2N. \tag{14}$$

1.7 Man leite die Binomialverteilung auf die folgende algebraische Art her, die keinerlei explizite kombinatorische Untersuchungen enthält. Gesucht ist wieder die Wahrscheinlichkeit W(n) für n positive Ausgänge aus einer Gesamtheit von N unabhängigen Versuchen. Es sei $w_1 \equiv p$ die Wahrscheinlichkeit für einen positiven Ausgang und $w_2 = 1 - p = q$ die entsprechende Wahrscheinlichkeit für einen negativen Ausgang. Dann ist W(n) offenbar durch diejenige Teilsumme von

$$W' = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} \cdots \sum_{m=1}^{2} w_i w_j w_k \cdots w_m \tag{1}$$

gegeben, in der bei jedem Summanden w_1 n-mal als Faktor auftritt (denn jeder einzelne Summand in (1) gibt die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Kombination von positiven und negativen Ausgängen an). Man berechne diese Teilsumme, indem man unter Benutzung elementarer Eigenschaften von Mehrfachsummen (1) so umformt, daß sich das Binomialtheorem anwenden, d.h. eine Entwicklung nach Potenzen von w_1 durchführen läßt.

1.7 Die Wahrscheinlichkeit W(n) für n Erfolge bei N Versuchen ist nach dem Multiplikations- und Additionstheorem durch denjenigen Anteil der Summe

$$W' = \sum_{i_1=1}^{2} \sum_{i_2=1}^{2} \cdots \sum_{i_N=1}^{2} w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_N} \tag{1}$$

gegeben, der alle Summanden enthält, in denen w_1 n-mal als Faktor auftritt. Um diese Teilsumme zu berechnen, wird (1) so umgeformt, daß alle Summanden mit derselben Potenz von w_1 zusammengefaßt sind. Mit Hilfe des Binomialtheorems ergibt sich

$$\begin{aligned} W' &= \sum_{i_1=1}^{2} w_{i_1} \sum_{i_2=1}^{2} w_{i_2} \cdots \sum_{i_N=1}^{2} w_{i_N} \\ &= (w_1 + w_2)^N = \sum_{k=0}^{N} \frac{N!}{k!\,(N-k)!} w_1^k w_2^{N-k} \end{aligned} \tag{2}$$

Hieraus folgt dann nach dem Vorangehenden

$$W(n) = \frac{N!}{n!\,(N-n)!} w_1^n w_2^{N-n} . \tag{3}$$

1.8 Zwei Betrunkene starten gemeinsam vom Ursprung der x-Achse aus und bei beiden ist die Wahrscheinlichkeit für einen Schritt nach rechts genauso groß wie die für einen Schritt nach links. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sie sich nach N Schritten wieder treffen. Dabei wird natürlich vorausgesetzt, daß die Männer ihre Schritte gleichzeitig machen (Die Betrachtung der Relativbewegung kann hier hilfreich sein).

1.8 Betrachtet wird die Relativbewegung der beiden Betrunkenen. Bei jedem Schritt ist die Wahrscheinlichkeit dafür,

1: daß sie ihren Abstand vergrößern, $w_1 = 1/4$,

2: daß sie ihren Abstand verkleinern, $w_2 = 1/4$,

3: daß sie ihren Abstand beibehalten, $w_3 = 1/2$.

Wenn jeder der beiden Betrunkenen N voneinander unabhängige Schritte macht, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dabei in einer *bestimmten* Reihenfolge

$$\left.\begin{array}{r} n_1\text{-mal der Fall } 1 \\ \textit{und } n_2\text{-mal der Fall } 2 \\ \textit{und } n_3\text{-mal der Fall } 3 \end{array}\right\} \text{ mit } n_1 + n_2 + n_3 = N \tag{1}$$

eintritt, $w_1^{n_1} \cdot w_2^{n_2} \cdot w_3^{n_3}$. Da es nach der elementaren Kombinatorik insgesamt $N!/n_1!n_2!n_3!$ Möglichkeiten gibt, N Schritte (nach den Kriterien 1, 2, 3) in 3 Klassen zu n_1, n_2 und n_3 Schritten jeweils *einer* Sorte einzuteilen, und da diese Möglichkeiten alle die gleiche Wahrscheinlichkeit, nämlich $w_1^{n_1} w_2^{n_2} w_3^{n_3}$, besitzen, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß (1) auf *irgendeine* Weise eintritt,

$$W = \frac{N!}{n_1!n_2!n_3!} w_1^{n_1} w_2^{n_2} w_3^{n_3}, \qquad n_1 + n_2 + n_3 = N. \tag{2}$$

Die beiden Betrunkenen treffen sich nach N Schritten, falls $n_1 = n_2 = n$. Somit ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß nach N Schritten auf *irgendeine* Weise, d.h. unabhängig von der Anzahl n_3 der den Abstand unverändert lassenden Schritte ein Zusammentreffen stattfindet, durch

$$\begin{aligned} P &= \sum_{n_3}^{N} \frac{N!}{n!n!n_3!} w_1^n w_2^n w_3^{n_3}, \qquad 2n + n_3 = N \\ &= \sum_{n_3}^{N} \frac{N!}{\left[\left(\frac{N-n_3}{2}\right)!\right]^2 n_3!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{N-n_3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n_3} \end{aligned} \tag{3}$$

gegeben, wobei je nachdem, ob N gerade oder ungerade ist, über die geraden oder ungeraden Werte von n_3 zu summieren ist.

Um den hier für P gefundenen Summenausdruck zu berechnen, wird ein Kunstgriff angewandt und in Anlehnung an die Aufg. 1.7 davon ausgegangen, daß dieser (hier durch kombinatorische Überlegungen gewonnene) Ausdruck diejenige Teilsumme von

$$P' = \sum_{i_1=1}^{3} \sum_{i_2=1}^{3} \cdots \sum_{i_N=1}^{3} w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_N} \tag{4}$$

darstellt, die alle Summanden enthält, in denen w_1 und w_2 gleich oft als Faktor auftreten (Man überzeuge sich davon durch explizites Nachrechnen!). Betrachtet man nun neben der Summe P' die Summe

$$P'' = \sum_{i_1=1}^{3} \sum_{i_2=1}^{3} \cdots \sum_{i_N=1}^{3} w'_{i_1} w'_{i_2} \cdots w'_{i_N} \tag{5}$$

mit

$$w'_1 = xw_1, \; w'_2 = \frac{w_2}{x}, \; w'_3 = w_3 \tag{6}$$

so ist diejenige Teilsumme von P'', die alle Summanden enthält, in denen der Parameter x nicht auftritt, weil er sich herauskürzt, offenbar identisch mit *der* Teilsumme von P', die alle Summanden enthält, in denen w_1 und w_2 gleich oft als Faktor auftreten.

Nach dem Vorangehenden läßt sich daher die Berechnung des in (3) für die Wahrscheinlichkeit P gefundenen Summenausdrucks auf die Berechnung desjenigen Anteils von P'' zurückführen, der x nicht enthält. Letzeres nun gelingt dadurch, daß man in der Summe P'' alle Summanden mit derselben Potenz von x zusammenfaßt und anschließend den Term mit der Potenz x^0 aufsucht. Mit Hilfe des Binomialtheorems erhält man aus (5)

$$
\begin{aligned}
P'' &= \sum_{i_1=1}^{3} w'_{i_1} \sum_{i_2=1}^{3} w'_{i_2} \cdots \sum_{i_N=1}^{3} w'_{i_N} \\
&= (w'_1 + w'_2 + w'_3)^N \\
&= \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4x} + \frac{1}{2}\right)^N \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2N} \cdot (x^{1/2} + x^{-1/2})^{2N} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2N} \cdot \sum_{n=0}^{2N} \frac{(2N)!}{n!(2N-n)!} \cdot (x^{1/2})^n \cdot (x^{-1/2})^{2N-n}.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Wie man unmittelbar erkennt, kürzt sich in dem Term mit $n = N$ der Parameter x heraus, so daß das Ergebnis lautet

$$P = \left(\frac{1}{2}\right)^{2N} \cdot \frac{(2N)!}{(N!)^2}. \tag{8}$$

1.9 Die Wahrscheinlichkeit $W(n)$ dafür, daß ein durch die Wahrscheinlichkeit p charakterisiertes Ereignis bei N Versuchen n-mal eintritt, ist, wie gezeigt wurde, durch die Binomialverteilung

$$W(n) = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}\, p^n (1-p)^{N-n} \tag{1}$$

gegeben. Man betrachte eine Situation, bei der die Wahrscheinlichkeit p sehr klein ist ($p \ll 1$) und bei der man an dem Fall $n \ll N$ interessiert ist. [Man beachte, daß falls N sehr groß ist, $W(n)$ mit $n \to N$ sehr klein wird, da der Faktor p^n sehr klein für $p \ll 1$ ist.] Es lassen sich dann verschiedene Näherungen durchführen, um (1) in eine einfachere Form zu bringen.

a) Unter Benutzung von $\ln(1-p) \approx -p$ zeige man, daß $(1-p)^{N-n} \approx e^{-Np}$.

b) Man zeige, daß $N!/(N-n)! \approx N^n$.

c) Damit zeige man, daß (1) sich auf

$$W(n) = \frac{\lambda^n}{n!}\, e^{-\lambda} \tag{2}$$

reduziert, wobei $\lambda \equiv Np$ die mittlere Anzahl der mit der Wahrscheinlichkeit p behafteten Ereignisse ist. Die Verteilung (2) heißt „Poisson-Verteilung".

1.9 Für den Fall $n \ll N$ und $p \ll 1$ gilt

a) $\ln(1-p)^{N-n} \approx -p(N-n) \approx -pN$

$$\text{also } (1-p)^{N-n} \approx e^{-Np}.$$

b) $\frac{N!}{(N-n)!} = N(N-1) \cdot \cdot \cdot (N-n+1) \approx N^n.$

c) Damit erhält man

$$W(n) = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}\, p^n(1-p)^{N-n}$$

$$\approx \frac{N^n}{n!}\, p^n\, e^{-Np} = \frac{\lambda^n}{n!}\, e^{-\lambda},\ \lambda = Np.$$

1.10 Man betrachte die Poisson-Verteilung der vorangehenden Aufgabe:

a) Man zeige, daß die Normierung lautet: $\sum_{n=0}^{N} W_n = 1.$

(Dabei kann die Summation über n in guter Näherung auf „unendlich" ausgedehnt werden, da W_n vernachlässigbar klein ist, wenn $n \gtrsim N$).

b) Man benutze die Poisson-Verteilung, um $\overline{n}$ zu berechnen.

c) Man benutze die Poisson-Verteilung, um $\overline{(\Delta n)^2} \equiv \overline{(n-\overline{n})^2}$ zu berechnen.

1.10. a) $\sum_{n=0}^{\infty} W_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$

b) Durch ähnliche Überlegungen wie in Aufgabe 1.6 erhält man

$$\overline{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$$

c) Wegen

$$\overline{(\Delta n)^2} = \overline{n^2} - \overline{n}^2$$

benötigt man die Größe $\overline{n^2}$. Aus der Definition folgt

$$\overline{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\lambda\lambda^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{m\lambda^m}{m!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} \right]$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \left[\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}\right]$$

$$= \lambda^2 + \lambda.$$

Also gilt mit dem Ergebnis von b)

$$\overline{(\Delta n)^2} = \overline{n^2} - \bar{n}^2 = \lambda.$$

1.13 Ein Metall verdampft im Vakuum von einem heißen Glühfaden aus. Die Metallatome fallen auf eine Quarzplatte, die sich in einiger Entfernung davon befindet, und bilden dort eine dünne metallische Schicht. Diese Quarzplatte wird auf einer niedrigen Temperatur gehalten, so daß jedes auffallende Metallatom an der Stelle seines Auftreffens verbleibt, ohne sich weiter fortzubewegen. Von den Metallatomen kann angenommen werden, daß sie auf jedes Flächenelement der Platte mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreffen. Man zeige, daß die Anzahl der Metallatome, die sich auf einem Flächenelement der Größe b^2 anhäufen (wobei b der Durchmesser der Metallatome ist), näherungsweise nach einer Poisson-Verteilung verteilt ist. Angenommen, man verdampft genügend Metall, damit sich ein Film mit einer mittleren Dicke von 6 Atomschichten bilden kann. Welcher Bruchteil der Untergrundfläche ist dann überhaupt nicht mit Metall bedeckt? Welcher Bruchteil ist mit Metall einer Dicke von 3 Atomschichten und welcher Bruchteil mit Metall einer Dicke von 6 Atomschichten bedeckt?

1.13 Die Quartzplatte wird in Flächenelemente der Größe b^2 unterteilt. Da b^2 viel kleiner als die Gesamtfläche F der Platte ist, ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreffen eines Atoms auf ein gegebenes Flächenelement viel kleiner als 1, nämlich b^2/F. Außerdem ist natürlich die Anzahl n der auf ein gegebenes Flächenelement fallenden Atome viel kleiner als die Anzahl N der insgesamt von dem Metall aus verdampfenden Atome, so daß die Bedingungen für die näherungsweise Ersetzung der Binomialverteilung durch die Poisson-Verteilung erfüllt sind.

Nach dem Satz von Bernoulli (Gesetz der großen Zahlen) ist die in Aufgabe 1.1 gegebene Definition der Wahrscheinlichkeit äquivalent mit der Definition der Wahrscheinlichkeit als „Grenzwert" der relativen Häufigkeit. Man ist deshalb in der Lage, durch *Berechnung* der Wahrscheinlichkeit quantitative Aussagen über den Ausgang von Versuchen mit einem Ensemble zu machen. Da im vorliegenden Beispiel die einzelnen Flächenelemente alle mit der gleichen Wahrscheinlichkeit von einem Metallatom getroffen werden, stellt die Gesamtheit der Flächenelemente selbst ein Ensemble dar. Nach dem Vorangehenden ist dann der Bruchteil B(n) der Flächenelemente, die von n Atomen getroffen werden, gleich der durch die Poisson-Verteilung gegebenen Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein herausgegriffenes Flächenelement von n Atomen getroffen wird. Da im Mittel auf ein Flächenelement 6 Atome fallen, gilt somit

$$B(n) = \frac{6^n}{n!} \cdot e^{-6},$$

n	0	3	6
B(n)	0,003	0,086	0,162

1.18 Ein Molekül legt in einem Gas – in jede Richtung mit gleicher Wahrscheinlichkeit – gleiche Strecken l zwischen seinen Zusammenstößen mit anderen Molekülen zurück. Wie groß ist nach insgesamt N Einzelverschiebungen die mittlere quadratische Gesamtverschiebung $\overline{R^2}$ des Moleküls von seinem Ausgangspunkt?

1.18
$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i = l \sum_{i=1}^{N} \mathbf{e}_i, \tag{1}$$

wobei $\mathbf{e}_i$ ein Einheitsvektor ist, der die Richtung der i-ten Verschiebung angibt. Aus (1) folgt

$$\begin{aligned}\overline{R^2} = \overline{\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}} &= l^2 \sum_{i=1}^{N} \overline{\mathbf{e}_i^2} + l^2 \sum_{i\neq j=1}^{N} \overline{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j} \\ &= N l^2 + l^2 \sum_{i\neq j=1}^{N} \overline{\cos\Theta_{ij}} \\ &= N l^2, \end{aligned} \tag{2}$$

Hier verschwindet in der vorletzten Zeile der zweite Term, weil alle Richtungen gleichwahrscheinlich sind und deshalb $\overline{\cos\Theta_{ij}} = 0$ für alle $i \neq j$.

1.23 Man betrachte das Problem der eindimensionalen Zufallsbewegung für ein Teilchen. Angenommen, daß jede einzelne Verschiebung stets positiv ist und mit gleicher Wahrscheinlichkeit irgendwo im Bereich zwischen $l - b$ und $l + b$ liegt, wobei $b < l$. Wie groß ist nach N Einzelverschiebungen

a) die mittlere Gesamtverschiebung $\overline{x}$?

b) das Schwankungsquadrat $\overline{(x - \overline{x})^2}$?

1.23 Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich das Teilchen nach einer Einzelverschiebung in einem Intervall der Länge ds befindet, ist ds/2b. Für die mittlere Verschiebungslänge ergibt sich damit

$$\overline{s} = \int_{l-b}^{l+b} s \cdot \frac{ds}{2b} = \frac{1}{4b} s^2 \Big|_{l-b}^{l+b} = l. \tag{1}$$

Entsprechend ergibt sich für das mittlere Schwankungsquadrat der Verschiebungslänge

$$\overline{(\Delta s)^2} = \int_{l-b}^{l+b} (s - \overline{s})^2 \frac{ds}{2b} = \frac{1}{6b} (s - \overline{s})^3 \Big|_{l-b}^{l+b} = \frac{b^2}{3}. \tag{2}$$

Damit folgt für den Mittelwert bzw. das mittlere Schwankungsquadrat der Gesamtverschiebung

a) $\overline{x} = N\overline{s} = Nl.$ (3)

b) $\overline{(\Delta x)^2} = N\overline{(\Delta s)^2} = \dfrac{Nb^2}{3}.$ (4)

1.24 a) Ein Teilchen befindet sich an jeder Stelle auf dem Umfang eines Kreises mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Die z-Achse sei irgendeine Gerade in der Ebene des Kreises, die durch seinen Mittelpunkt hindurchgeht, und θ sei der Winkel zwischen der z-Achse und der Geraden, die den Mittelpunkt des Kreises und das Teilchen auf seinem Umfang verbindet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dieser Winkel zwischen θ und $\theta + d\theta$ liegt?

b) Ein Teilchen befindet sich an jeder Stelle auf der Oberfläche einer Kugel mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Die z-Achse sei irgendeine Gerade durch den Kugelmittelpunkt und θ der Winkel zwischen der z-Achse und der den Kugelmittelpunkt und das Teilchen verbindenden Geraden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dieser Winkel zwischen θ und $\theta + d\theta$ liegt?

1.24 a) Man denke sich den Kreisbogen in lauter gleiche Bogenstückelemente der Länge δs unterteilt. Die Bogenstückelemente mögen dabei so klein sein, daß gerade ein Teilchen daraufpaßt. In einem Bogenstück der Länge ds befinden sich dann $ds/\delta s$ Bogenstückelemente und die Anzahl der insgesamt vorhandenen Bogenstückelemente ist $2\pi r/\delta s$. Nach der in Aufgabe 1.1 gegebenen Definition lautet daher die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich das Teilchen in einem beliebig herausgegriffenen Bogenstück der Länge $ds = r d\theta$ befindet

$$W(\theta)\, d\theta = \frac{ds/\delta s}{2\pi r/\delta s} = \frac{ds}{2\pi r} = \frac{d\theta}{2\pi}. \tag{1}$$

b) Durch ähnliche Überlegungen wie in Teil a) findet man: Befindet sich ein Teilchen überall auf einer Fläche der Größe F mit gleicher Wahrscheinlichkeit, das heißt genau: befindet sich ein Teilchen mit Sicherheit irgendwo auf einer Fläche der Größe F und ist bei einer Unterteilung dieser Fläche in gleichgroße Teilflächen jede der Teilflächen mit gleicher Wahrscheinlichkeit vom Teilchen besetzt, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich das Teilchen auf einem Flächenstück der Größe ΔF befindet, durch das Verhältnis $\frac{\Delta F}{F}$ gegeben (siehe Aufgabe 1.13).

In der Aufgabe ist das Flächenstück, auf dem sich das Teilchen befinden muß, damit der Winkel zwischen θ und $\theta + d\theta$ liegt, die von diesen Winkelwerten begrenzte Kugelschicht. Ihr Flächeninhalt ist

$$\Delta F = 2\pi r^2 \sin\theta \cdot d\theta. \tag{2}$$

Damit erhält man

$$W(\theta)\, d\theta = \frac{2\pi r^2 \sin\theta \cdot d\theta}{4\pi r^2} = \frac{\sin\theta \cdot d\theta}{2}. \tag{3}$$

1.25 Man betrachte eine polykristalline Probe von $CaSO_4 \cdot 2H_2O$ in einem äußeren Magnetfeld **B** in z-Richtung. Das innere Magnetfeld (in z-Richtung), hervorgerufen am Ort eines gegebenen Protons im H_2O-Molekül durch das Nachbarproton, ist gegeben durch $(\mu/a^3)\,(3\cos^2\theta - 1)$, falls der Spin dieses Nachbarprotons in

Richtung des angelegten Feldes zeigt und durch $-(\mu/a^3)(3\cos^2\theta - 1)$, falls der Spin des benachbarten Protons in die entgegengesetzte Richtung zeigt. Hier ist μ das magnetische Moment des Protons und a die Entfernung zwischen den beiden Protonen, während θ den Winkel zwischen der Verbindungslinie der beiden Protonen und der z-Achse bezeichnet. In dieser Probe von zufällig orientierten Kristallen befindet sich das Nachbarproton mit gleicher Wahrscheinlichkeit an jeder Stelle auf der Kugel mit dem Radius a, die das gegebene Proton umgibt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W (b) db dafür, daß das innere Feld b zwischen b und b + db liegt, wenn der Spin des Nachbarprotons parallel zu **B** ist?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit W(b) db, wenn der Spin des Nachbarprotons mit gleicher Wahrscheinlichkeit entweder parallel oder antiparallel zu **B** ist? Man skizziere W(b) als Funktion von b.
(Bei einem kernmagnetischen Resonanzexperiment ist die Frequenz, bei der Energie aus einem radiofrequenten Magnetfeld absorbiert wird, proportional zur lokalen magnetischen Feldstärke, die am Ort eines Protons herrscht. Die Antwort von Teil b) gibt deshalb die Gestalt der Absorptionslinie, die man bei diesem Experiment beobachtet.)

1.25 a) Die Wahrscheinlichkeit $W^+(b)\,db$ dafür, daß das innere Magnetfeld einen Wert im Intervall zwischen b und b + db hat, ist gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, daß der gemäß

$$b = \frac{\mu}{a^3}(3\cos^2\theta - 1) \tag{1}$$

mit b verknüpfte Winkel θ in einem der beiden zugehörigen θ-Intervalle, d.h. zwischen $\theta(b)$ und $\theta(b) + d\theta(b)$ oder zwischen $\pi - \theta(b)$ und $\pi - \theta(b) + d\theta(b)$ liegt. Nach Aufgabe 1.24 gilt

$$W(\theta)\,d\theta = \frac{\sin\theta \cdot d\theta}{2} = W(\pi - \theta)\,d\theta. \tag{2}$$

Damit ergibt sich

$$W^+(b)\,db = 2\,W(\theta)\,d\theta = 2W(\theta[b])\left|\frac{d\theta}{db}\right| db. \tag{3}$$

Aus (1) folgt

$$\left|\frac{db}{d\theta}\right| = \frac{6\mu\cos\theta\,\sin\theta}{a^3}, \tag{4}$$

so daß man schließlich aus (3) erhält

$$W^+(b)\,db = 2W(\theta)\,d\theta = \frac{a^3\sqrt{3}\,db}{6\sqrt{\mu^2 + \mu a^3 b}}. \tag{5}$$

b) Für den Fall, daß der Spin antiparallel zum äußeren Feld gerichtet ist, erhält man entsprechend

$$W^{-}(b)\,db = \frac{a^3\sqrt{3}\;db}{6\sqrt{\mu^2 - \mu\, a^3 b}} \tag{6}$$

Ist nun der Spin mit gleicher Wahrscheinlichkeit entweder parallel oder antiparallel zum äußeren Feld gerichtet, so hat man für b insgesamt den Variabilitätsbereich

$$-\frac{2\mu}{a^3} < b < \frac{2\mu}{a^3}, \tag{7}$$

wobei das Teilintervall

$$-\frac{2\mu}{a^3} < b < \frac{-\mu}{a^3} \tag{8}$$

nur dann in Frage kommt, wenn der Spin *antiparallel* zum äußeren Feld gerichtet ist, und das Teilintervall

$$\frac{\mu}{a^3} < b < \frac{2\mu}{a^3} \tag{9}$$

nur dann, wenn der Spin *parallel* zum äußeren Feld gerichtet ist, während der mittlere Bereich

$$-\frac{\mu}{a^3} < b < \frac{+\mu}{a^3} \tag{10}$$

in beiden Fällen möglich ist. Für alle drei Teilbereiche gilt dann: (Wahrscheinlichkeit dafür, daß die innere Feldstärke einen Wert zwischen b und b + db hat) = = [(Wahrscheinlichkeit dafür, daß die innere Feldstärke einen Wert zwischen b und b + db hat *und* daß dabei der Spin parallel zum äußeren Feld gerichtet ist) + + (Wahrscheinlichkeit dafür, daß die innere Feldstärke einen Wert zwischen b und b + db hat *und* daß dabei der Spin antiparallel zum äußeren Feld gerichtet ist)]. Damit erhält man

$$W(b)db = \begin{cases} \dfrac{a^3\sqrt{3}\;db}{12\sqrt{\mu^2 - \mu\, a^3 b}} & -\dfrac{2\mu}{a^3} < b < -\dfrac{\mu}{a^3} \\[2ex] \left(\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12\sqrt{\mu^2 - \mu\, a^3 b}} + \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12\sqrt{\mu^2 + \mu a^3 b}}\right) db & -\dfrac{\mu}{a^3} < b < \dfrac{\mu}{a^3} \\[2ex] \dfrac{a^3\sqrt{3}\;db}{12\sqrt{\mu^2 + \mu a^3 b}} & \dfrac{\mu}{a^3} < b < \dfrac{2\mu}{a^3} \end{cases} \tag{11}$$