SAMMLUNG GÖSCHEN BAND 584/584a

KINEMATIK

von

DR. HANS ROBERT MÜLLER

o. Prof. an der Technischen Universität Berlin

Mit 75 Figuren

WALTER DE GRUYTER & CO.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp.

BERLIN 1963

Sämtliche Figuren wurden von Herrn Detlef Krüger (Berlin) angefertigt.

Beim Lesen der Korrekturen halfen die Herren Josef Hoschek (Darmstadt) und Peter Meyer (Braunschweig)

 — Archiv-Nr. 7932639. — Satz und Druck: Walter de Gruyter & Co., Berlin 30. — Printed in Germany.

Inhaltsverzeichnis

Seite

Schrifttum

Auf einzelne Abhandlungen jüngeren Datums wird im Text durch Fußnoten hingewiesen. Einige neuere Lehrbücher oder geschlossene Darstellungen der Kinematik, die meist auch ausführliche Literaturhinweise enthalten, mögen angeführt werden:

[1] R. Beyer, Technische Kinematik, Leipzig 1931.
[2] W. Blaschke—H. R. Müller, Ebene Kinematik, München 1956.
[3] R. Bricard, Leçons de Cinématique I, II, Paris 1926/27.
[4] K. Federhofer, Graphische Kinematik und Kinetostatik, Berlin 1932.
[5] R. Garnier, Cours de Cinématique I, II, III, Paris 1949 bis 1956.
[6] F. Hohenberg, Konstruktive Geometrie in der Technik, Wien 1961.
[7] G. Julia, Cours de Cinématique, Paris 1936.
[8] J. L. Krames, Darstellende und kinematische Geometrie für Maschinenbauer, Wien 1956.
[9] E. Kruppa, Analytische und konstruktive Differentialgeometrie, Wien 1957.
[10] H. R. Müller, Sphärische Kinematik, Berlin 1962.
[11] H. E. Timerding, Geometrie der Kräfte, Leipzig 1908.
[12] E. A. Weiß, Einführung in die Liniengeometrie und Kinematik, Leipzig und Berlin 1935.

Zwecks näherer Begründung der mathematischen Hilfsmittel sowie als Hinweise auf technische Anwendungen sei auf folgende Bände dieser Sammlung verwiesen:

K. P. Grotemeyer, Analytische Geometrie (65/65a).
K. Strubecker, Differentialgeometrie I (1113/1113a), II (1179/1179a), III (1180/1180a).
S. Valentiner—H. König, Vektoren-Matrizen (354/354a).
P. Grodzinski, Getriebelehre (1061).

Einleitung

In der Kinematik werden räumlich-zeitliche Aspekte und Eigenschaften von stetigen Bewegungsvorgängen, also von stetigen Lageänderungen ebener oder räumlicher Gebilde betrachtet. Andere Begriffe der Mechanik, wie Massen, Kräfte usf., die hierbei wirksam werden, sind außer acht zu lassen. Das Interesse gilt in erster Linie den geometrischen Eigenschaften von Bewegungen und dem geometrischen Kern technischer Anwendungen. — Wir beschränken uns hier auf zwangläufige, d. h. einparametrige Bewegungsvorgänge und erheben auch bei deren Behandlung keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit. Insbesondere ist der Abschnitt über räumliche Kinematik kurz und knapp gehalten, zumal der ebenen Kinematik größere praktische Bedeutung zukommt. Aus der Fülle der kinematischen Erkenntnisse kann nur eine kleine Auswahl geboten werden.

Da ein Großteil der kinematischen Fragestellungen und Sätze differentialgeometrischer Natur ist, wurde eine analytische (also rechnerische) Behandlungsweise gewählt, die allein eine exakte Beweisführung und ein Vordringen zu Eigenschaften höherer Ordnung gestattet. Vielfach wurden jedoch auch anschaulich-geometrische, synthetische Überlegungen und Schlüsse durchgeführt und graphisch-konstruktive Verfahren behandelt. Als adäquates analytisches Hilfsmittel wurden neben der Vektorrechnung in der ebenen Kinematik komplexe Zahlen herangezogen. In der räumlichen Kinematik wird vom „begleitenden Dreibein" und dem Darbouxschen Drehvektor Gebrauch gemacht. Mathematische Ergänzungen und Erläuterungen wurden mehrfach im Kleindruck eingefügt, so daß an Vorkenntnissen nur die Grundbegriffe der Analysis und analytischen Geometrie vorausgesetzt werden.

A. EBENE KINEMATIK

I. Punktbahnen und Geschwindigkeiten

1. Zwangläufige Bewegungsvorgänge in der Ebene

Wir gehen von einer ebenen Scheibe aus, die auf einer ebenen Unterlage liege und gegen diese beweglich sei. Als Vertreter (Repräsentant) jedes dieser beiden Systeme wählen wir in ihnen je einen rechten Winkel: Die bewegliche Ebene oder *Gangebene* **E** werde durch das rechtwinkelige Achsenkreuz $\{U;\ x_1, x_2\}$ mit dem Ursprung U und den beiden rechtwinkeligen x_i-Achsen erfaßt. In gleicher Weise bestimme das Achsenkreuz $\{U';\ x'_1, x'_2\}$ die feste Ebene oder *Rastebene* **E**′ (vgl. Fig. 1). Für eine analytische Behandlung der ebenen Kinematik wird es sich als sehr zweckmäßig erweisen, die auf dem *Gangkreuz* $\{U;\ x_1, x_2\}$ fußenden kartesischen Koordinaten x_1, x_2 eines reellen Punktes X zu einer komplexen Zahl

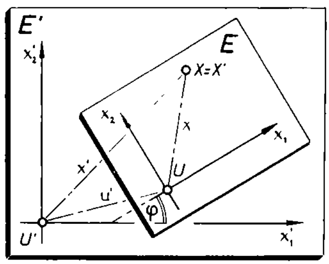

Fig. 1. Gang- und Rastebene

$$x = x_1 + i x_2 \qquad (i^2 = -1)$$

zusammenzufassen, die Ebene **E** also, wie etwa auch in der Funktionentheorie, Wechselstromtechnik usf. üblich, als Gauß*sche Zahlenebene* zu betrachten. Derselbe Punkt X von **E** oder eigentlich der sich mit ihm deckende Punkt X' der Ebene **E**′ besitze bei Bezugnahme auf das *Rastkreuz* $\{U';\ x'_1, x'_2\}$ die Normalkoordinaten x'_1, x'_2, mit denen wir ebenfalls eine komplexe Zahl, nämlich

$$\mathrm{x}' = \mathrm{x}'_1 + \mathrm{i}\,\mathrm{x}'_2$$

bilden. Diese komplexen Zahlen x, x′ entsprechen hierbei den Ortsvektoren $\mathfrak{x} = \overrightarrow{UX}$, $\mathfrak{x}' = \overrightarrow{U'X'}$. Zum Ursprung U gehört im Rastsystem die Zahl

$$\mathrm{u}' = \mathrm{u}'_1 + \mathrm{i}\,\mathrm{u}'_2,$$

sie vertritt den Vektor $\mathfrak{u} = \overrightarrow{U'U}$.

Der Winkel φ, um den das Gangkreuz gegenüber dem Rastkreuz verdreht ist, werde als *Drehwinkel* bezeichnet.

Für einen beliebigen Punkt X gilt wegen

$$\mathfrak{x}' = \overrightarrow{U'X} = \overrightarrow{U'U} + \overrightarrow{UX} = \mathfrak{u} + \mathfrak{x}$$

die Gleichung

$$\boxed{\mathrm{x}' = \mathrm{u}' + \mathrm{x}\,e^{i\varphi}.} \tag{1}$$

Hierbei machten wir von folgenden Eigenschaften der komplexen Zahlen und ihrer Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene Gebrauch: Die *Summe* zweier komplexen Zahlen bedeutet die geometrische Addition der entsprechenden Vektoren. Das *Produkt* einer komplexen Zahl x, die dem Ortsvektor $\mathfrak{x} = \overrightarrow{UX}$ entsprechen möge, mit einer komplexen Zahl

$$\mathrm{a} = \mathrm{a}_0\,(\cos\alpha + \mathrm{i}\,\sin\alpha) = \mathrm{a}_0 e^{i\alpha}, \quad (\mathrm{a}_0, \alpha \text{ reell})$$

also die Transformation

$$\mathrm{y} = \mathrm{a}\mathrm{x}$$

stellt eine *Drehstreckung* mit dem Ursprung U als Zentrum dar. Hierbei bedeutet

$$\alpha = \arg\,\mathrm{a}$$

den Drehwinkel und

$$\mathrm{a}_0 = |\,\mathrm{a}\,|$$

den Ähnlichkeitsfaktor. Für $\mathrm{a}_0 = 1$ erhalten wir insbesondere eine reine Drehung.

In (1) müssen wir an der komplexen Zahl x, die den Vektor $\overrightarrow{UX}$ im Gangsystem darstellt, den Drehungsfaktor $e^{i\varphi}$ anbringen, um diesen Vektor im Rastsystem zu erhalten.

Ein *zwangläufiger* (*eingliedriger* oder *einparametriger*) *Bewegungsvorgang* **B** = **E**/**E**′ der Gangebene **E** gegenüber der Rastebene **E**′ liegt nun vor, wenn

$$u' = u'(t), \quad \varphi = \varphi(t)$$

Funktionen eines reellen Parameters t (Zeit) sind. Diese Funktionen mögen in einem gemeinsamen Definitionsbereich genügend oft stetig differenzierbar vorausgesetzt werden.

Die Ableitung

$$d\varphi : dt = \dot{\varphi} = \omega \tag{2}$$

bedeutet die Dreh- oder Winkelgeschwindigkeit von **B**. Wir wollen vorerst immer

$$\dot{\varphi} = \omega \neq 0 \tag{3}$$

annehmen, also reine Schiebvorgänge ausschließen.

2. *Geschwindigkeiten, Momentanpol*

Wir stellen uns nun vor, daß der Punkt X auch eine Eigenbewegung in der Ebene **E** vollführe. Dann ist der *Vektor der Relativgeschwindigkeit* $\dot{\mathfrak{x}}_r$ des Punktes X, also die vektorielle Geschwindigkeit von X gegenüber der Ebene **E** im Gangkreuz durch

$$\dot{x}_r = dx : dt = \dot{x} \tag{4}$$

gegeben. Im festen Koordinatensystem wird dieser Vektor durch die komplexe Zahl

$$\dot{x}'_r = \dot{x}_r \cdot e^{i\varphi} = \dot{x} \cdot e^{i\varphi} \tag{4'}$$

dargestellt. — Bezogen auf das Rastkreuz finden wir durch Differenzieren von (1) für den *Vektor der Absolutgeschwindigkeit* $\dot{\mathfrak{x}}_a$, also für die vektorielle Geschwindigkeit des Punktes X gegenüber der festen Ebene **E**′ die komplexe Zahl

$$\dot{x}'_a = dx' : dt = \dot{x}' = \dot{u}' + i\,\dot{\varphi} x e^{i\varphi} + \dot{x} e^{i\varphi}$$

und somit wegen (4′)

$$\dot{x}'_a = \dot{x}'_f + \dot{x}'_r. \tag{5'}$$

Hierbei ist durch

(6′) $\dot{x}'_f = \dot{u}' + i\,\dot{\varphi}\,x\,e^{i\varphi} = \dot{u}' + i\,\dot{\varphi}(x' - u')$

die *Führungsgeschwindigkeit* $\dot{\mathfrak{x}}_f$ von X bestimmt. Die absolute Geschwindigkeit eines Punktes X reduziert sich auf die Führungsgeschwindigkeit, wenn X in **E** fest ist, die Relativgeschwindigkeit also verschwindet: $\dot{\mathfrak{x}}_r = \dot{x}_r = \dot{x}'_r = 0$. Somit gilt:

Die Führungsgeschwindigkeit eines Punktes X ist die Geschwindigkeit jenes Punktes der Gangebene, der sich zum betrachteten Zeitpunkt mit dem Punkt X deckt.

Formel (5′) beschreibt die *Zusammensetzung der Geschwindigkeiten:*

Satz 1: *Bei der Zusammensetzung der Eigenbewegung eines Punktes X in der Gangebene* **E** *mit der Bewegung von* **E** *gegenüber der Rastebene* **E′** *ist der Vektor der Absolutgeschwindigkeit von X die (geometrische) Summe des Vektors der Führungsgeschwindigkeit von X und des Vektors der Relativgeschwindigkeit von X.*

In Vektorschreibweise gilt also

(5*) $$\boxed{\dot{\mathfrak{x}}_a = \dot{\mathfrak{x}}_f + \dot{\mathfrak{x}}_r.}$$

Nach Einführung von

(7) $$u' = -u\,e^{i\varphi}$$

und damit

$$\dot{u}' = -(\dot{u} + i\,\dot{\varphi}\,u)\,e^{i\varphi}$$

ergibt sich nach (1), (5′), (6′) für die Darstellung im Koordinatensystem der beweglichen Ebene

(5) $$\dot{x}_a = \dot{x}_f + \dot{x}_r$$

mit

(6) $$\dot{x}_f = \dot{x}'_f\,e^{-i\varphi} = -\dot{u} + i\,\dot{\varphi}(x - u).$$

Wir fragen nun nach Punkten mit verschwindender Führungsgeschwindigkeit. Solche Punkte haben die Eigenschaft, nicht nur in der Gangebene **E**, sondern auch in der Rastebene **E**′ für den Augenblick zu ruhen. Aus $\dot{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{f}} = \dot{\mathfrak{x}}'_{\mathfrak{f}} = 0$ finden wir wegen (3) die Werte

$$\boxed{\mathfrak{x} = \mathfrak{p} = \mathfrak{u} - \mathrm{i}\,\frac{\dot{\mathfrak{u}}}{\dot{\varphi}}}\;,\quad \boxed{\mathfrak{x}' = \mathfrak{p}' = \mathfrak{u}' + \mathrm{i}\,\frac{\dot{\mathfrak{u}}'}{\dot{\varphi}}\,,} \tag{8}$$

die in unseren beiden Koordinatensystemen den *Momentanpol P* festlegen.

Es gilt somit der

Satz 2: *Bei einem ebenen zwangläufigen Bewegungsvorgang mit nicht verschwindender Winkelgeschwindigkeit gibt es zu jedem Zeitpunkt einen Punkt — Momentanpol, Drehpol, Momentanzentrum, Geschwindigkeitspol oder einfach Pol genannt —, dessen Führungsgeschwindigkeit verschwindet, der also in beiden Ebenen augenblicklich in Ruhe ist.*

Wegen (6), (6′) und (7) können wir die Führungsgeschwindigkeit des Punktes X auch in der Form schreiben (Elimination von $\dot{\mathfrak{u}}$ bzw. $\dot{\mathfrak{u}}'$):

$$\boxed{\dot{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{f}} = \mathrm{i}\,\dot{\varphi}(\mathfrak{x} - \mathfrak{p})}\;,\quad \boxed{\dot{\mathfrak{x}}'_{\mathfrak{f}} = \mathrm{i}\,\dot{\varphi}(\mathfrak{x}' - \mathfrak{p}')\,.} \tag{9}$$

Daraus können wir zwei wichtige Folgerungen ziehen:

a) Der Vektor $\overrightarrow{PX}$ des *Polstrahls* vom Pol P zum Punkt X steht auf der Führungsgeschwindigkeit des Punktes X senkrecht, denn die komplexen Zahlen $\mathfrak{x} - \mathfrak{p}$ und $\dot{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{f}}$ unterscheiden sich nur durch einen rein imaginären Faktor.

b) Für den Betrag der Führungsgeschwindigkeit gilt

$$|\dot{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{f}}| = |\dot{\varphi}| \cdot |\mathfrak{x} - \mathfrak{p}|\,.$$

Die (skalare) Führungsgeschwindigkeit ist somit proportional dem Abstand des betreffenden Punktes vom Drehpol.

Bringen wir also in einzelnen Punkten $X, Y, Z \ldots$ die Vektoren $\mathfrak{x}_{\mathfrak{f}}, \mathfrak{y}_{\mathfrak{f}}, \mathfrak{z}_{\mathfrak{f}} \ldots$ ihrer zugehörigen Führungsgeschwindigkeiten an, so bilden deren Endpunkte mit den Punkten $X, Y, Z \ldots$ und dem Pol P ähnliche Dreiecke (Fig. 2). Dies kann man dazu benützen, durch einfache Winkelübertragungen in beliebigen Punkten die vektorielle Führungsgeschwindigkeit zu konstruieren, falls diese nur für einen Punkt bekannt ist.

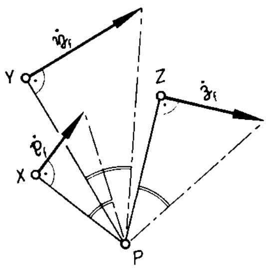

Fig. 2. Verteilung der Führungsgeschwindigkeiten

Man kann die Feststellungen a) und b) auch dahin zusammenfassen: *Jeder Punkt der Gangebene* **E** *erfährt im Augenblick eine infinitesimale Drehung (Momentandrehung) um den Pol* P *mit der Winkelgeschwindigkeit* $\dot{\varphi} = \omega$. Im Zeitelement dt erfolgt also eine Drehung durch den Winkel $\omega \cdot$ dt. Somit gelangen wir zu

Satz 3: *Ein ebener zwangläufiger Bewegungsvorgang* **B** *besteht im Augenblick aus einer infinitesimalen Drehung der Gangebene* **E** *um den Momentanpol* P *mit der Winkelgeschwindigkeit* ω.

Satz 4: *Jeder Punkt der Gangebene* **E** *beschreibt bei* **B** *in der Rastebene* **E**′ *eine Bahnkurve, deren Normale (Bahnnormale) jeweils durch den Pol geht.*

Auf Grund dieser Sätze können wir für viele kinematisch erzeugbare Kurven Tangentenkonstruktionen herleiten.

3. Polbahnen

Da zu jedem Zeitpunkt t ein Drehpol P gehört, nimmt P im Verlaufe unseres Bewegungsvorgangs **B** verschiedene Lagen in den beiden Ebenen **E**, **E**′ an. Der Ort der Punkte P in der Gangebene **E** ist im allgemeinen eine Kurve $p = (P)$ und heißt die *Gangpolbahn* oder die *bewegliche Polkurve* von **B**. Entsprechendes gilt für die Rastebene **E**′: Der Ort der Punkte $P' = P$ in **E**′ ist die *Rastpolbahn* oder die *feste Polkurve* $p' = (P')$ von **B**.

Wir fragen nun nach den *Polgeschwindigkeiten* (*Polwechselgeschwindigkeiten*), also nach den Geschwindigkeiten, mit denen der Punkt P diese beiden Polbahnen p, p' durchläuft. Der Drehpol war nach früherem durch $\dot{\mathfrak{x}}_f = 0$ gekennzeichnet; daher ist nach (5) für $\mathfrak{x} = \mathfrak{p}$

$$\dot{\mathfrak{x}}_a = \dot{\mathfrak{x}}_r = \dot{\mathfrak{p}}.$$

Somit gilt der

Satz 5: *Zu jedem Zeitpunkt stimmen die Geschwindigkeitsvektoren überein, mit denen der Drehpol P die beiden Polkurven in der festen bzw. beweglichen Ebene durchläuft.*

Es berühren sich daher die beiden Polbahnen p, p' derart im augenblicklichen Drehpol P, daß in gleichen Zeitelementen dt auch gleiche Bogenelemente zurückgelegt werden:

$$ds' = |\dot{\mathfrak{x}}_a| \cdot dt = |\dot{\mathfrak{x}}_r| \cdot dt = ds.$$

Wenn sich aber zwei Kurven ständig berühren und zwischen entsprechenden Berührungspunkten gleiche Bogenlängen aufweisen, so sagt man: „Die beiden Kurven *rollen ohne zu gleiten* aufeinander“. Daher gilt der

Satz 6: *Bei einem ebenen eingliedrigen Bewegungsvorgang* **B** *rollt die Gangpolbahn* $p = (P)$ *von* **E** *gleitungslos auf der Rastpolbahn* $p' = (P')$ *von* **E'**.

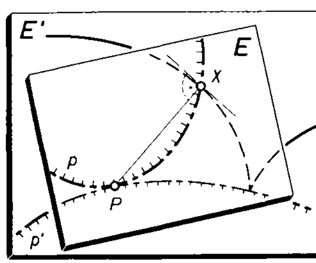

Fig. 3. Die rollenden Polkurven, Bahn eines Punktes der Gangpolbahn

Daraus folgt: Ein Bewegungsvorgang **B** kann abgesehen vom „Zeitgesetz“, d. h. abgesehen vom zeitlichen Verlauf der Bewegung **B** so erzeugt werden, daß auf der Kurve $p' = (P')$ von **E'** die Kurve $p = (P)$ von **E** gleitungslos abrollt (Fig. 3). Man kann sich dies veranschaulichen, indem man Scheiben aus dünnem Material (Holz, Pappe oder dgl.) nach den Polbahnen formt und tatsächlich aufeinander abrollen läßt.

Ausnahmen von Satz 6 erhalten wir in folgenden Fällen:

a) Schrumpft eine der beiden Polbahnen, etwa die Gangpolbahn p auf einen Punkt P von **E** zusammen, so gilt Gleiches auch von der anderen Polbahn p' in **E'**. Der Bewegungsvorgang **B** besteht dann einfach aus einer *kontinuierlichen Drehung um den festen Punkt P.*

b) Verschwindet für einen bestimmten Wert t die Winkelgeschwindigkeit, gilt also dort $\dot{\varphi} = 0$, dann haben nach (6), (6') alle Punkte X der Gangebene **E** die gleiche Geschwindigkeit (Führungsgeschwindigkeit)

$$\dot{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{f}} = -\dot{\mathfrak{u}}, \quad \dot{\mathfrak{x}}'_{\mathfrak{f}} = \dot{\mathfrak{u}}'.$$

Die Betrachtung des Grenzüberganges $\dot{\varphi} \to 0$ läßt erkennen, daß hierbei der Drehpol P ins *Unendliche* rückt. Die beiden Polbahnen p, p' besitzen für diese Stelle von **B** *mit Asymptoten versehene Fernpunkte.* Das Rollen der Polbahnen erfolgt „über diese Fernpole hinweg.“

c) Ist für alle Werte von t ständig $\dot{\varphi} = 0$, gilt also $\varphi =$ konst., so ist in unserem Bewegungsvorgang überhaupt kein Drehbestandteil enthalten, man spricht dann von einem *Schiebvorgang* oder einer *krummen Schiebung.* Alle Pole liegen im Unendlichen, eine Erzeugung von **B** durch das Abrollen von Polkurven oder dgl. ist nicht möglich.

4. *Umkehrbewegung*

Unter der *Umkehrbewegung* oder *inversen Bewegung* eines Bewegungsvorgangs **B** verstehen wir jenen Bewegungsvorgang **B'**, der sich bei **B** einem auf **E** befindlichen Beobachter darbietet. Es wird also jetzt **E** festgehalten und **E'** bewegt und alles hierbei von **E** aus betrachtet. Es vertauschen nun die beiden Polbahnen ihre Rollen: Auf der nun festen Polkurve p rollt gleitungslos die Kurve p' und bestimmt allein dadurch bis auf das Zeitgesetz den inversen Bewegungsvorgang **B'**. Da sich jetzt **E'** im entgegengesetzten Sinn gegenüber **E** dreht, ändern der Drehwinkel und damit auch die Winkelgeschwindigkeit ihre Vorzeichen. Dies erkennt man auch, wenn man mit (7) die Gleichung (1) unserer Bewegung in der Form

$$\text{(10)} \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{u} + \mathfrak{x}' e^{i\varphi'}, \quad \varphi' = -\varphi$$

schreibt. Somit gilt auch für die Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\varphi}' = \omega' = -\omega.$$

Wir haben also den

Satz 7: *Bei der Umkehrbewegung* **B'** *eines eingliedrigen Bewegungsvorgangs* **B** *vertauschen nicht nur Gang- und Rastebene, sondern auch Gang- und Rastpolbahn ihre Rollen. Die Winkelgeschwindigkeiten inverser Bewegungsvorgänge* **B, B'** *sind entgegengesetzt gleich.*

Man entnimmt ferner daraus, daß es vom geometrischen Standpunkt aus im Wesentlichen gleichgültig ist, welche der beiden Ebenen **E**, **E'** wir als fest und welche wir als beweglich ansehen. Nur die gegenseitigen Lageänderungen sind von Interesse. In den Anwendungen ist es jedoch meist umgekehrt: Das eine ebene System ist von Natur aus fest, das andere beweglich. In solch geometrischer Betrachtungsweise ist also z. B. der Streit um die Lehre des Kopernikus, ob sich die Erde um die Sonne bewegt oder umgekehrt, hinfällig.

X sei nun ein (fester) Punkt von **E**; er beschreibe bei **B** eine Bahnkurve, d. h. der Ort seiner Lagen in **E'** oder, genauer gesagt, die sich mit X der Reihe nach deckenden Punkte X' von **E'** erfüllen eine Kurve $x' = (X')$. Bei der Umkehrbewegung **B'** geht nun diese in **E'** feste (starre) Kurve x' ständig durch den Punkt X von **E**. Wir sagen, die Kurve x' von **E'** hat bei **B'** den Punkt X zum *Stützpunkt*. Wir können diesen Sachverhalt in anschaulicher Weise mechanisch realisieren: Wir denken uns die Kurve x' aus einem festen *Draht* hergestellt und an der Ebene **E'** befestigt. In der Ebene **E** hingegen bringen wir im Punkte X eine kleine *Hülse* an, die um eine zu **E** senkrechte Achse drehbar ist. Bei **B'** gleitet der Draht nun ständig durch diese „*Dreh-*

hülse" hindurch, die sich ihrerseits um die im Punkte X angebrachte Achse dreht (Fig. 4).

Wir zeichnen nun in **E** um den Punkt X als Mittelpunkt einen Kreis k und lassen ihn zusammen mit der Ebene **E** die Bewegung **B** ausführen. Er durchläuft hierbei eine eingliedrige Schar kongruenter Kreise, deren Mittelpunkte auf der Bahnkurve x' des Punktes X liegen. Diese Kreisschar besitzt eine Einhüllende $k' = k'_1 + k'_2$, die im allgemeinen aus zwei Zügen oder Zweigen k'_1 und k'_2 bestehen wird. Wir sagen kurz: *Der Kreis k hüllt bei* **B** *die Kurve k' ein.* Die beiden Zweige von k' sind *Parallelkurven* oder *Äquidistante* von x' im Abstand $\pm\,\varrho$, wenn ϱ der Radius von k ist. — Bei der Umkehrbewegung **B'** hüllen umgekehrt zwei Parallelkurven k'_1, k'_2 von x' zum Abstand $\pm\,\varrho$, die in der Ebene **E'** als fest angenommen werden, in **E** einen Kreis k um X mit ϱ als Halbmesser ein (Fig. 4).

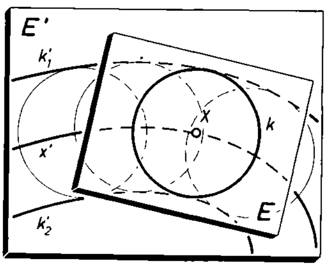

Fig. 4. Stützpunkt, Hüllbahn eines Kreises

Wir bemerken noch, daß beim Übergang zur Umkehrbewegung sich auch die Führungsgeschwindigkeit eines Punktes mit dem Faktor —1 multipliziert. Wir brauchen hierzu nur in Formel (6') gestrichene und ungestrichene Größen miteinander zu vertauschen und (10) zu berücksichtigen, um im Vergleich mit (6) dies zu bestätigen.

5. *Beispiele einfacher Bewegungsvorgänge*

Wir wollen nun die abgeleiteten Sätze auf eine Reihe von Beispielen anwenden, bei denen die Bewegungsvorgänge in verschiedenster Weise erzeugt werden. So können wir etwa einfache Kurven als Polbahnen wählen oder die Bewegung von einem einfachen Mechanismus (Getriebe) beschreiben lassen. Wir beginnen mit der Vorgabe von Punktbahnen.

A) Zweipunktführung: Zwei Punkte A, B der Gangebene **E** mögen auf zwei Kurven $a' = (A')$, $b' = (B')$ der Rastebene **E**′ bewegt werden. Durch diese technisch wichtige *Zweipunktführung* ist ein Bewegungsvorgang **B** = **E**/**E**′ bis auf das

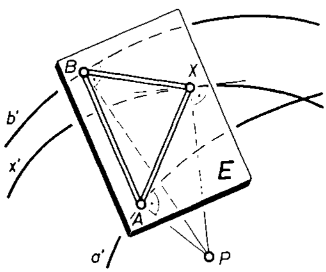

Fig. 5. Zweipunktführung

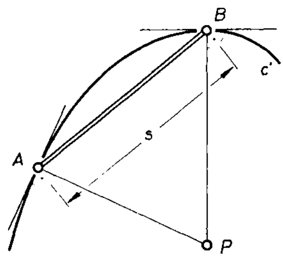

Fig. 6. Bewegung einer Kurvensehne fester Länge

Zeitgesetz bestimmt. Der zur betrachteten Lage von **E** gegen **E**′ gehörige Drehpol P kann als Schnittpunkt der Bahnnormalen in A und B gefunden werden (Fig. 5). Die Bahntangente eines beliebigen Punktes X von **E** steht dann auf dem Polstrahl PX senkrecht. Durch wiederholtes Einpassen der Strecke AB fester Länge zwischen den beiden Führungskurven erhalten wir so punktweise die Polbahn in der festen Ebene. Durch Übertragung des jeweiligen Dreiecks ABP in die Ausgangslage von **E** könnte man dort die Gangpolbahn ebenfalls punkteweise konstruieren.

Ein Sonderfall dieser Zweipunktführung entsteht, wenn eine Strecke AB der festen Länge s gezwungen wird, sich so zu bewegen, daß beide Endpunkte A und B auf der gleichen Kurve c' wandern. Auch für diese Bewegung einer Sehne von fester Länge wird der Drehpol P jeweils als Schnittpunkt der Kurvennormalen in A und B gefunden (Fig. 6).

B) Gleiten einer Kurventangente: Wir wollen nun im vorhergehenden Beispiel die beiden Punkte A und B immer näher zusammenrücken lassen, bis sie schließlich beide in einen Punkt C unserer Kurve c' fallen. Für diesen Grenzübergang $s \to 0$ wird hierbei die in **E** feste Verbindungsgerade $g = AB$ zur Tangente an c' im Punkte C. (Es kann hierbei etwa $C = A$ gewählt werden!) Unser Bewegungsvorgang **B** ist jetzt so erklärt: *Eine Gerade g von* **E** *bewegt sich längs einer Kurve c' von* **E'** *derart, daß ein fester Punkt C von g die Kurve c' beschreibt und hierbei g stets Kurventangente von c' im Punkte C ist.* Nun schneiden sich die Kurvennormalen in benachbarten Punkten einer Kurve jeweils im zugehörigen Krümmungsmittelpunkt. *Der Drehpol P ist somit der Krümmungsmittelpunkt von c' zum Punkte C, die Rastpolbahn p' deckt sich mit der Evolute der gegebenen Kurve c'.* Als Gangpolbahn p fungiert der Polstrahl PC (Fig. 7).

Hierauf beruht eine *Krümmungskreiskonstruktion* einer gezeichnet vorliegenden Kurve, die Nikolaides im Jahre 1866 angegeben hatte. Die Bahnkurve x' eines Punktes X unserer gleitenden Tangente g kann auch so erhalten werden, daß man auf den Tangenten von c' jeweils vom Berührungspunkt C aus in der gleichen Richtung eine Strecke fester Länge $CX = x$ abträgt. Man nennt die so erhaltene Kurve x' eine *Tangentialkurve*, *Tangentiale* oder auch *Äquitangentialkurve* von c' und umgekehrt c' eine *Traktrix* oder *Zuglinie* von x'. Die Bahnnormale im Punkte X geht nun durch den Krümmungsmittelpunkt P. Daraus folgt die *Zeichenvorschrift: Man ermittle punktweise aus der gezeichnet vorliegenden Kurve c' zu einer beliebigen Tangentenlänge x die Tangentialkurve und suche an sie im Punkte X, der C entspricht, graphisch die Tangente. Im Schnitt der Kurvennormalen der Punkte C und X ergibt sich dann der Krümmungsmittelpunkt P der ursprünglich vorgegebenen Kurve c'* (Fig. 7)[1].

C) Evolventenbewegung: Von der eben betrachteten Gleitbewegung einer Geraden längs einer Kurve wohl zu unterscheiden sind Bewegungsvorgänge, bei denen eine *Gerade*

---

[1]) Verwendet man jedoch ein *Spiegellineal*, so empfiehlt es sich, gleich die Kurvennormale zu zeichnen. Andernfalls schiebt man besser ein (gewöhnliches) Lineal von der hohlen (konkaven) Kurvenseite her an den Berührungspunkt heran und ermittelt so erst die Kurventangente.

p als Gangpolbahn auf einer *gekrümmten Rastpolbahn p′ gleitungslos abrollt* (Fig. 8). Jeder Punkt von *p* beschreibt eine (gespitzte) *Evolvente* von *p′*. Zwei verschiedene Evolventen sind *Parallelkurven*, denn sie besitzen, auf den ge-

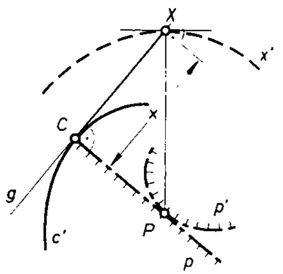

Fig. 7. Gleiten einer Kurventangente, Krümmungskreiskonstruktion

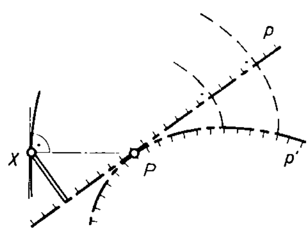

Fig. 8. Evolventenbewegung

meinsamen Bahnnormalen gemessen, stets den gleichen Abstand. Die Ausgangskurve *p′* ist gemeinsame Evolute all dieser Evolventen. Auch hier kann man für jeden beliebigen Punkt *X*, der mit *p* starr verbunden ist, die Tangente seiner Bahnkurve finden. Wird im besonderen *p′* als *Kreis* gewählt, so beschreiben die Punkte der rollenden Tangente *Kreisevolventen.* (Auch die in Beispiel B) betrachtete Bewegung ist eine Evolventenbewegung, bei der die Bahnnormale von *c′* auf der Evolute *p′* rollt.)

D) Umkehrung der Evolventenbewegung: Von Wichtigkeit ist jener Bewegungsvorgang, der durch Umkehrung der Kreisevolventenbewegung entsteht. Es rollt hierbei ein Kreis als Gangpolbahn auf einer Geraden, die als Rastpolbahn dient. Die Bahnkurven sind *Zykloiden* und zwar je nach Lage des beschreibenden Punktes zum rollenden Kreis (außerhalb, auf oder innerhalb des Rollkreises) treten *verschlungene, gespitzte oder gestreckte Zykloiden* auf. Da der Berührungspunkt von Rollkreis und Gerade jeweils Drehpol ist, kann die Bahntangente einer solchen Kurve leicht gefunden werden.

E) Gelenkviereck: Werden vier Stangen verschiedener Länge an ihren Endpunkten durch Gelenke miteinander verbunden, so daß ein ebenes Viereck entsteht, so spricht man von einem *Gelenkviereck.* Wird in diesem eine Seite, der *Steg*, festgehalten, so beschreibt die gegenüberliegende Seite, die als *Koppel* bezeichnet wird, einen Bewegungsvorgang, die sogenannte *Koppelbewegung.* Diese Bewegung ist dadurch gekennzeichnet, daß zwei Punkte B und C der Gangebene (Koppelebene) auf Kreisen um A bzw. D geführt werden (Fig. 9). Die Bahnkurve eines mit der Koppel starr

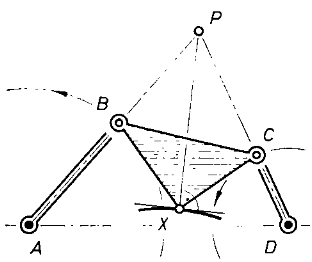

Fig. 9. Gelenkviereck

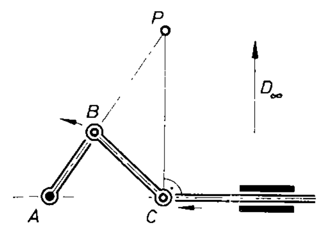

Fig. 10. Schubkurbel

verbundenen Punktes X (also eines Punktes der Koppelebene **E**) heißt *Koppelkurve.* Wegen der großen Bedeutung von Gelenkmechanismen für die Technik werden wir später auch noch auf diese Gelenkvierecke zurückkommen. Für die augenblickliche Stellung eines Gelenkvierecks finden wir im Schnittpunkt der *Arme AB* und *CD* den Drehpol P, denn diese Geraden sind ja Bahnnormalen der auf Kreisen bewegten Punkte B und C. Somit können wir auch in X die Bahntangente finden.

Ein solches Gelenkviereck kann auch in eine *Schubkurbel* ausarten (Fig. 10). Der Punkt B wird auf einem Kreis um A geführt, während C auf einer Geraden (durch A) gleitet. Im Schnitt des Armes AB und der Bahnnormalen in C liegt der augenblickliche Drehpol P. Wir können uns vorstellen, unsere Schubkurbel sei ein Gelenkviereck, bei dem der feste

Punkt D auf einer Normalen zu AC ins Unendliche gerückt sei.

F) Zwillingsgetriebe: Wir betrachten ein Gelenkviereck, in dem gegenüberliegende Stangen gleich lang sind und das längere Stangenpaar sich überschneidet (Fig. 11, 12). Es ist also

$$\overline{AB} = \overline{CD} = 2\,\mathrm{a}, \quad \overline{BC} = \overline{DA} = 2\,\mathrm{e}.$$

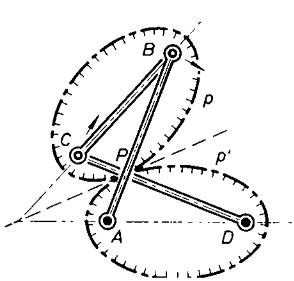

Fig. 11. Gleichläufiges Zwillingsgetriebe

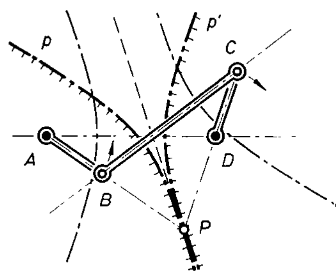

Fig. 12. Gegenläufiges Zwillingsgetriebe

Da B und C wiederum auf Kreisen um die festen Punkte A bzw. D wandern, liegt der Drehpol P im Schnittpunkt von AB und CD. Die Figur unseres Vierecks setzt sich nun jeweils aus zwei symmetrischen Dreiecken zusammen. — Wir unterscheiden die Fälle $\mathrm{a} > \mathrm{e}$ und $\mathrm{a} < \mathrm{e}$.

Für $\mathrm{a} > \mathrm{e}$ erhalten wir das *gleichläufige Zwillingsgetriebe* bei dem sich die beiden Arme im gleichen Sinne drehen (Fig. 11). Es gilt

$$\overline{AP} + \overline{DP} = \overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AB} = 2\,\mathrm{a}.$$

Die Rastpolbahn p' ist somit eine *Ellipse* mit A und D als Brennpunkten und der Hauptachsenlänge $2\,\mathrm{a}$. Ebenso finden wir

$$\overline{CP} + \overline{BP} = \overline{CP} + \overline{PD} = \overline{CD} = 2\,\mathrm{a}.$$

Die Gangpolbahn p ist also gleichfalls eine *Ellipse* der Hauptachsenlänge $2\,\mathrm{a}$, für welche jetzt B und C Brennpunkte sind.