Huppert
Angewandte Lineare Algebra

Bertram Huppert

Angewandte Lineare Algebra

Walter de Gruyter
Berlin · New York 1990

Bertram Huppert
Fachbereich Mathematik
Universität Mainz
Saarstr. 21
D–6500 Mainz

CIP-Titelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Huppert, Bertram:
Angewandte lineare Algebra / Bertram Huppert. –
Berlin ; New York : de Gruyter, 1990
ISBN 3-11-012107-7

♾ Gedruckt auf säurefreiem Papier

© Copyright 1990 by Walter de Gruyter & Co., D-1000 Berlin 30
Dieses Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.
Satz: Danny Lee Lewis, Berlin. – Druck: Gerike GmbH, Berlin. – Buchbinderische Verarbeitung: Dieter Mikolai, Berlin. – Einbandgestaltung: Thomas Bonnie, Hamburg.
Printed in Germany

Vorwort

Die lineare Algebra wurde ursprünglich vor allem für die Zwecke der Analytischen Geometrie entwickelt. Während ihre elementaren Aussagen fast überall eine direkte geometrische Interpretation gestatten, schlagen sich die tieferliegenden Sätze über lineare Abbildungen, ihre Eigenwerte und Normalformen nur zum Teil in geometrischen Aussagen nieder. Das vorliegende Buch hat das Ziel, eine Reihe von Ergänzungen und nichtgeometrischen Anwendungen der Linearen Algebra in direktem Anschluß an den Stoff der Anfängervorlesung zu behandeln.

In Kapitel I stellen wir Grundtatsachen über lineare Abbildungen ohne Beweise zusammen und ergänzen diese durch einige Aussagen über Diagonal- und Dreiecksgestalt von Matrizen. Kapitel II enthält eine breit angelegte Behandlung der reellen und komplexen Hilberträume endlicher Dimension sowie der Eigenwerttheorie hermitescher und normaler Abbildungen. Kapitel III behandelt mit Hilfe der Exponentialfunktion von Matrizen Systeme von linearen Differential- und Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten. Schwerpunkt dieses Kapitels sind die Paragraphen 5 und 6 über lineare Schwingungen, wo der Charakter der Schwingungsvorgänge durch die Jordansche Normalform gewisser Matrizen bestimmt wird. In Kapitel IV betrachten wir die Eigenwerttheorie nichtnegativer Matrizen, welche interessante Anwendungen gestattet auf ökonomische Probleme, Wachstumsprozesse und stochastische Prozesse. Kapitel V gibt eine Einführung in die Theorie der Vektorräume mit indefinitem Skalarprodukt sowie Anwendungen auf die Kinematik der speziellen Relativitätstheorie, also auf Minkowski-Raum und Lorentz-Gruppe.

Für eine genauere Beschreibung des Inhaltes verweisen wir auf das Inhaltsverzeichnis und die Vorworte der einzelnen Kapitel. Die einzelnen Kapitel sind relativ unabhängig voneinander. In Kapitel III werden Grundkenntnisse aus Kapitel II vorausgesetzt, vor allem II, §§ 6, 7, 8. Für Kapitel IV wird II, §§ 2, 3 benötigt.

Natürlich behandelt dieses Buch nicht annähernd alle Anwendungen der Linearen Algebra. Unsere Auswahl bevorzugt solche Gebiete, wo lineare Abbildungen, ihre Eigenwerte und Normalformen eine wesentliche Rolle spielen. Das schließt viele Bereiche aus wie etwa lineare Optimierung, Spieltheorie und Kodierungstheorie. Wir waren bestrebt, Beziehungen zu außermathematischen Fragestellungen möglichst vielfältig aufzugreifen. Numerische Verfahren der Linearen Algebra haben wir nicht aufgenommen, aber auf die Abschätzung und Einschließung von Eigenwerten sind wir mehrfach eingegangen.

Bei der Abgrenzung des Stoffes sind wir nicht dogmatisch vorgegangen. Interessante Fragen, die etwas neben der Hauptlinie unserer Darstellung liegen, haben

wir mitunter aufgegriffen. Mit Beispielen und Aufgaben wurde nicht gespart, um neben einer Ergänzung des Textes auch Rechentechniken zu vermitteln.

Bei den Arbeiten an diesem Buch haben mich mehrere Kollegen unterstützt. Mit Herrn Wolfgang Gaschütz (Kiel) konnte ich im Verlaufe der letzten Jahre die Entwürfe zu allen Kapiteln eingehend durchsprechen. Nützliche Vorschläge und kritische Kommentare zu verschiedenen Teilen des Manuskriptes verdanke ich den Mainzer Kollegen Thomas Hanschke, Olaf Manz, Hans-Jürgen Schuh und Wolfgang Willems. Dem Verlag Walter de Gruyter danke ich für die Publikation dieses Buches und die vorzügliche Zusammenarbeit.

Nicht zuletzt geht mein Dank an meinen Lehrer Helmut Wielandt, dessen originelle Vorlesungen über Eigenwerte von Matrizen, welche ich vor 30 Jahren in Mainz hören konnte, mein Interesse an diesen Fragen angeregt haben.

Mainz, Februar 1990 Bertram Huppert

Inhalt

Kapitel I: Lineare Abbildungen 1

§ 1 Vektorräume und lineare Abbildungen 1
§ 2 Polynome 16
§ 3 Die Jordansche Normalform 22

Kapitel II: Endlichdimensionale Hilberträume 52

§ 1 Normierte Vektorräume 53
§ 2 Algebrennormen und Spektralradius 74
§ 3 Der Ergodensatz 91
§ 4 Endlichdimensionale Hilberträume 104
§ 5 Die adjungierte Abbildung 124
§ 6 Normale, hermitesche und unitäre Abbildungen 140
§ 7 Positive hermitesche Abbildungen 172
§ 8 Eigenwerte hermitescher und normaler Abbildungen 196
§ 9 Konvexe Mengen 210
§ 10 Der numerische Wertebereich 229
§ 11 Zwei Eigenwertabschätzungen 242
§ 12 Zum Helmholtzschen Raumproblem 248

Kapitel III: Lineare Differential- und Differenzengleichungen mit Anwendungen auf Schwingungsprobleme 261

§ 1 Beispiele von linearen Schwingungen 262
§ 2 Die Exponentialfunktion von Matrizen 269
§ 3 Systeme von linearen Differentialgleichungen 275
§ 4 Lineare Differenzengleichungen 283
§ 5 Lineare Schwingungen ohne Reibung 297
§ 6 Lineare Schwingungen mit Reibung 322

Kapitel IV: Nichtnegative Matrizen 350

§ 1 Die Sätze von Perron und Frobenius 351
§ 2 Das Austauschmodell von Leontieff 372
§ 3 Bevölkerungsentwicklung und Leslie-Matrizen 376
§ 4 Elementare Behandlung stochastischer Matrizen 382
§ 5 Irreduzible stochastische Matrizen 398
§ 6 Das Mischen von Spielkarten 422

§ 7 Lagerhaltung und Warteschlangen 430
§ 8 Prozesse mit absorbierenden Zuständen 442
§ 9 Mittlere Übergangszeiten 470

Kapitel V: Geometrische Algebra und spezielle Relativitätstheorie 489

§ 1 Skalarprodukte 490
§ 2 Orthosymmetrische Skalarprodukte 500
§ 3 Orthogonale Zerlegungen 507
§ 4 Isotrope Unterräume und hyperbolische Ebenen 513
§ 5 Spiegelungen und Transvektionen 528
§ 6 Der Satz von Witt 537
§ 7 Klassische Vektorräume über endlichen Körpern 549
§ 8 Normalformen von Isometrien 565
§ 9 Ähnlichkeiten 589
§ 10 Minkowski-Raum und Lorentz-Gruppe 597
§ 11 Der Isomorphismus $\mathfrak{S}^+ \cong \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\langle -E \rangle$ 615
§ 12 Spezielle Relativitätstheorie 625

Namenverzeichnis 641

Sachverzeichnis 643

Kapitel I
Lineare Abbildungen

Dieses Kapitel soll die Grundzüge der Linearen Algebra, welche wir als bekannt voraussetzen, zusammenstellen und an wenigen Stellen ergänzen.

§ 1 dient vor allem der Festlegung der Bezeichnungen. Lediglich der Faktorraum und die Beschreibung direkter Zerlegungen durch Projektionen mag für manchen Leser neu sein; wir werden von diesen Begriffen systematisch Gebrauch machen. In § 2 beschreiben wir die Teilbarkeitstheorie der Polynome in einer Variablen (ohne Beweise). In § 3 geben wir den Satz von der Jordanschen Normalform in der von uns verwendeten modultheoretischen Gestalt an (ohne Beweis) und beweisen im Anschluß daran einige Aussagen über Minimalpolynom, Diagonalisierbarkeit und Dreiecksgestalt von Matrizen. Mit dem Blick auf Vektorräume über dem reellen Zahlkörper $\mathbb{R}$ betrachten wir neben der Diagonalisierbarkeit auch die Halbeinfachheit linearer Abbildungen.

In Kapitel I werden grundsätzlich keine unnötigen Annahmen über den zugrundeliegenden Körper $\mathbf{K}$ gemacht; insbesondere kann seine Charakteristik in der Regel von 0 verschieden sein.

Wir haben dieses Kapitel mit einer Aufgabensammlung versehen, die hoffentlich für Lernende und Lehrende von Interesse ist. Die Aufgaben A 3.15 bis A 3.18 behandeln die Jordansche Normalform von Tensorprodukten linearer Abbildungen; dies ist die einzige Stelle, wo Kenntnisse aus der multilinearen Algebra benötigt werden.

Dem Leser sei geraten, Kapitel I zunächst nur zu überfliegen, um sich mit den von uns verwendeten Bezeichnungen vertraut zu machen. Bei Bedarf kann er die später benötigten Ergebnisse aus Kapitel I, soweit diese ihm nicht geläufig sind, dann nachlesen.

§ 1 Vektorräume und lineare Abbildungen

Wir stellen in diesem Paragraphen die wichtigsten Aussagen über Vektorräume und lineare Abbildungen zusammen (meist ohne Beweis) und legen dabei vor allem die weiterhin verwendeten Bezeichnungen fest.

1.1 Vektorräume und Unterräume

a) Die Körper $\mathbf{K}$, welche wir zu Grunde legen, seien zunächst ganz beliebig, also

nicht notwendig von der Charakteristik 0. Allerdings werden wir in den Kapitel II bis IV nur den reellen Zahlkörper $\mathbb{R}$ und den komplexen Zahlkörper $\mathbb{C}$ benötigen.

b) Alle betrachteten $\mathbf{K}$-Vektorräume seien von endlicher Dimension, sofern nicht ausdrücklich anders gesagt. (Die vorkommenden Begriffe behalten übrigens oft auch für Vektorräume von unendlicher Dimension Sinn.)

c) Ist $\mathfrak{V}$ ein $\mathbf{K}$-Vektorraum und $\mathfrak{U}$ ein Unterraum von $\mathfrak{V}$, so schreiben wir $\mathfrak{U} \leqslant \mathfrak{V}$; ist $\mathfrak{U} \leqslant \mathfrak{V}$ und $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{V}$, so schreiben wir $\mathfrak{U} < \mathfrak{V}$. (Ganz entsprechend verwenden wir auch für Mengen die Zeichen $\subseteq$ und $\subset$.)

d) Seien $\mathfrak{U}_j \leqslant \mathfrak{V}$ $(j = 1, 2)$. Dann sind $\mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2$ und

$$\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2 = \{ u_1 + u_2 \mid u_j \in \mathfrak{U}_j \}$$

Unterräume von $\mathfrak{V}$.

Sei $\mathfrak{B}_0 = \{ u_j \mid j = 1, \ldots, m \}$ eine Basis von $\mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2$. Bekanntlich läßt sich $\mathfrak{B}_0$ ergänzen zu Basen

$$\mathfrak{B}_1 = \{ u_j \mid j = 1, \ldots, n_1 \} \quad \text{von } \mathfrak{U}_1$$

und

$$\mathfrak{B}_2 = \{ u'_j \mid j = 1, \ldots, n_2,\ u_j = u'_j \ \text{ für } \ j = 1, \ldots, m \} \quad \text{von } \mathfrak{U}_2.$$

Dann ist

$$\mathfrak{B}_3 = \{ u_j \mid j = 1, \ldots, n_1 \} \cup \{ u'_j \mid j = m + 1, \ldots, n_2 \}$$

eine Basis von $\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2$. Insbesondere folgt die oft benutzte Formel

$$\dim(\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2) = n_1 + n_2 - m = \dim \mathfrak{U}_1 + \dim \mathfrak{U}_2 - \dim(\mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2).$$

(Für $\dim(\mathfrak{U}_1 + \cdots + \mathfrak{U}_m)$ mit $m \geqslant 3$ siehe Aufgabe A 1.6.)

e) Seien $\mathfrak{U}_j \leqslant \mathfrak{V}$ $(j = 1, 2, 3)$. Ist $\mathfrak{U}_1 \leqslant \mathfrak{U}_3$, so gilt die sogenannte Dedekind[1)]-Identität

$$(\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2) \cap \mathfrak{U}_3 = \mathfrak{U}_1 + (\mathfrak{U}_2 \cap \mathfrak{U}_3).$$

Ohne die Voraussetzung $\mathfrak{U}_1 \leqslant \mathfrak{U}_3$ ist diese Aussage jedoch i.a. falsch (siehe Aufgabe A 1.4).

f) Ist $\mathfrak{M}$ eine Untermenge von $\mathfrak{V}$, so bezeichnen wir mit $\langle \mathfrak{M} \rangle$ den kleinsten Unterraum von $\mathfrak{V}$, welcher $\mathfrak{M}$ enthält.

---

1) Richard Dedekind (1831–1916) Braunschweig; Idealtheorie, algebraische Zahlen und Funktionen, Zahlbegriff.

1.2 Der Faktorraum

Sei $\mathfrak{U} \leqslant \mathfrak{V}$.

a) Für $v \in \mathfrak{V}$ bilden wir die sogenannte Nebenklasse

$$v + \mathfrak{U} = \{ v + u \mid u \in \mathfrak{U} \}.$$

Diese Untermengen von $\mathfrak{V}$ fassen wir zusammen zu einer neuen Menge

$$\mathfrak{V}/\mathfrak{U} = \{ v + \mathfrak{U} \mid v \in \mathfrak{V} \}.$$

Dabei gilt $v_1 + \mathfrak{U} = v_2 + \mathfrak{U}$ genau dann, wenn $v_1 - v_2 \in \mathfrak{U}$. Wir machen $\mathfrak{V}/\mathfrak{U}$ zu einem $\mathbf{K}$-Vektorraum durch die offenbar wohldefinierten Festsetzungen

$$(v_1 + \mathfrak{U}) + (v_2 + \mathfrak{U}) = v_1 + v_2 + \mathfrak{U} = \{ w_1 + w_2 \mid w_j \in v_j + \mathfrak{U} \}$$

und

$$k(v + \mathfrak{U}) = kv + \mathfrak{U}$$

für $v_1, v_2, v \in \mathfrak{V}$ und $k \in \mathbf{K}$. Das Nullelement von $\mathfrak{V}/\mathfrak{U}$ ist die Nebenklasse $\mathfrak{U}$.

Wir nennen $\mathfrak{V}/\mathfrak{U}$ den Faktorraum von $\mathfrak{V}$ nach dem Unterraum $\mathfrak{U}$.

b) Ist $\{ u_j \mid j = 1, \ldots, m \}$ eine Basis von $\mathfrak{U}$ und $\{ u_j \mid j = 1, \ldots, n \}$ eine Ergänzung zu einer Basis von $\mathfrak{V}$, so ist

$$\{ u_j + \mathfrak{U} \mid j = m + 1, \ldots, n \}$$

eine Basis von $\mathfrak{V}/\mathfrak{U}$. Daher folgt

$$\dim \mathfrak{V}/\mathfrak{U} = \dim \mathfrak{V} - \dim \mathfrak{U}.$$

Ist umgekehrt $\{ u_j \mid j = 1, \ldots, m \}$ eine Basis von $\mathfrak{U}$ und $\{ v_j + \mathfrak{U} \mid j = 1, \ldots, k \}$ eine Basis von $\mathfrak{V}/\mathfrak{U}$, so ist $\{ u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_k \}$ eine Basis von $\mathfrak{V}$.

1.3 Lineare Abbildungen und Matrizen

a) Seien $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{V}_2$ $\mathbf{K}$-Vektorräume über demselbem Körper $\mathbf{K}$. Dann bezeichnen wir mit $\operatorname{Hom}(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2)$ die Menge aller linearen Abbildungen von $\mathfrak{V}_1$ in $\mathfrak{V}_2$. Ist $v_1 \in \mathfrak{V}_1$ und $A \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2)$, so schreiben wir Av_1 für das Bild von v_1 unter A. Setzen wir

$$\operatorname{Kern} A = \{ v_1 \mid v_1 \in \mathfrak{V}_1,\ Av_1 = 0 \}$$

und

$$\operatorname{Bild} A = \{ Av_1 \mid v_1 \in \mathfrak{V}_1 \} = A\mathfrak{V}_1,$$

so ist $\operatorname{Kern} A \leqslant \mathfrak{V}_1$ und $\operatorname{Bild} A \leqslant \mathfrak{V}_2$. Die Abbildung B mit

$$B(v_1 + \operatorname{Kern} A) = Av_1 \qquad (\text{für } v_1 \in \mathfrak{V}_1)$$

ist eine bijektive lineare Abbildung von $\mathfrak{V}_1/\mathrm{Kern}\,A$ auf $\mathrm{Bild}\,A$. Daraus folgt insbesondere

$$\dim \mathrm{Bild}\,A = \dim \mathfrak{V}_1/\mathrm{Kern}\,A = \dim \mathfrak{V}_1 - \dim \mathrm{Kern}\,A.$$

$\dim \mathrm{Bild}\,A$ wird auch als der Rang von A bezeichnet.
Ist $\mathrm{Kern}\,A = 0$, so nennen wir A einen Monomorphismus; ist $\mathrm{Bild}\,A = \mathfrak{V}_2$, so heißt A ein Epimorphismus; ist A Monomorphismus und Epimorphismus, so heißt A ein Isomorphismus von $\mathfrak{V}_1$ auf $\mathfrak{V}_2$.

b) Für $A, B \in \mathrm{Hom}\,(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2)$ definieren wir $A + B \in \mathrm{Hom}\,(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2)$ durch

$$(A + B)v_1 = Av_1 + Bv_1 \qquad (v_1 \in \mathfrak{V}_1).$$

Für $k \in \mathbf{K}$ setzen wir

$$(kA)v_1 = k(Av_1).$$

Dadurch wird $\mathrm{Hom}\,(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2)$ ein $\mathbf{K}$-Vektorraum. Ist $\{\, v_1, \ldots, v_{n_1} \,\}$ eine Basis von $\mathfrak{V}_1$ und $\{\, w_1, \ldots, w_{n_2} \,\}$ eine Basis von $\mathfrak{V}_2$, so bilden die $E_{ij} \in \mathrm{Hom}\,(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2)$ mit

$$E_{ij}v_k = \delta_{jk}w_i \qquad (i = 1, \ldots, n_2; \quad j, k = 1, \ldots, n_1)$$

eine Basis von $\mathrm{Hom}\,(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2)$. Also gilt

$$\dim \mathrm{Hom}\,(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2) = \dim \mathfrak{V}_1 \dim \mathfrak{V}_2.$$

c) Sei $\mathfrak{B}_1 = \{\, v_1, \ldots, v_n \,\}$ eine Basis von $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{B}_2 = \{\, w_1, \ldots, w_m \,\}$ eine Basis von $\mathfrak{V}_2$. Für $A \in \mathrm{Hom}\,(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2)$ gibt es dann eindeutig bestimmte $a_{ji} \in \mathbf{K}$ mit

$$Av_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}w_j \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Wir ordnen dann A bezüglich der Basen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ die Matrix

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

vom Typ (m, n) zu. (Natürlich sind dabei die Basen als Mengen mit vorgegebener Anordnung anzusehen!)

d) Sei $\mathfrak{V}_1 = \mathbf{K}^n$ der Vektorraum aller Spaltenvektoren

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (x_j \in \mathbf{K})$$

der Länge n und $A = (a_{ji})$ eine Matrix vom Typ (m, n) mit $a_{ji} \in \mathbf{K}$. Durch die Matrixmultiplikation von links her wird dann vermöge

$$A_0 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi} x_i \end{pmatrix}$$

eine lineare Abbildung A_0 von $\mathfrak{V}_1 = \mathbf{K}^n$ in $\mathfrak{V}_2 = \mathbf{K}^m$ bewirkt.
Sei $\mathfrak{B}_1 = \{ e_j \mid j = 1, \ldots, n \}$ die sogenannte kanonische Basis von $\mathfrak{V}_1$ mit

$$e_j = (\delta_{ji}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1 \text{ an der Stelle } j)$$

und entsprechend $\mathfrak{B}_2 = \{ e'_k \mid k = 1, \ldots, m \}$ die kanonische Basis von $\mathfrak{V}_2$. Dann ist

$$A_0 e_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} e'_k.$$

Somit ist der linearen Abbildung A_0 bezüglich der Basen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ die Ausgangsmatrix A zugeordnet.

e) Seien $\mathfrak{V}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ $\mathbf{K}$-Vektorräume mit Basen

$$\mathfrak{B}_j = \{ v_{jk} \mid k = 1, \ldots, n_j \}.$$

Seien $B \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2)$ und $A \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}_2, \mathfrak{V}_3)$ mit

$$B v_{1j} = \sum_{k=1}^{n_2} b_{kj} v_{2k} \qquad (j = 1, \ldots, n_1)$$

und

$$A v_{2k} = \sum_{l=1}^{n_3} a_{lk} v_{3l} \qquad (k = 1, \ldots, n_2).$$

Wir definieren die lineare Abbildung AB aus $\mathrm{Hom}(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_3)$ durch

$$(AB)v = A(Bv) \qquad \text{für } v \in \mathfrak{V}_1.$$

Dann folgt

$$ABv_{1j} = \sum_{l=1}^{n_3} c_{lj} v_{3l} \qquad \text{mit} \qquad c_{lj} = \sum_{k=1}^{n_2} a_{lk} b_{kj}.$$

Der Abbildung AB ist also bezüglich der Basen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_3$ das Matrizenprodukt $(c_{lj}) = (a_{lk})(b_{kj})$ zugeordnet.

f) Die $\mathbf{K}$-Algebra aller Matrizen vom Typ (n, n) über $\mathbf{K}$ bezeichnen wir mit $(\mathbf{K})_n$. Offenbar sind algebraische Aussagen über $(\mathbf{K})_n$ und $\operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ mit $\dim \mathfrak{V} = n$ weitgehend gleichwertig. In der Regel formulieren wir nur eine der beiden möglichen Gestalten eines Satzes über Matrizen bzw. lineare Abbildungen.

Mit E bezeichnen wir das Einselement von $\operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$, ebenfalls mit E oder E_n die Einheitsmatrix aus $(\mathbf{K})_n$.

1.4 Direkte Zerlegungen und Projektionen

a) Seien $\mathfrak{U}_j \leqslant \mathfrak{V} \quad (j = 1, \ldots, m)$. Hat jedes $v \in \mathfrak{V}$ genau eine Zerlegung

$$v = \sum_{j=1}^{m} u_j \qquad \text{mit} \qquad u_j \in \mathfrak{U}_j,$$

so nennen wir $\mathfrak{V}$ die direkte Summe der $\mathfrak{U}_j$ und schreiben

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{U}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{U}_m = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathfrak{U}_j.$$

Dies ist gleichwertig mit jeder der folgenden beiden Eigenschaften:

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{U}_1 + \cdots + \mathfrak{U}_m \tag{1}$$

und

$$\Big(\sum_{j=1}^{k} \mathfrak{U}_j\Big) \cap \mathfrak{U}_{k+1} = 0 \qquad \text{für} \qquad 1 \leqslant k \leqslant m-1.$$

(Die Bedingung $\mathfrak{U}_j \cap \mathfrak{U}_k = 0$ für $j \neq k$ reicht nicht!)

$$\mathfrak{V} = \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{U}_j \qquad \text{und} \qquad \dim \mathfrak{V} = \sum_{j=1}^{m} \dim \mathfrak{U}_j. \tag{2}$$

Die Gleichung $\mathfrak{V} = \mathfrak{U}_1 \oplus \mathfrak{U}_2$ besagt also $\mathfrak{V} = \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2$ und $\mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2 = 0$. In diesem Falle nennen wir $\mathfrak{U}_2$ ein Komplement von $\mathfrak{U}_1$ in $\mathfrak{V}$. (Dies ist wohl zu unterscheiden von der rein mengentheoretischen Komplementärmenge von $\mathfrak{U}_1$ in $\mathfrak{V}$.) Bekanntlich besitzt jeder Unterraum Komplemente. (Siehe Aufgaben A 1.2 und A 1.3.)

b) Ist $\mathfrak{V} = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathfrak{U}_j$, so gibt es $P_j \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ mit

$$P_j(\sum_{k=1}^{m} u_k) = u_j \qquad \text{für} \qquad u_k \in \mathfrak{U}_k.$$

Dann gilt $P_j^2 = P_j$, $P_j P_k = 0$ für $j \neq k$ und $E = \sum_{j=1}^{m} P_j$.

Sind umgekehrt $P_j \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ vorgegeben mit $P_j^2 = P_j$, $P_j P_k = 0$ für $j \neq k$ und $E = \sum_{j=1}^{m} P_j$, so folgt

$$\mathfrak{V} = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathrm{Bild}\, P_j.$$

Abbildungen P aus $\mathrm{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ mit $P^2 = P$ nennen wir Projektionen. Sie sind offenbar eindeutig festgelegt durch Vorgabe von $\mathrm{Kern}\, P$ und $\mathrm{Bild}\, P$, und es gilt

$$\mathfrak{V} = \mathrm{Kern}\, P \oplus \mathrm{Bild}\, P.$$

Ist P eine Projektion, so ist auch $E - P$ eine Projektion mit

$$\mathrm{Bild}\,(E - P) = \mathrm{Kern}\, P \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Kern}\,(E - P) = \mathrm{Bild}\, P.$$

c) Seien $\mathfrak{V}_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ irgendwelche $\mathbf{K}$-Vektorräume. Dann wird die Produktmenge

$$\mathfrak{V} = \{\, (v_1, \ldots, v_m) \mid v_j \in \mathfrak{V}_j \,\}$$

ein $\mathbf{K}$-Vektorraum durch komponentenweise Ausführung der Operationen. Setzen wir

$$\mathfrak{U}_j = \{\, (0, \ldots, 0, v_j, 0, \ldots, 0) \mid v_j \in \mathfrak{V}_j \,\},$$

so ist $\mathfrak{U}_j$ ein zu $\mathfrak{V}_j$ isomorpher Unterraum von $\mathfrak{V}$, und es gilt $\mathfrak{V} = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathfrak{U}_j$.

Wir schreiben auch in diesem Falle $\mathfrak{V} = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathfrak{V}_j$, unterscheiden diese "äußere" direkte Summe der $\mathfrak{V}_j$ in der Bezeichnung also nicht von der in a) definierten "inneren" direkten Summe.

1.5 Invariante Unterräume

Sei $A \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ und $\mathfrak{U} \leqslant \mathfrak{V}$ mit $Au \in \mathfrak{U}$ für alle $u \in \mathfrak{U}$. Wir nennen dann $\mathfrak{U}$ einen A-invarianten Unterraum von $\mathfrak{V}$. Bezeichnen wir mit $A_{\mathfrak{U}}$ die Einschränkung von A auf $\mathfrak{U}$, so gilt offenbar $A_{\mathfrak{U}} \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{U}, \mathfrak{U})$.

a) Wir definieren $A_{\mathfrak{V}/\mathfrak{U}}$ auf $\mathfrak{V}/\mathfrak{U}$ durch

$$A_{\mathfrak{V}/\mathfrak{U}}(v+\mathfrak{U}) = Av + \mathfrak{U} \qquad (\text{für } v \in \mathfrak{V}).$$

Man bestätigt leicht, daß $A_{\mathfrak{V}/\mathfrak{U}}$ wohldefiniert ist und in $\operatorname{Hom}(\mathfrak{V}/\mathfrak{U}, \mathfrak{V}/\mathfrak{U})$ liegt.

b) Sei $\mathfrak{B}_1 = \{ v_1, \ldots, v_m \}$ eine Basis von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}_2 = \{ v_1, \ldots, v_n \}$ eine diese ergänzende Basis von $\mathfrak{V}$. Dann ist nach 1.2 b) $\mathfrak{B}_3 = \{ v_j + \mathfrak{U} \mid j = m+1, \ldots, n \}$ eine Basis von $\mathfrak{V}/\mathfrak{U}$. Sei

$$Av_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} v_j.$$

Wegen $A\mathfrak{U} \leqslant \mathfrak{U}$ gilt dabei

$$A_{\mathfrak{U}} v_i = Av_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} v_j \qquad \text{für } 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Für $m+1 \leqslant i \leqslant n$ ist

$$A_{\mathfrak{V}/\mathfrak{U}}(v_i + \mathfrak{U}) = Av_i + \mathfrak{U} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} v_j + \mathfrak{U} = \sum_{j=m+1}^{n} a_{ji}(v_j + \mathfrak{U}).$$

Also ist

$$(a_{ji}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & & & \\ \vdots & & \vdots & & * & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & & & \\ & & & a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ & 0 & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{n,m+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dabei ist

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

die Matrix von $A_{\mathfrak{U}}$ zur Basis $\mathfrak{B}_1$ von $\mathfrak{U}$ und

$$\begin{pmatrix} a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,m+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

die Matrix von $A_{\mathfrak{V}/\mathfrak{U}}$ zur Basis $\mathfrak{B}_3$ von $\mathfrak{V}/\mathfrak{U}$.

c) Aus b) folgen nützliche Aussagen: Nach einem bekannten Satz über Determi-

nanten ("Kästchensatz") ist

$$\begin{aligned}\det A &= \det(a_{ji})_{i,j=1,\dots,n}\\ &= \det(a_{ji})_{i,j=1,\dots,m}\det(a_{ji})_{i,j=m+1,\dots,n}\\ &= \det A_{\mathfrak{U}}\det A_{\mathfrak{V}/\mathfrak{U}}.\end{aligned}$$

d) Ist $A = (a_{ji}) \in (\mathbf{K})_n$, so definieren wir das charakteristische Polynom f_A von A durch

$$f_A = \det(xE - A) = \det(x\delta_{ji} - a_{ji}).$$

(Dabei sind Determinanten mit Einträgen aus dem Polynomring $\mathbf{K}[x]$ zu bilden.)

Die Nullstellen von f_A sind die Eigenwerte von A.

Ist $\mathfrak{V}$ ein $\mathbf{K}$-Vektorraum, $\mathfrak{B} = \{ v_1, \dots, v_n \}$ eine Basis von $\mathfrak{V}$ und $A \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ mit

$$Av_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}v_j \qquad (i = 1, \dots, n),$$

so setzen wir $f_A = \det(x\delta_{ji} - a_{ji})$. Bekanntlich hängt f_A nicht von der Basis $\mathfrak{B}$ ab. Dabei gilt

$$f_A = x^n - \operatorname{Spur} Ax^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A,$$

wobei also

$$\operatorname{Spur} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

ebenfalls nicht von $\mathfrak{B}$ abhängt.

Ist $\mathfrak{U}$ ein A-invarianter Unterraum von $\mathfrak{V}$, so folgt aus c) unmittelbar die nützliche Gleichung

$$f_A = f_{A_{\mathfrak{U}}} f_{A_{\mathfrak{V}/\mathfrak{U}}}.$$

Sie enthält die Aussagen

$$\operatorname{Spur} A = \operatorname{Spur} A_{\mathfrak{U}} + \operatorname{Spur} A_{\mathfrak{V}/\mathfrak{U}}$$

und

$$\det A = \det A_{\mathfrak{U}} \det A_{\mathfrak{V}/\mathfrak{U}}.$$

1.6 Bemerkungen

a) Solange man nur Unterräume betrachtet, kann man die Verwendung des Faktorraumes meist vermeiden und mit Komplementen operieren. Diese sind freilich nicht eindeutig bestimmt (siehe A 1.2). Ist $A \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ und ist $\mathfrak{U}$ ein

A-invarianter Unterraum von $\mathfrak{V}$, so sind $A_{\mathfrak{U}}$ und $A_{\mathfrak{V}/\mathfrak{U}}$ definiert, aber i.a. gibt es kein A-invariantes Komplement von $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{V}$:

Sei zum Beispiel $\{ v_1, v_2 \}$ eine Basis von $\mathfrak{V}$ und $A \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ mit

$$Av_1 = 0, \qquad Av_2 = v_1.$$

Setzen wir $\mathfrak{U} = \langle v_1 \rangle$, so ist $A\mathfrak{U} \leqslant \mathfrak{U}$. Aber es gibt kein Komplement $\mathfrak{W}$ von $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{V}$ mit $A\mathfrak{W} \leqslant \mathfrak{W}$:

Wegen $\dim \mathfrak{W} = 1$ wäre nämlich $\mathfrak{W} = \langle av_1 + v_2 \rangle$ mit geeignetem $a \in \mathbf{K}$. Dann ist jedoch

$$A(av_1 + v_2) = v_1 \notin \mathfrak{W}.$$

b) Sei $\mathfrak{V} = \mathfrak{U}_1 \oplus \mathfrak{U}_2$ und sei P die Projektion aus $\operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ mit $\operatorname{Bild} P = \mathfrak{U}_1$ und $\operatorname{Kern} P = \mathfrak{U}_2$. Ferner sei $A \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$. Dann ist $A\mathfrak{U}_j \leqslant \mathfrak{U}_j$ $(j = 1, 2)$ gleichwertig mit $PA = AP$.

Wir beweisen noch eine nützliche Tatsache:

1.7 Satz. *Sei A eine Matrix vom Typ (n, m) und B eine Matrix vom Typ (m, n) über $\mathbf{K}$. Ist $n \geqslant m$, so gilt*

$$f_{AB} = x^{n-m} f_{BA}.$$

Ist insbesondere $n = m$, so haben AB und BA dasselbe charakteristische Polynom und somit auch dieselben Eigenwerte, einschließlich der Vielfachheiten.

Beweis. Seien E_m und E_n die Einheitsmatrizen der Typen (m, m) und (n, n). Wir betrachten im Ring der Matrizen vom Typ $(m+n, m+n)$ über $\mathbf{K}[x]$ die Gleichungen

$$\begin{pmatrix} xE_n & A \\ xB & xE_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -B & E_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xE_n - AB & A \\ 0 & xE_m \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -B & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xE_n & A \\ xB & xE_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xE_n & A \\ 0 & xE_m - BA \end{pmatrix}.$$

(Dabei verwenden wir die wohlbekannte Tatsache, daß man mit solchen Zerlegungen der Matrizen in Teilmatrizen formal rechnen darf.)

Hier seien E_m und E_n die Einheitsmatrizen der Typen (m, m) und (n, n). Da die Determinante nicht von der Reihenfolge der Faktoren abhängt, folgt

$$\det \begin{pmatrix} xE_n - AB & A \\ 0 & xE_m \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} xE_n & A \\ 0 & xE_m - BA \end{pmatrix}.$$

Der Kästchensatz liefert dann $f_{AB} x^m = x^n f_{BA}$, und dies ist die Behauptung. $\square$

Aufgaben

A 1.1 Sei $\mathfrak{V}$ ein $\mathbf{K}$-Vektorraum, nicht notwendig von endlicher Dimension.

a) Seien $\mathfrak{U}_j < \mathfrak{V}$ $(j = 1, 2)$. Ist $\mathfrak{U}_1 \cup \mathfrak{U}_2$ ein Unterraum von $\mathfrak{V}$, so gilt $\mathfrak{U}_1 \leqslant \mathfrak{U}_2$ oder $\mathfrak{U}_2 \leqslant \mathfrak{U}_1$.

b) Ist $\mathfrak{U}_j < \mathfrak{V}$ $(j = 1, 2)$, so gilt $\mathfrak{U}_1 \cup \mathfrak{U}_2 \subset \mathfrak{V}$.

c) Seien $\mathfrak{U}_j < \mathfrak{V}$ $(j = 1, \ldots, m)$. Hat $\mathbf{K}$ mindestens m Elemente, so gilt $\mathfrak{U}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{U}_m \subset \mathfrak{V}$. Ist insbesondere $\mathbf{K}$ unendlich, so ist $\mathfrak{V}$ nicht Vereinigung von endlich vielen echten Unterräumen.
(Anleitung zu c): Sei $\mathfrak{V} = \bigcup_{j=1}^{m} \mathfrak{U}_j$. Man kann $\bigcup_{j=1, j\neq k}^{m} \mathfrak{U}_j \subset \mathfrak{V}$ für alle k annehmen. Man wähle $v_1 \notin \bigcup_{j=2}^{m} \mathfrak{U}_j$, also $v_1 \in \mathfrak{U}_1$ und $v_2 \notin \bigcup_{j=1, j\neq 2}^{m} \mathfrak{U}_j$, also $v_2 \in \mathfrak{U}_2$. Dann wende man auf die Vektoren

$$v(t) = tv_1 + v_2 \ (\text{ mit } t \in \mathbf{K})$$

einen Schubfachschluß an.)

A 1.2 Sei $\mathfrak{V} = \mathfrak{U} \oplus \mathfrak{W}$.

a) Die sämtlichen Komplemente von $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{V}$ sind die Unterräume

$$\mathfrak{W}' = \{ Aw + w \mid w \in \mathfrak{W} \}$$

mit einem $A \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{W}, \mathfrak{U})$.

b) Sei $0 < \mathfrak{U} < \mathfrak{V}$. Dann hat $\mathfrak{U}$ mehr als ein Komplement in $\mathfrak{V}$, falls der Körper $\mathbf{K}$ unendlich ist sogar unendlich viele.

c) Sei $|\mathbf{K}| = q < \infty$, $\dim \mathfrak{U} = n_1$ und $\dim \mathfrak{W} = n_2$. Dann hat $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{V}$ genau $q^{n_1 n_2}$ Komplemente.

A 1.3 Seien $\mathfrak{U}_j < \mathfrak{V}$ und $\dim \mathfrak{V}/\mathfrak{U}_j = k$ für $j = 1, \ldots, m$. Hat der zugrundeliegende Körper $\mathbf{K}$ mindestens m Elemente, so gibt es ein gemeinsames Komplement $\mathfrak{W}$ für alle $\mathfrak{U}_j$ $(j = 1, \ldots, m)$, also ein $\mathfrak{W} \leqslant \mathfrak{V}$ mit $\mathfrak{V} = \mathfrak{U}_j \oplus \mathfrak{W}$ für $j = 1, \ldots, m$. (Man wähle ein $v \in \mathfrak{V}$ mit $v \notin \bigcup_{j=1}^{m} \mathfrak{U}_j$ und betrachte die Unterräume $\mathfrak{U}_j \oplus \langle v \rangle$.)

A 1.4 Sei $\mathfrak{V} = \mathbf{K}^2$. Man finde $\mathfrak{U}_j < \mathfrak{V}$ für $j = 1, 2, 3$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $(\mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_3) + (\mathfrak{U}_2 \cap \mathfrak{U}_3) < (\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2) \cap \mathfrak{U}_3$.

b) $\mathfrak{U}_i \cap \mathfrak{U}_j = 0$ für $i \neq j$, aber $\mathfrak{V} \neq \mathfrak{U}_1 \oplus \mathfrak{U}_2 \oplus \mathfrak{U}_3$.

A 1.5 Seien $\mathfrak{U}_j \leqslant \mathfrak{V}$ für $j = 1, \ldots, m$. Dann gilt

$$\dim \mathfrak{V}/\bigcap_{j=1}^{m} \mathfrak{U}_j \leqslant \sum_{j=1}^{m} \dim \mathfrak{V}/\mathfrak{U}_j.$$

(Man finde eine lineare Abbildung A von $\mathfrak{V}$ in $\bigoplus_{j=1}^{m} \mathfrak{V}/\mathfrak{U}_j$ mit Kern $A = \bigcap_{j=1}^{m} \mathfrak{U}_j$.)

A 1.6 a) Für $\mathfrak{U}_j \leqslant \mathfrak{V}$ $(j = 1, 2, 3)$ beweise man

$$\dim(\mathfrak{U}_1+\mathfrak{U}_2+\mathfrak{U}_3) \leqslant \sum_{j=1}^{3} \dim \mathfrak{U}_j - \sum_{j,k=1,j<k}^{3} \dim(\mathfrak{U}_j \cap \mathfrak{U}_k) + \dim(\mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2 \cap \mathfrak{U}_3).$$

b) Man gebe ein Beispiel an mit

$$\dim(\mathfrak{U}_1+\mathfrak{U}_2+\mathfrak{U}_3) < \sum_{j=1}^{3} \dim \mathfrak{U}_j - \sum_{j,k=1,j<k}^{3} \dim(\mathfrak{U}_j \cap \mathfrak{U}_k) + \dim(\mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2 \cap \mathfrak{U}_3).$$

c) In $\mathfrak{V} = \mathbf{K}^3$ finde man Unterräume $\mathfrak{U}_j$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ mit $\mathfrak{V} = \mathfrak{U}_1+\mathfrak{U}_2+\mathfrak{U}_3+\mathfrak{U}_4$, $\dim \mathfrak{U}_j = 2$, $\dim(\mathfrak{U}_j \cap \mathfrak{U}_k) = 1$ für $j \neq k$ und $\dim(\mathfrak{U}_j \cap \mathfrak{U}_k \cap \mathfrak{U}_l) = 0$ für jedes Tripel $j \neq k \neq l \neq j$. Dann ist

$$\dim(\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2 + \mathfrak{U}_3 + \mathfrak{U}_4) > \sum_{j=1}^{4} \dim \mathfrak{U}_j - \sum_{j,k=1,j<k}^{4} \dim(\mathfrak{U}_j \cap \mathfrak{U}_k).$$

A 1.7 Ist $\mathbf{K}$ ein Unterkörper des Körpers $\mathbf{L}$, so können wir jeden $\mathbf{L}$-Vektorraum (insbesondere $\mathbf{L}$ selbst) in natürlicher Weise als $\mathbf{K}$-Vektorraum ansehen.
Ist $\dim_{\mathbf{K}} \mathbf{L} < \infty$, so beweise man für jeden $\mathbf{L}$-Vektorraum $\mathfrak{V}$ von endlicher Dimension

$$\dim_{\mathbf{K}} \mathfrak{V} = \dim_{\mathbf{K}} \mathbf{L} \dim_{\mathbf{L}} \mathfrak{V}.$$

A 1.8 Seien $P, Q \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ mit $P^2 = P$, $Q^2 = Q$ und $PQ = QP$.

a) PQ ist die Projektion mit

$$\operatorname{Bild} PQ = \operatorname{Bild} P \cap \operatorname{Bild} Q,$$
$$\operatorname{Kern} PQ = \operatorname{Kern} P + \operatorname{Kern} Q.$$

b) $R = P + Q - PQ$ ist die Projektion mit

$$\operatorname{Bild} R = \operatorname{Bild} P + \operatorname{Bild} Q,$$
$$\operatorname{Kern} R = \operatorname{Kern} P \cap \operatorname{Kern} Q.$$

A 1.9 Sei $\operatorname{Char} \mathbf{K} \neq 2$ und seien P und Q Projektionen aus $\operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$. Dann sind gleichwertig:

a) $P + Q$ ist eine Projektion.

b) $PQ + QP = 0$.

c) $PQ = QP = 0$.

d) $\operatorname{Bild} Q \leqslant \operatorname{Kern} P$ und $\operatorname{Bild} P \leqslant \operatorname{Kern} Q$.

A 1.10 Seien P und Q Projektionen aus $\operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$.

a) Genau dann gilt $\operatorname{Bild} P = \operatorname{Bild} Q$, wenn $PQ = Q$ und $QP = P$.

b) Genau dann gilt $\operatorname{Kern} P = \operatorname{Kern} Q$, wenn $PQ = P$ und $QP = Q$.

A 1.11 a) Sei $\dim \mathfrak{V} = 2$ und seien P und Q Projektionen aus $\operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ derart, daß PQ eine Projektion ist mit $PQ \neq 0$. Dann gilt $PQ = P$ oder $PQ = Q$. (Man führe eine Basis ein, bezüglich der die Q zugeordnete Matrix einfache Gestalt annimmt.)

b) Sei $\dim \mathfrak{V} = 3$. Dann gibt es Projektionen P und Q in $\operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ derart, daß PQ eine Projektion ist, aber PQ von $0, P, Q, QP$ verschieden ist.

A 1.12 Sei $\mathfrak{U} \leqslant \mathfrak{V}$ und $P \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$.

a) Ist $P_{\mathfrak{U}} = E_{\mathfrak{U}}$ und $P_{\mathfrak{V}/\mathfrak{U}} = 0$, so ist P eine Projektion mit $\operatorname{Bild} P = \mathfrak{U}$.

b) Ist $P_{\mathfrak{U}} = 0$ und $P_{\mathfrak{V}/\mathfrak{U}} = E_{\mathfrak{V}/\mathfrak{U}}$, so ist P eine Projektion mit $\operatorname{Kern} P = \mathfrak{U}$.

A 1.13 Sei $\mathfrak{G}$ eine endliche Gruppe von linearen Abbildungen aus $\operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ und sei $\operatorname{Char} \mathbf{K} \nmid |\mathfrak{G}|$. Sei $\mathfrak{U} \leqslant \mathfrak{V}$ mit $G\mathfrak{U} = \mathfrak{U}$ für alle $G \in \mathfrak{G}$. Sei P irgendeine Projektion aus $\operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ mit $\operatorname{Bild} P = \mathfrak{U}$. Wir definieren $Q \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ durch

$$Q = \frac{1}{|\mathfrak{G}|} \sum_{G \in \mathfrak{G}} G^{-1} P G.$$

a) Mit Hilfe von A 1.12a) zeige man, daß Q eine Projektion ist mit $\operatorname{Bild} Q = \mathfrak{U}$.

b) Für alle $G \in \mathfrak{G}$ gilt $QG = GQ$. Daher folgt $\mathfrak{V} = \mathfrak{U} \oplus \operatorname{Kern} Q$ mit $G \operatorname{Kern} Q = \operatorname{Kern} Q$ für alle $G \in \mathfrak{G}$. (Dies ist der Satz von Maschke[2].)

---

2) Heinrich Maschke (1853–1908) Chicago; Gruppen von linearen Abbildungen.

A 1.14 Sei $\mathfrak{V}$ ein Vektorraum von beliebiger Dimension, $\mathfrak{U} \leqslant \mathfrak{V}$ und $A \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ mit $A\mathfrak{U} \leqslant \mathfrak{U}$.

a) Ist A ein Monomorphismus, so ist auch $A_{\mathfrak{U}}$ ein Monomorphismus.

b) Ist A ein Epimorphismus, so ist $A_{\mathfrak{V}/\mathfrak{U}}$ ein Epimorphismus.

c) Sind $A_{\mathfrak{U}}$ und $A_{\mathfrak{V}/\mathfrak{U}}$ Monomorphismen, so auch A.

d) Sind $A_{\mathfrak{U}}$ und $A_{\mathfrak{V}/\mathfrak{U}}$ Epimorphismen, so auch A.

e) Für $\dim \mathfrak{V} = \infty$ gebe man Beispiele an mit folgenden Eigenschaften:
(1) A ist Isomorphismus, aber $A_{\mathfrak{U}}$ ist nicht Epimorphismus.
(2) A ist Isomorphismus, aber $A_{\mathfrak{V}/\mathfrak{U}}$ ist nicht Monomorphismus.

A 1.15 Sei $A \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$. Dann sind gleichwertig:

a) $\mathfrak{V} = \operatorname{Kern} A \oplus \operatorname{Bild} A$.

b) $\operatorname{Kern} A \cap \operatorname{Bild} A = 0$.

c) $\operatorname{Kern} A = \operatorname{Kern} A^2$.

d) $A_{\mathfrak{V}/\operatorname{Kern} A}$ ist ein Monomorphismus.

A 1.16 Sei $\mathfrak{U} < \mathfrak{V}$ mit $\dim \mathfrak{U} = m$ und $\dim \mathfrak{V} = n$. Sei $A \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ mit $A_{\mathfrak{U}} = E_{\mathfrak{U}}$ und $A_{\mathfrak{V}/\mathfrak{U}} = E_{\mathfrak{V}/\mathfrak{U}}$. Dann gibt es ein $\mathfrak{W} < \mathfrak{V}$ mit $\dim \mathfrak{W} = n - m$ und $A_{\mathfrak{W}} = E_{\mathfrak{W}}$, $A_{\mathfrak{V}/\mathfrak{W}} = E_{\mathfrak{V}/\mathfrak{W}}$. (Man beachte $\operatorname{Bild}(A - E) \leqslant \mathfrak{U} \leqslant \operatorname{Kern}(A - E)$. Wo hat man $\mathfrak{W}$ zu suchen?)

A 1.17 (Fitting[3]) Sei $A \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$. Wegen $\dim \mathfrak{V} < \infty$ gibt es eine natürliche Zahl m mit

$$\operatorname{Bild} A > \operatorname{Bild} A^2 > \ldots > \operatorname{Bild} A^m = \operatorname{Bild} A^{m+1}.$$

Man zeige:

a) $\operatorname{Bild} A^j = \operatorname{Bild} A^m$ für alle $j \geqslant m$.

b) $\operatorname{Kern} A < \operatorname{Kern} A^2 < \ldots < \operatorname{Kern} A^m = \operatorname{Kern} A^j$ für alle $j \geqslant m$.

c) $\mathfrak{V} = \operatorname{Kern} A^m \oplus \operatorname{Bild} A^m$.

A 1.18 a) Für $A, B \in (\mathbf{K})_n$ gilt stets $\operatorname{Spur} AB = \operatorname{Spur} BA$.

b) Sei f eine lineare Abbildung des $\mathbf{K}$-Vektorraumes $(\mathbf{K})_n$ in $\mathbf{K}$ mit $f(AB) = f(BA)$ für alle $A, B \in (\mathbf{K})_n$. Dann gibt es ein $c \in \mathbf{K}$ mit $f(A) = c \operatorname{Spur} A$ für alle $A \in (\mathbf{K})_n$.

---

3) Hans Fitting (1906–1938) Königsberg; Gruppen, Ringe, Moduln.

(Man verwende eine geeignete Basis von $(\mathbf{K})_n$.)

A 1.19 Sei f eine lineare Abbildung von $(\mathbf{K})_n$ in $\mathbf{K}$.

a) Dann gibt es genau ein $A \in (\mathbf{K})_n$ mit $f(X) = \operatorname{Spur} XA$ für alle $X \in (\mathbf{K})_n$.

b) Sei X' die zu X gespiegelte (transponierte) Matrix. Genau dann gilt $f(X) = f(X')$ für alle $X \in (\mathbf{K})_n$, wenn $A' = A$.

A 1.20 Eine $\mathbf{K}$-lineare, bijektive Abbildung α von $\operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ auf sich heißt ein Automorphismus, falls $\alpha(AB) = \alpha(A)\alpha(B)$ für alle $A, B \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$. Man beweise, daß jedes solche α die Gestalt $\alpha(X) = C^{-1}XC$ mit einer regulären Abbildung C aus $\operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ hat. Dazu gehe man folgendermaßen vor: Sei $\{ v_1, \ldots, v_n \}$ eine Basis von $\mathfrak{V}$ und sei $\{ E_{ij} \mid i, j = 1, \ldots, n \}$ die Basis von $\operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ mit $E_{ij}v_k = \delta_{jk}v_i$. Wir setzen $F_{ij} = \alpha(E_{ij})$.

a) Ist $F_{11}v \neq 0$, so bilden die $w_i = F_{i1}v$ $(i = 1, \ldots, n)$ eine Basis von $\mathfrak{V}$.

b) Es gilt $F_{ij}w_k = \delta_{jk}w_i$.

c) Definieren wir die reguläre lineare Abbildung C aus $\operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ durch $Cv_j = w_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, so gilt $F_{ij} = C^{-1}E_{ij}C$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$.

A 1.21 Eine $\mathbf{K}$-lineare, bijektive Abbildung β des Matrixringes $(\mathbf{K})_n$ auf sich heißt ein Antiautomorphismus, falls $\beta(AB) = \beta(B)\beta(A)$ für alle $A, B \in (\mathbf{K})_n$.

a) Jeder Antiautomorphismus β von $(\mathbf{K})_n$ hat die Gestalt $\beta(X) = C^{-1}X'C$ mit regulärem C aus $(\mathbf{K})_n$, wobei X' die zu X gespiegelte (transponierte) Matrix ist.

b) Genau dann ist β^2 die Identität, wenn $C' = \pm C$ gilt. Der Fall $C' = -C$ ist dabei nur möglich, falls n gerade ist.

c) Sei $\beta(X) = C^{-1}X'C$ mit $C' = \pm C$. Setzen wir

$$\mathfrak{F} = \{ X \mid X \in (\mathbf{K})_n, \quad \beta(X) = X \},$$

so gilt

$$\dim \mathfrak{F} = \begin{cases} \frac{n(n+1)}{2} & \text{falls } C' = C \\ \frac{n(n-1)}{2} & \text{falls } C' = -C. \end{cases}$$

§ 2 Polynome

Die algebraischen Grundtatsachen über das Rechnen mit Polynomen setzen wir als bekannt voraus und stellen sie in diesem Paragraphen in der von uns verwendeten Form zusammen. Die Beweise findet man etwa in *H. Lüneburg*, Einführung in die Algebra (Springer 1973).

2.1 Der Polynomring

Der Polynomring $\mathbf{K}[x]$ ist eine $\mathbf{K}$-Algebra mit der Basis $\{1, x, x^2, \dots\}$. Die Elemente aus $\mathbf{K}[x]$ sind daher von der Form

$$f = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \qquad \text{mit } a_j \in \mathbf{K}.$$

Ist $a_n \neq 0$, so setzen wir $\operatorname{Grad} f = n$. Die Festsetzung $\operatorname{Grad} 0 = -\infty$ ist zweckmäßig, dann gilt nämlich für alle $f, g \in \mathbf{K}[x]$

$$\operatorname{Grad} fg = \operatorname{Grad} f + \operatorname{Grad} g.$$

Ist $a_n = 1$ oder $f = 0$, so nennen wir das Polynom f normiert.

2.2 Teilbarkeit in $\mathbf{K}[x]$

a) Unter einem Ideal in einem kommutativen Ring $\mathfrak{R}$ versteht man eine nichtleere Teilmenge $\mathfrak{i}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Für $a_1, a_2 \in \mathfrak{i}$ gilt $a_1 + a_2 \in \mathfrak{i}$.

(2) Für $a \in \mathfrak{i}$, $r \in \mathfrak{R}$ gilt $ra \in \mathfrak{i}$.

(Da wir stets voraussetzen, daß $\mathfrak{R}$ ein Einselement 1 enthält, folgt für $a \in \mathfrak{i}$ insbesondere $-a = (-1)a \in \mathfrak{i}$.)

Die Division mit Rest in $\mathbf{K}[x]$ hat zur Folge, daß jedes Ideal in $\mathbf{K}[x]$ die Gestalt

$$f\mathbf{K}[x] = \{ fg \mid g \in \mathbf{K}[x] \}$$

hat, also $\mathbf{K}[x]$ ein Hauptidealring ist. Fordern wir, daß f normiert ist, so ist f durch $f\mathbf{K}[x]$ eindeutig festgelegt.

b) Ist $f_1, f_2 \in \mathbf{K}[x]$ mit $f_1\mathbf{K}[x] = f_2\mathbf{K}[x]$, so schreiben wir $f_1 \sim f_2$. Das ist gleichwertig mit $f_2 = af_1$, wobei $0 \neq a \in \mathbf{K}$.

Ist $f_2 = f_1 g$ mit $f_j, g \in \mathbf{K}[x]$, so schreiben wir $f_1 | f_2$. Das ist offenbar gleichwertig mit $f_2\mathbf{K}[x] \subseteq f_1\mathbf{K}[x]$.

c) Seien $f_j \in \mathbf{K}[x]$ $(j = 1, \dots, n)$. Da Summen und Durchschnitte von Idealen wieder Ideale sind, gibt es eindeutig bestimmte normierte Polynome $d = (f_1, \dots, f_n)$

und $k = [f_1, \ldots, f_n]$ in $\mathbf{K}[x]$ mit

$$(f_1, \ldots, f_n)\mathbf{K}[x] = \sum_{j=1}^{n} f_j \mathbf{K}[x] = \left\{ \sum_{j=1}^{n} f_j g_j \mid g_j \in \mathbf{K}[x] \right\}$$

und

$$[f_1, \ldots, f_n]\mathbf{K}[x] = \bigcap_{j=1}^{n} f_j \mathbf{K}[x].$$

Dabei ist d der größte gemeinsame Teiler von $f_1, \ldots, f_n$, welcher auch durch folgende Eigenschaften charakterisiert ist:

(1) $d | f_j \quad (j = 1, \ldots, n)$.

(2) Ist $h \in \mathbf{K}[x]$ mit $h | f_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, so gilt $h | d$.

Ähnlich läßt sich das kleinste gemeinsame Vielfache k von $f_1, \ldots, f_n$ charakterisieren durch:

(1′) $f_j | k \quad (j = 1, \ldots, n)$.

(2′) Ist $h \in \mathbf{K}[x]$ mit $f_j | h$ $(j = 1, \ldots, n)$, so gilt $k | h$.

Ist $(f_1, \ldots, f_n) = 1$, so nennen wir $f_1, \ldots, f_n$ teilerfremd.

d) Für das Rechnen in $\mathbf{K}[x]$ ist von grundlegender Bedeutung, daß aus

$$(f_1, \ldots, f_n)\mathbf{K}[x] = \sum_{j=1}^{n} f_j \mathbf{K}[x]$$

eine Gleichung

$$(f_1, \ldots, f_n) = \sum_{j=1}^{n} f_j g_j$$

mit geeignetem $g_j \in \mathbf{K}[x]$ folgt.

2.3 Primfaktorzerlegung

a) Sei $f \in \mathbf{K}[x]$ mit $\operatorname{Grad} f \geqslant 1$. Wir nennen f ein irreduzibles Polynom, wenn es keine Zerlegung $f = g_1 g_2$ mit $g_j \in \mathbf{K}[x]$ und $\operatorname{Grad} g_j \geqslant 1$ $(j = 1, 2)$ gibt.
Sei $\mathfrak{P}$ die Menge aller irreduziblen, normierten Polynome aus $\mathbf{K}[x]$.

b) Jedes Polynom $f \neq 0$ aus $\mathbf{K}[x]$ besitzt genau eine Zerlegung

$$f = a \prod_{p \in \mathfrak{P}} p^{r(p)}$$

mit $0 \neq a \in \mathbf{K}$ und $r(p) > 0$ nur für endlich viele $p \in \mathfrak{P}$. Wir nennen dies die Primfaktorzerlegung von f und schreiben oft auch

$$f = a \prod_{j=1}^{n} p_j^{r_j}$$

mit paarweise verschiedenen p_j aus $\mathfrak{P}$ und $r_j > 0$.

Wir nennen f total zerfallend, falls

$$f = a \prod_{j=1}^{n} (x - a_j)^{r_j} \qquad \text{mit} \quad a_j \in \mathbf{K}.$$

c) Aus den Primfaktorzerlegungen

$$f_1 = a_1 \prod_{p \in \mathfrak{P}} p^{r_1(p)} \qquad \text{und} \qquad f_2 = a_2 \prod_{p \in \mathfrak{P}} p^{r_2(p)}$$

entnimmt man leicht

$$(f_1, f_2) = \prod_{p \in \mathfrak{P}} p^{d(p)} \qquad \text{mit} \qquad d(p) = \operatorname{Min}\{\, r_1(p), r_2(p) \,\}$$

und

$$[f_1, f_2] = \prod_{p \in \mathfrak{P}} p^{k(p)} \qquad \text{mit} \qquad k(p) = \operatorname{Max}\{\, r_1(p), r_2(p) \,\}.$$

Daraus folgen zahlreiche Relationen für größten gemeinsamen Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches, wie etwa

$$f(g_1, g_2) \sim (fg_1, fg_2); \qquad f[g_1, g_2] \sim [fg_1, fg_2]; \qquad fg \sim (f, g)[f, g];$$
$$[(f_1, f_2), f_3] \sim ([f_1, f_3], [f_2, f_3]); \qquad ([f_1, f_2], f_3) \sim [(f_1, f_3), (f_2, f_3)].$$

Ferner bestätigt man leicht folgende Tatsache: Seien $f_1, \ldots, f_m$ paarweise teilerfremde Polynome. Definieren wir g_j durch

$$f_1 f_2 \ldots f_m = f_j g_j \qquad (j = 1, \ldots, m),$$

so gilt

$$[f_1, \ldots, f_m] \sim f_1 \ldots f_m \qquad \text{und} \qquad (g_1, \ldots, g_m) = 1.$$

d) Die Eindeutigkeitsaussage in b) beruht auf folgender Tatsache: Ist p ein irreduzibles Polynom in $\mathbf{K}[x]$ und $p | fg$ mit $f, g \in \mathbf{K}[x]$, so folgt $p | f$ oder $p | g$. Die $p\mathbf{K}[x]$ mit irreduziblen p sind gerade die in der Menge

$$\{\, \mathfrak{i} \mid \mathfrak{i} \ \text{ ist Ideal in } \ \mathbf{K}[x], \ \ \mathfrak{i} \subset \mathbf{K}[x] \,\}$$

bezüglich der Inklusion maximalen Elemente.

2.4 Nullstellen von Polynomen

a) Sei $\mathfrak{A}$ eine $\mathbf{K}$-Algebra mit Einselement, sei $f = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in \mathbf{K}[x]$ und $a \in \mathfrak{A}$. Wir setzen

$$f(a) = \sum_{j=0}^{n} b_j a^j.$$

Dann ist die Abbildung $f \to f(a)$ von $\mathbf{K}[x]$ in $\mathfrak{A}$ ein Algebrenhomomorphismus, d.h. für alle $f, g \in \mathbf{K}[x]$ und alle $k \in \mathbf{K}$ gilt

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a), \qquad (kf)(a) = kf(a), \qquad (fg)(a) = f(a)g(a).$$

(Insbesondere können wir also $f(A)$ bilden für Matrizen A aus $(\mathbf{K})_n$ oder $A \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ für einen $\mathbf{K}$-Vektorraum $\mathfrak{V}$.)

b) Seien $\mathbf{K}$ und $\mathbf{L}$ Körper mit $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{L}$. Sei $0 \neq f \in \mathbf{K}[x]$ und $a \in \mathbf{L}$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit

$$f = (x-a)^m g,$$

wobei $g \in \mathbf{L}[x]$ und $g(a) \neq 0$. Wir nennen dann m die Vielfachheit von a als Nullstelle von f. Ist $m \geqslant 1$, also $f(a) = 0$, so heißt a eine Nullstelle von f. Ist $m \geqslant 2$, so nennen wir a eine mehrfache Nullstelle von f.

c) Für $f = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in \mathbf{K}[x]$ definieren wir die Ableitung f' von f durch

$$f' = \sum_{j=1}^{n} j b_j x^{j-1}.$$

Genau dann ist a eine mehrfache Nullstelle von f, wenn $f(a) = f'(a) = 0$ gilt.

d) Sei $0 \neq f \in \mathbf{K}[x]$ und sei

$$f = a \prod_{j=1}^{n} p_j^{r_j}$$

die Primfaktorzerlegung von f. Ist $(f, f') = 1$, so gilt $r_1 = \ldots = r_n = 1$.

e) Ist $\mathbf{K}$ algebraisch abgeschlossen (etwa $\mathbf{K} = \mathbb{C}$), so hat jedes irreduzible Polynom aus $\mathbf{K}[x]$ den Grad 1. Die irreduziblen Polynome aus $\mathbb{R}[x]$ sind die Polynome vom Grad 1 und die Polynome vom Grad 2 ohne reelle Nullstellen, also – falls normiert – die $x^2 + ax + b$ mit $a^2 - 4b < 0$.

2.5 Kongruenzen

a) Seien $f_1, f_2, h \in \mathbf{K}[x]$. Wir schreiben

$$f_1 \equiv f_2 \qquad (\operatorname{mod} h),$$

falls $h | f_1 - f_2$. Offenbar ist $\equiv$ eine Äquivalenzrelation. Aus

$$f_1 \equiv f_2 \quad (\operatorname{mod} h) \qquad \text{und} \qquad g_1 \equiv g_2 \quad (\operatorname{mod} h)$$

folgt

$$f_1 \dot{+} g_1 \equiv f_2 \dot{+} g_2 \qquad (\operatorname{mod} h).$$

b) (sog. chinesischer Restsatz) Seien $f_j \neq 0$ $(j = 1, \ldots, m)$ paarweise teilerfremde Polynome aus $\mathbf{K}[x]$. Ferner seien beliebige Polynome $r_1, \ldots, r_m$ aus $\mathbf{K}[x]$ vorgegeben. Dann gibt es ein $g \in \mathbf{K}[x]$ mit

$$g \equiv r_j \quad (\operatorname{mod} f_j) \qquad \text{für} \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Wir führen den einfachen Beweis dieses Satzes aus:

Dazu betrachten wir die $\mathbf{K}$-lineare Abbildung A von $\mathbf{K}[x]$ in $\bigoplus_{j=1}^{m} \mathbf{K}[x]/f_j\mathbf{K}[x]$ mit

$$Ah = (h + f_1\mathbf{K}[x], \ldots, h + f_m\mathbf{K}[x]).$$

Offenbar ist $h \in \operatorname{Kern} A$ gleichwertig mit $f_j | h$ $(j = 1, \ldots, m)$. Mit 2.3 c) folgt daher

$$f_1 \ldots f_m \sim [f_1, \ldots, f_m] | h.$$

Also ist $\operatorname{Kern} A = f_1 \ldots f_m \mathbf{K}[x]$. Somit bewirkt A einen Monomorphismus A_0 von $\mathbf{K}[x]/f_1 \ldots f_m\mathbf{K}[x]$ in $\bigoplus_{j=1}^{m} \mathbf{K}[x]/f_j\mathbf{K}[x]$. Wegen

$$\begin{aligned} \dim \bigoplus_{j=1}^{m} \mathbf{K}[x]/f_j\mathbf{K}[x] &= \sum_{j=1}^{m} \dim \mathbf{K}[x]/f_j\mathbf{K}[x] = \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Grad} f_j \\ &= \operatorname{Grad} f_1 \ldots f_m = \dim \mathbf{K}[x]/f_1 \ldots f_m\mathbf{K}[x] \end{aligned}$$

ist A_0 bijektiv, also A surjektiv.

2.6 Bemerkungen

a) Obwohl sich der größte gemeinsame Teiler nach 2.3 c) aus Primfaktorzerlegungen ablesen läßt, ist doch die für uns entscheidende Tatsache diejenige, daß $\mathbf{K}[x]$ ein Hauptidealring ist und sich daher der größte gemeinsame Teiler $(f_1, \ldots, f_n)$ als Vielfachsumme $\sum_{j=1}^{n} f_j g_j$ schreiben läßt. Die Polynomringe $\mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ mit

$n > 1$ haben zwar ebenfalls eine eindeutige Primfaktorzerlegung, aber da sie keine Hauptidealringe sind, ist ihre Idealtheorie viel komplizierter als die von $\mathbf{K}[x]$. Die Idealtheorie von $\mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$, welche die ringtheoretischen Grundlagen für die algebraische Geometrie liefert, ist eingehend studiert worden.

b) Die Primfaktorzerlegung eines Polynoms aus $\mathbf{K}[x]$ läßt sich i.a. nicht durch einen Algorithmus ermitteln. In $\mathbf{K}[x]$ kann man jedoch den größten gemeinsamen Teiler zweier Polynome f und g mit Hilfe des sog. euklidischen[4] Algorithmus auf folgende Weise bestimmen:

Wir setzen $g_0 = g$. Durch Division mit Rest bestimmen wir rekursiv $g_1, g_2, \ldots$ vermöge

$$f = h_0 g_0 + g_1 \qquad \text{mit} \quad \operatorname{Grad} g_1 < \operatorname{Grad} g_0,$$
$$g_0 = h_1 g_1 + g_2 \qquad \text{mit} \quad \operatorname{Grad} g_2 < \operatorname{Grad} g_1,$$

allgemein

$$g_{j-1} = h_j g_j + g_{j+1} \qquad \text{mit} \quad \operatorname{Grad} g_{j+1} < \operatorname{Grad} g_j.$$

Nach endlich vielen Schritten ist $g_{k+1} = 0$, also $g_k | g_{k-1}$. Dann ist g_k bis auf die Normierung der größte gemeinsame Teiler von f und g.

Aus

$$(f_1, \ldots, f_n)\mathbf{K}[x] = \sum_{j=1}^{n} f_j \mathbf{K}[x]$$

folgt für $n \geqslant 3$ sofort

$$(f_1, \ldots, f_n) = ((f_1, \ldots, f_{n-1}), f_n).$$

Also ist auch $(f_1, \ldots, f_n)$ für $n \geqslant 3$ algorithmisch zu berechnen. Wegen $f_1 f_2 \sim (f_1, f_2)[f_1, f_2]$ und $[f_1, \ldots, f_n] = [[f_1, \ldots, f_{n-1}], f_n]$ (siehe 2.3 c)) sind auch die kleinsten gemeinsamen Vielfachen algorithmisch berechenbar.

Aufgaben

A 2.1 Man zeige, daß die folgende Interpolationsaufgabe mit höheren Ableitungen eine Lösung hat:

Sei $\mathbf{K}$ ein Körper mit $\operatorname{Char} \mathbf{K} = 0$. Vorgegeben seien paarweise verschiedene $a_j \in \mathbf{K}$ $(j = 1, \ldots, n)$ und beliebige $b_{jk} \in \mathbf{K}$ $(j = 1, \ldots, n;\ k = 0, \ldots, m_j)$. Man finde ein Polynom $f \in \mathbf{K}[x]$ mit

$$f^{(k)}(a_j) = b_{jk} \qquad \text{für} \qquad j = 1, \ldots, n,\ k = 0, \ldots, m_j.$$

Dabei seien die höheren Ableitungen $f^{(k)}$ von f rekursiv definiert durch $f^{(0)} = f$ und $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$ für $k \geqslant 1$.

---

4) Euklid, griechischer Mathematiker, etwa 300 v. Chr.

(Man finde zuerst Polynome g_j mit

$$g_j^{(k)}(a_j) = b_{jk} \qquad \text{für} \qquad k = 0, \ldots, m_j$$

und verwende dann den chinesischen Restsatz.)

A 2.2 $\mathbf{K}[x]$ besitzt unendlich viele normierte irreduzible Polynome, auch dann wenn $\mathbf{K}$ endlich ist. (Man übertrage Euklids Beweis für die Existenz von unendlich vielen Primzahlen in $\mathbb{Z}$.)

§ 3 Die Jordansche[5] Normalform

Die Jordansche Normalform wird in der Sprache der Moduln am besten verständlich.

3.1 Definition. Sei $\mathfrak{R}$ ein Ring mit Einselement.

a) Eine Menge $\mathfrak{M}$ heißt ein $\mathfrak{R}$-Modul (genauer ein $\mathfrak{R}$-Linksmodul), wenn gilt:
(1) $\mathfrak{M}$ ist bezüglich einer Operation + eine abelsche Gruppe.
(2) Für $r \in \mathfrak{R}$ und $m \in \mathfrak{M}$ ist $rm \in \mathfrak{M}$ definiert. Dabei sollen für alle $r, r_1, r_2 \in \mathfrak{R}$ und alle $m, m_1, m_2 \in \mathfrak{M}$ folgende Regeln gelten:

$$\begin{aligned} &1m = m, \\ &(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m, \\ &r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2, \\ &(r_1 r_2)m = r_1(r_2 m). \end{aligned}$$

b) Sei $\mathfrak{M}$ ein $\mathfrak{R}$-Modul. Eine Teilmenge $\mathfrak{N} \neq \emptyset$ von $\mathfrak{M}$ heißt ein Untermodul, falls $\mathfrak{N}$ bezüglich + eine Untergruppe von $\mathfrak{M}$ ist und für $r \in \mathfrak{R}$, $m \in \mathfrak{N}$ stets $rm \in \mathfrak{N}$ gilt.

c) Ein $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{M}$ heißt endlich erzeugbar, falls es $m_j \in \mathfrak{M}$ $(j = 1, \ldots, k)$ gibt mit

$$\mathfrak{M} = \sum_{j=1}^{k} \mathfrak{R} m_j = \left\{ \sum_{j=1}^{k} r_j m_j \mid r_j \in \mathfrak{R} \right\}.$$

Wir nennen $\mathfrak{M}$ zyklisch, falls es ein m_0 in $\mathfrak{M}$ gibt mit $\mathfrak{M} = \mathfrak{R} m_0$.

---

5) Camille Jordan (1835–1922) Paris; Matrizen, Gruppen von linearen Abbildungen und Permutationen, Gleichungstheorie, Maßtheorie, Topologie.

d) Seien $\mathfrak{M}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ Untermoduln von $\mathfrak{M}$. Wie in 1.4 schreiben wir $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{M}_n$, falls jedes $m \in \mathfrak{M}$ genau eine Zerlegung

$$m = m_1 + \ldots + m_n$$

mit $m_j \in \mathfrak{M}_j$ gestattet.

e) Ein $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{M}$ heißt einfach (irreduzibel), falls $\mathfrak{M} \neq 0$ und falls 0 und $\mathfrak{M}$ die einzigen Untermoduln von $\mathfrak{M}$ sind.

f) Ein $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{M}$ heißt unzerlegbar, falls es keine direkte Zerlegung $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2$ mit Untermoduln $\mathfrak{M}_j \neq 0$ $(j = 1, 2)$ gibt.

3.2 Beispiele. a) Sei $\mathfrak{V}$ ein $\mathbf{K}$-Vektorraum und $A \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$. Durch die Festsetzung

$$fv = f(A)v \qquad \text{für} \quad f \in \mathbf{K}[x] \quad \text{und} \quad v \in \mathfrak{V}$$

wird dann $\mathfrak{V}$ ein $\mathbf{K}[x]$-Modul. Die $\mathbf{K}[x]$- Untermoduln von $\mathfrak{V}$ sind also gerade die A-invarianten Unterräume von $\mathfrak{V}$. Diese Auffassung liegt allen unseren weiteren Überlegungen zugrunde.

b) Ist $\mathfrak{N}$ ein Untermodul des $\mathfrak{R}$-Moduls $\mathfrak{M}$, so wird die Faktorgruppe $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ ein $\mathfrak{R}$-Modul durch die Festsetzung

$$r(m + \mathfrak{N}) = rm + \mathfrak{N} \qquad \text{für} \quad r \in \mathfrak{R}, \quad m \in \mathfrak{M}.$$

(Dies entspricht genau der Definition von $A_{\mathfrak{V}/\mathfrak{U}}$ in 1.5.) Ist insbesondere $\mathfrak{l}$ ein Linksideal in $\mathfrak{R}$, so wird $\mathfrak{R}/\mathfrak{l}$ ein $\mathfrak{R}$-Modul, welcher wegen $\mathfrak{R}/\mathfrak{l} = \mathfrak{R}(1 + \mathfrak{l})$ zyklisch ist.

3.3 Hauptsatz. (C. Jordan). Sei $\mathfrak{V}$ ein $\mathbf{K}$- Vektorraum von endlicher Dimension und $A \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$. Wie in 3.2 a) betrachten wir $\mathfrak{V}$ als $\mathbf{K}[x]$-Modul.

a) Dann gibt es eine direkte Zerlegung

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{V}_r,$$

wobei

$$\mathfrak{V}_j \cong \mathbf{K}[x]/p_j^{t_j}\mathbf{K}[x]$$

mit normierten, irreduziblen Polynomen p_j aus $\mathbf{K}[x]$, welche nicht notwendig verschieden sind. Dabei ist $p_1^{t_1} \ldots p_r^{t_r}$ das charakteristische Polynom f_A von A.

Die Anzahl $N(p^t)$ der Summanden $\mathfrak{V}_j \simeq \mathbf{K}[x]/p_j^{t_j}\mathbf{K}[x]$ mit $p_j = p$ und $t_j \geqslant t$ ist dabei eindeutig bestimmt durch die Gleichung

$$\begin{aligned} N(p^t)\operatorname{Grad} p &= \dim \operatorname{Kern} p(A)^t/\operatorname{Kern} p(A)^{t-1} \\ &= \dim \operatorname{Bild} p(A)^{t-1}/\operatorname{Bild} p(A)^t. \end{aligned}$$

Insbesondere ist die Anzahl der Summanden $\mathfrak{V}_j$ mit $p_j = p$ gleich $\dim \operatorname{Kern} p(A)/\operatorname{Grad} p$.

b) Die Menge

$$\{ g \mid g \in \mathbf{K}[x], \quad g(A) = 0 \}$$

ist ein Ideal in $\mathbf{K}[x]$, hat also die Gestalt $m_A \mathbf{K}[x]$ mit einem eindeutig bestimmten normierten Polynom m_A, dem sog. Minimalpolynom von A. Da $g(A)\mathfrak{V}_j = 0$ genau für $p_j^{t_j} | g$ gilt, folgt sofort

$$m_a = [p_1^{t_1}, \ldots, p_r^{t_r}].$$

Dies zeigt:
(1) $m_A | f_A$, also $f_A(A) = 0$ (Satz von Cayley[6] und Hamilton[7]). Insbesondere folgt $\operatorname{Grad} m_A \leqslant \dim \mathfrak{V}$.
(2) Jeder Primteiler von f_A teilt auch m_A. Insbesondere ist jeder Eigenwert von A eine Nullstelle von m_A.

c) Zur Untersuchung der Wirkung von A auf $\mathfrak{V}$ können wir also $\mathfrak{V} \simeq \mathbf{K}[x]/p^t\mathbf{K}[x]$ mit irreduziblem p annehmen. Sei

$$p = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \qquad \text{mit} \quad b_m = 1$$

und $\mathfrak{V} = \mathbf{K}[x]v_0$. Die Menge der Polynome

$$x^j p^k \qquad \text{mit} \quad j = 0, \ldots, m-1, \quad k = 0, \ldots, t-1$$

enthält für jeden Grad s mit $s < \operatorname{Grad} p^t$ genau ein Polynom, liefert daher eine $\mathbf{K}$-Basis für $\mathbf{K}[x]/p^t\mathbf{K}[x]$. Somit ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{B} = \{ & p(A)^{t-1}v_0, Ap(A)^{t-1}v_0, \ldots, A^{m-1}p(A)^{t-1}v_0, \ldots \\ & \ldots, A^{m-1}p(A)v_0, v_0, Av_0, \ldots, A^{m-1}v_0 \}\end{aligned}$$

eine $\mathbf{K}$-Basis von $\mathfrak{V}$. Dabei gilt

$$A(A^j p(A)^k v_0) = A^{j+1} p(A)^k v_0 \qquad \text{für} \quad j < m-1$$

---

6) Arthur Cayley (1821–1895) Cambridge; Algebra, Invariantentheorie, Geometrie.
7) William Rowan Hamilton (1805–1865) Dublin; Mathematiker, Physiker und Astronom; Entdecker der Quaternionen, Hamiltonsches Prinzip der Mechanik, Optik.

und

$$A(A^{m-1}p(A)^k v_0) = \left(-\sum_{j=0}^{m-1} b_j A^j + p(A) \right) p(A)^k v_0$$

$$= \begin{cases} -\sum\limits_{j=0}^{m-1} b_j A^j p(A)^k v_0 + p(A)^{k+1} v_0 & \text{für } k < t-1 \\ -\sum\limits_{j=0}^{m-1} b_j A^j p(A)^{t-1} v_0 & \text{für } k = t-1. \end{cases}$$

Definieren wir Matrizen P und N vom Typ (m, m) durch

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -b_{m-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

so ist also A bezüglich der Basis $\mathfrak{B}$ die Matrix

$$J = \begin{pmatrix} P & N & & 0 \\ & P & \ddots & \\ & & \ddots & N \\ 0 & & & P \end{pmatrix}$$

zugeordnet. Wir nennen P die Begleitmatrix zum Polynom p.

d) Sei in c) speziell $p = x - a$ mit $a \in \mathbf{K}$, also $P = (a)$ und $N = (1)$. Dann ist A die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & 1 & & 0 \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & a \end{pmatrix}$$

vom Typ (t, t) zugeordnet.

e) Sei in a) speziell $f_A = \prod\limits_{j=1}^{r} (x - a_j)^{s_j}$ total zerfallend mit paarweise verschiedenen a_j. (Wegen b) ist das gleichwertig damit, daß das Minimalpolynom m_A von A total zerfällt.) Dann ist der Abbildung A bezüglich einer geeigneten Basis von $\mathfrak{V}$ eine Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} J_{n_{11}}(a_1) & & & 0 \\ & J_{n_{12}}(a_1) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{n_{rs}}(a_r) \end{pmatrix}$$

zugeordnet, wobei

$$J_n(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & & 0 \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & a \end{pmatrix} \qquad \text{vom Typ } (n,n).$$

Wir nennen die $J_{n_{ij}}(a_i)$ die Jordan-Kästchen zu A.

Für viele Anwendungen reicht bereits die schwächere Aussage, daß A bezüglich einer geeigneten Basis eine Dreiecksmatrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_r \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad A_j = \begin{pmatrix} a_j & & & * \\ & a_j & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_j \end{pmatrix}$$

zugeordnet ist mit paarweise verschiedenen $a_1, \ldots, a_r$.

3.4 Bemerkungen. a) Ist $A \in (\mathbf{K})_n$, so können wir A vermöge Linksmultiplikation auf dem Raum $\mathbf{K}^n$ der Spaltenvektoren der Länge n wirken lassen. Da bei Basiswechsel sich die Matrix bekanntlich gemäß $A \to T^{-1}AT$ mit geeignetem T ändert, folgt aus 3.3 sofort: Es gibt eine reguläre Matrix T in $(\mathbf{K})_n$ derart, daß $T^{-1}AT$ die sog. Jordansche Normalform

$$\begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}$$

hat; dabei gilt

$$J_k = \begin{pmatrix} P_k & N_k & & 0 \\ & P_k & \ddots & \\ & & \ddots & N_k \\ 0 & & & P_k \end{pmatrix}$$

und P_k ist die Begleitmatrix eines irreduziblen Polynoms p_k, wobei $p_1, \ldots, p_r$ die sämtlichen Primteiler von f_A sind; N_k hat dieselbe Bedeutung wie in c). Die Jordansche Normalform der Matrix A ist bis auf die Numerierung der J_k eindeutig bestimmt.

Für $A, B \in (\mathbf{K})_n$ gibt es ein reguläres $T \in (\mathbf{K})_n$ mit $B = T^{-1}AT$ offenbar genau dann, wenn A und B dieselbe Jordansche Normalform haben.

b) Kennt man die Primfaktorzerlegung des charakteristischen Polynoms f_A, so läßt sich die Jordansche Normalform von A nach 3.3 a) durch Rangbestimmungen ermitteln, diese können algorithmisch mittels elementarer Umformungen ausgeführt werden (siehe Beispiel 3.6 a)). Unter den endlich vielen Teilern von f_A kann man dann das Minimalpolynom m_A grundsätzlich durch Probieren finden.

Allerdings läßt sich die Zerlegung eines Polynoms aus $\mathbf{K}[x]$ in irreduzible Faktoren nur ausnahmsweise algorithmisch ausführen (falls $\mathbf{K} = \mathbb{Q}$ oder falls $\mathbf{K}$ endlich ist, aber nicht für $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbf{K} = \mathbb{C}$).

c) Eine etwas gröbere Zerlegung als die in 3.3 a) läßt sich hingegen algorithmisch gewinnen: Als $\mathbf{K}[x]$-Modul gilt

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{W}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{W}_s \qquad \text{mit} \quad \mathfrak{W}_j \cong \mathbf{K}[x]/g_j\mathbf{K}[x],$$

wobei $g_{j+1}|g_j$ für $j = 1, \ldots, s-1$. Diese g_j können algorithmisch durch elementare Umformung und Division mit Rest (für Polynome) bestimmt werden (siehe v.d. Waerden, Algebra 2, § 85, 86 (5. Aufl., 1967)). Dabei ist offenbar $g_1 = m_a$ und $g_1 \cdots g_s = f_A$.

d) Eine algorithmische Bestimmung des Minimalpolynoms m_A kann auch so vorgenommen werden:

Sei $\{ v_1, \ldots, v_n \}$ eine Basis von $\mathfrak{V}$ und $A \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$. Wir können algorithmisch entscheiden, ob $v_j, Av_j, \ldots, A^k v_j$ linear abhängig sind. Also können wir die Polynome $m_j \neq 0$ von kleinstem Grad mit $m_j(A)v_j = 0$ algorithmisch ermitteln. Dann ist nach 2.6 b) auch $m_A = [m_1, \ldots, m_n]$ algorithmisch zu berechnen.

Aus 3.4 folgt eine interessante Tatsache:

3.5 Satz. *Sei $A \in (\mathbf{K})_n$. Dann gibt es eine reguläre Matrix $T \in (\mathbf{K})_n$ mit $A' = T^{-1}AT$.*

Beweis. Es genügt der Nachweis, daß A und A' dieselbe Jordansche Normalform haben. Für jedes $g \in \mathbf{K}[x]$ gilt

$$\operatorname{Rang} g(A') = \operatorname{Rang} g(A)' = \operatorname{Rang} g(A)$$

(Spaltenrang gleich Zeilenrang). Also folgt

$$\dim \operatorname{Bild} p(A')^t = \dim \operatorname{Bild} p(A)^t$$

für alle irreduziblen Polynome p, und nach 3.3 a) haben daher A und A' dieselbe Jordansche Normalform.

Für Begleitmatrizen

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -b_{m-1} \end{pmatrix}$$

kann man explizit eine reguläre Matrix T angeben mit $PT = TP'$, nämlich

$$T = \begin{pmatrix} -b_1 & -b_2 & \dots & -b_{m-2} & -b_{m-1} & -1 \\ -b_2 & -b_3 & \dots & -b_{m-1} & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ -b_{m-1} & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt mit 3.4 c) leicht die allgemeine Aussage. □

3.6 Beispiele. a) Sei $f = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ mit $a_n = 1$ ein Polynom aus $\mathbf{K}[x]$. Ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

die Begleitmatrix zu f, so gilt $f_A = m_A = f$:

Bezüglich der kanonischen Basis $\{ v_1, \dots, v_n \}$ des Raumes $\mathbf{K}^n$ der Spaltenvektoren gilt

$$Av_j = v_{j+1} \qquad (1 \leqslant j \leqslant n-1).$$

Für alle $m < n$ und alle $b_j \in \mathbf{K}$ $(j = 0, \dots, m)$, nicht alle b_j gleich 0, gilt dann

$$\sum_{j=0}^{m} b_j A^j v_1 = b_0 v_1 + b_1 v_2 + \dots + b_m v_{m+1} \neq 0.$$

Also ist $\operatorname{Grad} m_A \geqslant n$, nach 3.3 b) daher $\operatorname{Grad} m_A = n$ und $m_A = f_A$. Ferner gilt

$$A^j v_1 = v_{j-1} \qquad (j = 0, \dots, n-1)$$

und

$$A^n v_1 = Av_n = -\sum_{j=0}^{n-1} a_j v_{j+1} = -(\sum_{j=0}^{n-1} a_j A^j) v_1.$$

Dies zeigt $f(A)v_1 = 0$. Für alle $1 \leqslant j \leqslant n$ folgt

$$f(A)v_j = f(A)A^{j-1}v_1 = A^{j-1}f(A)v_1 = 0.$$

Also ist $f(A) = 0$. Somit folgt $m_A | f$, also $m_A = f_A = f$.

b) Sei A die Dreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

vom Typ (n, n).

(1) Sei 0 ein Eigenwert von A von der Vielfachheit k, seien also genau k der a_j gleich 0. Dann ist offenbar $\operatorname{Rang} A = n - k$, also ist nach 3.3 a) $k = \dim \operatorname{Kern} A$ die Anzahl der Jordan-Kästchen zum Eigenwert 0, und alle diese haben den Typ $(1, 1)$.

(2) Ist $a_j \neq 0$, so gilt $\operatorname{Rang}(A - a_j E) = n - 1$: Wir schreiben A in der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ & A_{22} & 0 \\ * & & A_{33} \end{pmatrix}$$

wobei a_j kein Eigenwert von A_{11} und A_{33} ist und

$$A_{22} = \begin{pmatrix} a_j & 0 & \dots & 0 \\ a_j & a_{j+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_j & a_{j+1} & \dots & a_j \end{pmatrix}$$

Ist E_k die Einheitsmatrix von demselben Typ (n_k, n_k) wie A_{kk} $(k = 1, 2, 3)$, so folgt

$$\operatorname{Rang}(A - a_j E) \geqslant \sum_{k=1}^{3} \operatorname{Rang}(A_{kk} - a_j E_k) = n_1 + \operatorname{Rang}(A_{22} - a_j E_2) + n_3.$$

Wir können uns also auf die Betrachtung von A_{22} beschränken. Eine rangerhaltende elementare Transformation liefert

$$A_{22} - a_j E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & & 0 \\ a_j & a_{j+1} - a_j & & & \\ a_j & a_{j+1} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_j & a_{j+1} & \dots & a_{m-1} - a_j & 0 \\ a_j & a_{j+1} & \dots & a_{m-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ a_j & 0 & 0 & \\ a_j & a_j & a_{j+2} - a_j & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_j & a_j & a_{j+2} & \dots \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_j & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_j & a_j & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_j & a_j & \dots & a_j & 0 \end{pmatrix}.$$

Letztere Matrix hat wegen $a_j \neq 0$ offenbar den Rang $n_2 - 1$. Da a_j ein Eigenwert von A ist, folgt

$$n > \operatorname{Rang}(A - a_j E) \geqslant n_1 + n_2 - 1 + n_3 = n - 1,$$

also $\operatorname{Rang}(A - a_j E) = n - 1$. Daher tritt wegen $\dim \operatorname{Kern}(A - a_j E) = 1$ nach 3.3 a) genau ein Jordan-Kästchen zum Eigenwert a_j auf. Die Jordansche Normalform von A ist somit

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & J_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & J_t \end{pmatrix}$$

mit

$$J_k = \begin{pmatrix} a_k & 1 & & 0 \\ & a_k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & a_k \end{pmatrix}$$

und paarweise verschiedenen $a_k \neq 0$. Das Minimalpolynom von A ist daher

$$m_A = \begin{cases} \prod_{j=1}^{n} (x - a_j) = f_A & \text{falls alle } a_j \neq 0 \\ x \prod_{a_j \neq 0} (x - a_j) & \text{falls einige } a_j = 0. \end{cases}$$

c) Sei $\mathfrak{V}$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit einer Basis $\{ v_1, \dots, v_n \}$. Sei $A \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ mit

$$Av_1 = av_1, \quad Av_j = av_j + v_{j-1} \qquad \text{für} \quad 2 \leqslant j \leqslant n$$

mit $a \in \mathbb{C}$. Wir betrachten $\mathfrak{V}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum von der Dimension $2n$ und bestimmen die Jordansche Normalform der $\mathbb{R}$-linearen Abbildung A von $\mathfrak{V}$ in sich. Offenbar ist

$$(A - aE)^n = 0 \neq (A - aE)^{n-1}.$$

Fall 1: Sei $a \in \mathbb{R}$. Nach 3.3 ist

$$\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Kern}(A - aE)^n / \operatorname{Kern}(A - aE)^{n-1} =$$
$$2 \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Kern}(A - aE)^n / \operatorname{Kern}(A - aE)^{n-1} = 2(n - (n-1)) = 2$$

die Anzahl der Jordan-Kästchen

$$\begin{pmatrix} a & 1 & & 0 \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & a \end{pmatrix}$$

vom Typ (n, n) zu A (als $\mathbb{R}$-lineare Abbildung). Aus Dimensionsgründen treten keine weiteren Jordan-Kästchen auf. (Dieses Resultat erhält man noch schneller unter Verwendung der $\mathbb{R}$-Basis

$$\{ v_1, \ldots, v_n, iv_1, \ldots, iv_n \}$$

von $\mathfrak{V}$.)

Fall 2: Sei $a \notin \mathbb{R}$, also $a \neq \bar{a}$. Dann ist

$$p = (x - a)(x - \bar{a})$$

ein irreduzibles Polynom aus $\mathbb{R}[x]$ und

$$p(A)^n = (A - aE)^n (A - \bar{a}E)^n = 0.$$

Wegen der Regularität von $A - \bar{a}E$ ist dabei

$$\operatorname{Kern} p(A)^j = \operatorname{Kern}(A - aE)^j,$$

also

$$\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Kern} p(A)^n / \operatorname{Kern} p(A)^{n-1} =$$
$$2 \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Kern}(A - aE)^n / \operatorname{Kern}(A - aE)^{n-1} = 2.$$

Mit 3.3 folgt sofort, daß A die Jordansche Normalform

$$\begin{pmatrix} P & N & & 0 \\ & P & \ddots & \\ & & \ddots & N \\ 0 & & & P \end{pmatrix}$$

hat mit

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -a\bar{a} \\ 1 & a + \bar{a} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.7 Bemerkung. Seien $A, B \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$. Nach 1.7 ist stets $f_{AB} = f_{BA}$. Schon für $\dim \mathfrak{V} = 2$ zeigen einfache Beispiele, daß $m_{AB} = m_{BA}$ nicht allgemein gilt. Aber stets ist $m_{AB} | x m_{BA}$:

Ist $m_{BA} = \sum_{j=0}^{t} c_j x^j$, so folgt

$$ABm_{BA}(AB) = AB\sum_{j=0}^{t} c_j(AB)^j = A(\sum_{j=0}^{t} c_j(BA)^j)B =$$

$$Am_{BA}(BA)B = 0.$$

Dies zeigt $m_{AB}|xm_{BA}$.

3.8 Hilfssatz. *Seien* $A, B \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ *mit* $AB = BA$. *Für jedes* $g \in \mathbf{K}[x]$ *sind dann* Kern $g(A)$ *und* Bild $g(A)$ *B-invariante Unterräume von* $\mathfrak{V}$.

Beweis. Wegen

$$Bg(A)v = g(A)Bv$$

ist Bild $g(A)$ B-invariant. Aus $g(A)w = 0$ folgt

$$g(A)Bw = Bg(A)w = 0,$$

daher ist auch Kern $g(A)$ B-invariant. □

3.9 Hilfssatz. *Sei* $\mathfrak{A}$ *eine Menge von paarweise vertauschbaren linearen Abbildungen aus* $\mathrm{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ $(\mathfrak{V} \neq 0)$. *Es gebe keinen Unterraum* $\mathfrak{U}$ *mit* $0 < \mathfrak{U} < \mathfrak{V}$ *und* $A\mathfrak{U} \leqslant \mathfrak{U}$ *für alle* $A \in \mathfrak{A}$.

a) *Zerfällt* m_A *für jedes* $A \in \mathfrak{A}$ *total in* $\mathbf{K}[x]$, *so ist* $\dim \mathfrak{V} = 1$. *(Dies gilt insbesondere, falls* $\mathbf{K}$ *algebraisch abgeschlossen ist.)*

b) *Ist* $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ *der reelle Zahlkörper, so gilt* $1 \leqslant \dim \mathfrak{V} \leqslant 2$.

Beweis. (1) Für jedes $A \in \mathfrak{A}$ ist m_A irreduzibel:

Sei $m_A = pg$ mit irreduziblem p. Nach 3.8 ist $p(A)\mathfrak{V}$ invariant für jedes $B \in \mathfrak{A}$, also $p(A)\mathfrak{V} = 0$ oder $p(A)\mathfrak{V} = \mathfrak{V}$. Im zweiten Falle wäre jedoch

$$g(A)\mathfrak{V} = g(A)p(A)\mathfrak{V} = 0,$$

was wegen Grad $g <$ Grad m_A nicht geht. Also ist $p(A)\mathfrak{V} = 0$ und daher $m_A = p$.
(2) Sind die Voraussetzungen von a) erfüllt, so ist $\dim \mathfrak{V} = 1$:

Nach (1) gilt nun $m_A = x - a$ mit $a \in \mathbf{K}$, also $A = aE$. Dann ist jeder Unterraum von $\mathfrak{V}$ A-invariant für jedes $A \in \mathfrak{A}$, also $\dim \mathfrak{V} = 1$.
(3) Sei nun $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ und es gebe ein $B \in \mathfrak{A}$ derart, daß

$$m_B = x^2 + ax + b$$

ein irreduzibles Polynom aus $\mathbb{R}[x]$ vom Grad 2 ist. Nach 2.4e) ist dann $a^2 - 4b < 0$,

also $a^2/4 - b = -c^2$ mit geeignetem $c \in \mathbb{R}$. Aus $m_B(B) = 0$ folgt

$$(B + \frac{a}{2}E)^2 = (\frac{a^2}{4} - b)E = -c^2 E.$$

Setzen wir $I = \frac{1}{c}(B + \frac{a}{2}E)$, so ist $I^2 = -E$. Durch die Festsetzung

$$(r + is)v = (rE + sI)v$$

für $r, s \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathfrak{V}$ wird $\mathfrak{V}$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Wegen $AI = IA$ für alle $A \in \mathfrak{A}$ gilt dabei $\mathfrak{A} \subseteq \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$. Mit (2) folgt $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{V} = 1$, also

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{V} = 2 \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{V} = 2. \qquad \square$$

3.10 Satz. *Sei $\mathfrak{A}$ eine Menge von paarweise vertauschbaren linearen Abbildungen aus* $\operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$.

a) *Zerfällt m_A für jedes $A \in \mathfrak{A}$ total in $\mathbf{K}[x]$, so gibt es eine Kette*

$$0 = \mathfrak{V}_0 < \mathfrak{V}_1 < \ldots < \mathfrak{V}_n = \mathfrak{V}$$

von Unterräumen $\mathfrak{V}_j$ von $\mathfrak{V}$ mit $\dim \mathfrak{V}_j = j$ *und $A\mathfrak{V}_j \leqslant \mathfrak{V}_j$ für alle $A \in \mathfrak{A}$. Wählen wir eine Basis $\mathfrak{B} = \{ v_1, \ldots, v_n \}$ von $\mathfrak{V}$ mit $\mathfrak{V}_j = \langle v_1, \ldots, v_j \rangle$, so ist jedem $A \in \mathfrak{A}$ bezüglich $\mathfrak{B}$ eine Dreiecksmatrix*

$$\begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

zugeordnet. (Insbesondere gilt diese Aussage, falls $\mathbf{K}$ algebraisch abgeschlossen ist.)

b) *Ist $\mathbf{K} = \mathbb{R}$, so gibt es eine Kette*

$$0 = \mathfrak{V}_0 < \mathfrak{V}_1 < \ldots < \mathfrak{V}_m = \mathfrak{V}$$

von Unterräumen $\mathfrak{V}_j$ von $\mathfrak{V}$ mit $\dim \mathfrak{V}_{j+1}/\mathfrak{V}_j \leqslant 2$ *und $A\mathfrak{V}_j \leqslant \mathfrak{V}_j$ für alle $A \in \mathfrak{A}$.*

Beweis. Wir wählen ein möglichst kleines $\mathfrak{V}_1$ mit $0 < \mathfrak{V}_1 \leqslant \mathfrak{V}$ und $A\mathfrak{V}_1 \leqslant \mathfrak{V}_1$ für alle $A \in \mathfrak{A}$. Nach 3.9 ist dann $\dim \mathfrak{V}_1 = 1$ im Falle der Voraussetzung unter a), $\dim \mathfrak{V}_1 \leqslant 2$ für $\mathbf{K} = \mathbb{R}$. Nun betrachten wir $\mathfrak{V}/\mathfrak{V}_1$. Setzen wir

$$\mathfrak{A}' = \{ A_{\mathfrak{V}/\mathfrak{V}_1} \mid A \in \mathfrak{A} \},$$

so sind offenbar je zwei Elemente aus $\mathfrak{A}'$ vertauschbar. Eine Induktion nach $\dim \mathfrak{V}$ liefert daher eine Kette

$$0 = \mathfrak{V}_1/\mathfrak{V}_1 < \mathfrak{V}_2/\mathfrak{V}_1 < \ldots < \mathfrak{V}_m/\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}/\mathfrak{V}_1$$

mit

$$A_{\mathfrak{V}/\mathfrak{V}_1}\mathfrak{V}_j/\mathfrak{V}_1 \leqslant \mathfrak{V}_j/\mathfrak{V}_1,$$

also $A\mathfrak{V}_j \leqslant \mathfrak{V}_j$ für alle $A \in \mathfrak{A}$ und

$$\dim \mathfrak{V}_j/\mathfrak{V}_{j-1} = \begin{cases} 1 & \text{im Falle a)} \\ \leqslant 2 & \text{im Falle b).} \end{cases}$$ □

3.11 Definition. Sei $A \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$.

a) Wir nennen A einfach, wenn $\mathfrak{V}$ ein einfacher $\mathbf{K}[x]$-Modul ist, wenn es also keinen A-invarianten Unterraum $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{V}$ gibt mit $0 < \mathfrak{U} < \mathfrak{V}$.

b) Wir nennen A halbeinfach, wenn es zu jedem A-invarianten Unterraum $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{V}$ ein A-invariantes Komplement $\mathfrak{U}'$ gibt, also $\mathfrak{V} = \mathfrak{U} \oplus \mathfrak{U}'$ mit $A\mathfrak{U}' \leqslant \mathfrak{U}'$.

3.12 Hilfssatz. *Sei* $A \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$. *Dann sind gleichwertig:*

a) $\mathfrak{V} = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathfrak{V}_j$, *wobei* $\mathfrak{V}_j$ *A-invariant und* $A_{\mathfrak{V}_j}$ *einfach ist.*

b) $\mathfrak{V} = \sum_{j=1}^{k} \mathfrak{V}_j$ *mit A-invarianten* $\mathfrak{V}_j$ *und einfachen* $A_{\mathfrak{V}_j}$.

c) *A ist halbeinfach.*

Beweis. a)⇒b): Dies ist trivial.

b)⇒c): Sei $\mathfrak{U} < \mathfrak{V}$ mit $A\mathfrak{U} \leqslant \mathfrak{U}$. Wir wählen ein $\mathfrak{U}' \leqslant \mathfrak{V}$ von möglichst großer Dimension mit $A\mathfrak{U}' \leqslant \mathfrak{U}'$ und $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{U}' = 0$. Angenommen, es wäre $\mathfrak{U} + \mathfrak{U}' < \mathfrak{V}$. Dann gibt es ein $\mathfrak{V}_j$ mit $\mathfrak{V}_j \not\leqslant \mathfrak{U} + \mathfrak{U}'$. Da $A_{\mathfrak{V}_j}$ einfach ist und $\mathfrak{V}_j \cap (\mathfrak{U} + \mathfrak{U}')$ A-invariant ist, folgt $\mathfrak{V}_j \cap (\mathfrak{U} + \mathfrak{U}') = 0$. Also ist $\mathfrak{U}' + \mathfrak{V}_j$ A-invariant und $\mathfrak{U}' < \mathfrak{U}' + \mathfrak{V}_j$. Wir zeigen

$$\mathfrak{U} \cap (\mathfrak{U}' + \mathfrak{V}_j) = 0,$$

im Widerspruch zur maximalen Wahl von $\mathfrak{U}'$:

Sei

$$u = u' + v_j \in \mathfrak{U} \cap (\mathfrak{U}' + \mathfrak{V}_j)$$

mit $u \in \mathfrak{U}$, $u' \in \mathfrak{U}'$ und $v_j \in \mathfrak{V}_j$. Dann ist

$$v_j = u - u' \in \mathfrak{V}_j \cap (\mathfrak{U} + \mathfrak{U}') = 0,$$

also $v_j = 0$ und dann

$$u = u' \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{U}' = 0.$$

c)⇒a): Wir vermerken zuerst, daß für jeden A-invarianten Unterraum $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{V}$ auch $A_{\mathfrak{U}}$ halbeinfach ist:

Sei $\mathfrak{U}_1 \leqslant \mathfrak{U}$ mit $A\mathfrak{U}_1 \leqslant \mathfrak{U}_1$. Da A halbeinfach ist, gilt $\mathfrak{V} = \mathfrak{U}_1 \oplus \mathfrak{W}$ mit $A\mathfrak{W} \leqslant \mathfrak{W}$. Daraus folgt

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U} \cap (\mathfrak{U}_1 \oplus \mathfrak{W}) = \mathfrak{U}_1 \oplus (\mathfrak{U} \cap \mathfrak{W})$$

mit A-invariantem $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{W}$.

Nun folgt durch Induktion nach $\dim \mathfrak{V}$ leicht die Behauptung:

Sei nämlich $0 < \mathfrak{V}_1 \leqslant \mathfrak{V}$ mit $A\mathfrak{V}_1 \leqslant \mathfrak{V}_1$ und möglichst kleinem $\mathfrak{V}_1$. Dann ist $A_{\mathfrak{V}_1}$ einfach. Da A halbeinfach ist, gilt $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1 \oplus \mathfrak{U}$ mit $A\mathfrak{U} \leqslant \mathfrak{U}$. Wie soeben gezeigt, ist $A_{\mathfrak{U}}$ halbeinfach, also gilt nach Induktionsannahme $\mathfrak{U} = \bigoplus_{j=2}^{k} \mathfrak{V}_j$ mit einfachen $A_{\mathfrak{V}_j}$. □

3.13 Hauptsatz. *Sei $A \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$. Dann sind gleichwertig:*

a) *A ist halbeinfach.*

b) *Das Minimalpolynom m_A von A hat die Gestalt $m_A = p_1 \ldots p_r$ mit normierten irreduziblen, paarweise verschiedenen Polynomen p_j.*

Beweis. Sei p ein irreduzibles Polynom aus $\mathbf{K}[x]$. Die $\mathbf{K}[x]$-Untermoduln von $\mathbf{K}[x]/\ p^t\mathbf{K}[x]$ sind dann offenbar die $h\mathbf{K}[x]/p^t\mathbf{K}[x]$ mit $h|p^t$. Wegen der eindeutigen Primfaktorzerlegung in $\mathbf{K}[x]$ erzwingt dies $h\mathbf{K}[x] = p^j\mathbf{K}[x]$ mit $0 \leqslant j \leqslant t$. Also ist die Menge der Untermoduln von $\mathbf{K}[x]/p^t\mathbf{K}[x]$ total geordnet bezüglich der Inklusion, und insbesondere ist $\mathbf{K}[x]/p^t\mathbf{K}[x]$ direkt unzerlegbar.

Sei gemäß 3.3 a)

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{V}_r \qquad \text{mit} \qquad \mathfrak{V}_j \cong \mathbf{K}[x]/p_j^{t_j}\mathbf{K}[x].$$

Sei ferner A_j die Einschränkung von A auf $\mathfrak{V}_j$.

a)⇒b): Genau dann ist A nach 3.12 halbeinfach, wenn jedes A_j halbeinfach ist. Nach der Vorbemerkung ist jedoch A_j nur halbeinfach für $t_j = 1$. Also hat $m_A = [p_1^{t_1}, \ldots, p_r^{t_r}]$ keine mehrfachen Primteiler.

b)⇒a): Wegen $p_j^{t_j}|m_A$ folgt nun $t_j = 1$ für alle $j = 1, \ldots, r$. Nach der Vorbemerkung hat dann $\mathfrak{V}_j \cong \mathbf{K}[x]/p_j\mathbf{K}[x]$ nur die A-invarianten Unterräume 0 von $\mathfrak{V}_j$, somit ist A_j einfach und A halbeinfach. □

3.14 Hauptsatz. *Sei $A \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$. Dann sind gleichwertig:*

a) *Es gilt*

$$m_A = \prod_{j=1}^{s}(x - a_j)$$

mit paarweise verschiedenen $a_j \in \mathbf{K}$.

b) *Es gibt eine Basis* $\{ v_j, \ldots, v_n \}$ *von* $\mathfrak{V}$ *mit*

$$Av_j = a_j v_j \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

und $a_j \in \mathbf{K}$.

Beweis. a)⇒b): nach 3.3 a) gilt

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{V}_r \qquad \text{mit} \qquad \mathfrak{V}_j \cong \mathbf{K}[x]/p_j^{t_j}\mathbf{K}[x]$$

und irreduziblen p_j. Wegen $p_j^{t_j} | m_A$ folgt $p_j = x - a_j$ mit $a_j \in \mathbf{K}$ und $t_j = 1$. Dann ist

$$\dim \mathfrak{V}_j = \dim \mathbf{K}[x]/(x - a_j)\mathbf{K}[x] = 1.$$

Mit $\mathfrak{V}_j = \langle v_j \rangle$ folgt dann die Behauptung unter b).

b)⇒a): Seien $a_1, \ldots, a_m$ die verschiedenen unter den $a_1, \ldots, a_n$. Setzen wir $g = \prod_{j=1}^{m}(x - a_j)$, so gilt $g(A)v_j = 0$ für $j = 1, \ldots, n$, also $m_A | g$. □

3.15 Definition. Erfüllt eine lineare Abbildung A die Aussagen in 3.14, so heißt A diagonalisierbar.

3.16 Beispiele. Sei $A \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ und $\dim \mathfrak{V} = n$.

a) A habe n verschiedene Eigenwerte in $\mathbf{K}$, es sei also $f_A = \prod_{j=1}^{n}(x - a_j)$ mit paarweise verschiedenen a_j. Nach 3.3 b) ist dann $m_A = f_A$, also ist A nach 3.14 diagonalisierbar.

b) Sei $\mathbf{K}$ algebraisch abgeschlossen und m eine natürliche Zahl. Sei $\operatorname{Char} \mathbf{K} = 0$ oder $\operatorname{Char} \mathbf{K} \nmid m$. Sei A diagonalisierbar mit $\det A \neq 0$. Ist $B \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ mit $B^m = A$, so ist auch B diagonalisierbar:

Sei m_A bzw. m_B das Minimalpolynom von A bzw. B. Dann gilt

$$m_A(B^m) = m_A(A) = 0.$$

Also ist m_B ein Teiler des Polynoms $g = m_A(x^m)$. Da A diagonalisierbar ist, gilt nach 3.14

$$m_A = \prod_{j=1}^{s}(x - a_j)$$

mit paarweise verschdenen $a_j \in \mathbf{K}$. Dann ist

$$g = \prod_{j=1}^{s} g_j \qquad \text{mit} \qquad g_j = x^m - a_j.$$

Da $\mathbf{K}$ algebraisch abgeschlossen ist, zerfällt g_j total in $\mathbf{K}[x]$. Ist $g_j(b_{jk}) = 0$, so ist wegen $a_j \neq 0$ auch $b_{jk} \neq 0$ und wegen $\operatorname{Char} \mathbf{K} \nmid m$ sodann

$$g'_j(b_{jk}) = m b_{jk}^{m-1} \neq 0.$$

Also hat jedes g_j nach 2.4 c) lauter einfache Nullstellen. Da g_j und g_k für $j \neq k$ offenbar keine gemeinsame Nullstelle besitzen, folgt

$$g = \prod_{j=1}^{s} \prod_{k=1}^{m} (x - b_{jk})$$

mit paarweise verschiedenen b_{jk}. Aus $m_B | g$ folgt dann mit Hilfe von 3.14 die Diagonalisierbarkeit von B.

c) In b) enthalten ist die folgende häufig benutzte Aussage:

Sei $\mathbf{K}$ algebraisch abgeschlossen mit $\operatorname{Char} \mathbf{K} = 0$ oder $\operatorname{Char} \mathbf{K} \nmid m$. Ist $B^m = E$, so ist B diagonalisierbar.

3.17 Satz. *Sei $\mathfrak{A}$ eine Menge von paarweise vertauschbaren linearen Abbildungen aus* $\operatorname{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$. *Jedes A aus $\mathfrak{A}$ sei diagonalisierbar. Dann sind alle A aus $\mathfrak{A}$ simultan diagonalisierbar, d.h. es gibt eine Basis $\{ v_1, \ldots, v_n \}$ von $\mathfrak{V}$ und $a_j(A) \in \mathbf{K}$ mit*

$$A v_j = a_j(A) v_j \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

für alle $A \in \mathfrak{A}$.

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach $\dim \mathfrak{V} = n$. Hat jedes $A \in \mathfrak{A}$ nur einen Eigenwert, so gilt $A = aE$ wegen der Diagonalisierbarkeit von A, und wir sind fertig.

Also gibt es ein $A_0 \in \mathfrak{A}$ mit $m \geqslant 2$ verschiedenen Eigenwerten $a_1, \ldots, a_m$. Da A_0 diagonalisierbar ist, gilt

$$\mathfrak{V} = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathfrak{V}_j \qquad \text{mit} \qquad \mathfrak{V}_j = \operatorname{Kern}(A_0 - a_j E).$$

Nach 3.8 ist jedes $\mathfrak{V}_j$ A-invariant für alle $A \in \mathfrak{A}$. Wegen $\dim \mathfrak{V}_j < \dim \mathfrak{V}$ können wir die Induktionsannahme auf

$$\mathfrak{A}_j = \{ A_{\mathfrak{V}_j} \mid A \in \mathfrak{A} \}$$

anwenden. Also gibt es eine Basis $\mathfrak{B}_j = \{ v_{jk} \mid k = 1, \ldots, \dim \mathfrak{V}_j \}$ von $\mathfrak{V}_j$ mit

$$Av_{jk} = a_{jk}(A)v_{jk}$$

und $a_{jk}(A) \in \mathbf{K}$ für alle $A \in \mathfrak{A}$. Dann ist $\bigcup_{j=1}^{m} \mathfrak{B}_j$ die gesuchte Basis von $\mathfrak{V}$. □

3.18 Satz. *Sei* $\mathbf{K}$ *algebraisch abgeschlossen und* $\mathfrak{A}$ *eine kommutative Gruppe von linearen Abbildungen aus* $\operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$. *Für jedes* $A \in \mathfrak{A}$ *gebe es eine natürliche Zahl* $m(A)$ *mit* $A^{m(A)} = E$. *Sei ferner* $\operatorname{Char} \mathbf{K} = 0$ *oder* $\operatorname{Char} \mathbf{K} \nmid m(A)$ *für alle* $A \in \mathfrak{A}$. *Dann sind alle* A *aus* $\mathfrak{A}$ *simultan diagonalisierbar.*

Beweis. Nach 3.16 c) ist jedes einzelne $A \in \mathfrak{A}$ diagonalisierbar, mit 3.17 folgt dann die simultane Diagonalisierbarkeit aller $A \in \mathfrak{A}$. □

Die Lösung gewisser Matrixgleichungen bereiten wir durch einen Hilfssatz vor:

3.19 Hilfssatz. *Seien* g *und* $m = \prod_{j=1}^{s} (x - a_j)^{r_j}$ *Polynome in* $\mathbf{K}[x]$ *mit paarweise verschiedenen* $a_j \in \mathbf{K}$. *Für jedes* j $(j = 1, \ldots, s)$ *habe das Polynom* $g - a_j$ *wenigstens eine einfache Nullstelle in* $\mathbf{K}$. *Dann gibt es ein* $h \in \mathbf{K}[x]$ *mit*

$$g(h) \equiv x \pmod{m}.$$

Beweis. (1) Wir behandeln zuerst den Spezialfall $m = x^r$. Nach Voraussetzung gibt es ein $b \in \mathbf{K}$ mit $g(b) = 0 \neq g'(b)$. Wir konstruieren rekursiv Polynome $h_j \in \mathbf{K}[x]$ $(j = 0, 1, \ldots)$ mit

$$(R_j) \qquad g(h_j) \equiv x \pmod{x^{j+1}}.$$

Wir beginnen mit $h_0 = b$, dann ist

$$(R_0) \qquad g(h_0) = g(b) = 0 \equiv x \pmod{x}$$

erfüllt. Sei bereits ein Polynom h_j gefunden mit $h_j(0) = b$ und

$$(R_j) \qquad g(h_j) = x + l_{j+1}x^{j+1}$$

für geeignetes $l_{j+1} \in \mathbf{K}[x]$. Wir versuchen, mit dem Ansatz

$$h_{j+1} = h_j + c_{j+1}x^{j+1}$$

und geeignetem $c_{j+1} \in \mathbf{K}$ zum Ziel zu kommen. Dazu fordern wir

$$(R_{j+1}) \qquad g(h_j + c_{j+1}x^{j+1}) \equiv x \pmod{x^{j+2}}.$$

Für beliebige Charakteristik von $\mathbf{K}$ gilt

$$g(x + y) \equiv g(x) + g'(x)y \pmod{y^2},$$

wie man aus der binomischen Entwicklung

$$(x+y)^j \equiv x^j + jx^{j-1}y \qquad (\mathrm{mod}\, y^2)$$

sofort entnimmt. Also verlangt die Kongruenz (R_{j+1})

$$g(h_j) + g'(h_j)c_{j+1}x^{j+1} \equiv x \qquad (\mathrm{mod}\, x^{j+2}).$$

Dies bedeutet

$$x + l_{j+1}x^{j+1} + g'(b+\ldots)c_{j+1}x^{j+1} \equiv x + (l_{j+1}(0) + g'(b)c_{j+1})x^{j+1} \equiv x \quad (\mathrm{mod}\, x^{j+2}).$$

Diese Bedingung erfüllen wir durch

$$c_{j+1} = -l_{j+1}(0)/g'(b).$$

(2) Nun lösen wir für beliebige $a \in \mathbf{K}$ die Kongruenz

$$g(h) \equiv x \qquad (\mathrm{mod}(x-a)^r),$$

falls es ein $b \in \mathbf{K}$ gibt mit $g(b) - a = 0 \neq g'(b)$. Dazu setzen wir $x - a = y$ und betrachten

$$g(h(a+y)) \equiv a + y \qquad (\mathrm{mod}\, y^r).$$

Diese Kongruenz hat die Gestalt

$$(*) \qquad g_1(k(y)) \equiv y \qquad (\mathrm{mod}\, y^r)$$

mit $g_1 = g - a$ und $k(y) = h(a+y)$. Wegen

$$g_1(b) = g(b) - a = 0 \qquad \text{und} \qquad g'_1(b) = g'(b) \neq 0$$

existiert nach (1) eine Lösung k von (*). Dann ist $h(x) = k(x-a)$ eine Lösung von

$$g(h) \equiv x \qquad (\mathrm{mod}(x-a)^r).$$

(3) Sei nun allgemein $m = \prod_{j=1}^{s}(x-a_j)^{r_j}$ mit paarweise verschiedenen a_j. Nach (2) existieren Polynome h_j mit

$$g(h_j) \equiv x \qquad (\mathrm{mod}(x-a_j)^{r_j}).$$

Nach 2.5 b) gibt es ein $h \in \mathbf{K}[x]$ mit

$$h \equiv h_j \qquad (\mathrm{mod}(x-a_j)^{r_j})$$

für $j = 1, \ldots, s$. Dann folgt

$$g(h) \equiv g(h_j) \equiv x \qquad (\mathrm{mod}(x-a_j)^{r_j}).$$

Da m das kleinste gemeinsame Vielfache der $(x-a_j)^{r_j}$ ist, folgt

$$g(h) \equiv x \qquad (\operatorname{mod} m). \qquad \square$$

3.20 Satz. *Sei* $A \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ *und* $m_A = \prod_{j=1}^{s}(x-a_j)^{r_j}$ *mit paarweise verschiedenen* $a_j \in K$. *Sei* $g \in \mathbf{K}[x]$, *und* $g - a_j$ *habe für* $j = 1, \ldots, s$ *wenigstens eine einfache Nullstelle in* $\mathbf{K}$. *Dann gibt es ein* $h \in \mathbf{K}[x]$ *mit* $g(h(A)) = A$.

Beweis. Nach 3.19 gibt es ein Polynom h mit

$$g(h) \equiv x \qquad (\operatorname{mod} m_A).$$

Das heißt

$$g(h) = x + l m_A$$

mit einem $l \in \mathbf{K}[x]$, also folgt $g(h(A)) = A$. $\square$

3.21 Beispiele. a) Sei $\mathbf{K}$ algebraisch abgeschlossen und $\operatorname{Char}\mathbf{K} \nmid m$. Sei A eine Matrix aus $(\mathbf{K})_n$ mit $\det A \neq 0$. Dann gibt es eine Matrix $B \in (\mathbf{K})_n$ mit $B^m = A$:

In 3.20 wählen wir $g = x^m$. Sei $m_A = \prod_{j=1}^{s}(x-a_j)^{r_j}$ mit paarweise verschiedenen $a_j \in \mathbf{K}$. Nach 3.3 b) sind die a_j Eigenwerte von A, also gilt $a_j \neq 0$. Die Polynome

$$g_j = x^m - a_j \qquad (j = 1, \ldots, s)$$

haben Nullstellen $b_j \neq 0$ im algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbf{K}$, und wegen $\operatorname{Char}\mathbf{K} \nmid m$ ist

$$g'_j(b_j) = m b_j^{m-1} \neq 0.$$

Daher können wir 3.20 anwenden.

b) Die Matrixgleichung

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat für keinen Körper $\mathbf{K}$ Lösungen in $(\mathbf{K})_2$:

Sonst wäre nämlich

$$B^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0,$$

also $m_B | x^4$. Wegen $\operatorname{Grad} m_B \leqslant 2$ ist dann sogar $m_B | x^2$, also

$$B^2 = 0 \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Ist $\operatorname{Char}\mathbf{K} = p > 0$, so hat die Matrixgleichung

$$C^p = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix} \neq E$$

keine Lösung C in $(\mathbf{K})_p$:

Sonst wäre

$$C^{p^2} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}^p = E,$$

wegen $\operatorname{Char}\mathbf{K} = p$ daher

$$m_C | x^{p^2} - 1 = (x-1)^{p^2}.$$

Wegen $\operatorname{Grad} m_C \leqslant p$ folgt $m_C | (x-1)^p$, und dies ergibt den Widerspruch

$$0 = (C-E)^p = C^p - E.$$

d) Der Versuch, die Gleichung $B^2 = A$ bei vorgegebenem $A = (a_{ij})$ direkt zu lösen, führt zu dem System

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik} b_{kj} = a_{ij} \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

von n^2 gekoppelten quadratischen Gleichungen für die b_{ij}. Selbst für $n = 2$ ist die Lösbarkeit dieses Gleichungssystems unter der Nebenbedingung $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ nicht unmittelbar zu sehen.

3.22 Bemerkung. Der Versuch, die beiden folgenden Sätze 3.23 und 3.24 in voller Allgemeinheit zu beweisen, stößt für $\operatorname{Char}\mathbf{K} = p > 0$ auf Hindernisse. Treten nämlich in den Minimalpolynomen irreduzible Faktoren f mit $f' = 0$ auf, so sind die gewünschten Aussagen i.a. nicht mehr richtig. Bei Körpern $\mathbf{K}$ mit $\operatorname{Char}\mathbf{K} = p > 0$ gibt es i.a. solche Polynome f, sie haben offenbar die Gestalt

$$f = \sum_{j=0}^{m} a_j x^{jp}.$$

Wir gehen diesen Komplikationen aus dem Wege, indem wir die auftretenden Minimalpolynome als total zerfallend voraussetzen.

3.23 Satz. *Sei $A \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$. Das Minimalpolynom von A zerfalle total, etwa*

$$m_A = \prod_{j=1}^{s} (x - a_j)^{r_j}$$

mit paarweise verschiedenen $a_j \in \mathbf{K}$.

a) *Es gibt Polynome* $g, h \in \mathbf{K}[x]$ *mit*

$$A = g(A) + h(A),$$

dabei ist $g(A)$ *diagonalisierbar mit den Eigenwerten* $a_1, \ldots, a_s$ *und* $h(A)$ *ist nilpotent, d.h.* $h(A)^k = 0$ *für geeignetes* k.

b) *Sei* $A = A_1 + A_2$ *mit* $A_1 A_2 = A_2 A_1$, *sei* A_1 *diagonalisierbar und* A_2 *nilpotent. Dann gilt* $A_1 = g(A)$ *und* $A_2 = h(A)$.
(Additive Jordan-Zerlegung).

Beweis. a) Nach 2.5 b) existiert ein $g \in \mathbf{K}[x]$ mit

$$g \equiv a_j \qquad (\mathrm{mod}(x - a_j)^{r_j})$$

für $j = 1, \ldots, s$. Nach 3.3 gilt

$$\mathfrak{V} = \bigoplus_{j=1}^{r} \mathfrak{V}_j \qquad \text{mit} \quad \mathfrak{V}_j \cong \mathbf{K}[x]/p_j^{t_j}\mathbf{K}[x],$$

wobei $t_j \leqslant r_{j'}$ und $p_j = x - a_{j'}$ für geeignetes j'. Aus

$$g = a_{j'} + (x - a_{j'})^{r_{j'}} g_j$$

(mit geeignetem g_j) folgt

$$g(A)_{\mathfrak{V}_j} = a_{j'} E_{\mathfrak{V}_j}.$$

Also ist $g(A)$ auf $\mathfrak{V}_j$ und dann auch auf $\mathfrak{V} = \bigoplus_{j=1}^{r} \mathfrak{V}_j$ diagonalisierbar mit den Eigenwerten $a_1, \ldots, a_s$.

Setzen wir $h = x - g$, so folgt $A = g(A) + h(A)$ und

$$h \equiv x - a_j \qquad (\mathrm{mod}(x - a_j)^{r_j}).$$

Setzen wir $t = \mathrm{Max}_{j=1,\ldots,s}\, r_j$, so ist für $j = 1, \ldots, s$

$$h^t \equiv (x - a_j)^t \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}(x - a_j)^{r_j}).$$

Daher ist $m_A = \prod_{j=1}^{s} (x - a_j)^{r_j}$ ein Teiler von h^t, und dies zeigt

$$0 = h^t(A) = h(A)^t.$$

b) Aus $A = A_1 + A_2$ und $A_1 A_2 = A_2 A_1$ folgt $AA_j = A_j A$ $(j = 1, 2)$ und dann

$$g(A)A_1 = A_1 g(A), \qquad h(A)A_2 = A_2 h(A).$$

Setzen wir $\dim \mathfrak{V} = n$, so sind die Minimalpolynome der nilpotenten Abbildungen $h(A)$ und A_2 Teiler von x^n, also ist $h(A)^n = A_2^n = 0$. Wegen $h(A)A_2 = A_2h(A)$ folgt

$$(A_2 - h(A))^{2n} = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} A_2^j h(A)^{2n-j} = 0.$$

Wegen $g(A)A_1 = A_1g(A)$ sind A_1 und $g(A)$ nach 3.17 simultan diagonalisierbar. Also ist

$$g(A) - A_1 = A_2 - h(A)$$

diagonalisierbar und nilpotent, somit $A_1 = g(A)$ und $A_2 = h(A)$. □

3.24 Satz. *Sei A eine reguläre lineare Abbildung aus* $\mathrm{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$. *Das Minimalpolynom m_A zerfalle total.*

a) *Es gibt Polynome $f, g \in \mathbf{K}[x]$ mit $A = g(A)f(A)$, wobei $g(A)$ diagonalisierbar ist und $f(A) - E$ nilpotent. (Ein solches $f(A)$ mit einzigem Eigenwert 1 nennt man unipotent.)*

b) *Sei $A = A_1A_2 = A_2A_1$ mit diagonalisierbarem A_1 und unipotentem A_2. Dann gilt $A_1 = g(A)$ und $A_2 = f(A)$.*
(Multiplikative Jordan Zerlegung.)

Beweis. a) Sei gemäß 3.23 $A = g(A) + h(A)$ mit diagonalisierbarem $g(A)$ und nilpotentem $h(A)$. Dabei hat gemäß Konstruktion $g(A)$ dieselben Eigenwerte wie A, ist daher regulär. Somit ist

$$A = g(A)(E + g(A)^{-1}h(A)).$$

Für genügend großes m gilt dabei

$$(g(A)^{-1}h(A))^m = g(A)^{-m}h(A)^m = 0.$$

Wir haben also nur noch zu zeigen, daß es ein Polynom f mit
$f(A) = E + g(A)^{-1}h(A)$ gibt.

Ist B irgendeine reguläre lineare Abbildung, so gilt nach 3.3 b)

$$0 = f_B(B) = B^n + \sum_{j=0}^{n-1} c_jB^j$$

mit $c_0 = \pm \det B \neq 0$. Daraus folgt

$$B^{-1} = -c_0^{-1}(B^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} c_jB^{j-1}).$$

Als läßt sich $g(A)^{-1}$ als Polynom in A schreiben, dann auch $E + g(A)^{-1}h(A)$.

b) Nun gilt

$$A_1^{-1} g(A) = A_2 f(A)^{-1}.$$

Aus $AA_1 = A_1 A$ folgt $A_1^{-1} g(A) = g(A) A_1^{-1}$. Wegen 3.17 sind A_1^{-1} und $g(A)$ simultan diagonalisierbar, also ist auch $A_1^{-1} g(A)$ diagonalisierbar. A_2 und $f(A)^{-1}$ haben nur den Eigenwert 1, diesen mit der Vielfachheit $\dim \mathfrak{V}$. Da auch A_2 und $f(A)^{-1}$ vertauschbar sind, lassen sie sich nach 3.10 a) simultan auf Dreiecksgestalt bringen. Daher hat auch $A_2 f(A)^{-1}$ den Eigenwert 1 mit der Vielfachheit $\dim \mathfrak{V}$. Das liefert

$$A_1^{-1} g(A) = A_2 f(A)^{-1} = E,$$

also $A_1 = g(A)$ und $A_2 = f(A)$. □

Aufgaben

A 3.1 Sei $A \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ und $\mathfrak{U}$ ein A-invarianter Unterraum von $\mathfrak{V}$. Man zeige:

a) $m_{A_\mathfrak{U}} | m_A$ und $m_{A_{\mathfrak{V}/\mathfrak{U}}} | m_A$.

b) $m_A | m_{A_\mathfrak{U}} m_{A_{\mathfrak{V}/\mathfrak{U}}}$.

c) Ist $(m_{A_\mathfrak{U}}, m_{A_{\mathfrak{V}/\mathfrak{U}}}) = 1$, so gilt $m_A = m_{A_\mathfrak{U}} m_{A_{\mathfrak{V}/\mathfrak{U}}}$.

d) Sei

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

mit quadratischen Matrizen

$$A_{jj} = \begin{pmatrix} a_j & & & * \\ & a_j & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_j \end{pmatrix}$$

mit $a_1 \neq a_2$. Man zeige, daß A genau dann diagonalisierbar ist, wenn $A_{jj} = a_j E_j$ für $j = 1, 2$ ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist.

A 3.2 Sei

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

vom Typ (n, n).

a) Ist t die kleinste natürliche Zahl mit $tk \geqslant n$, so ist x^t das Minimalpolynom von J^k.

b) Sei die natürliche Zahl s bestimmt durch $ks \leqslant n < k(s+1)$. In der Jordanschen Normalform von J^k treten dann $n-ks$ Kästchen vom Typ $(s+1, s+1)$ und $k(s+1)-n$ Kästchen vom Typ (s, s) auf.

A 3.3 Sei $\mathbf{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper mit Char $\mathbf{K} \neq 2$ und $A \in (\mathbf{K})_n$. Dabei sind gleichwertig:

a) Es gibt ein $B \in (\mathbf{K})_n$ mit $B^2 = A$.

b) Die Jordan-Kästchen von A zum Eigenwert 0 treten in Paaren der Gestalt $J_s(0), J_s(0)$ und $J_s(0), J_{s+1}(0)$ auf.
(Man verwende 3.21a) und A3.2.)

A 3.4 Sei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

vom Typ (n, n) mit $n \geqslant 2$.

a) Man bestimme auf möglichst einfache Weise alle Eigenwerte von A.

b) Man bestimme die Jordansche Normalform von A und das Minimalpolynom m_A.

A 3.5 Sei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & \dots & a & a & a \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c \\ a & a & a & \dots & a & a & a \end{pmatrix}$$

vom Typ (n, n) mit $n \geqslant 3$.

a) Man zeige, daß 0 ein mindestens $(n-2)$-facher Eigenwert von A ist.

b) Man bestimme durch Betrachtung von Spur A und Spur A^2 die restlichen beiden Eigenwerte von A und zeige

$$f_A = x^{n-2}(x^2 - 2ax - (n-2)a(b+c)).$$

c) Es gilt

$$m_A = \begin{cases} x^2 & \text{für } a = 0 \\ x^2 - 2ax & \text{für } b = c = 0 \\ x(x^2 - 2ax - (n-2)a(b+c)) & \text{für } ab \neq 0 \text{ oder } ac \neq 0. \end{cases}$$

A 3.6 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 \end{pmatrix}$$

vom Typ $(n+1, n+1)$ mit $n \geqslant 2$. Es seien nicht alle a_j und nicht alle b_j gleich 0.

a) Man bestimme die Eigenwerte von A.

b) Man zeige $m_A = x(x^2 - \sum_{j=1}^{n} a_j b_j)$.

c) Für $\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \neq 0$ und Char $\mathbf{K} \neq 2$ ist A halbeinfach.

d) Sei $\sum_{j=1}^{n} a_j b_j = 0$. Dann hat A ein Jordan-Kästchen vom Typ (3,3) und $n-2$ Jordan-Kästchen vom Typ $(1, 1)$.

A 3.7 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & \dots & a \\ b & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & 0 \end{pmatrix}$$

vom Typ (n, n) mit $n \geqslant 2$, $ab \neq 0$ und $a \neq b$.

a) Man beweise

$$f_A = \frac{b(x+a)^n - a(x+b)^n}{b-a}.$$

(Dazu betrachte man mit einer weiteren Variablen t die Determinante

$$g(t) = \det \begin{pmatrix} x+t & t-a & t-a & \dots & t-a \\ t-b & x+t & t-a & \dots & t-a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ t-b & t-b & t-b & \dots & x+t \end{pmatrix}$$

zeige, daß $g(t)$ ein Polynom vom Grad 1 in t ist und berechne $f_A = g(0)$ aus $g(a)$ und $g(b)$.)

b) Durch elementare Umformung zeige man $\operatorname{Rang}(A - cE) \geqslant n - 1$ für alle c.

c) Man beweise $m_A = f_A$.

d) Ist $\operatorname{Char} \mathbf{K} \nmid n$, so ist $(f_A, f'_A) = 1$, und A ist halbeinfach.

e) Ist $\mathbf{K}$ algebraisch abgeschlossen und $\operatorname{Char} \mathbf{K} = p$ ein Teiler von n, so ist A nicht diagonalisierbar.

A 3.8 Sei $A \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$. Dann sind gleichwertig:

a) $\mathfrak{V}$ ist ein zyklischer $\mathbf{K}[x]$-Modul.

b) Die Menge

$$\{ B \mid B \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}), \quad BA = AB \}$$

ist gleich

$$\{ g(A) \mid g \in \mathbf{K}[x] \}.$$

c) $\mathfrak{V} \cong \bigoplus_{j=1}^{r} \mathbf{K}[x]/p_j^{t_j}\mathbf{K}[x]$ mit paarweise verschiedenen irreduziblen normierten Polynomen p_j, d.h. $m_A = f_A$.

A 3.9 Sei $A \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$. Dann gibt es ein $v_0 \in \mathfrak{V}$ mit

$$\{ g \mid g \in \mathbf{K}[x], \quad g(A)v_0 = 0 \} = m_A\mathbf{K}[x].$$

a) Man beweise diese Aussage mit Hilfe der Jordanschen Normalform.

b) Ist der zugrundeliegende Körper $\mathbf{K}$ unendlich, so gebe man einen einfacheren Beweis, welcher darauf beruht, daß aus $\mathfrak{U}_j < \mathfrak{V}$ $(j = 1, \ldots, r)$ auch $\bigcup_{j=1}^{r} \mathfrak{U}_j \subset \mathfrak{V}$ folgt (siehe Aufgabe A 1.1 c).)

A 3.10 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 \end{pmatrix}$$

Für jede natürliche Zahl m mit $\operatorname{Char} \mathbf{K} \nmid m$ gebe man eine Matrix $B \in (\mathbf{K})_4$ an mit $B^m = A$.

A 3.11 Sei $\mathfrak{V}$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $A \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ mit $A^m = E$. Sei $\epsilon = e^{2\pi i/m}$. Wir setzen

$$P_j = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \epsilon^{-jk} A^k \qquad (j = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Man beweise:

a) $P_j A = A P_j = \epsilon^j P_j$.

b) $P_j^2 = P_j, P_j P_k = 0$ für $j \neq k$ und $E = \sum_{j=0}^{m-1} P_j$.

c) $\operatorname{Bild} P_j = \operatorname{Kern}(A - \epsilon^j E)$.

d) A ist diagonalisierbar.

A 3.12 Sei $\mathbf{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{Char} \mathbf{K} = p > 0$. Sei $\{ v_1, \ldots, v_n \}$ eine Basis des $\mathbf{K}$-Vektorraumes und $A \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ mit

$$A v_j = v_{j+1} \quad (1 \leqslant j < n), \qquad A v_n = v_1.$$

Sei $n = p^k s$ mit $p \nmid s$. Dann gilt

$$x^s - 1 = \prod_{j=1}^{s} (x - a_j)$$

mit paarweise verschiedenen $a_j \in \mathbf{K}$.

Die Jordansche Normalform von A hat die Gestalt

$$\begin{pmatrix} J_{p^k}(a_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{p^k}(a_s) \end{pmatrix}$$

mit

$$J_{p^k}(a_j) = \begin{pmatrix} a_j & 1 & & 0 \\ & a_j & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & a_j \end{pmatrix}$$

vom Typ (p^k, p^k).
(Man zeige

$$f_A = m_A = x^n - 1 = \prod_{j=1}^{s} (x - a_j)^{p^k} \quad .)$$

A 3.13 Sei $\mathfrak{P}_n$ der Unterraum der Polynome in $\mathbf{K}[x]$, deren Grad höchstens n ist. Ferner sei $D \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{P}_n, \mathfrak{P}_n)$ definiert durch $Df = f'$.

a) $f_D = x^{n+1}$.

b) Ist $\operatorname{Char} \mathbf{K} = 0$, so gilt $m_D = x^{n+1}$, und in der Jordanschen Normalform zu D kommt nur ein Kästchen vor.

c) Sei $\operatorname{Char} \mathbf{K} = p > 0$. Dann ist

$$m_D = \begin{cases} x^{n+1} & \text{für } n < p \\ x^p & \text{für } n \geqslant p. \end{cases}$$

Sei $n = kp + r$ mit $0 \leqslant r < p$. Dann erscheinen in der Jordanschen Normalform zu D genau k Kästchen vom Typ (p, p) und ein Kästchen vom Typ $(r+1, r+1)$.

A 3.14 Sei der Vektorraum $\mathfrak{P}_n$ wie in A 3.13 definiert, aber nun sei $T \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{P}_n, \mathfrak{P}_n)$ mit $Tf = f(x+1)$.

a) $f_T = (x-1)^{n+1}$.

b) Ist $\operatorname{Char} \mathbf{K} = 0$, so gilt $m_T = (x-1)^{n+1}$, und T hat nur ein einziges Jordan-Kästchen.

c) Sei $\operatorname{Char} \mathbf{K} = p > 0$ und $n = kp + r$ mit $0 \leqslant r < p$. Dann hat $\operatorname{Kern}(T - E)$ die Basis

$$\{\, 1,\ x^p - x,\ (x^p - x)^2, \ldots, (x^p - x)^k \,\}.$$

Definieren wir für $j < p$ die Polynome $\binom{x}{j}$ durch

$$\binom{x}{j} = \frac{x(x-1)\ldots(x-j+1)}{j!},$$

so liefert die Zerlegung $\mathfrak{P}_n = \mathfrak{W}_0 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{W}_k$ mit

$$\mathfrak{W}_i = \langle (x^p - x)^i \binom{x}{j} \mid j = 0, 1, \ldots, p-1 \rangle \qquad \text{für} \quad 0 \leqslant i < k$$

und

$$\mathfrak{W}_k = \langle (x^p - x)^k \binom{x}{j} \mid j = 0, 1, \ldots, r \rangle$$

die Jordansche Normalform von T, nämlich k Kästchen vom Typ (p, p) und ein Kästchen vom Typ $(r+1, r+1)$, alle zum Eigenwert 1.

Die folgenden Aufgaben setzen die Kenntnis einiger Tatsachen aus der multilinearen Algebra voraus:

Seien $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ **K**-Vektorräume der Dimensionen m bzw. n und $A \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$, $B \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{W}, \mathfrak{W})$. Dann wird bekanntlich eine lineare Abbildung
$A \otimes B \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{V} \otimes \mathfrak{W}, \mathfrak{V} \otimes \mathfrak{W})$ definiert durch

$$(A \otimes B)(v \otimes w) = Av \otimes Bw \qquad \text{für} \quad v \in \mathfrak{V}, w \in \mathfrak{W}.$$

Die Frage nach der Jordanschen Normalform von $A \otimes B$ liegt nahe. Wir beantworten sie für den Fall, daß A und B total zerfallende Minimalpolynome haben und nur ein Jordan-Kästchen besitzen. Dann gibt es also Basen $\{ v_1, \ldots, v_m \}$ und $\{ w_1, \ldots, w_n \}$ von $\mathfrak{V}$ bzw. $\mathfrak{W}$ mit

$$\begin{aligned} Av_1 &= av_1, \quad Av_j = av_j + v_{j-1} \qquad (2 \leqslant j \leqslant m), \\ Bw_1 &= bw_1, \quad BW_j = bw_j + w_{j-1} \qquad (2 \leqslant j \leqslant n). \end{aligned}$$

(Ist **K** algebraisch abgeschlossen, so läßt sich der allgemeine Fall vermöge der Distributivität des Tensorproduktes leicht auf diesen Fall zurückführen.) Sind $J_{n_i}(c_i)$ $(i = 1, \ldots, r)$ die Jordan-Kästchen von $A \otimes B$, so schreiben wir symbolisch

$$J_m(a) \otimes J_n(b) \sim J_{n_1}(c_1) \oplus \ldots \oplus J_{n_r}(c_r).$$

A 3.15 Für $a \neq 0$ gilt $J_m(a) \otimes J_n(0) \sim J_n(0) \oplus \ldots m \oplus J_n(0)$.
(Wir schlagen zwei Beweisverfahren vor:

a) Man zeige $(A \otimes B)^n = A^n \otimes B^n = 0$ und

$$\operatorname{Kern}(A \otimes B) = \langle v_i \otimes w_1 \mid i = 1, \ldots, m \rangle,$$

also $\dim \operatorname{Kern}(A \otimes B) = m$.

b) Die Vektoren

$$(A \otimes B)^j (v_i \otimes w_n) = A^j v_i \otimes w_{n-j} \qquad (i = 1, \ldots, m; \quad j = 0, \ldots, n-1)$$

sind linear unabhängig. Setzen wir

$$\mathfrak{J}_i = \langle (A \otimes B)^j (v_i \otimes w_n) \mid j = 0, \ldots, n-1 \rangle,$$

so ist $\mathfrak{V} \otimes \mathfrak{W} = \mathfrak{J}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{J}_m$ eine bei $A \otimes B$ invariante Zerlegung.)

A 3.16 Für $m \leqslant n$ gilt

$$J_m(0) \otimes J_n(0) \sim J_1(0) \oplus J_1(0) \oplus J_2(0) \oplus J_2(0) \oplus \ldots$$

$$\oplus J_{m-1}(0) \oplus J_{m-1}(0) \oplus J_m(0) \underbrace{\oplus \ldots \oplus}_{n-m+1} J_m(0).$$

(Wir bilden für $-(m-1) \leqslant j \leqslant n-1$ die Unterräume

$$\mathfrak{U}_j = \langle v_i \otimes w_k \mid k - i = j \rangle.$$

Dann ist $\mathfrak{U}_i$ invariant bei $A \otimes B$ und liefert gerade ein Jordan-Kästchen $J_{m_i}(0)$, wobei

$$m_i = \dim \mathfrak{U}_i = \begin{cases} m+j & \text{für } -(m-1) \leqslant j \leqslant -1 \\ m & \text{für } 0 \leqslant j \leqslant n-m \\ n-j & \text{für } n-m+1 \leqslant j \leqslant n-1.) \end{cases}$$

A 3.17 Für $n \geqslant 2$ und $ab \neq 0$ gilt

$$J_2(a) \otimes J_n(b) \sim \begin{cases} J_{n-1}(ab) \oplus J_{n+1}(ab) & \text{falls Char } \mathbf{K} \nmid n \\ J_n(ab) \oplus J_n(ab) & \text{falls Char } \mathbf{K} | n. \end{cases}$$

(1) Aus $(A - aE)^2 = 0$ und

$$A \otimes B - abE \otimes E = (A - aE) \otimes B + aE \otimes (B - bE)$$

folgere man zuerst

$$(A \otimes B - abE \otimes E)^j = a^j E \otimes (B - bE)^j + ja^{j-1}(A - aE) \otimes B(B - bE)^{j-1}.$$

Dies zeigt

$$m_{A \otimes B} = \begin{cases} (x - ab)^{n+1} & \text{für Char } \mathbf{K} \nmid n \\ (x - ab)^n & \text{für Char } \mathbf{K} | n. \end{cases}$$

(2) $\operatorname{Kern}(A \otimes B - abE \otimes E) = \langle v_1 \otimes w_1, bv_1 \otimes w_2 - av_2 \otimes w_1 \rangle$.
Daraus folgt die Behauptung.)

A 3.18 Sei Char $\mathbf{K} = 0$. Für $2 \leqslant m \leqslant n$ und $ab \neq 0$ beweise man durch Induktion nach m

$$J_m(a) \otimes J_n(b) \sim J_{n-m+1}(ab) \oplus J_{n-m+3}(ab) \oplus \ldots \oplus J_{n+m-1}(ab).$$

(Für $m < n$ haben $J_2(1) \otimes (J_m(a) \otimes J_n(b))$ und

$$(J_2(1) \otimes J_m(a)) \otimes J_n(b) \sim J_{m-1}(a) \otimes J_n(b) \oplus J_{m+1}(a) \otimes J_n(b)$$

denselben Jordan-Typ (Assoziativität und Distributivität des Tensorproduktes). Der Vergleich liefert unter Verwendung der Induktionsannahme und von A 3.17 den Jordan-Typ von $J_{m+1}(a) \otimes J_n(b)$.)

Kapitel II
Endlichdimensionale Hilberträume

In diesem Kapitel verfeinern wir die geometrische Struktur der Vektorräume durch die Einführung von Länge und Skalarprodukt. Von zentraler Bedeutung sind aus mehreren Gründen die Vektorräume über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit definitem Skalarprodukt, welche wir in Anlehnung an den Sprachgebrauch der Funktionalanalysis als Hilberträume bezeichnen wollen (§ 4). Die Theorie der Hilberträume über $\mathbb{R}$, welche man auch als euklidische Vektorräume bezeichnet, enthält die euklidische Geometrie.

Die Theorie der Hilberträume führt zu ausgezeichneten Klassen von linearen Abbildungen, unter denen die hermiteschen Abbildungen die größte Bedeutung für zahlreiche physikalischen Anwendungen haben (§ 6). So führt zum Beispiel die Behandlung von linearen Schwingungsproblemen der Mechanik oder Elektrodynamik auf Eigenwertfragen für hermitesche Abbildungen. Dieser Anwendung werden wir in Kapitel III ausführlich nachgehen. Um diese späteren Untersuchungen vorzubereiten, haben wir der Behandlung der Eigenwerte hermitescher Abbildungen breiten Raum gewidmet (§ 6–8).

In manchen Fällen ist es nützlich, auf Vektorräumen auch allgemeinere Normen einzuführen, welche nicht mit Skalarprodukten zusammenhängen. So möchte man zum Beispiel Normen auf Matrixringen haben, mit deren Hilfe sich Aufgaben der linearen Algebra approximativ lösen lassen. Ein typisches Beispiel dafür ist die Formel für die geometrische Reihe

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \ldots,$$

mit deren Hilfe man für genügend kleine Matrizen A die Inverse von $E - A$ gut angenähert berechnen kann (siehe 2.11). Dies legt es nahe, den Begriff des normierten Vektorraumes in großer Allgemeinheit einzuführen (§ 1). Für endlichdimensionale Vektorräume erhält man eine Reihe von nützlichen Aussagen, die weitgehend bekannten Sätzen der Analysis entsprechen (siehe 1.9–1.16).

Die Theorie der Banachräume und der Hilberträume von unendlicher Dimension ist eines der zentralen Gebiete der modernen Analysis geworden. Sie umfaßt einen großen Teil der klassischen Hilfsmittel der mathematischen Physik, wie die Theorie der Fourierreihen und der linearen Differential- und Integralgleichungen. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß auch die Quantenmechanik in der ihr vor allem von Heisenberg gegebenen mathematischen Gestalt eine Theorie von Hilberträumen und hermiteschen Abbildungen ist. Unsere Darstellung beschränkt sich fast überall auf den Fall endlichdimensionaler Vektorräume, für welche die

auftretenden topologischen Fragen trivial sind. Wir haben jedoch die Bezeichnungen weitgehend in Anlehnung an die Funktionalanalysis gewählt und gelegentlich auf die tieferliegenden Probleme und Ergebnisse hingewiesen. Es sei betont, daß die Begriffe und Sätze dieses Kapitels nicht nur als Vorbereitung auf die Funktionalanalysis von Bedeutung sind.
Die Ergebnisse dieses Kapitels sind die unentbehrliche Grundlage für das Kapitel III über linearen Schwingungen. Ferner spielt der Ergodensatz aus § 3 bei der Untersuchung stochastischer Matrizen in Kapitel IV eine wichtige Rolle.

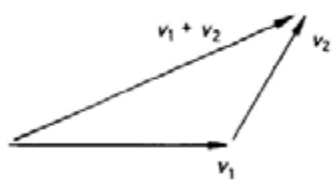
§ 1 Normierte Vektorräume

In diesem Kapitel sei stets $\mathbf{K}$ der reelle oder komplexe Zahlkörper. Wir führen auf $\mathbf{K}$-Vektorräumen einen Längenbegriff ein:

1.1 Definition. Sei $\mathfrak{V}$ ein $\mathbf{K}$-Vektorraum. Eine Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathfrak{V}$ sei eine Abbildung von $\mathfrak{V}$ in $\mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:
(1) Für alle $v \in \mathfrak{V}$ ist $\|v\| \geqslant 0$, und $\|v\| = 0$ gilt genau für $v = 0$.
(2) $\|av\| = |a|\,\|v\|$ für alle $v \in \mathfrak{V}$ und alle $a \in \mathbf{K}$. (Dabei ist $|a|$ der Betrag der reellen oder komplexen Zahl a.)
(3) Für alle $v_1, v_2 \in \mathfrak{V}$ gilt die sog. Dreiecksungleichung

$$\|v_1 + v_2\| \leqslant \|v_1\| + \|v_2\|.$$

Sie verallgemeinert die elementargeometrische Tatsache, daß in einem Dreieck die Länge jeder Seite höchstens so groß ist wie die Summe der Längen der beiden anderen Seiten.



Der Begriff einer Norm ist natürlich dem elementaren Längenbegriff nachgebildet, ist aber noch von großer Allgemeinheit, wie die Beispiele in 1.2 und 1.4 zeigen werden.

1.2 Beispiele. a) Sei $\mathfrak{V} = \mathbf{K}^n$. Für $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{V}$ setzen wir

$$\|v\|_\infty = \operatorname*{Max}_{j=1,\ldots,n} |x_j|.$$

Offenbar sind die Bedingungen (1) und (2) aus Definition 1.1 erfüllt. Auch (3) ist

erfüllt, denn es gilt

$$\operatorname*{Max}_j |x_j + y_j| \leqslant \operatorname*{Max}_j(|x_j| + |y_j|) \leqslant \operatorname*{Max}_j |x_j| + \operatorname*{Max}_j |y_j|.$$

Also ist $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf $\mathfrak{V}$. (Die Begründung für den Index ∞ findet der Leser in 1.4 c).)
b) Sei wieder $\mathfrak{V} = \mathbf{K}^n$. Für $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{V}$ setzen wir diesmal

$$\|v\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|.$$

Man rechnet leicht nach, daß auch dies eine Norm auf $\mathfrak{V}$ ist.
c) Sei $\mathbf{C}(0,1)$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Abbildungen des kompakten Intervalles $[0,1]$ in $\mathbb{R}$. Für $f \in \mathbf{C}(0,1)$ existiert bekanntlich $\operatorname{Max}_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)|$. Setzen wir

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{Max}_{o\leqslant x\leqslant 1} |f(x)|,$$

so sieht man leicht, daß $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf $\mathbf{C}(0,1)$ ist. (Offenbar ist dies das kontinuierliche Analogon zu Beispiel 1.2 a).)
d) Auf den Raum $\mathbf{C}(0,1)$ aus c) definieren wir durch

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$$

eine weitere Norm. Offenbar gilt $\|f\|_1 \geqslant 0$ für alle $f \in \mathbf{C}(0,1)$. Ist

$$0 = \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt,$$

so muß f die Nullfunktion sein:

Ist nämlich $|f(t_0)| > 0$ in einem $t_0 \in [0,1]$, so gibt es wegen der Stetigkeit von f ein Intervall I von positiver Länge ϵ, in welchem $|f(t)| \geqslant \frac{1}{2}|f(t_0)|$ gilt. Dann ist aber

$$\|f\|_1 \geqslant \int_I |f(t)|\, dt \geqslant \frac{\epsilon}{2}|f(t_0)| > 0.$$

(Man kann d) als das kontinuierliche Analogon zu 1.2 b) ansehen.)

Weitere Beispiele von Normen gewinnen wir mit Hilfe von zwei Ungleichungen, die häufiger in der Analysis Verwendung finden:

1.3 Satz. a) *Seien x, y, a reelle Zahlen mit $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ und $0 < a < 1$. Dann gilt*

$$x^a y^{1-a} \leqslant ax + (1-a)y.$$

b) *(Höldersche*[1]) *Ungleichung) Für* $x_j, y_j \in \mathbb{C}$ *und jede reelle Zahl* p *mit* $1 < p < \infty$ *gilt*

$$\left|\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right| \leqslant (\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p)^{1/p} (\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q)^{1/q}.$$

Dabei ist q *mit* $1 < q < \infty$ *eindeutig bestimmt durch*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

(Für $0 \leqslant x \in \mathbb{R}$ *und* $0 < s \in \mathbb{R}$ *ist dabei natürlich zu setzen*

$$x^s = e^{s \log x} \qquad \textit{und} \qquad 0^s = 0.)$$

c) *(Minkowskische*[2]) *Ungleichung) Für* $1 \leqslant p < \infty$ *und alle* $x_j, y_j \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p)^{1/p} \leqslant (\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p)^{1/p} + (\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p)^{1/p}.$$

Beweis. a) Für $x = 0$ oder $y = 0$ ist die Behauptung trivial.

Sei zuerst $0 < x \leqslant y$. Da die Funktion f mit $f(t) = t^{-a}$ wegen $a > 0$ in $[x, y]$ monoton fällt, gilt

$$y^{1-a} - x^{1-a} = (1-a) \int_x^y t^{-a}\, dt \leqslant (1-a)(y-x)x^{-a}.$$

Multiplikation mit $x^a > 0$ liefert

$$x^a y^{1-a} - x \leqslant (1-a)(y-x),$$

also

$$x^a y^{1-a} \leqslant x + (1-a)(y-x) = ax + (1-a)y.$$

Ist $0 < y \leqslant x$, so folgt wegen $a < 1$ mit dem Tripel $(1-a, y, x)$ anstelle von (a, x, y) aus dem bereits Bewiesenen

$$y^{1-a} x^a \leqslant (1-a)y + ax.$$

b) Wir dürfen offenbar

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \neq 0 \neq \sum_{j=1}^{n} |y_j|^p$$

---

1) Otto Hölder (1859–1937) Leipzig; Analysis, Potentialtheorie, Gruppentheorie.

2) Hermann Minkowski (1864–1909) Königsberg, Zürich, Göttingen; Zahlentheorie, insb. quadratische Formen, konvexe Körper, geometrische Grundlagen der speziellen Relativitätstheorie (4-dimensionale Raum-Zeit-Welt).

annehmen. Wir setzen

$$x_j' = \frac{|x_j|^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p}, \qquad y_j' = \frac{|y_j|^q}{\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q}$$

und $a = \frac{1}{p}$, also $\frac{1}{q} = 1 - a$. Mit a) folgt dann

$$\frac{|x_j||y_j|}{(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{1/p}(\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{1/q}} = {x_j'}^{1/p}{y_j'}^{1-1/p} \leqslant \frac{1}{p}x_j' + \frac{1}{q}y_j'.$$

Summation über $j = 1, \ldots, n$ ergibt

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j||y_j|}{(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{1/p}(\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{1/q}} \leqslant \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{n} x_j' + \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{n} y_j' = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Das ist die Behauptung.
c) Da die Ungleichung für $p = 1$ trivial ist, können wir im Beweis $1 < p < \infty$ annehmen. Sei wieder $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$. Mit b) folgt nun

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p &= \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j||x_j + y_j|^{p-1} \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} |x_j||x_j + y_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^{n} |y_j||x_j + y_j|^{p-1} \\
&\leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \\
&\quad + \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \\
&= \left\{\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p\right)^{1/p}\right\} \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p\right)^{1-1/p}.
\end{aligned}$$

Da wir

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p > 0$$

annehmen dürfen, folgt daraus die Behauptung. □

Mit Hilfe von 1.3 können wir eine Serie von Normen auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ angeben:

1.4 Satz. *Sei* $\mathfrak{V} = \mathbb{K}^n$.
a) *Sei* $1 \leqslant p < \infty$. *Setzen wir für* $v = (x_1, \ldots, x_n)$

$$\|v\|_p = (\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p)^{1/p},$$

so ist $\|\cdot\|_p$ *eine Norm auf* $\mathfrak{V}$.
b) *Für* $1 \leqslant p < r < \infty$ *und alle* $v \in \mathfrak{V}$ *gilt*

$$\|v\|_p \geqslant \|v\|_r \geqslant \|v\|_\infty.$$

c) *Für jedes* $v \in \mathfrak{V}$ *gilt*

$$\lim_{p \to \infty} \|v\|_p = \|v\|_\infty.$$

Beweis. a) Die Gültigkeit der Dreiecksungleichung folgt aus 1.3 c), die übrigen Forderungen an eine Norm sind offenbar erfüllt.
b) Sei zuerst $w = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{V}$ mit

$$1 = \|w\|_p = (\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p)^{1/p}.$$

Dann ist

$$1 \geqslant |x_j|^p = e^{p \log |x_j|},$$

somit $p \log |x_j| \leqslant 0$, wegen $p > 0$ also $\log |x_j| \leqslant 0$. Dann folgt aber wegen $p < r$

$$|x_j|^p = e^{p \log |x_j|} \geqslant e^{r \log |x_j|} = |x_j|^r$$

und somit auch

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j|^r \leqslant \sum_{j=1}^{n} |x_j|^p = 1.$$

Daher ist

$$\|w\|_r = (\sum_{j=1}^{n} |x_j|^r)^{1/r} \leqslant 1 = \|w\|_p.$$

Offenbar genügt der Beweis von $\|v\|_p \geqslant \|v\|_r \geqslant \|v\|_\infty$ für $v \neq 0$. Wir setzen dann $w = \frac{1}{\|v\|_p} v$. Dann ist $\|w\|_p = 1$ und somit nach dem bereits Bewiesenen

$$1 \geqslant \|w\|_r = \frac{\|v\|_r}{\|v\|_p}.$$

Ist $v = (x_1, \ldots, x_n)$ mit

$$\|v\|_\infty = \operatorname*{Max}_j |x_j| = |x_k|,$$

so gilt ferner

$$\|v\|_r = (\sum_{j=1}^{n} |x_j|^r)^{1/r} \geqslant (|x_k|^r)^{1/r} = \|v\|_\infty.$$

c) In b) hatten wir bereits $\|v\|_p \geqslant \|v\|_\infty$ bewiesen. Andererseits folgt für $\|v\|_\infty = |x_k|$ auch

$$\|v\|_p = (\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p)^{1/p} \leqslant (n|x_k|^p)^{1/p} = n^{1/p}\|v\|_\infty.$$

Wegen $\lim_{p\to\infty} n^{1/p} = 1$ (bei festem n) folgt $\lim_{p\to\infty} \|v\|_p = \|v\|_\infty$ für alle $v \in \mathfrak{V}$. □

1.5 Bemerkungen. a) Für $p = 2$ erhält man aus 1.4 a) die Norm $\|\cdot\|_2$ mit

$$\|v\|_2 = \sqrt[2]{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}.$$

Dies ist die dem Längenbegriff der euklidischen Geometrie entsprechende Norm (Satz von Pythagoras[3)]!). Wir gehen auf sie in § 4 näher ein.
b) Ähnlich wie beim Schritt von 1.2 b) nach 1.2 d) kann man für $1 \leqslant p < \infty$ auf dem Raum $\mathbf{C}(0, 1)$ der auf $[0, 1]$ stetigen, reellwertigen Funktionen eine Norm $\|\cdot\|_p$ definieren durch

$$\|f\|_p = (\int_0^1 |f(t)|^p \, dt)^{1/p}.$$

Zum Nachweis der Gültigkeit der Dreiecksungleichung benötigt man dann die Höldersche und Minkowskische Ungleichung 1.3 für Integrale (siehe etwa J. Wlocka, Funktionalanalysis und Anwendungen, S. 48–51.)

Auf normierte Vektorräume können wir einige Begriffe der Analysis in natürlicher Weise ausdehnen:

1.6 Definition. Sei $\mathfrak{V}$ ein $\mathbf{K}$-Vektorraum und $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathfrak{V}$.
a) Durch

$$d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\|$$

3) Pythagoras (etwa 570/60 v. Chr., bis etwa 480 v. Chr.) Samos, Kroton, Metapont; Mathematiker, Philosoph und Mystiker.