

SAMMLUNG GÖSCHEN BAND 970/970 a

Nichteuklidische Geometrie

Hyperbolische Geometrie der Ebene

Von

Dr. phil. Richard Baldus

chem. ord. Professor der Mathematik
an der Technischen Hochschule München

Vierte Auflage

Bearbeitet und ergänzt von

Dr. rer. nat. Frank Löbell

em. ord. Professor der Geometrie
an der Technischen Hochschule München

Mit 75 Figuren im Text



WALTER DE GRUYTER & CO.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag,
Verlagsbuchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp.

Berlin 1964



Copyright 1964 by Walter de Gruyter & Co., vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp., Berlin 30. — Alle Rechte, einschl. der Rechte der Herstellung von Photokopien und Mikrofilmen, vom Verlag vorbehalten. — Archiv-Nr. 7713 645. — Satz und Druck: Walter de Gruyter & Co., Berlin 30. — Printed in Germany.

Vorbemerkung zur 4. Auflage

Während die 3. Auflage dieses Büchleins ein beinahe unveränderter Nachdruck der noch von Richard Baldus selbst besorgten 2. Auflage war, wurden jetzt einige Änderungen vorgenommen und Ergänzungen angefügt. Außer der historischen Einleitung blieb nur der axiomatische Teil davon fast unberührt; diese einzigartige Baldussche Leistung sollte möglichst unangetastet bleiben. Beibehalten wurde auch das Verfahren, die Nichteuklidische Geometrie im projektiven Bild in der Euklidischen Ebene zu entwickeln, weil es nicht nur das fruchtbare Prinzip der speziellen Lage anzuwenden erlaubt, sondern auch die uneigentlichen Punkte und Geraden bequem zugänglich macht. Neu bearbeitet wurde unter anderem hauptsächlich die Trigonometrie und, in stärkerem Maß, die analytische Geometrie.

Im ganzen aber war das Bestreben, die Eigenart der Baldusschen Darstellung zu wahren, deren Hauptmerkmale Gründlichkeit beim Durchdenken aller auftauchenden Fragen, die Baldus' starkem erkenntnistheoretischem Interesse entsprang, und peinliche Sorgfalt bei der Durchführung der Beweise sind. Eindrucksvoll bringt Baldus die Überzeugung zur Geltung, daß der anschaulichen Vorstellung in der Nichteuklidischen Geometrie die gleiche Rolle zukommt wie in der Euklidischen, was einem Gauss noch selbstverständlich war, aber natürlich in keiner dieser Geometrien dazu berechtigt, sich bei Beweisen auf die Anschauung zu berufen.

Zum Schluß wurde ein kurzer Blick auf die Clifford-Kleinschen Flächen geworfen, insbesondere wurde die im hyperbolischen Fall bestehende Möglichkeit ihres Aufbaues aus einfachen Elementen beschrieben, eine Theorie, die bis jetzt noch keinen Eingang in die Lehrbücher gefunden hat, obwohl sie schon seit Jahrzehnten bekannt ist.

München, im Frühjahr 1964

F. Löbell

Anmerkung des Verlages: Unmittelbar nach Abschluß der Korrekturen erreicht uns die Nachricht, daß Herr Professor Dr. Frank Löbell am 31. Mai 1964 plötzlich verstorben ist. — Bei der Veröffentlichung des Bandes gedenken wir unseres Autors in Dankbarkeit und Verehrung.

Inhalt

	Seite
Vorbemerkung zur 4. Auflage	3
Literatur	6

I. Abschnitt.

Der geschichtliche Weg zur Nichteuklidischen Geometrie.

1— 3. Euklids Elemente	7
4— 9. Aus der Geschichte des Parallelenaxioms	9
10—12. Die Entdecker der Nichteuklidischen Geometrie	15

II. Abschnitt.

Axiomatik der absoluten Geometrie.

13—14. Bedeutung der absoluten Geometrie	20
15—16. Formalisierung der Geometrie	22
17—18. A. Anordnungsaxiome	24
19. B. Dimensionsaxiom	28
20—22. C. Kongruenzaxiome	29
23—26. Folgerungen aus den Axiomgruppen A—C	33
27. Einige Sätze über den Kreis	38
28—33. D. Axiome des Messens	40
34. Weitere Sätze über den Kreis	47
35—36. Rechtwinklige Koordinaten und Vollständigkeitssatz	48

III. Abschnitt.

Die Euklidische Geometrie.

37—38. E. Das Euklidische Parallelenaxiom	50
---	----

IV. Abschnitt.

Axiomatik der hyperbolischen Geometrie im Einheitskreise.

39—40. Die Axiome A 1—6 und B	54
41—44. Hyperbolische Streckenkongruenz. Die Axiome C 1—3	56
45. Die Axiome des Messens	59
46—48. Automorphe Kollineationen des Randkreises	60
49—51. Hyperbolische Winkelkongruenz. Die Axiome C 4—6	62
52. Der Widerspruch mit dem Euklidischen Parallelenaxiom	65
53—54. Widerspruchslösung der hyperbolischen Geometrie	66
55—56. Das Nichteuklidische Parallelenaxiom E'	68
57. Einzigartigkeit der hyperbolischen Geometrie	70

V. Abschnitt.

Die hyperbolische Geometrie als selbständige Disziplin.

58—	59.	Vorbemerkungen	71
60—	61.	Hyperbolische Gebilde in spezieller Lage zum Randkreise . .	73
	62.	Orthogonalität	74
63—	64.	Parallele Gerade	75
	65.	Abstandslinien	77
	66.	Kreise	80
	67.	Grenzkreise	81
	68.	Winkelmessung	84
69—	70.	Winkelsumme im Dreieck	85
71—	73.	Streckenmessung; Hyperbelfunktionen	87
	74.	Der Parallelwinkel	92
75—	76.	Parallelogramme und Trapeze	93
77—	81.	Die Hjelmslevsche Mittellinie	94
82—	85.	Fundamentalkonstruktionen	100
86—	91.	Merkwürdige Punkte des Dreiecks	104
92—	95.	Trigonometrie	110
96—	98.	Reguläre n -Ecke	117
99—	100.	Umfang des Kreises. Bogenlänge der Abstandslinie	119
101—	104.	Analytische Geometrie	121
105—	106.	Der Dreiecksinhalt	130
107—	108.	Flächeninhalt des Kreises. Sektor der Abstandslinie	134
109—	110.	Flächen zwischen parallelen Geraden	137
111—	112.	Asymptotische Dreiecke	138
	113.	Uneigentliche Elemente	140
114—	115.	Absoluter Charakter der Strecken- und Inhaltsmessung . . .	141

VI. Abschnitt.

Schlußbetrachtungen.

116.	Bewelskraft der Deutung $\{\mathfrak{D}\}$	144
117—118.	Die elliptische Geometrie	145
119—121.	Geometrie und Wirklichkeit	148
122—125.	Ausblick auf die Clifford-Kleinschen Flächen	150
Register		156

Literatur

- [1] *R. Bonola*, Die nichteuklidische Geometrie, deutsch von H. Liebmann. 3. Aufl. Leipzig und Berlin 1921, 207 S.
- [2] *F. Engel*, N. I. Lobatschewskij, Zwei geometrische Abhandlungen. Leipzig 1899, 476 S.
- [3] *F. Engel und P. Stäckel*, Die Theorie der Parallelllinien von Euklid bis auf Gauß. Leipzig 1895. 325 S.
- [4] *F. Enriques*, Prinzipien der Geometrie; Enzyklop. d. math. Wissenschaften III, 1, Leipzig 1907—1910, S. 1—129.
- [5] *F. Enriques*, Fragen der Elementargeometrie, I. Teil, deutsch von H. Thieme. Leipzig 1911, 366 S.
- [6] *D. Hilbert*, Grundlagen der Geometrie. 9. Aufl. Stuttgart 1962, 272 S.
- [7] *F. Klein*, Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie, bearbeitet von W. Rosemann. Berlin 1928, 326 S.
- [8] *H. Liebmann*, Nichteuklidische Geometrie. 3. Aufl. Berlin und Leipzig 1923, 150 S.
- [9] *K. Lingenberg*, Einführung in die nichteuklidische Geometrie. Hannover 1960, 85 S.
- [10] *H. Meschkowski*, Nichteuklidische Geometrie. 2. Aufl. Braunschweig-Berlin-Stuttgart 1961, 80 S.
- [11] *O. Perron*, Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene. Stuttgart 1962, 134 S.
- [12] *F. Schur*, Grundlagen der Geometrie. Leipzig und Berlin 1909, 192 S.
- [13] *P. Stäckel*, W. und J. Bolyai, 2 Teile, Leipzig und Berlin 1913, 281 + 274 S.
- [14] *J. Tropfke*, Geschichte der Elementarmathematik, IV. Bd. Ebene Geometrie, 3. Aufl. besorgt von K. Vogel, Berlin 1940, 316 S.
- [15] *M. Zacharias*, Elementargeometrie und elementare Nichteuklidische Geometrie in synthetischer Behandlung; Enzyklop. d. math. Wissenschaften III, 1₂. Leipzig 1914—1921, S. 859—1172.
Eine neuartige Begründung der Geometrie gibt das Buch von
- [16] *F. Bachmann*, Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1959, 311 S.

I. Abschnitt.

Der geschichtliche Weg zur Nichteuklidischen Geometrie.

Euklids Elemente.

1. Euklid, der große griechische Geometer, der vor 300 v. Chr. lebte und in Alexandria lehrte, hat in seinen berühmten 13 Büchern der „Elemente“ (στοιχεῖα, elementa) die Grundlagen der Geometrie in einer Weise dargestellt, die sich trotz der fortschreitenden Entwicklung der Mathematik, trotz immer wiederholten Verbesserungsversuchen über 2000 Jahre lang im wesentlichen als wissenschaftlich unantastbar erwiesen hat. Und viel von ihm hierin Geleistetes gilt auch noch in unseren Augen, deren Blick durch die einschlägigen neueren mathematischen Forschungen geschärft ist, die in den letzten anderthalb Jahrhunderten weit über Euklid hinausgeführt haben.

Den folgenden Betrachtungen legen wir die vorzügliche, textkritische, griechisch-lateinische Parallelausgabe der Elemente Euklids von I. L. Heiberg, Leipzig, I. Bd. 1883, zugrunde*).

2. Euklid beginnt das erste Buch seiner Elemente mit 23 Definitionen (ὁροί, definitiones), die aber nicht Ausdruck einer einheitlichen Absicht sind, sondern die zwei verschiedene Aufgaben zu erfüllen haben: So soll z. B. Def. I „Ein Punkt ist, was keinen Teil hat“, ebenso wie Def. II „Eine Linie ist eine Länge ohne Breite“ oder wie Def. IV „Eine Gerade ist eine Linie, die in einer Flucht mit den Punkten auf ihr liegt“**) im Leser eine anschauliche Vorstellung dieser

*) Ins Deutsche übersetzt von C. Thaer, Ostwald's Klassiker Nr. 235, 236, 240, 241, 243. Leipzig 1933—37.

**) Diese Übersetzung des griechischen Textes „ἑὸς ἐστὶν γραμμὴ ἣτις ἐξ ἑαυτῆς ἔχει σημείους κείτῃ“ ist sinnvoller als die übliche „Eine Gerade ist eine Linie, die gleichmäßig zu den Punkten auf ihr liegt“; sie steht im Einklang mit Forschungsergebnissen, die P. Tannery schon im Jahr 1897 mitgeteilt hat (Mémoires scientifiques, II, Toulouse et Paris 1912, p. 540—544). Die Erklärung stimmt im wesentlichen mit der schon von Plato gegebenen überein, die die Geraden mit den Lichtstrahlen identifiziert. — Es sei noch bemerkt, daß Euklid, wenn er von einer Geraden spricht, immer ein begrenztes Stück einer solchen, eine Strecke, meint.

räumlichen Gebilde wecken, ohne daß damit irgendwelche mathematische Aussagen verbunden wären, die später verwendet werden sollen; diese Definitionen haben keine abstrakt-mathematische Bedeutung, und dementsprechend macht Euklid niemals auch nur den Versuch, einen Beweis auf sie zu gründen. Dagegen enthält eine ganze Reihe von Definitionen mathematische Aussagen, die für spätere Überlegungen verwertbar sind, wie etwa Def. XVII „Durchmesser des Kreises ist irgendeine durch den Mittelpunkt gezogene und auf beiden Seiten vom Kreisumfange begrenzte Gerade; sie hälftet den Kreis“ oder Def. XXIII „Parallel sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und nach beiden Seiten unbegrenzt verlängert auf keiner Seite miteinander zusammentreffen“.

3. Auf die Definitionen folgen bei Euklid 5 Postulate (αιτήματα, postulata) und 5 Axiome (κοινὰ ἐννοιαί, communes animi conceptiones). Die Postulate sind:

I. Es soll gefordert werden, daß man von jedem Punkte zu jedem Punkt eine Gerade ziehen kann.

II. Und daß man jede begrenzte Gerade zusammenhängend gerade verlängern kann.

III. Und daß man um jeden Mittelpunkt mit jedem Halbmesser einen Kreis beschreiben kann*).

IV. Und daß alle rechten Winkel einander gleich sind.

V. Und wenn eine Gerade zwei andere Gerade trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind, sollen jene beiden Geraden, unbegrenzt verlängert, auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind**).

*) Euklid benützt den Zirkel grundsätzlich nicht als Streckenübertrager; das geht eindrucksvoll aus der 2. Proposition des I. Buches der Elemente hervor.

**) III. und V. sind nur für die Ebene gedacht, was nicht ausdrücklich ausgesprochen ist. Überhaupt enthalten Euklids Elemente, mit Ausnahme einiger Definitionen zu Beginn des I. Buches, erst vom 11. Buch an räumliche Betrachtungen.

Die Axiome lauten:

I. Dinge, die demselben Ding gleich sind, sind auch einander gleich.

II. Und wenn man Gleiches zu Gleichem hinzufügt, dann sind auch die Summen gleich.

III. Und wenn von Gleichem Gleiches abgezogen wird, dann sind auch die Reste gleich.

VII.*) Und Dinge, die einander decken, sind einander gleich.

VIII. Und das Ganze ist größer als sein Teil.

Nun reiht Euklid die Konstruktionen und die Beweise der Sätze an, welche das Gebäude der Geometrie bilden, mit der Absicht, dabei anschauliche Beweismittel zu vermeiden, vielmehr rein logisch vorzugehen, und zwar so, daß neben den mathematischen Aussagen der in Nr. 2 genannten zweiten Art von Definitionen nur die Postulate und Axiome in den Schlußweisen verwendet werden sollen. Diese Absicht ist für immer größere Teile der Mathematik vorbildlich geworden, mit ihr hat Euklid den Grundstein zur Axiomatik gelegt.

Der Ausdruck Axiom findet sich schon bei Aristoteles (384 bis 322 v. Chr.), tritt aber bei Euklid nicht auf. Die Elemente enthalten in den späteren Büchern noch weitere Definitionen — es werden im ganzen 118 Definitionen eingeführt —, aber keine Postulate und Axiome mehr. Die Postulate enthalten Aussagen über geometrische Gebilde (Gerade, Kreis, Winkel), die Axiome dagegen reine Größenaussagen; diese Unterscheidung ist in neueren Untersuchungen fallen gelassen worden, man spricht heute vielfach nur noch von Axiomen. Auch wir gebrauchen weiterhin den Ausdruck Postulat nur noch in Verbindung mit einer bestimmten Nummer (II. Postulat) und meinen mit den Axiomen Euklids seine Postulate und Axiome, mit Axiomensystem die Gesamtheit beider, mit Parallelenaxiom das V. Postulat.

Aus der Geschichte des Parallelenaxioms.

4. Während die übrigen Axiome naheliegende Grundannahmen einfachster Art enthalten, machte das Parallelen-

*) Die Bezeichnung des 4. und 5. Axioms mit VII und VIII hat textkritische Gründe.

10 I. Der geschichtliche Weg zur Nichteuklidischen Geometrie

axiom schon den Alten den Eindruck eines verwickelten geometrischen Satzes. Dazu kommt noch, daß Euklid möglichst lange die Verwendung des Parallelenaxioms vermeidet und es zum ersten Male beim Beweis des 29. Satzes im 1. Buche heranzieht, weiterhin, daß Satz 28 „Schneidet eine Gerade zwei andere Gerade und bildet mit ihnen auf einer Seite innere Winkel, deren Summe zwei Rechte beträgt, dann sind die beiden Geraden parallel“ formal und inhaltlich mit dem Axiom aufs engste verwandt ist; dieses ist auch eine Umkehrung des 17. Satzes des 1. Buches, der aussagt, daß im Dreieck die Summe irgend zweier Winkel kleiner ist als zwei Rechte.

So wird es begreiflich, daß die Versuche, das Parallelenaxiom zu beweisen und damit zu zeigen, daß es ein Satz, aber kein Axiom ist, fast so alt sind wie die Elemente Euklids. Diese Versuche bildeten bis zum Beginn des 19. Jahrhunderts den Hauptteil der kritischen Beschäftigung mit Euklid. Mit unermeßlicher Mühe suchte man immer wieder vergebens, einen Weg zum heiß ersehnten Ziel eines Beweises für das Parallelenaxiom zu finden.

Erst nach 2000 Jahren waren einige bedeutende Mathematiker dazu reif geworden, sich von der Logik, der man bisher den Weg aufzwingen wollte, führen zu lassen, und nun erkannten sie fast gleichzeitig und ohne gegenseitigen Zusammenhang, daß die früheren Versuche deshalb ihr Ziel verfehlen mußten, weil dieses gar nicht existierte.

Es kann nicht unsere Aufgabe sein, mit der Sorgfalt für Einzelheiten wie ein mathematischer Historiker dieser ganzen Entwicklung nachzugehen, über die man reichliche geschichtliche Angaben in den Darstellungen Engel-Stäckel [3]*) und Bonola-Liebmann [1] findet; wir wollen nur zurückblickend das für den modernen Beschauer Wesentliche betrachten. Mit Rücksicht auf den zur Verfügung stehenden Raum wollen wir uns dabei im folgenden ausschließlich mit der Geometrie der Ebene, der Planimetrie, beschäftigen.

*) Nummern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis S. 6 des vorliegenden Buches.

5. Aus der gegen den Schluß von Nr. 3 angegebenen Absicht des axiomatischen Aufbaues ergibt sich, daß keine Axiome stillschweigend eingeführt werden dürfen. Diese Forderung nach der Vollständigkeit des Axiomensystems hat Euklid nicht erfüllt, wie sehr er sich auch darum bemühte. So ist, um nur einige Beispiele zu nennen, in der in Nr. 2 angeführten Def. XVII stillschweigend angenommen, daß jeder Punkt einer Geraden diese in zwei Teile trennt, eine Annahme, die auch in die Def. XXIII hereinspielt, im V. Postulat ist stillschweigend vorausgesetzt, daß jede Gerade die Ebene in zwei Gebiete teilt, im Axiom VII werden Dinge zur Deckung gebracht und damit Bewegungen in die geometrischen Betrachtungen hereingezogen, ohne daß deren Axiome ausgesprochen wären. Schon Gauß stellte fest, daß eine Erklärung der Zwischen-Beziehung gegeben werden müßte und könnte.

Die Beschäftigung mit dem Parallelenaxiom hat in solchem Maße die Aufmerksamkeit auf dieses gelenkt, daß man die soeben genannten und ähnliche wirkliche Mängel des Euklidischen Systems wenig oder gar nicht beachtete.

Bei den Versuchen, das Parallelenaxiom zu beweisen, hatte man die Absicht, das V. Postulat nach geglücktem Beweis als aus den übrigen Axiomen ableitbar wegzulassen. Darin kam die selbstverständliche Forderung zum Ausdruck, daß keine überflüssigen Axiome eingeführt werden sollten, eine Forderung, die man später zu dem Verlangen nach einem möglichst einfachen Axiomensystem erweitert hat.

Wenn zwei verschiedene Axiomensysteme für dasselbe Gebiet der Mathematik vorliegen, kann man zwar nicht immer rein logisch entscheiden, welches davon einfacher ist, hier wird oft das Gefühl, der persönliche Geschmack mitzusprechen haben, jedenfalls aber wird der Ausschluß überzähliger Axiome durch die Forderung der Einfachheit erzwungen.

6. Die vermeintlichen Beweise des Parallelenaxioms hatten stets das gleiche Schicksal: jedesmal konnte dem Urheber eines solchen Beweisversuches nachgewiesen werden, daß er eine über die Euklidischen Annahmen hinausgehende Voraussetzung stillschweigend eingeführt hatte. So lieferten die mißglückten Beweisversuche die positive mathematische Aus-

sage, daß gewisse Annahmen, im Euklidischen System an die Stelle des Parallelenaxioms gesetzt, mit den übrigen Axiomen zusammen wieder die Sätze Euklids ergeben; man erhielt dadurch dem Parallelenaxiom gleichwertige, äquivalente Axiome. Unter diesen treten die folgenden auf:

a) Trifft eine Gerade die eine von zwei Parallelen, dann trifft sie auch die andere.

b) Durch einen im Innern eines spitzen Winkels angenommenen Punkt kann man immer eine Gerade ziehen, welche die beiden Schenkel des Winkels trifft.

c) Die auf derselben Seite einer Geraden von dieser gleich weit entfernten Punkte liegen selbst auf einer Geraden.

d) Durch drei nicht in einer Geraden gelegene Punkte läßt sich immer ein Kreis legen.

e) Die Winkelsumme im Dreieck ist gleich zwei Rechten.

f) Es gibt zwei ähnliche, nicht kongruente Dreiecke.

Ersetzt man das Parallelenaxiom durch eine dieser Annahmen, dann läßt sich die Aussage des Parallelenaxioms aus dieser Annahme und den übrigen Axiomen als Satz beweisen. Dabei muß allerdings ein vollständiges Axiomensystem der Euklidischen Geometrie vorliegen, mit dessen Aufstellung man erst spät begann (vgl. Nr. 5). Den ersten großen Fortschritt in dieser Richtung erzielte der Mathematiker M. Pasch (1843—1930) in seinem im Jahr 1882 erschienenen Buche „Vorlesungen über neuere Geometrie“^{*)}.

Da die Ergänzung der Euklidischen Axiome zu einem vollständigen System bis zu einem gewissen Grade willkürlich ist, geht diese Willkür in die ganze kritische Betrachtung der Beweisversuche für das Parallelenaxiom ein.

7. Mit einem wesentlich neuen, für die Folge sehr wichtigen Gedanken bereicherte der scharfsinnige Jesuitenpater G. Saccheri (1667—1733) die Forschungen über das Parallelenaxiom:

Er betrachtet, worin er Vorgänger hat, das Viereck $ABCD$ (Fig. 44, Nr. 76) mit den beiden rechten Winkeln α , β^{**}) und

^{*)} 2. Aufl. 1926, 275 S., mit einem lesenswerten Anhang von M. Dehn.

^{**)} Doppelbogen bezeichnen in unseren Figuren immer rechte Winkel. Der Punkt S der Figur wird erst später benötigt werden.

den beiden gleichen Seiten AD und BC . Unabhängig vom Parallelenaxiom folgt nun $\sphericalangle \gamma = \sphericalangle \delta$, ohne daß aber zu entscheiden wäre, ob dies rechte, stumpfe oder spitze Winkel sind. Tritt jedoch einer dieser drei Fälle bei einem einzigen solchen Viereck ein, dann geschieht es bei jedem. Dies führt zu den drei Hypothesen des rechten, des stumpfen, des spitzen Winkels. Die Hypothese des rechten Winkels läßt sich aus dem Parallelenaxiom beweisen und ist diesem äquivalent. Die aus den beiden anderen Hypothesen und den Euklidischen Annahmen mit Ausnahme des Parallelenaxioms entstehenden Geometrien sucht Saccheri, und das ist sein neuer Gedanke, als in sich widerspruchsvoll nachzuweisen; gelänge dies, dann wäre damit vermittels eines indirekten Beweises das Parallelenaxiom als ein Satz der Euklidischen Geometrie erkannt.

Girolamo (Hieronymus) Saccheri war Lehrer der Grammatik, Philosophie, polemischen Theologie, Arithmetik, Algebra, Geometrie sowie anderer Fächer, zuletzt an der Universität Pavia. Sein hier besprochenes Werk erschien 1733 in Mailand unter dem Titel „Euclides ab omni naevo vindicatus“, d.h. der von jedem Makel befreite Euklid; man findet es in Engel-Stäckel [3] abgedruckt. Er setzt darin die vom Parallelenaxiom absehbenden Euklidischen Annahmen den ersten 26 Sätzen Euklids gleichwertig, was nach dem 1. Absatz unserer Nr. 4 nahe liegt.

Aus der Hypothese des stumpfen Winkels folgert Saccheri, daß die Winkelsumme in jedem Dreiecke $> 2R$ ist. Hier entstehen tatsächlich Widersprüche, wenn man mit Euklid die unendliche Länge der Geraden voraussetzt, indem sich dann aus der Hypothese des stumpfen Winkels das Parallelenaxiom beweisen läßt, aus dem die Hypothese des rechten Winkels folgt.

Bei der Hypothese des spitzen Winkels dagegen glückt es Saccheri nicht, den gesuchten Widerspruch zu finden, so absurd auch für den an Euklid geschulten Geometer die Folgerungen sind: die Winkelsumme im Dreieck ist hier $< 2R$; der Winkel im Halbkreis ist $< R$; es kann hier vorkommen, daß sich zwei Gerade nicht treffen, deren eine auf einer dritten Geraden senkrecht steht, während die andere zu der dritten

14 I. Der geschichtliche Weg zur Nichteuklidischen Geometrie

nicht senkrecht steht; es gibt Paare von Geraden, die sich asymptotisch nahe kommen, ohne sich zu treffen. Infolge eines Trugschlusses glaubt Saccheri auch hier einen Widerspruch nachweisen zu können, in Wirklichkeit läßt er die Frage nach der logischen Widerspruchlosigkeit der auf der Hypothese des spitzen Winkels aufgebauten Geometrie offen.

8. Die bedeutenden Leistungen Saccheris fanden ihre Fortsetzung in Überlegungen des bedeutenden Mathematikers, Physikers und Philosophen J. H. Lambert (1728—1777), der noch weitere Folgerungen aus der Hypothese des spitzen Winkels zog, so z. B. die Existenz einer absoluten Längeneinheit aus dieser erschloß und erkannte, daß der Flächeninhalt eines Dreiecks dem Unterschiede zwischen dessen Winkelsumme und $2R$ proportional wäre. Weiterhin vermutete er einen Zusammenhang zwischen der Hypothese des spitzen Winkels und der Geometrie auf einer imaginären Kugel. Auch Lambert vermochte nicht, die Hypothese des spitzen Winkels zwingend ad absurdum zu führen, ohne aber dem Irrtum zu verfallen, daß ihm das gelungen sei. Ein Vorzug seiner Betrachtungsweise verdient noch besonders hervorgehoben zu werden: Während Saccheri sich im Stil seiner Zeit die Behandlung geometrischer Fragen durch Stetigkeitsbetrachtungen, denen aber entsprechende Voraussetzungen zugrunde liegen mußten, erleichterte, machte sich Lambert davon möglichst frei, obwohl er sich durch ein solches, wahrhaft „elementares“ Vorgehen seine Aufgabe erschwerte.

Johann Heinrich Lamberts hier in Betracht kommende Schrift, die man ebenfalls in Engel-Stäckel [3] abgedruckt findet, hat den Titel „Theorie der Parallellinien“. Sie stammt aus dem Jahre 1766, wurde aber erst 1786 aus seinem Nachlaß in Hindenburgs „Magazin für die reine und angewandte Mathematik“ veröffentlicht.

Hier sei auch der bekannte französische Mathematiker A. M. Legendre (1752—1833) genannt, dem interessante Sätze über die Winkelsumme im Dreieck in den Fällen der drei Hypothesen zu verdanken sind, vgl. Bonola-Liebmann [1]. Durch seine weitverbreiteten „*Éléments de Géométrie*“ hat er die Forschungen über das Parallelenaxiom sehr gefördert.

9. Griechische, arabische, italienische, deutsche, englische, französische, ungarische Gelehrte bemühten sich im Laufe zweier Jahrtausende um einen Beweis für das Parallelenaxiom, immer wieder vergeblich. Welche Unsumme von Arbeit dabei geleistet wurde, erhellt beispielsweise aus der Tatsache, daß nach Engel-Stäckel [3] über 260 ernst zu nehmende Schriften bekannt sind, die sich, ohne zum Ziele zu kommen, mit der Parallelentheorie beschäftigen. Wohl mit keinem anderen Problem im Gebiete der exakten Wissenschaften wurde so lange ohne Entscheidung gerungen, so daß es verständlich wird, daß es Mathematiker gab, welche die Versuche als aussichtslos aufzugeben empfahlen, während andere in immer steigender Zahl, vor allem etwa seit 1780, sich um die Überwindung der Schwierigkeiten bemühten, ohne daß jemand an der alleinigen Berechtigung der Euklidischen Geometrie gezweifelt hätte.

Die Entdecker der Nichteuklidischen Geometrie.

10. Dem großen Göttinger Mathematiker C. F. Gauß (1777—1855) war es vorbehalten, als erster die Lösung des Rätsels des Parallelenaxioms zu finden: in jahrelanger, 1792 beginnender, mühsamer Gedankenarbeit rang er sich zu der Überzeugung durch, daß eine Geometrie denkbar ist, die ein dem Parallelenaxiom widersprechendes Axiom und dazu die übrigen Euklidischen Annahmen voraussetzt. Er entwickelte eine solche Geometrie, ähnlich wie es Saccheri und Lambert bei der Hypothese des spitzen Winkels machten, aber nicht, und das ist das wesentlich Neue, um einen Widerspruch zu finden, sondern in dem klaren Bewußtsein, eine neue, Nichteuklidische Geometrie aufzubauen, die in sich ebenso frei von logischen Widersprüchen ist wie die Euklidische. Obwohl Gauß über diese seine Untersuchungen nichts veröffentlicht und sich nur gelegentlich in Briefen auf sie bezogen hat, steht fest, daß er spätestens 1816 volle Klarheit über die logische Berechtigung der Nichteuklidischen Geometrie gewonnen und diese Disziplin weit ausgebaut hatte. Diese Nichteuklidische Geometrie ist nichts anderes als die

nach Nr. 7 und 8 aus der Hypothese des spitzen Winkels sich ergebende Geometrie. Dasselbe gilt von der „Astralgeometrie“, zu deren Anfängen der Jurist F. K. Schweikart (1780—1857) gelangt war, unabhängig von Gauß und gleichfalls ohne etwas darüber zu veröffentlichen.

Carl Friedrich Gauß, Direktor der Sternwarte zu Göttingen, war einer der bedeutendsten Mathematiker aller Zeiten und Völker von genialer schöpferischer und kritischer Kraft. Der X. Band seiner gesammelten Werke enthält in der 2. Abteilung eine 1923 erschienene Abhandlung von P. Stäckel über Gauß als Geometer, die sich eingehend mit der Entdeckung der Nichteuclidischen Geometrie durch Gauß beschäftigt*). Dort findet man auch S. 31 ff. nähere Angaben über Schweikart, desgleichen in Engel-Stäckel [3].

11. Zwei Mathematiker teilen sich in den Ruhm, als erste in selbständigen, ausführlichen Veröffentlichungen die Nichteuclidische Geometrie begründet zu haben, und zwar unabhängig von Gauß und voneinander. Es sind das der Russe N. I. Lobatschewskij (1793—1856) und der Ungar J. Bolyai (1802—1860).

Nachdem sich Lobatschewskij schon seit 1815 mit der Theorie der Parallelen beschäftigt hatte, entdeckte er zwischen 1823 und 1825 die Nichteuclidische Geometrie. Eine Abhandlung darüber, die er 1826 der Universität Kasan vorlegte, ist verlorengegangen, deren Ergebnisse sind in die russisch geschriebene Abhandlung „Über die Anfangsgründe der Geometrie“ hineingearbeitet, die 1829 und 1830 im Kasaner Boten erschienen ist. In dieser ersten Veröffentlichung Lobatschewskijs über seine Nichteuclidische Geometrie ist deren logische Berechtigung betont, und zwar wieder der Geometrie, welcher die Hypothese des spitzen Winkels zugrunde liegt. Lobatschewskij kannte zwar die Ergebnisse Legendres, wurde aber, wie anzunehmen ist, nicht von Gauß beeinflusst.

Gleichzeitig mit Lobatschewskij gelangte Johann Bolyai 1823 zu derselben Nichteuclidischen Geometrie, durch den mathematischen Verkehr mit seinem mit Gauß befreundeten

*) Vgl. auch H. E. Timerding, „Kant und Gauß“, Kantstudien XXVIII, (1923), S. 16—40.