Dieter Klaua

Mengenlehre

Walter de Gruyter · Berlin · New York · 1979

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Klaua, Dieter:
Mengenlehre / Dieter Klaua. – Berlin, New York : de Gruyter, 1979.
(De-Gruyter-Lehrbuch)
ISBN 3-11-007726-4

 Printed in Germany. Satz und Druck: W. Tutte Druckerei GmbH, Salzweg-Passau. – Bindearbeiten: Wübben & Co., Berlin.

Vorwort

Die Mengenlehre bildet heute in ihrer modernen axiomatischen Form das Fundament der Mathematik. Das bedeutet, daß alle derzeitigen mathematischen Begriffe und Aussagen als mengentheoretische Begriffe und Aussagen interpretiert werden können und alle derzeitigen mathematischen Ergebnisse durch rein logisches Schließen aus einem geeigneten Axiomensystem der Mengenlehre abgeleitet werden können. In diesem Sinne ist die Mathematik im Rahmen der Mengenlehre darstellbar und erzeugt die Mengenlehre in der Mathematik, zum Vorteile klaren und rationellen Verständnisses, eine einheitliche mengentheoretische Denkweise. Das vorliegende Lehrbuch möchte eine kurzgefaßte Einführung in die Mengenlehre geben mit einer praktizierten mengentheoretischen Fundierung der Mathematik als Schwerpunkt. Es soll Mathematik von allem Anfang an mengentheoretisch exakt entwickelt werden. Mathematische Vorkenntnisse sind damit für den Ablauf der Theorie nicht erforderlich. Das Buch wendet sich an Studenten, Lehrer, Dozenten und allgemein an alle in Lehre und Forschung tätigen Wissenschaftler, welche sich für eine mengentheoretische Grundlegung der Mathematik interessieren.
Die Mengentheorie unseres Buches basiert auf einem einsortigen transfiniten inhomogenen Stufenkalkül, der mit seiner durch wenige Postulate strukturierten Stufenrelation eine der Anschauung über den Mengenbegriff besonders naheliegende und damit eine besonders natürliche Axiomatisierung der Mengenlehre ermöglicht. Es werden konsequent nur Mengen betrachtet, keine absoluten Klassen. Die Vorteile des Klassenkalküls, etwa im Zusammenhang mit der Kategorientheorie, werden jedoch beibehalten und sogar wesentlich erweitert durch die auf Universen relativierten Klassen, welche jetzt Mengen sind. Wir stellen zunächst (Kapitel I–V) ein elementares Axiomensystem der Mengenlehre auf, in dessen Rahmen der größte Teil der heutigen Mathematik, darunter die Analysis, mengentheoretisch darstellbar ist. Die mengentheoretische Darstellung der gesamten Mathematik, darunter die Kategorientheorie, wird erreicht (Kapit l VI), indem wir das elementare Axiomensystem um das Universenaxiom erweitern. Trotz der axiomatischen Methode der Darstellung mit ihren etwas formalen Begleiterscheinungen wird größter Wert auf inhaltliche Motivierungen, Formulierungen und Argumentationen gelegt.
Das Buch ist in Kapitel, Paragraphen und Abschnitte unterteilt bei durchlaufender Numerierung der Paragraphen. Der Abschnitt $n.m$ des §n wird als „§$n.m$" zitiert, Definition bzw. Satz m des §n als „Definition m, §n" bzw. „Satz m, §n" und Definition bzw. Satz m des laufenden Paragraphen als „Definition m" bzw. „Satz m". Das Ende eines Axioms, einer Definition oder eines Beweises wird

der Übersichtlichkeit halber durch ▮ markiert. Übungsaufgaben sind in Form notierter Sätze gestellt, deren Beweis nur durch die Bemerkung „Übung“ angedeutet wird oder durch die Bemerkung, daß die aufgestellten Behauptungen unmittelbar (als Routineübung) aus den Definitionen oder bereits Bekanntem folgen. Das Buch unterscheidet sich von meiner 1971–1974 erschienenen „Einführung in die Allgemeine Mengenlehre“ durch eine wesentlich kürzere Stoffdarbietung und die dadurch erforderliche Gesamtkonzeption. Außerdem liegt der Abbildungstheorie eine neue Terminologie zugrunde, es wird der Kategorienbegriff auf Universen diskutiert, und es werden die stark unerreichbaren Kardinal- und Ordinalzahlen eingeführt und in die Exorbitanzaussagen für Universen mit einbezogen.

Dem Verlag danke ich für die Aufnahme des Buches in seine mathematische Lehrbuchreihe und für die gute Zusammenarbeit.

Karlsruhe, im Sommer 1979 Dieter Klaua

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL I

Das elementare Axiomensystem

§ 1. Anschauliche Grundlage

1.1. Mengenlehre, Mathematik

Der deutsche Mathematiker Georg Cantor (1845–1918) begründete gegen Ende des vorigen Jahrhunderts die Theorie der (endlichen und unendlichen) Mengen beliebiger Dinge, die *Mengenlehre*, auch *Mengentheorie*, wegen ihres allgemeinen Charakters (im Gegensatz zu Theorien über Mengen spezieller Dinge, etwa der Punktmengenlehre) auch *Allgemeine Mengenlehre* oder *Abstrakte Mengenlehre* genannt. Als Geburtsjahr dieser neuen mathematischen Disziplin gilt das Jahr 1874, in welchem Cantors Arbeit „Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen" im Journal für Reine und Angewandte Mathematik erschien. Die Mengenlehre hat aus ihren Anfängen heraus eine äußerst umfassende Entwicklung durchlaufen. Es wurden dabei durch die Mengenlehre weitere neue Disziplinen der Mathematik ins Leben gerufen (wie die Allgemeine Topologie) und schon bestehende mathematische Gebiete zu fruchtbarer Fortführung gebracht (wie die Analysis). Außerdem wurde, zur Vermeidung von Widersprüchen, methodisch die ursprüngliche Cantorsche *naive* (d.h. unaxiomatische) *Mengenlehre* abgelöst von der *axiomatischen Mengenlehre*, in der ein Axiomensystem an die Spitze der Theorie gestellt wird und man nur solche mengentheoretischen Begriffe und Aussagen (darunter die Axiome) bzw. mengentheoretischen Ergebnisse anerkennt, die sich mit den fachspezifischen Grundbegriffen des Axiomensystems durch rein logische Zusammensetzung definieren und formulieren lassen bzw. die sich aus den Axiomen des Axiomensystems durch rein logisches Schließen beweisen lassen. Die Erfahrung lehrte dann, daß sich auf solche Weise bei geeigneter Wahl eines mengentheoretischen Axiomensystems (etwa des in unserem Buche verwendeten Systems) sogar alle derzeitigen mathematischen Begriffe und Aussagen und alle derzeitigen mathematischen Ergebnisse einheitlich als anerkannte mengentheoretische Begriffe, Aussagen und Ergebnisse gewinnen lassen und in diesem Sinne die Mathematik im Rahmen der Mengenlehre darstellbar ist. Auf Grund dieser einheitlichen mengentheoretischen Darstellbarkeit der gesamten Mathematik und wegen des allgemeinen Charakters der Mengenlehre behandelt die Mengenlehre zwangsläufig gerade

die für die Grundlegung der Mathematik wichtigen und damit die allgemeinsten mathematischen Begriffe und Tatsachen, bildet die Mengenlehre heute das *Fundament der Mathematik* und erzeugt die Mengenlehre in der Mathematik, zum Vorteile klaren und rationellen Verständnisses, eine einheitliche mengentheoretische Denkweise, die *mengentheoretische Methode*. Die Wissenschaft Mathematik schließlich findet breiteste praktische Anwendung in den Naturwissenschaften, in Technik und Ökonomie. Die mengentheoretische Darstellbarkeit der Mathematik gibt auch Anlaß zur These von der Übereinstimmung der Mathematik mit der Mengenlehre. Bei synonymer Verwendung der Begriffe „Mengenlehre" und „Allgemeine Mengenlehre" ist diese These natürlich nur zu verstehen als eine abkürzende Formulierung der geschilderten Darstellbarkeit der Mathematik im Rahmen der Mengenlehre und nicht als Identität von Mathematik und Mengenlehre. Die Allgemeine Mengenlehre ist nur ein echtes Teilgebiet der Mathematik.
Je nach Art der bisher untersuchten mathematischen Begriffe und Aussagen haben sich die verschiedenen Teilgebiete der Mathematik herausgebildet. Man kann die Mathematik heute in sechs große Bereiche gliedern:

Grundlagen der Mathematik,
Algebra, Zahlentheorie,
Analysis, Funktionentheorie,
Geometrie, Topologie,
Wahrscheinlichkeitstheorie, Mathematische Statistik,
Numerik.

Die einzelnen Bereiche zerfallen weiter in Teilbereiche; z.B. zerfallen die Grundlagen der Mathematik in:

Allgemeine Mengenlehre,
Das Zahlensystem
Metamathematik (d.h. Mathematische Logik und die auf ihr fußende Grundlagenforschung zur Mathematik).

Die Begriffe der Grundlagen und der Grundlagenforschung innerhalb der Mathematik werden oft auch breiter gefaßt, etwa als mathematische Grundlagen und Grundlagenforschung im Sinne des vielbändigen Lehrwerkes von N. Bourbaki, *Eléments de Mathématique*, welches eine im Rahmen der Mengenlehre vollzogene Neuordnung der Mathematik unter strukturellen (axiomatischen) Gesichtspunkten verwirklicht. Man beachte, daß eine Gliederung der Mathematik in Bereiche und Teilbereiche stets nur als ein vom Menschen aus verständnis- und arbeitsökonomischen Gründen geschaffenes, mehr oder

weniger künstliches Ordnungsprinzip angesehen werden darf. Die einzelnen mathematischen Disziplinen greifen deshalb oft auch weit ineinander über, und die fortschreitende Entwicklung der Mathematik führt immer mehr zu einer vereinheitlichenden Verschmelzung bisher nebeneinander gelegener mathematischer Gebiete. Die einfachste Definition der Wissenschaft Mathematik oder irgendeines ihrer Teilgebiete (etwa der Grundlagen der Mathematik oder der Allgemeinen Mengenlehre) ist die *Definition durch Aufzählung*, indem man auf den in der Literatur vorliegenden einschlägigen wissenschaftlichen Themenkreis verweist.
Wir untergliedern die Allgemeine Mengenlehre in sechs Hauptthemen:

Kapitel I. *Das elementare Axiomensystem,*
Kapitel II. *Mengenalgebra, Abbildungs- und Relationentheorie,*
Kapitel III. *Natürliche Zahlen, endliche und unendliche Mengen,*
Kapitel IV. *Ordnungstheorie,*
Kapitel V. *Kardinalzahl- und Ordinalzahltheorie,*
Kapitel VI. *Das erweiterte Axiomensystem.*

(Die mathematisch-logischen Grundlagenuntersuchungen zur Allgemeinen Mengenlehre seien zur Metamathematik gerechnet.)

1.2. Mengen, Elementbeziehung

Es gibt konkrete Dinge (wie Gegenstände unserer Umwelt (darunter Lebewesen), Moleküle, Himmelskörper, Bewegungsvorgänge zwischen materiellen Körpern) und abstrakte, sinnlich prinzipiell nicht wahrnehmbare Dinge (wie Zahlen, Beziehungen zwischen Dingen, Zuordnungen von Dingen zu Dingen, Eigenschaften von Dingen). Für *Dinge* sagt man auch *Objekte.* Zu den abstrakten Dingen gehören die Mengen von Dingen. Eine *Menge* ist nach CANTOR eine ideelle (d.h. geistige) Zusammenfassung bestimmter Dinge zu einem einheitlichen Ganzen. Der Begriff einer derartigen Dingzusammenfassung, und damit auch der Mengenbegriff als bloße Abkürzung dafür, ist ein nicht durch noch einfachere Begriffe erklärbarer Grundbegriff, mit dem man sich lediglich an Hand von Beispielen vertraut macht. Andere, den Mengenbegriff noch untermalende Bezeichnungen für eine Menge sind: *Gesamtheit, Mannigfaltigkeit, abstrakte Einheit, Inbegriff, charakteristisches gemeinsames Merkmal, Klasse, System, Bereich.*

Beispiele für Mengen:
(1) Die Menge aller Einfamilienhäuser Hamburgs zu einem bestimmten Zeitpunkt (sei er in Vergangenheit, Gegenwart oder Zukunft gelegen).
(2) Unter Vorwegnahme der verschiedenen Zahlbegriffe erhält man als mathematische Mengenbeispiele die Menge der natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, ..., die Menge der ganzen Zahlen, die Menge der rationalen Zahlen, die Menge der reellen Zahlen und die Menge der komplexen Zahlen.
(3) Die Menge aller Mengen natürlicher Zahlen.
(4) Die Menge aller Dinge, die bei vorgegebenen Mengen M und N in M oder in N enthalten sind.
(5) Die Menge aller Dinge, die bei vorgegebenen Mengen M und N in M und in N enthalten sind.
(6) Die Menge aller Dinge, die bei einer vorgegebenen Menge M von Mengen und einer vorgegebenen Menge N in N und in allen Mengen von M enthalten sind.

Die durch eine Menge zusammengefaßten Dinge heißen die *Elemente* der betreffenden Menge. Man sagt von einer Menge, sie *bestehe aus* ihren Elementen; man sagt von einer Menge und irgendeinem ihrer Elemente, daß sie dieses Element *besitzt*, dieses Element *enthält* und daß dieses Element in der Menge *enthalten* ist, in der Menge *liegt*, zu der Menge *gehört*, *aus* der Menge ist. Als Abkürzung für *ist ein Element von* hat sich nach G. PEANO das Zeichen $\in$ (gelesen: *Element* (*von*)) eingebürgert, das stilisierte „ε" aus dem griechischen Wort „εστι" für „ist ein". Die durch $\in$ ausgedrückte Beziehung zwischen Dingen heißt die *Elementbeziehung* oder die *ε-Beziehung* (die *Epsilon-Beziehung*). Bezeichnen also a, b irgendwelche Dinge, so bedeutet

$a \in b$ (gelesen: *a Element* (*von*) *b*),

daß b eine Menge und a ein Element von b ist. Für beliebige Dinge a und b gilt entweder $a \in b$ oder nicht $a \in b$. Dabei wird nicht Entscheidung dieser beiden Fälle gefordert. Bezeichnet etwa W die Menge aller wahren mengentheoretischen Aussagen (vgl. §2) und A eine bestimmte mengentheoretische Aussage, deren Wahrheitsverhalten bis heute unbekannt ist, so gilt zwar prinzipiell entweder $A \in W$ oder nicht $A \in W$, aber es ist nicht gewiß, ob jemals entschieden wird, welcher Fall vorliegt.

Wir machen uns im folgenden durch einige Erläuterungen weiter mit dem Mengenbegriff vertraut. Dabei betrachten wir zunächst, wie schon stillschweigend bisher, ausschließlich *nichtleere Mengen*, d. h. Mengen, welche mindestens ein Element besitzen.

Die Mengen fallen als Merkmale mit den Eigenschaften (als Kollektivdinge, Sammelobjekte) zusammen. *Eigenschaft* ist damit eine weitere Bezeichnung für eine Menge, aber natürlich auch kein einfacherer Begriff als der Mengenbegriff selbst. Von einem in einer Menge M gelegenen Element e sagt man dann auch, *e besitzt die* (oder *ist von der*) *Eigenschaft M* oder *die Eigenschaft M trifft auf e zu.*

Die Mengen sind (auf alle Fälle für die Mathematik) *extensional* (Extensionalität des Mengenbegriffes); d.h. eine Menge ist bereits durch ihren Umfang (*Extension*) eindeutig bestimmt oder genauer: Eine Menge ist bereits durch die in ihr enthaltenen Elemente eindeutig bestimmt, unabhängig somit von dem durch etwaige mehrfache Beschreibungsmöglichkeiten dieser Menge verschiedenartig erzeugten Sinn (*Intention*). Als Beispiel ist die aus der Zahl 2 als einzigem Element bestehende Menge M identisch mit der Menge N aller natürlichen Zahlen, welche eine gerade Primzahl sind. Die Extensionalität des Mengenbegriffes gestattet, von jeder Menge M als von *derjenigen* Menge zu sprechen, welche genau die Elemente von M als Elemente besitzt.

Eine Menge muß nicht wie die Mengen der Beispiele (1)–(6) durch eine die betreffende Menge eindeutig kennzeichnende Mengenbeschreibung definierbar sein. Als Beispiel existieren stets unendlich viele Mengen von Elementen einer fest vorgegebenen unendlichen Menge (etwa der Menge der natürlichen Zahlen), ohne daß man für jede einzelne dieser Mengen eine Beschreibung zur Verfügung hat. Für endliche Mengen sprachlich fixierter (und nicht allzu vieler) Elemente dagegen liefert bereits die Aufzählung ihrer Elemente eine besonders einfache Beschreibung. Dabei mögen, als nützliche Bezeichnung für endliche Mengen, in geschweifte Klammern gesetzte Dingbezeichnungen stets die Menge derjenigen Dinge bedeuten, deren Bezeichnungen geklammert sind (Mengengenbezeichnung durch Aufzählung). Sind also $a, b, c, \ldots$ bestimmte Dinge, so ist nacheinander

$$\{a\},\ \{a,b\},\ \{a,b,c\},\ldots$$

(gelesen: *Menge* (*von*) *a* bzw. *Menge* (*von*) *a*, *b* bzw. *Menge* (*von*) *a*, *b*, *c* bzw....) jeweils diejenige Menge, welche bzw. aus dem Element a, aus den Elementen a, b, aus den Elementen $a, b, c, \ldots$ besteht.

Eine Menge besitzt eine höhere entstehungstechnische Kompliziertheitsstufe, eine höhere Begriffsstufe, liegt in einer höheren Anschauungsebene, kurz: besitzt eine höhere *Stufe*, als ihre Elemente; denn sie setzt sich aus diesen Elementen zusammen. Damit kann auch keine Menge Element von sich selbst sein.

Der bisher aus der Anschauung gewonnene Mengenbegriff führt nur zu nichtleeren Mengen. Was soll man sich unter dem gemeinsamen Merkmal von gar keinen Dingen vorstellen? Aus Gründen der Einfachheit ist es aber wünschenswert, für beliebige Mengenbeschreibungen – also auch für solche, die kein einziges Element erfassen – eine zugehörige „Menge“ zur Verfügung zu haben; man erspart sich dann Fallunterscheidungen. So ist es in Mengenbeispiel (5) zweckmäßig, auch von der „Menge“ aller gleichzeitig in M und in N enthaltenen Dinge zu sprechen, falls die Mengen M und N kein einziges gemeinsames Element besitzen. Analog in Beispiel (6). Wir helfen uns, indem wir irgendein fest gewähltes und von allen nichtleeren Mengen verschiedenes Ding zusätzlich und künstlich zur Menge ohne Elemente ernennen, zur leeren Menge, und es jeder Mengenbeschreibung, welche kein Element erfaßt, als die beschriebene Menge zuordnen. Meistens nimmt man ohne Erwähnung die Existenz eines derartigen abstrakten Dinges hin. Wir wollen ganz zweifelsfrei vorgehen und fixieren ein materielles Ding (das als bisherige Nichtmenge sowieso kein Element besitzt). Die *leere Menge* oder *Leermenge*, bezeichnet mit: $\emptyset$ (gelesen: *leere Menge*), sei der Planet Erde. Zum Begriff *Menge* und zu den mit diesem synonymen Begriffen dieses Abschnittes §1.2 gehöre von nun an neben den bisherigen (abstrakten) nichtleeren Mengen auch die (konkrete) leere Menge $\emptyset$. $\emptyset$ ist dann die einzige Menge, welche kein Element enthält, so daß auch für den um $\emptyset$ erweiterten Mengenbegriff die Mengen *extensional* sind (Extensionalität des Mengenbegriffes) und man von jeder Menge M als von *derjenigen* Menge sprechen kann, welche genau die Elemente von M als Elemente besitzt.

1.3. Stufenaufbau

Das Mengenbeispiel (3) aus §1.2 zeigt, daß es nicht nur Mengen von Dingen gibt, die selbst keine Mengen sind, sondern daß der Mengenbildungsprozeß – gemäß dem in §1.2 erläuterten Stufenbegriff – nach oben in unbeschränkter Stufung weiterschreitet, indem Mengen von Mengen, Mengen von Mengen von Mengen usw. gebildet werden können. Die durch die Elementbeziehung bewirkte Stufung der Mengen ist eine grundlegende Eigenschaft der Mengen, die uns zu einem anschaulich besonders naheliegenden Aufbau der Mengenlehre führt. Wir beginnen dabei am einfachsten mit einer fest vorgegebenen, aber beliebig wählbaren, Menge $\mathbf{U}$ materieller Dinge, in welcher die leere Menge nicht als Element enthalten ist, also nicht $\emptyset \in \mathbf{U}$ gilt. Unter $\mathbf{U}$ kann man sich etwa die Menge aller Kugeln in einer bestimmten Urne vorstellen. $\mathbf{U}$ heißt der *Urelementebereich* oder einfach der *Urbereich*, seine Elemente heißen die *Urelemente*. Wir greifen aus der Vielzahl der sich über $\mathbf{U}$ in transfiniter Stufung erhebenden

Mengen die Mengen der unteren, leicht überschaubaren Stufen heraus. Indem alle Urelemente materiell sind und $\emptyset$ kein Urelement ist, wird ein Durcheinandergeraten von Urelementen und Mengen vermieden.

Die *Mengen 1-ter Stufe* seien alle möglichen Mengen von Urelementen. Besteht als Beispiel $\mathbf{U}$ aus drei (verschiedenen) Elementen a, b, c (also $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$), so sind die Mengen 1-ter Stufe die folgenden acht Mengen:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\} = \mathbf{U}\,.$$

$\emptyset$ läßt sich beschreiben als Menge aller Urelemente x mit $x \neq x$. Im Falle $\mathbf{U} = \emptyset$ ist $\emptyset$ die einzige Menge 1-ter Stufe. Die *Mengen 2-ter Stufe* seien alle möglichen Mengen von Urelementen oder Mengen 1-ter Stufe, wobei mindestens eine Menge 1-ter Stufe als Element auftritt. Für Urelemente a, b sind also u.a. die Mengen

$$\{\{a\}\}, \{\emptyset\}, \{a, \{b\}\}, \{a, \emptyset\}, \{\{a\}, \{b\}\}, \{\{a\}, \emptyset\}$$

Mengen 2-ter Stufe. Die *Mengen 3-ter Stufe* seien alle möglichen Mengen von Urelementen oder Mengen 1-ter oder 2-ter Stufe, wobei mindestens eine Menge 2-ter Stufe als Element auftritt. Für Urelemente a, b sind also u.a. die Mengen

$$\{\{\{a\}\}\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{a\}, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{a, \{\{b\}\}\}, \{\{\{a\}\}, \{\{b\}\}\}$$

Mengen 3-ter Stufe. Auf diese Weise fährt man fort und erhält sukzessiv nach den Mengen einer bereits erreichten Stufe die Mengen der nächsten Stufe als alle möglichen Mengen von Urelementen oder Mengen bisheriger Stufen, wobei mindestens eine Menge der bereits erreichten letzten bisherigen Stufe als Element auftritt.

Die *Mengen ω-ter Stufe* seien alle möglichen Mengen von Urelementen oder Mengen bisheriger Stufen, wobei Mengen beliebig hoher bisheriger Stufen als Elemente auftreten; d.h. zu jeder bisherigen Stufe gibt es eine als Element auftretende Menge von mindestens dieser Stufe. Als Beispiel ist eine Menge ω-ter Stufe die von $\emptyset$ und allen aus $\emptyset$ durch sukzessive Einermengenbildung entstehenden Mengen gebildete Menge; ihre unendlich vielen Elemente sind:

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \ldots\,.$$

Diese Menge führt zu weiteren Mengen ω-ter Stufe, indem man in ihr etwa jede zweite Menge streicht:

$$\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}, \ldots,$$

oder indem man nur jede millionste Menge stehen läßt. Die *Mengen* $(\omega, 1)$-*ter Stufe* seien alle möglichen Mengen von Urelementen oder Mengen bisheriger Stufen, wobei mindestens eine Menge ω-ter Stufe als Element auftritt. Die *Mengen* $(\omega, 2)$-*ter Stufe* seien alle möglichen Mengen von Urelementen oder Mengen bisheriger Stufen, wobei mindestens eine Menge $(\omega, 1)$-ter Stufe als Element auftritt. Auf die Mengen $(\omega, 2)$-ter Stufe folgen die *Mengen der Stufen* $(\omega, 3)$, $(\omega, 4), \ldots$. Auf alle bisherigen Mengen folgen schließlich die *Mengen der Stufen* $\omega 2$, $(\omega 2, 1)$, $(\omega 2, 2)$, $(\omega 2, 3), \ldots$; $\omega 3$, $(\omega 3, 1)$, $(\omega 3, 2)$, $(\omega 3, 3), \ldots$; $\omega 4, \ldots$; $\omega 5, \ldots$; $\omega 6, \ldots \ldots$.
Die Mengen der sämtlichen aufgeführten bzw. durch „...“ angedeuteten Stufen heißen die *elementaren Mengen.* Urelemente und elementare Mengen heißen gemeinsam die *elementaren Objekte.* Die elementaren Objekte nennen wir auch die *elementaren Dinge der Mengenlehre* (oder *der Mathematik*). Die Urelemente lassen sich dann auffassen als die elementaren Objekte der niedrigsten Stufe, der 0-*ten Stufe.* Der Gesamtbereich der elementaren Objekte ist somit schließlich nach der in Abb. 1 angegebenen *Stufenskala* durchweg gestuft. Obwohl

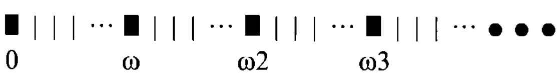

Abb. 1

wir der Einfachheit halber die üblichen Zahlbezeichnungen $0, 1, 2, 3, \ldots$ verwendet haben, sind die natürlichen Zahlen selbst nicht verwendet worden; man kann ja für $0, 1, 2, 3, \ldots$ auch schreiben $*, |, ||, |||, \ldots$. Unter Vorwegnahme der natürlichen Zahlen und des Paarbegriffes lassen sich die Stufen der elementaren Objekte mit den Zahlenpaaren (m,n) durchnumerieren für beliebige natürliche Zahlen m,n. Die Erfahrung lehrt, daß der größte Teil der heutigen Mathematik, darunter die Analysis, bequem im Bereich der elementaren Objekte mengentheoretisch darstellbar ist. Die Darstellung der Gesamtmathematik im Rahmen der Mengenlehre wird (in Kapitel VI) erreicht, indem man die durchgeführte Stufung über die elementaren Objekte hinaus fortsetzt.
Wir beschäftigen uns zunächst nur mit den elementaren Objekten. Wir nennen deshalb von jetzt ab die elementaren Mengen und elementaren Objekte in bezug auf den vorgegebenen Urbereich $\mathbf{U}$ einfach *Mengen* und *Objekte* und nennen die Objekte auch die *Dinge der Mengenlehre* (*Mathematik*). Dinge, welche in diesem Sinne keine mengentheoretischen Dinge sind, heißen *außermengentheoretische* (*außermathematische*) *Dinge.* Ebenso heißen frühere Objekte (also beliebige Dinge) bzw. frühere Mengen (also beliebige Gesamtheiten),

sofern sie keine Objekte bzw. Mengen im neuen Sinne sind, *außermengentheoretische* (*außermathematische*) *Objekte* bzw. *Mengen*. Zur Beschreibung der Stufung der Objekte führen wir zwischen Objekten noch die *Stufenbeziehung* (auch *Stufenkleinergleichbeziehung*) $\sqsubseteq$ (gelesen: *stufenkleinergleich*) ein. Sind a, b irgendwelche Objekte, so bedeute

$$a \sqsubseteq b \text{ (gelesen: } a \textit{ stufenkleinergleich } b\text{)},$$

daß a von niedrigerer Stufe als b oder von gleicher Stufe wie b ist, wofür man auch sagt, daß *a stufenkleinergleich b* bzw. *b stufengrößergleich a* ist. Es ist etwa

$$\emptyset \sqsubseteq \emptyset, \emptyset \sqsubseteq \{\emptyset\}, \{\emptyset\} \sqsubseteq \{\{\emptyset\}\}, \mathbf{U} \sqsubseteq \emptyset, \emptyset \sqsubseteq \mathbf{U}.$$

Für beliebige Objekte a, b gilt entweder $a \sqsubseteq b$ oder nicht $a \sqsubseteq b$. Dabei wird nichts über die Entscheidung dieser beiden Fälle ausgesagt.

1.4. Charakterisierung der Mengenlehre, Wahl des Urbereiches

Der in §1.3 über dem zugrunde liegenden Urbereich $\mathbf{U}$ vollzogene hierarchische Aufbau der Mengen läßt sich ebenso für jeden beliebigen zulässigen Urbereich $\mathbf{U}$ durchführen, zulässig in dem Sinne, daß $\mathbf{U}$ ein solcher Dingbereich ist, daß kein Element von $\mathbf{U}$ mit einer der über $\mathbf{U}$ errichteten Mengen zusammenfallen kann. (Das ist u. a. dann erfüllt, wenn man $\mathbf{U}$ als Gesamtheit materieller Dinge wählt mit nicht $\emptyset \in \mathbf{U}$.) Mit den Objekten und den Beziehungen $\in, \sqsubseteq$ in bezug auf zulässige Urbereiche erhalten wir jetzt die folgende Charakterisierung der Mengenlehre: *Die Mengenlehre untersucht unabhängig von dem zugrunde liegenden Urbereich in ganz allgemeiner Weise die Objekte im Hinblick auf die Elementbeziehung und die Stufenbeziehung, wobei von diesen beiden Beziehungen die Elementbeziehung als die Kernbeziehung der Mengenlehre im Vordergrund des Interesses steht.* (Bei jeder Erweiterung des Objektebereiches, wie etwa in Kapitel VI, wird diese Charakterisierung der Mengenlehre unter Beibehaltung des Wortlautes automatisch umfassender.) Die Untersuchung der Objekte hinsichtlich der Beziehungen $\in, \sqsubseteq$ „unabhängig von dem zugrunde liegenden Urbereich in ganz allgemeiner Weise" bedeutet einfach, da wir außerdem noch axiomatisch vorgehen wollen, daß die Mengenlehre nur mit rein logischem Schließen aus gewissen für alle zulässigen Urbereiche gültigen Axiomen nur solche Aussagen (einschließlich der Axiome) über Objekte auf ihre Gültigkeit untersucht, welche sich auch allein mit Hilfe der folgenden Ausdrucksmittel (Grundbegriffe) formulieren lassen: Variable für Objekte, $\in, \sqsubseteq$ und rein logische Begriffe (einschließlich der Identität $=$ und

Klammern (,)). Welche Aussagen dann im einzelnen untersucht werden, ist der mengentheoretischen Literatur zu entnehmen. Einen Einblick gibt also auch unser Buch.

Für den Aufbau der Mengenlehre ist es gleichgültig, welchen zulässigen Urbereich man sich den Betrachtungen zugrunde gelegt denkt. Denn nach der obigen Charakterisierung der Mengenlehre ergibt sich für beliebige solche Urbereiche **U** formal die gleiche Theorie, da die spezielle Natur der Urelemente (etwa als Kugeln einer Urne) in die Theorie überhaupt nicht eingeht. Diese spezielle Natur ist allerdings für die inhaltliche Interpretation der Theorie erforderlich. Man wüßte sonst nicht, auf welche Dinge sich die Aussagen der Theorie beziehen, was die Aussagen bedeuten. Aber obwohl dann jeder mit Hilfe der zugelassenen Ausdrucksmittel definierte mengentheoretische Begriff, nur solche Begriffe können ja als Bestandteile zugelassener Aussagen auftreten, für verschiedene Urbereiche **U** verschiedene Bedeutung besitzt, so fallen doch auch diese Bedeutungen in ihrer die Mengenlehre interessierenden Komponente zusammen. Das liegt an der Beschränkung auf die zugelassenen Ausdrucksmittel, wonach jeder mengentheoretische Begriff unabhängig von der speziellen Wahl von **U** rein logisch aus den Variablen und der Element- und Stufenbeziehung heraus zusammengesetzt werden kann. So ist der Bedeutungskern etwa der im Rahmen der Mengenlehre später definierten natürlichen Zahlen oder Kardinal- und Ordinalzahlen für jede Wahl von **U** derselbe. Bezieht man in die Argumentation neben **U** noch $\emptyset$ mit ein, so erkennt man, daß der Aufbau der Mengenlehre natürlich auch unabhängig ist von der in §1.2 getroffenen Wahl der leeren Menge.

Die Möglichkeit der freien Wahl des Urbereiches **U** bietet für den Anfänger den Vorteil besonderer Anschaulichkeit, ein Grund, weshalb wir Urelemente nicht ausschließen (vgl. auch §20.3). Möchte man als Beispiel später die mengentheoretischen Operationen der Vereinigung und des Durchschnittes mit ihren Gesetzmäßigkeiten an einem konkreten Gegenstandsbereich verfolgen, so wähle man einfach diesen Gegenstandsbereich als Urbereich **U**. Die Theorie liefert dann unmittelbar Aussagen auch über beliebige Mengen der betreffenden Gegenstände. Möchte man dagegen den Aussagen der Mengenlehre eine absolute Bedeutung zusprechen, unabhängig also von der speziellen Wahl von **U**, so muß man sich einen festen zulässigen Urbereich vorgeben, auf den sich dann die absolute Bedeutung mengentheoretischer Aussagen beziehen soll. Wir wählen für die absolute Interpretation einfach $\mathbf{U} = \emptyset$.

Damit ist die inhaltliche Grundlage unserer Mengenlehre genau umrissen. Von nun an liege allen mengentheoretischen Betrachtungen ein beliebig fest gewählter Urbereich **U** materieller Dinge mit nicht $\emptyset \in \mathbf{U}$ zugrunde, auf den sich die am Ende von §1.3 eingeführten Begriffe beziehen. Dabei kann also auch $\mathbf{U} = \emptyset$ sein. Die leere Menge $\emptyset$ sei stets gemäß §1.2 festgelegt.

1.5. Sprache der Mengenlehre

Wir präzisieren zunächst die in §1.4 verwendeten mengentheoretischen Ausdrucksmittel. Für die Formulierung mengentheoretischer Aussagen reichen an logischen Begriffen die folgenden bequem aus, welche gleichzeitig die Bedeutungen und Lesarten der daruntergesetzten abkürzenden *logischen Zeichen* (auch *logischen Symbole* oder wieder *logischen Begriffe*) sind:

nicht,	*und,*	*oder,*	*wenn-so,*	*genau-dann-wenn,*
$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$

für jedes,	*es gibt ein,*	*es gibt höchstens ein,*	*es gibt genau ein,*
$\forall$	$\exists$	$\exists!$	$\exists!!$

dasjenige,	*(ist) gleich,*	*Klammer auf,*	*Klammer zu.*
ι	$=$	(	)

Die von $=$, (,) verschiedenen logischen Zeichen heißen auch *logische Funktoren.* Für Aussagen **A**, **B** sind die zusammengesetzten Aussagen *Negation* (*Verneinung*) $\neg\,\mathbf{A}$, *Konjuktion* $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$, *Alternative* $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$, *Implikation* $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ (gelesen: *wenn* **A** (*gilt*), *so* (*gilt*) **B** oder auch: **A** *Pfeil* **B**) und *Äquivalenz* $\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}$ (gelesen: **A** (*gilt*) *genau dann, wenn* **B** (*gilt*) oder auch: **A** *Doppelpfeil* **B**) stets wieder entweder wahr (richtig, gültig) oder falsch. *Oder* wird im nicht-ausschließenden Sinne verwendet (*inklusives Oder*, deshalb auch $\vee$ wie „v" des lateinischen „vel" für „oder"); d.h. $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ ist wahr genau dann, wenn mindestens eine der beiden Aussagen **A**, **B** wahr ist, im Gegensatz zum ausschließenden *entweder-oder* (*exklusives Oder*), der *Disjunktion* „entweder **A** oder **B**", nämlich $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge \neg (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$. $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ ist falsch genau dann, wenn **A** richtig und **B** falsch ist. Für $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ sagt man auch: *Aus* (der *Voraussetzung*, der *Prämisse*) **A** *folgt* (die *Behauptung*, die *Konklusion*) **B**, **A** *ist eine hinreichende Bedingung für* **B**, **B** *ist eine notwendige Bedingung für* **A**, **A** *impliziert* **B**. Für $\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}$ sagt man auch: **A** *ist eine charakteristische Bedingung für* **B**, **A** *gilt dann und nur dann, wenn* **B** *gilt*, **A** *und* **B** *sind äquivalent* (oder *gleichwertig*). $(\neg\,\mathbf{B}) \Rightarrow (\neg\,\mathbf{A})$ bzw. $(\neg\,\mathbf{B}) \Leftrightarrow (\neg\,\mathbf{A})$ heißt die *Kontraposition* von $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ bzw. $\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}$. Die Konjunktion $\mathbf{A} \wedge \neg\,\mathbf{A}$ einer Aussage **A** und ihrer Verneinung ist ein *logischer Widerspruch* oder eine *Antinomie.* Zur Klammereinsparung vereinbart man, daß $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ stärker trennen als $\neg$, daß $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ stärker trennen als $\wedge$, $\vee$ und daß jedes der beidseits mit (derselben Anzahl) Punkten versehenen Zeichen $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ stärker trennt als jedes dieser Zeichen, welches mit weniger (eventuell gar keinen) Punkten versehen ist (für Zeichen mit derselben Punkteanzahl gilt die ursprüngliche Reihenfolge der Trennung). Die Zeichen $\forall$, $\exists$, ι, $=$ heißen der *Generalisator* (*Allquantor*), der *Partikularisator* (*Existenzquantor*), der *Deskriptor* (*Kennzeichnungsoperator*, *bestimmte Artikel*) und das *Gleichheitszeichen*. *Gleich* (auch *identisch*) bedeutet ausnahmslos die Identität (das absolute Zusammenfallen) von Dingen. Jedes Ding ist sich selbst gleich und ist nur sich selbst gleich. Die durch das Gleichheitszeichen $=$ ausgedrückte Beziehung zwischen Dingen heißt die *Identität* (*Gleichheit*, *Gleichheitsbeziehung*). Für beliebige Dinge a, b gilt entweder $a = b$ oder nicht $a = b$. Dabei wird nichts über die Entscheidung dieser beiden Fälle gesagt. Die Klammern (und) dienen als technische Zeichen, um logisch zusammengehörige Aussagenbestandteile abgrenzen zu können und damit die logische Struktur der Aussagen unmißverständlich wiedergeben zu können. Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit verwendet man bei mehreren ineinandergeschachtelten Klammerungen gegebenenfalls Klammern verschiedener Längen und Formen (runde, geschweifte, eckige, spitze).

Die *Variablen der Mengenlehre* (*Mathematik*), d.h. alle jemals gewählten Variablen (als Zeichen) für Objekte, das *Elementzeichen* $\in$, das *Stufenzeichen* $\sqsubset$ und die logischen Zeichen zusammen heißen die *Grundzeichen* (auch *Atomzeichen*, *Grundbegriffe*) *der Mengenlehre* (*Mathematik*) oder die *Ausdrucksmittel der Mengenlehre* (*Mathematik*). Das sind also neben den Objektvariablen die Zeichen:

$$\in \quad \sqsubset \quad \neg \quad \wedge \quad \vee \quad \Rightarrow \quad \Leftrightarrow \quad \forall \quad \exists \quad \exists! \quad \exists!! \quad \iota \quad = \quad (\quad)$$

Die Objektvariablen und die Zeichen $\in, \sqsubset$ sind für die Mengenlehre (Mathematik) die *fachspezifischen Grundbegriffe*, und Elementbeziehung, Stufenbeziehung und Identität, als Beziehungen zwischen Objekten, sind die drei *Grundbeziehungen*. (In der Mathematischen Logik zählt man neben den logischen Begriffen auch die Variablen mit zu den universellen Grundbegriffen einer Theorie.) Zur Vereinfachung der Schreibweise drückt man die Verneinung einer durch ein Symbol wiedergegebenen Beziehung auch mittels Durchstreichung des Symbols aus. Sind z.B. a, b Objektvariable, so schreibt man für

$$\neg\, a \in b, \quad \neg\, a \sqsubset b, \quad \neg\, a = b$$

auch einfacher:

$$a \notin b, \quad a \not\sqsubset b, \quad a \neq b$$

(gelesen: *a nicht Element* (*von*) *b* bzw. *a nicht stufenkleinergleich b* bzw. *a nicht gleich b*, *a verschieden b*, *a ungleich b*).

Aussagen bzw. *Kennzeichnungen* sind Zeichenreihen, welche Sachverhalt-Beschreibungen bzw. Ding-Bezeichnungen (Namen) sind, etwa „Die Erde dreht sich um die Sonne.", „Cäsar starb eines natürlichen Todes.", „$2 + 2 = 4$", „$3 < 1$" bzw. „Sonne", „der Mann im Mond", „4", „die größte Primzahl". Die Bedeutung einer Aussage ist ein eindeutig zugehöriger (wirklich vorliegender) Sachverhalt oder ein „nur gedachter Sachverhalt" (*wahre* oder *falsche Aussage*), die Bedeutung einer Kennzeichnung ist ein eindeutig zugehöriges (wirklich existierendes) Ding oder ein „nur gedachtes Ding" (*eigentliche* oder *uneigentliche Kennzeichnung*). *Aussageformen* bzw. *Kennzeichnungsformen* sind (für unsere Zwecke) Zeichenreihen **Z**, für die gilt: **Z** besitzt an Variablen höchstens Objektvariable, und es gibt Objektvariable, die derart in **Z** vorkommen, daß **Z** immer dann eine Aussage bzw. Kennzeichnung wird, wenn man jede dieser Variablen *festhält*, d. h. sich jede dieser Variablen als Bezeichnung (als Kennzeichnung) irgendeines fest ausgewählten Objektes denkt. (Jede einzelne dieser Variablen bezeichne natürlich an allen Stellen ihres Vorkommens in **Z** dasselbe Objekt, verschiedene dieser Variablen dürfen verschiedene Objekte bezeichnen.) Diese Variablen sind Parameter, eine Art Leerstellen, für Objekte und heißen die *freien Variablen* von **Z**. Alle anderen Variablen von **Z** (falls vorhanden) heißen die *gebundenen Variablen* von **Z**.

Beispiele. Sind a, b, m, x, y Variable für Objekte, so sind Aussageformen:

$\forall x(x \in m)$	(freie Variable m),
$\exists y(y = \iota m \forall x(x \in m \Leftrightarrow x \in a \vee x \in b))$	(freie Variablen a, b),
$\forall x(x \in m \Leftrightarrow x \in a \vee x \in b)$	(freie Variablen m, a, b),
$x \in m \Leftrightarrow x \in a \vee x \in b$	(freie Variablen x, m, a, b),
$x \in a \vee x \in b$	(freie Variablen x, a, b),
$x \in a$	(freie Variablen x, a)

und sind Kennzeichnungsformen die Variablen a, b, m, x, y selbst und:

$\iota m(x \in m)$	(freie Variable x),
$\iota m \forall x(x \in m \Leftrightarrow x \in a \vee x \in b)$	(freie Variablen a, b);

keine Aussageformen bzw. keine Kennzeichnungsformen sind:

$\neg \exists y(y = \iota m \forall x(x \in m))$,	$\iota m \forall x(x \in m)$,
$\forall a \forall b \exists m \forall x(x \in a \vee x \in b \Rightarrow x \in m)$,	$\iota m(x \in m \vee \exists x(x \in m))$.
$x \in a \wedge \exists x(x \in b)$,	

Aussagen bzw. Kennzeichnungen, die an Variablen höchsten Objektvariable besitzen, und Aussageformen bzw. Kennzeichnungsformen zusammen heißen *Ausdrücke* bzw. *Terme*. Nennt man naheliegend für Aussagen bzw. Kennzeichnungen **Z**, die an Variablen höchsten Objektvariable besitzen, alle auftretenden Variablen *gebundene Variable* von **Z**, so gilt für jeden Ausdruck bzw. Term **Z**, daß jede in **Z** auftretende Variable entweder frei oder gebunden in **Z** vorkommt. Aussagen bzw. Terme heißen auch *konstante Ausdrücke* bzw. *konstante Terme* und Aussageformen bzw. Kennzeichnungsformen auch *variable Ausdrücke* bzw. *variable Terme*, da letztere *von ihren freien Variablen abhängen* (im Hinblick auf die verschiedenen Möglichkeiten, durch die freien Variablen feste Objekte bezeichnen zu lassen). Die Bedeutung eines Ausdruckes bzw. Termes ist unabhängig von der speziellen Wahl der verwendeten Objektvariablen.

Aussagen, Aussageformen, Ausdrücke, Kennzeichnungen, Kennzeichungsformen, Terme, jeder dieser Begriffe mit dem Zusatz *der Mengenlehre* (*Mathematik*), sind solche Aussagen, Aussageformen, Ausdrücke, Kennzeichnungen, Kennzeichnungsformen, Terme, welche an Variablen höchstens Objektvariable enthalten und sich auch, nach Rückgängigmachung verwendeter Abkürzungen (und Absehen von sachlich überflüssigem umgangssprachlichen Ballast), allein mit Hilfe der Ausdrucksmittel (Grundbegriffe) der Mengenlehre formulieren lassen. Beispiele findet man später (ab §2) fortlaufend beim effektiven Aufbau unserer Mengentheorie.

Das zentrale Abkürzungsinstrument sind die mengentheoretischen Definitionen. Eine *Definition der Mengenlehre* (*Mathematik*) ist eine mengentheoretische Begriffsbestimmung mittels Abkürzung; d.h. eine Begriffsbestimmung, durch welche zum Zwecke der Übersichtlichkeit und des besseren Verständnisses mengentheoretischer Aussagen ein neuer (im allgemeinen kürzerer) mengentheoretischer Ausdruck bzw. Term als bedeutungsgleiche direkte Abkürzung für einen bereits bekannten mengentheoretischen Ausdruck bzw. Term eingeführt wird. Die ausschließlich aus Grundzeichen der Mengenlehre bestehenden Ausdrücke und Terme und ihre umgangssprachlichen Formulierungen sind dabei die ursprünglichsten bekannten mengentheoretischen Ausdrücke und Terme. Bei Numerierung von Definitionen werden oft mehrere sachlich zusammengehörige Definitionen unter einer Definitionsnummer zusammengefaßt. In jeder einzelnen Definition heißt die linke, zu definierende, Zeichenreihe das *Definiendum* und die rechte, definierende, Zeichenreihe das *Definiens*. Zwischen Definiendum und Definiens setzt man bei Ausdrucks- bzw. Termdefinitionen oft das *Definitionszeichen* $\Leftrightarrow_{\mathrm{Df}}$ (gelesen: (*ist*) *definitionsäquivalent* (*mit*)) bzw. $=_{\mathrm{Df}}$ (gelesen: (*ist*) *definitionsgleich* (*mit*)) oder das *Definitionszeichen* $:\Leftrightarrow$ bzw. $:=$ oder einfach $\Leftrightarrow$ bzw. $=$. Wir werden $\Leftrightarrow$, $=$ bevorzugen und auch umgangssprachlich „genau-dann-wenn" und „gleich" verwenden, wobei wir außerdem verabreden, für „genau-dann-wenn" auch vereinfachend „wenn" oder „falls" zu sagen (mit der Bedeutung von „genau-dann-wenn"). Definiens und Definiendum einer Definition besitzen stets dieselben freien Variablen. Die bloße Einführung abkürzender Variabler ist also noch keine Definition. Sind als Beispiel a, b, c, m, x Objektvariable und setzt man abkürzend

$$c = \iota m \forall x (x \in m \Leftrightarrow x \in a \wedge x \in b),$$

so ist dies keine Definition, auch wenn man meistens bequemerweise von einer „Definition" spricht. Es liegt nur eine Prämisse in Gleichungsgestalt vor. Da die Bedeutung mittels Objektvariabler formulierter Ausdrücke und Terme unabhängig von der speziellen Wahl der verwendeten Objektvariablen ist, sind mit jeder Definition automatisch alle diejenigen weiteren Abkürzungsmöglichkeiten zwischen bekannten und neu eingeführten mengentheoretischen Ausdrücken und Termen gegeben, welche man dadurch erhält, daß man im Definiens und Definiendum der betreffenden Definition an Stelle der auftretenden Variablen sinngerecht irgendwelche anderen Objektvariablen verwendet. Termdefinitionen werden prinzipiell nur so vorgenommen, daß das von dem definierenden Term (bei Festhalten seiner eventuellen freien Variablen) bezeichnete wirkliche oder nur gedachte Objekt auch wirklich existiert.

Die *Begriffe der Mengenlehre* (*Mathematik*) sind die Grundbegriffe (Grundzeichen) der Mengenlehre, für Objektvariable a, b die Ausdrücke $a \in b$, $a \sqsubset b$, $a = b$, wobei man auch andere Paare verschiedener Objektvariabler verwenden darf, und alle durch mengentheoretische Definitionen eingeführten Ausdrücke und Terme, wobei man in denselben auch sinngerecht andere Objektvariable verwenden darf (und freie Variable und nebensächliche Hilfswörter auch weglassen kann). Welche Begriffe definiert werden, ist eine reine Zweckmäßigkeitsfrage. Man vermeide Überschneidungen entweder gänzlich oder halte bei Begriffen, welche in verschiedenem Zusammenhang verschiedene Bedeutung haben, diese Bedeutungen stets auseinander! Redeweisen über Begriffe beziehen sich oft auf die Bedeutungen dieser Begriffe und nicht auf diese Begriffe als Zeichenreihen. Gemäß dem verabredeten Gebrauch mengentheoretischer Definitionen entsteht jeder mengentheoretische Ausdruck, jeder von den Objektvariablen verschiedene mengentheoretische Term und damit auch jeder von den Grundbegriffen verschiedene mengentheoretische Begriffe, sieht man von umgangssprachlichen Formulierungen ab, für Objektvariable a, b aus den Ausdrücken $a \in b$, $a \sqsubset b$, $a = b$ heraus durch fortlaufende rein logische Zusammensetzung; d.h. durch Komposition bereits bekannter mengentheoretischer Ausdrücke (angefangen mit $a \in b$, $a \sqsubset b$, $a = b$) mit Hilfe der logischen Funktoren (und der Objektvariablen und Klammern) und durch Einsetzen bereits bekannter mengentheoretischer Terme in gewisse freie Variable bereits bekannter mengentheoretischer Ausdrücke und Terme. In diesem Sinne entstehen alle

mengentheoretischen Ausdrücke, Terme und (von den Grundbegriffen verschiedenen) Begriffe durch logische Zusammensetzung aus den fachspezifischen mengentheoretischen Grundbegriffen heraus.
Die *Sätze* (auch *Lehrsätze, Theoreme, Gesetze*) *der Mengenlehre* (*Mathematik*) sind die wahren mengentheoretischen Aussagen. Die bereits als wahr erkannten mengentheoretischen Sätze sind die *Ergebnisse der Mengenlehre* (*Mathematik*).

1.6. Axiomatische Mengenlehre

Zur systematischen Vermeidung logischer Widersprüche, die in der ursprünglichen CANTORschen *naiven* (d.h. unaxiomatischen) *Mengenlehre* auftraten, wurde die naive Mengenlehre unter Zugrundelegung kritischerer Anschauungen über den Mengenbegriff, abgelöst von der heute üblichen *axiomatischen Mengenlehre.* Bei einem präzisierten Aussagebegriff wird ein Axiomensystem an die Spitze der Theorie gestellt und wird zur Gewinnung neuer Sätze nur das logische Schließen aus den Axiomen zugelassen. Es gibt heute zahlreiche Axiomensysteme der Mengenlehre. Die drei klassischen Grundtypen sind die Systeme von

(a) RUSSELL (*Typentheorie*),
(b) ZERMELO-FRAENKEL (ZF-*Mengentheorie*),
(c) von NEUMANN-BERNAYS-GÖDEL (*Klassenkalkül*).

Wir legen der Mengenlehre in unserem Buch ein Axiomensystem zugrunde (das elementare Axiomensystem von §2 und seine Erweiterung in Kapitel VI), welches sachlich und technisch eine möglichst unkomplizierte Darstellung der Mathematik gewährleistet, indem es die drei Systeme (a), (b), (c) miteinander verschmilzt. Die inhaltliche Grundlage für unser zunächst elementares Axiomensystem des §2 bilden die in §1.3 entwickelten Anschauungen über die *Elementbeziehung* $\in$ und *Stufenbeziehung* $\sqsubset$ zwischen den (elementaren) *Objekten* in bezug auf einen vorgegebenen Urbereich U, und auf der in §1.5 entwickelten sprachlichen Grundlage (mit der dortigen Terminologie) ist unsere *axiomatische Mengenlehre* (in bezug auf das elementare wie später das erweiterte Axiomensystem) durch folgende drei Tatsachen gekennzeichnet:
(1) Man präzisiert mit Hilfe vorgegebener *Ausdrucksmittel* (*Grundbegriffe*) *der Mengenlehre* (*Mathematik*), nämlich *fachspezifischer* und *logischer* Grundbegriffe, die zulässigen (einschlägigen) *Aussagen der Mengenlehre* (*Mathematik*) und läßt innerhalb der Mengenlehre (und der Mathematik) nur diese mengen-

theoretischen Aussagen zur Untersuchung zu. Mittels der *Definitionen der Mengenlehre* (*Mathematik*) entstehen alle mengentheoretischen Aussagen und, als Bestandteile derselben, auch alle *Begriffe der Mengenlehre* (*Mathematik*) durch logische Zusammensetzung aus den fachspezifischen Grundbegriffen. Die Ausdrucksmittel sind innerhalb der axiomatischen Mengenlehre die undefinierten Grundbegriffe, aus denen heraus alle weiteren Begriffe definiert und alle Aussagen formuliert werden. Mit (1) erzielt man einen kontrollierten Sprachgebrauch, der keine *semantischen Antinomien* entstehen läßt (d.h. Antinomien durch unsachgemäßen Sprachgebrauch wie die *Antinomie des Lügners*: „Der Satz, den ich eben spreche, ist falsch."; dieser Satz wäre gleichzeitig wahr und falsch).

(2) Man stellt an die Spitze der Mengenlehre gewisse, möglichst wenige, mengentheoretische Aussagen, deren Richtigkeit man auf Grund kritischer anschaulicher Vorstellungen über den Mengenbegriff und gesammelter Erfahrungen im Umgang mit diesen Aussagen (ihre angenommene Gültigkeit führte u. a. bis heute noch nicht zu einem logischen Widerspruch) möglichst leicht anerkennt und die genügend ausdrucksstark sind, so daß sich mit der unter (3) geschilderten Methode brauchbare mengentheoretische Sätze herleiten lassen. Diese an der Spitze gestellten wahren Aussagen heißen die *Axiome der Mengenlehre* (*Mathematik*). Die Gesamtheit der Axiome heißt ein *Axiomensystem der Mengenlehre* (*Mathematik*).

(3) Die Methode der Gewinnung von *Sätzen* (d.h. wahren Aussagen) *der Mengenlehre* (*Mathematik*) ist, als exaktestes Hilfsmittel, das *Ableiten* (die *Deduktion*) mengentheoretischer Aussagen durch (jedermann geläufiges) rein *logisches Schließen* (logisches Schlußfolgern, logisches Denken) aus dem Axiomensystem, wobei die Axiome selbst als aus dem Axiomensystem abgeleitete Aussagen betrachtet werden. Der Nachweis der Richtigkeit einer mengentheoretischen Aussage kann also nur durch Angabe eines *Beweises der Mengenlehre* (*Mathematik*) erfolgen, d.h. durch Angabe einer solchen Kette von mittels schon bekannter Sätze durch rein logische Schlüsse sukzessiv aufeinander folgenden mengentheoretischen Ausdrücken, welche als letztes Glied die gewünschte Aussage enthält (die ursprünglichsten bekannten Sätze sind die Axiome). Auf die Vermutung von Sätzen und ihrer Beweise wird man durch die anschaulichen Vorstellungen geführt, welche man über die in den Sätzen ausgedrückten Sachverhalte besitzt. Diese heuristischen anschaulichen Vorstellungen sind für die Theorie von primärer Bedeutung, dürfen aber natürlich nicht als Beweisschritte benutzt werden, da sie keine logischen Schlüsse sind. Sie geben lediglich wegweisende Anleitungen zur Durchführung von Beweisen. Mit (2) und (3) werden *syntaktische Antinomien* verhindert (d.h. Antinomien beim

logischen Ableiten von Sätzen aus schon bekannten Sätzen wie die RUSSELL-*sche Antinomie* der Menge R aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten; aus der Existenz von R würde $R \in R \wedge R \notin R$ folgen).
Ein Axiomensystem der Mengenlehre bedarf im allgemeinen im Laufe der Weiterentwicklung von Mengenlehre und Mathematik einer fortwährenden Ergänzung durch Hinzunahme immer neuer Axiome (gegebenenfalls unter Zugrundelegung neuer Intuitionen über den Mengenbegriff) und ist also stets nur ein Axiomensystem in bezug auf den jeweils erreichten Stand der Forschung.
Damit sind alle Vorbereitungen für den Ablauf unserer axiomatischen Mengentheorie getroffen.

§ 2. Die elementaren Axiome

2.1. Vorbemerkungen

Die in diesem §2 im folgenden aufgeführten Axiome (die Axiome I–V) heißen die *elementaren Axiome der Mengenlehre* (*Mathematik*). Ihre Gesamtheit bildet das *elementare Axiomensystem der Mengenlehre* (*Mathematik*).
Von jetzt an seien die kleinen und großen lateinischen Buchstaben

$$a, b, c, \ldots, \; x, y, z \text{ und } A, B, C, \ldots, \; X, Y, Z$$

und alle daraus durch Anfügen von (aus dem Zusammenhang der Betrachtungen jeweils ersichtlichen) Indizes entstehenden Zeichen, wie z.B.

$$a_0, a_3, c_{0012}, k', \bar{z}, p_4^*, {}^*y, B_2^1, L^+, E'', X^*,$$

Variable für Objekte. Mengen werden, im Falle gleichzeitiger Betrachtung ihrer Elemente, vorwiegend mit großen Buchstaben bezeichnet, ihre Elemente vorwiegend mit kleinen (wobei natürlich große wie kleine Buchstaben nach wie vor Variable für Objekte sind).

2.2. Die Stufenaxiome

Wir stellen zunächst in Definition 1 die aus den Grundbeziehungen $\in, \sqsubset, =$ unmittelbar folgenden Begriffsbildungen zusammen.
Definition 1. Für Objekte a, b sei

$$a \square b \Leftrightarrow a \sqsubset b \wedge b \sqsubset a, \quad a \ulcorner b \Leftrightarrow a \sqsubset b \wedge a \not\square b$$

(gelesen: *a stufengleich b* bzw. *a stufenkleiner b*). a ist ein *Element* von b, falls $a \in b$ gilt. a ist *stufenkleinergleich* b bzw. b ist *stufengrößergleich* a, falls $a \sqsubset b$ gilt. a ist *gleich* (oder ist *identisch* mit) b, falls $a = b$ gilt. a ist *stufengleich* mit b, falls $a \square b$ gilt. a ist *stufenkleiner* als b bzw. b ist *stufengrößer* als a, falls $a \ulcorner b$ gilt. ∎

Die durch $\square$ bzw. $\ulcorner$ ausgedrückte Beziehung zwischen Objekten heißt die *Stufengleichheit* (*Stufengleichbeziehung*) bzw. die *Stufenkleinerbeziehung*.

Mit den Begriffen $\in$, $\sqsubset$, $\ulcorner$ lassen sich jetzt die Stufenaxiome formulieren.

Axiome I: Stufenaxiome.

(1) $\forall a \forall b \forall c (a \sqsubset b \wedge b \sqsubset c \Rightarrow a \sqsubset c)$,

(2) $\forall a \forall b (a \sqsubset b \vee b \sqsubset a)$,

(3) $\forall A \big(\exists x (x \in A) \Rightarrow \exists x (x \in A \wedge \forall y (y \in A \Rightarrow x \sqsubset y))\big)$,

(4) $\forall a \forall A (a \in A \Rightarrow a \ulcorner A)$,

(5) $\forall A \forall B (\exists x (x \ulcorner B) \wedge \forall x (x \in A \Rightarrow x \ulcorner B) \Rightarrow A \sqsubset B)$. ∎

Diese Axiome resultieren aus den in §1.3 entwickelten anschaulichen Vorstellungen über die Stufenbeziehung. I(1) und I(2) sind unmittelbar einsichtig. I(3) bringt zum Ausdruck, daß es in jeder nichtleeren Menge A ein stufenkleinstes Element x gibt, I(4), daß sämtliche Elemente einer Menge A stufenkleiner als A sind, und I(5), daß die Stufe einer jeden Menge A die kleinste Mengenstufe ist, welche größer als alle Stufen der Elemente von A ist. In I(5) ist der Zusatz $\exists x (x \ulcorner B)$ deshalb nicht entbehrlich, da sonst für jedes Urelement B und die leere Menge A aus I(5) $A \sqsubset B$ folgen würde im Gegensatz dazu, daß die leere Menge eine höhere Stufe als die Urelemente hat.

Die Axiome I(1) und I(2) ergeben den

Satz 1. *Für beliebige Objekte a, b, c gilt:*

$a \sqsubset b \Leftrightarrow a \ulcorner b \vee a \square b, \qquad a \ulcorner b \Leftrightarrow a \sqsubset b \wedge a \not\square b,$

$a \square a$ (*Reflexivität* (*der Stufengleichheit*)),

$a \square b \Rightarrow b \square a$ (*Symmetrie*),

$a \square b \wedge b \square c \Rightarrow a \square c$ (*Transitivität*),

$a \sqsubset a$ (*Reflexivität* (*der Stufenbeziehung*)),

$a \sqsubset b \wedge b \sqsubset c \Rightarrow a \sqsubset c$ (*Transitivität*),

$a \sqsubset b \wedge b \sqsubset a \Rightarrow a \square b$,

$a \sqsubset b \vee b \sqsubset a$,

$a \not\ulcorner a$ (*Irreflexivität* (*der Stufenkleinerbeziehung*)),
$a \ulcorner b \wedge b \ulcorner c \Rightarrow a \ulcorner c$ (*Transitivität*),
$a \ulcorner b \Rightarrow b \not\ulcorner a,$
$a \ulcorner b \vee a \square b \vee b \ulcorner a,$

$a \sqsubset b \wedge b \square c \Rightarrow a \sqsubset c,$ $a \square b \wedge b \sqsubset c \Rightarrow a \sqsubset c,$
$a \ulcorner b \wedge b \square c \Rightarrow a \ulcorner c,$ $a \square b \wedge b \ulcorner c \Rightarrow a \ulcorner c,$
$a \ulcorner b \wedge b \sqsubset c \Rightarrow a \ulcorner c,$ $a \sqsubset b \wedge b \ulcorner c \Rightarrow a \ulcorner c,$

$a \ulcorner b \Leftrightarrow a \sqsubset b \wedge b \not\sqsubset a,$ $a \square b \Leftrightarrow a \sqsubset b \wedge b \sqsubset a,$
$a \ulcorner b \Leftrightarrow a \not\square b \wedge b \not\ulcorner a,$ $a \square b \Leftrightarrow a \not\ulcorner b \wedge b \not\ulcorner a,$
$a \sqsubset b \Leftrightarrow b \not\ulcorner a.$

Beweis. a, b, c seien beliebig fest ausgewählte Objekte. Aus Definition 1 folgt

$$(1)\ a \square b \Leftrightarrow a \sqsubset b \wedge b \sqsubset a, \quad (2)\ a \ulcorner b \Leftrightarrow a \sqsubset b \wedge a \not\square b.$$

Mit (2) folgt $a \square b$ aus $a \sqsubset b \wedge a \not\ulcorner b$, also

$$a \sqsubset b \Rightarrow a \ulcorner b \vee a \square b;$$

umgekehrt folgt mit (2), (1) $a \sqsubset b$ sowohl aus $a \ulcorner b$ als auch aus $a \square b$, also

$$a \ulcorner b \vee a \square b \Rightarrow a \sqsubset b.$$

Hiermit gilt insgesamt

$$(3)\ a \sqsubset b \Leftrightarrow a \ulcorner b \vee a \square b.$$

Aus Axiom I(2) folgt $a \sqsubset a \vee a \sqsubset a$, also $a \sqsubset a$. (1) und die Axiome I(1), I(2) ergeben damit:

(4) $a \square a,$ (7) $a \sqsubset a,$
(5) $a \square b \Rightarrow b \square a,$ (8) $a \sqsubset b \wedge b \sqsubset c \Rightarrow a \sqsubset c,$
(6) $a \square b \wedge b \square c \Rightarrow a \square c,$ (9) $a \sqsubset b \wedge b \sqsubset a \Rightarrow a \square b,$
(10) $a \sqsubset b \vee b \sqsubset a.$

Aus (2), (4) folgt

$$(11)\ a \not\ulcorner a.$$

Aus $a \ulcorner b \square c$ folgt nach (2), (1) $a \sqsubset b \sqsubset c$ und $a \not\square b$, $b \square c$, also nach (8) (1) $c \not\sqsubset b$; wäre $a \not\ulcorner c$, so nach (2) $a \square c$, also mit (1) $c \sqsubset a \sqsubset b$, also nach (8) $c \sqsubset b$ im Widerspruch zu $c \not\sqsubset b$; damit gilt

$$(12)\ a \ulcorner b \wedge b \ulcorner c \Rightarrow a \ulcorner c.$$

Im Falle $a \ulcorner b \wedge b \ulcorner a$ wäre nach (12) $a \ulcorner a$ im Widerspruch zu (11); also gilt

(13) $a \ulcorner b \Rightarrow b \not\ulcorner a$.

Aus (10), (3) (5) folgt

(14) $a \ulcorner b \vee a \square b \vee b \ulcorner a$.

Aus (1), (8) folgt

(15) $a \sqsubset b \wedge b \square c \Rightarrow a \sqsubset c$, (16) $a \square b \wedge b \sqsubset c \Rightarrow a \sqsubset c$.

Aus $a \ulcorner b \square c$ folgt nach (2), (1) $a \sqsubset b \sqsubset c$ und $a \not\square b$, $b \square c$, also nach (8) $a \sqsubset c$ und $a \not\square b \square c$; wäre $a \square c$, so nach (5), (6) auch $a \square b$ im Widerspruch zu $a \not\square b$; damit gilt $a \square c \wedge a \not\square c$, also nach (2) $a \ulcorner c$; es gilt somit

(17) $a \ulcorner b \wedge b \square c \Rightarrow a \ulcorner c$.

Aus $a \square b \ulcorner c$ folgt nach (1), (2) $a \sqsubset b \sqsubset c$ und $b \not\square c$, $a \square b$, also nach (8) $a \sqsubset c$ und $a \square b \not\square c$; wäre $a \square c$, so nach (5), (6) auch $b \square c$ im Widerspruch zu $b \not\square c$; damit gilt $a \sqsubset c \wedge a \not\square c$, also nach (2) $a \ulcorner c$; es gilt somit

(18) $a \square b \wedge b \ulcorner c \Rightarrow a \ulcorner c$.

Aus (3), (12), (17), (18) folgt

(19) $a \ulcorner b \wedge b \sqsubset c \Rightarrow a \ulcorner c$, (20) $a \sqsubset b \wedge b \ulcorner c \Rightarrow a \ulcorner c$.

Aus (1) folgt

$a \sqsubset b \wedge a \not\square b \Leftrightarrow a \sqsubset b \wedge b \not\sqsubset a$

und damit über (2)

(21) $a \ulcorner b \Leftrightarrow a \sqsubset b \wedge b \not\sqsubset a$.

Aus $a \ulcorner b$ folgt nach (2) $a \not\square b$ und nach (13) $b \not\ulcorner a$; damit gilt

$a \ulcorner b \Rightarrow a \not\square b \wedge b \not\ulcorner a$;

aus (14) folgt auch die Umkehrung

$a \not\square b \wedge b \not\ulcorner a \Rightarrow a \ulcorner b$;

also gilt insgesamt

(22) $a \ulcorner b \Leftrightarrow a \not\square b \wedge b \not\ulcorner a$.

Aus $a \square b$ folgt nach (2), (5) $a \not\ulcorner b$ und $b \not\ulcorner a$; damit gilt

$a \square b \Rightarrow a \not\ulcorner b \wedge b \not\ulcorner a$;

aus (14) folgt auch die Umkehrung

$$a \not\ulcorner b \wedge b \not\ulcorner a \Rightarrow a \sqsubset\!\!\sqsupset b\,;$$

also gilt insgesamt

$$(23)\quad a \sqsubset\!\!\sqsupset b \Leftrightarrow a \not\ulcorner b \wedge b \not\ulcorner a\,.$$

Aus $a \sqsubset b$ folgt nach (2), (9), (5) $b \not\ulcorner a$; damit gilt $a \sqsubset b \Rightarrow b \not\ulcorner a$; aus (14), (3) folgt auch die Umkehrung $b \not\ulcorner a \Rightarrow a \sqsubset b$; also gilt insgesamt

$$(24)\quad a \sqsubset b \Leftrightarrow b \not\ulcorner a\,.$$

Damit gelten (1)–(24) für unsere fest ausgewählten Objekte a, b, c. Da die Auswahl der a, b, c beliebig sein durfte, gelten schließlich (1)–(24) für alle a, b, c. ∎

2.3. Das Extensionalitätsaxiom

In Definition 2 werden die in § 1 im anschaulichen Sinne verwendeten Urelemente und Mengen als mengentheoretische Begriffe präzisiert. Für die Festlegung der Urelemente ist die Vorstellung maßgebend, daß die leere Menge die auf die Stufe der Urelemente nächstfolgende Stufe besitzt.

Definition 2. Ein Objekt a ist ein *Urelement*, falls

$$\exists X\, \big(a \ulcorner X \wedge \neg \exists x\, (x \in X)\big)$$

gilt. a ist eine *Menge*, falls a kein Urelement ist. ∎

Satz 2. *Für beliebige Objekte a gilt:*

$$a \textit{ Urelement} \vee a \textit{ Menge}, \qquad a \textit{ Urelement} \Leftrightarrow \neg\, a \textit{ Menge}\,.$$

Beweis. Die Behauptungen folgen unmittelbar aus Definition 2. ∎

Mit dem Mengenbegriff läßt sich jetzt das Extensionalitätsaxiom formulieren.

Axiom II: Extensionalitätsaxiom.

$$\forall A \forall B\, (A \textit{ Menge} \wedge B \textit{ Menge} \wedge \forall x\, (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B)\,. \quad ∎$$

Dieses Axiom bringt die in § 1.2 ausgesprochene Extensionalität des Mengenbegriffes zum Ausdruck.

2.4. Die Mengenbildungsaxiome

Aus der in § 1.3 entwickelten Anschauung über den Stufenaufbau der Objekte resultiert für jedes Objekt a die Existenz aller möglichen Mengen von Objekten x mit $x \sqsubset a$, also speziell auch aller solchen Mengen von Objekten $x \sqsubset a$, welche durch einen mengentheoretischen Ausdruck beschreibbar, charakterisierbar sind.

Axiome III: Mengenbildungsaxiome (Komprehensionsaxiome).

$$(\forall)\forall a\, \exists A\, \big(A \textit{ Menge} \wedge \forall x\,(x \in A \Leftrightarrow x \sqsubset a \wedge \mathbf{H}(x))\big).$$

Dabei sei $\mathbf{H}(x)$ ein Ausdruck der Mengenlehre, in dem die Variable x frei vorkommt, die Variable a nicht gebunden vorkommt und die Variable A nicht vorkommt. $(\forall)$ bedeutet für den Fall, daß in dem auf $(\forall)$ folgenden Ausdruck gewisse freie Variablen $y, z, \ldots$ vorkommen, die Zeichenreihe $\forall y \forall z \ldots$ ∎

Der Ausdruck $\mathbf{H}(x)$ ist inhaltlich (bei Festhalten der von x verschiedenen freien Variablen) eine mengentheoretische Eigenschaftsbeschreibung für Objekte x. Die Variable A darf deshalb nicht in $\mathbf{H}(x)$ auftreten, weil die Menge A durch den Ausdruck $\mathbf{H}(x)$ erst definiert werden soll. Die Axiome des Axiomenschemas III – jeder zugelassene Ausdruck $\mathbf{H}(x)$ ergibt ein Axiom – heißen auch Komprehensionsaxiome, da sie die Möglichkeit der Zusammenfassung von Objekten zu Mengen postulieren. (Die Bezeichnung $\mathbf{H}$ für Ausdrücke kann man sich aus dem „h" von „Komprehension" herleiten.)

Unter Verwendung von Axiom II ist jede Menge A, deren Existenz mit einem der Mengenbildungsaxiome III nachgewiesen wurde, sogleich (bei Festhalten der in dem zugehörigen Ausdruck $x \sqsubset a \wedge \mathbf{H}(x)$ von x verschiedenen freien Variablen) *diejenige* Menge A, für deren Elemente x und nur für deren Elemente x gilt: $x \sqsubset a \wedge \mathbf{H}(x)$. Denn Axiom II ergibt

$$(\forall)\forall a\, \exists!\, A\, \big(A \textit{ Menge} \wedge \forall x\,(x \in A \Leftrightarrow x \sqsubset a \wedge \mathbf{H}(x))\big),$$

woraus mit den Axiomen III schließlich folgt:

$$(\forall)\forall a\, \exists!!\, A\, \big(A \textit{ Menge} \wedge \forall x\,(x \in A \Leftrightarrow x \sqsubset a \wedge \mathbf{H}(x))\big).$$

Definitionen 3. $\{x \mid \mathbf{H}(x)\}$

(gelesen: *Menge aller* x *mit* $\mathbf{H}(x)$) sei die Menge

$$\iota A\, \big(A \textit{ Menge} \wedge \forall x\,(x \in A \Leftrightarrow \mathbf{H}(x))\big).$$

Dabei sei $\mathbf{H}(x)$ ein Ausdruck der Mengenlehre, in dem die Variable x frei und die Variable A nicht vorkommt. ▮

Die Definitionen 3 bilden eine Definitionsschema, welches für jeden zugelassenen Ausdruck $\mathbf{H}(x)$ eine mengentheoretische Definition liefert. Dabei werden wir die Definitionen 3 immer nur für solche Ausdrücke $\mathbf{H}(x)$ verwenden, für welche die eindeutige Existenz der Menge A gesichert ist. Die Axiome III liefern für vorgegebenes Objekt a und jeden mengentheoretischen Ausdruck $\mathbf{H}(x)$, in dem die Variable x frei und die Variable a nicht gebunden vorkommt, die Existenz der Menge

$$\{x \mid x \sqsubset a \wedge \mathbf{H}(x)\}.$$

Speziell für $x \in a$ statt $x \sqsubset a$ erhält man die

Sätze 3 (Aussonderungsprinzip).

$$(\forall)\forall M \exists A \left(A \; \mathit{Menge} \wedge \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in M \wedge \mathbf{H}(x))\right).$$

Dabei sei $\mathbf{H}(x)$ ein Ausdruck der Mengenlehre, in dem die Variable x frei vorkommt, die Variable M nicht gebunden vorkommt und die Variable A nicht vorkommt.

Beweise. Für jeden zugelassenen Ausdruck $\mathbf{H}(x)$ gilt nach den Axiomen III

$$(\forall)\forall M \exists A \left(A \; \mathit{Menge} \wedge \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \sqsubset M \wedge \mathbf{H}^*(x))\right) \quad (+)$$

für den Ausdruck $(x \in M \wedge \mathbf{H}(x))$ als $\mathbf{H}^*(x)$. Axiom I(4) ergibt für beliebige x, M:

$$x \sqsubset M \wedge x \in M \Leftrightarrow x \in M.$$

Hieraus folgt:

$$(\forall)\left(x \sqsubset M \wedge x \in M \wedge \mathbf{H}(x) \Leftrightarrow x \in M \wedge \mathbf{H}(x)\right),$$
$$(\forall)\left(x \sqsubset M \wedge \mathbf{H}^*(x) \Leftrightarrow x \in M \wedge \mathbf{H}(x)\right),$$

was mit $(+)$ ergibt:

$$(\forall)\forall M \exists A \left(A \; \mathit{Menge} \wedge \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in M \wedge \mathbf{H}(x))\right). \quad ▮$$

Die Sätze 3 bilden ein Satzschema, welches für jeden zugelassenen Ausdruck $\mathbf{H}(x)$ einen mengentheoretischen Satz liefert. Ebenso verhält es sich mit den geführten Beweisen. Unter Verwendung von Axiom II ergeben die Sätze 3 wieder

$$(\forall)\forall M \exists!! A \left(A \; \mathit{Menge} \wedge \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in M \wedge \mathbf{H}(x))\right).$$

Definitionen 4. $\{x \in M \mid \mathbf{H}(x)\}$

(gelesen: *Menge aller* $x \in M$ *mit* $\mathbf{H}(x)$) sei die Menge

$$\{x \mid x \in M \wedge \mathbf{H}(x)\}.$$

Dabei sei $\mathbf{H}(x)$ ein Ausdruck der Mengenlehre, in dem die Variable x frei vorkommt und die Variable M nicht gebunden vorkommt. ∎

Die Sätze 3 sichern für eine vorgegebene Menge M (sogar für ein vorgegebenes Objekt M) und jeden mengentheoretischen Ausdruck $\mathbf{H}(x)$, in dem die Variable x frei und die Variable M nicht gebunden vorkommt, die Existenz der Menge

$$\{x \in M \mid \mathbf{H}(x)\}.$$

Das Aussonderungsprinzip erweist sich damit als eine besonders wichtige Folgerung aus den Mengenbildungsaxiomen. Denn mit ihm kann man für jede bereits bekannte Menge M mittels vorgegebener mengentheoretischer Eigenschaftsbeschreibungen $\mathbf{H}(x)$ ganz beliebig Elemente $x \in M$ zu neuen Mengen zusammenfassen, ganz beliebig neue Mengen aus M aussondern.

Die Definitionen 3 und 4 führen die allgemeinen beschreibenden Mengenbezeichnungen ein, die Mengenbezeichnungen durch Eigenschaftsbeschreibung.

2.5. Das Unendlichkeitsaxiom

Für die Formulierung des Unendlichkeitsaxiomes verwenden wir den Begriff des Grenzbereiches.

Definition 5. Ein *Grenzbereich* ist ein Objekt G mit

$$\exists x (x \in G) \wedge \forall x \exists y (x \in G \Rightarrow x \sqsubset y \in G). \ ∎$$

Axiom IV: Unendlichkeitsaxiom.

$$\exists a (a = a) \wedge \forall a \exists G (G \textit{ Grenzbereich} \wedge a \in G). \ ∎$$

Die Forderung $\exists a (a = a)$ besagt, daß mindestens ein Objekt existiert. Gemäß der in § 1.3 entwickelten Anschauung über den Stufenaufbau der Objekte sind die Mengen der Stufen ω, $\omega 2$, $\omega 3, \ldots$ die Grenzbereiche, und jedes Objekt a ist Element etwa des aus den Elementen

$$a, \ \{a\}, \ \{\{a\}\}, \ \{\{\{a\}\}\}, \ldots$$

bestehenden Grenzbereiches G. Jeder Grenzbereich besteht anschaulich aus unendlich vielen Elementen. Axiom IV fordert nicht nur schlechthin die Existenz mindestens eines Grenzbereiches, sondern gestattet – zum Vorteil eines symmetrischen Ablaufes der Theorie – die Einbettung jedes Objektes in einen Grenzbereich.
Aus der durch das Unendlichkeitsaxiom mit gewährleisteten Existenz mindestens eines Objektes folgt jetzt die Existenz der leeren Menge und der Menge aller Urelemente.

Satz 4.

(a) $\exists !! A\,(A \textit{ Menge} \wedge \neg \exists x (x \in A))$, (b) $\exists A (A = \{x \mid x \textit{ Urelement}\})$.

Beweis. (a) Ist $\mathbf{H}(x)$ der Ausdruck $x \neq x$, so gilt nach den Axiomen III

$$\forall a \exists A\,(A \textit{ Menge} \wedge \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \sqsubset a \wedge x \neq x)).$$

Wegen stets $x = x$ gilt für beliebige a, x:

$$x \sqsubset a \wedge x \neq x \Leftrightarrow x \neq x,$$

also

$$\forall a \exists A\,(A \textit{ Menge} \wedge \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \neq x)).$$

Da ein a existiert, existiert somit auch eine Menge A mit

$$\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \neq x),$$

also wegen stets $x = x$ eine Menge A mit $\neg \exists x (x \in A)$. Für Mengen A, B, welche keine Elemente enthalten, gilt schließlich

$$\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B),$$

woraus mit Axiom II $A = B$ folgt. Also existiert auch nur höchstens eine Menge A mit $\neg \exists x (x \in A)$. Es gilt somit insgesamt

$$\exists !! A\,(A \textit{ Menge} \wedge \neg \exists x (x \in A)).$$

(b) Für jedes Urelement x und jedes nach Definition 2 existierende X mit $x \sqsubset\!- X$ und $\neg \exists y (y \in X)$ ist X eine Menge. Denn wäre X ein Urelement, so gäbe es ein Y mit $X \sqsubset\!- Y$ und $\neg \exists y (y \in Y)$, woraus insgesamt

$$x \sqsubset\!- X \wedge \forall y (y \in Y \Rightarrow y \sqsubset\!- X)$$

folgt, also nach Axiom I (5) $Y \sqsubset X$, also wegen $X \sqsubset\!- Y \sqsubset X$ nach Satz 1 $X \sqsubset\!- X$ im Widerspruch zu $X \not\sqsubset\!- X$. Nach (a) gibt es weiterhin genau eine Menge B mit

$\neg\exists y(y \in B)$, so daß für diese jetzt gilt:

$$\forall x(x \; Urelement \Leftrightarrow x \sqsubset\!\!\!- B). \quad (+)$$

Ist $\mathbf{H}(x)$ der Ausdruck $x \sqsubset\!\!\!- a$, so existiert nach den Axiomen III (und II) für jedes a die Menge $\{x \mid x \sqsubset a \wedge x \sqsubset\!\!\!- a\}$, welche wegen $x \sqsubset a \wedge x \sqsubset\!\!\!- a \Leftrightarrow x \sqsubset\!\!\!- a$ mit der Menge $\{x \mid x \sqsubset\!\!\!- a\}$ identisch ist. Wählt man hierbei schließlich für a die Menge B ohne Elemente, so erhält man über $(+)$ die Existenz der Menge

$$\{x \mid x \sqsubset\!\!\!- B\} = \{x \mid x \; Urelement\}.$$

Hiermit gilt

$$\exists A(A = \{x \mid x \; Urelement\}). \; \blacksquare$$

Definition 6. Ein Objekt a heißt *leer* bzw. *nichtleer*, falls $\neg\exists x(x \in a)$ bzw. $\exists x(x \in a)$ gilt. Die Menge

$$\emptyset = \iota A\,(A \; Menge \wedge \neg\exists x(x \in A))$$

(gelesen: *leere Menge*) heißt die *leere Menge* oder die *Leermenge*. Die Menge

$$\mathbf{U} = \{x \mid x \; Urelement\}$$

der Urelemente heißt der *Urbereich* oder *Urelementebereich*. ■
Für Objekte a und Mengen A gilt auch:

$$a \; leer \Leftrightarrow \forall x(x \notin a), \qquad a \; nichtleer \Leftrightarrow \neg\forall x(x \notin a),$$
$$A \; leer \Leftrightarrow A = \emptyset, \qquad A \; nichtleer \Leftrightarrow A \neq \emptyset.$$

Satz 5. *Für beliebige Objekte a gilt:*

(a) $\exists x(a \in x), \qquad \exists x(a \sqsubset\!\!\!- x)$,

(b) $a \in \mathbf{U} \Leftrightarrow a \sqsubset\!\!\!- \emptyset \Leftrightarrow \forall x(a \sqsubset x) \wedge a \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall x(x \notin a) \wedge a \neq \emptyset$,

(c) $a \notin \mathbf{U} \Leftrightarrow \emptyset \sqsubset a \Leftrightarrow \exists x(x \sqsubset\!\!\!- a) \vee a = \emptyset \Leftrightarrow \exists x(x \in a) \vee a = \emptyset$
$\Leftrightarrow a \; Menge.$

Beweis. (a) Aus den Axiomen III folgt für jedes a die Existenz einer Menge x mit $a \in x$, nämlich

$$x = \{y \mid y \sqsubset a \wedge y = a\}.$$

Es gilt ja nach Satz 1 $a \sqsubset a$ und damit $a \sqsubset a \wedge a = a$, also $a \in x$. Axiom I(4) ergibt weiter $a \sqsubset\!\!\!- x$.
(b) Mit $(+)$ aus dem Beweis zu Satz 4 gilt für jedes a:

$$a \in \mathbf{U} \Leftrightarrow a \sqsubset\!\!\!- \emptyset.$$

Ist $x \sqsubset\!\!\!- a$ für gewisse Objekte x, a, so ist $\emptyset \sqsubset a$ nach Axiom I(5). Also folgt über Satz 1 und Axiom I(4) für jedes a:

$$a \sqsubset\!\!\!- \emptyset \Rightarrow \forall x(a \sqsubset x) \wedge a \neq \emptyset \Rightarrow \forall x(x \notin a) \wedge a \neq \emptyset .$$

Schließlich gilt für jedes a:

$$\forall x(x \notin a) \wedge a \neq \emptyset \Rightarrow a \in \mathbf{U} .$$

Denn $\emptyset$ ist die einzige Menge, welche kein Element besitzt.
(c) folgt aus Satz 2 und durch Kontraposition von (b) unter Verwendung von Satz 1. ∎

Nach der ersten Behauptung von Satz 5(a) sind alle Objekte Elemente von Objekten. Man kann deshalb die Objekte auch als *Elemente* schlechthin bezeichnen. Die zweite Behauptung von Satz 5(a) besagt die *Unbeschränktheit* des Bereiches der Objekte in bezug auf die Stufen(kleiner)beziehung. Satz 5(b) rechtfertigt die Bezeichnung „Urelement". Durch Definition 6 werden die in § 1 im anschaulichen Sinne verwendeten Mengen $\emptyset$ und $\mathbf{U}$ als mengentheoretische Begriffe eingeführt, und Satz 5(b) ergibt $\emptyset \notin \mathbf{U}$. Nach Satz 5(b) sind die leeren Objekte die Urelemente und $\emptyset$. Aus Satz 5(b) und Satz 1 folgt bei $\mathbf{U} \neq \emptyset$ für beliebige a:

$$a \in \mathbf{U} \Leftrightarrow \forall x(a \sqsubset x), \qquad a \notin \mathbf{U} \Leftrightarrow \exists x(x \sqsubset\!\!\!- a) .$$

Denn für Urelemente u und Objekte a mit $a \sqsubset x$ für alle x gilt $a \sqsubset u \sqsubset\!\!\!- \emptyset$, also $a \sqsubset\!\!\!- \emptyset$, womit a ein Urelement ist. Satz 5(c) und Satz 1 ergeben im Falle $\mathbf{U} = \emptyset$ für beliebige a:

$$a = \emptyset \Leftrightarrow \forall x(a \sqsubset x), \qquad a \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists x(x \sqsubset\!\!\!- a) .$$

Mit Satz 5(c) ist jeder Grenzbereich eine Menge, und für Mengen G gilt:

$$G \textit{ Grenzbereich} \Leftrightarrow G \neq \emptyset \wedge \forall x \exists y(x \in G \Rightarrow x \sqsubset\!\!\!- y \in G) .$$

2.6. Das Auswahlaxiom

Wir benötigen zur Formulierung des Auswahlaxioms einige neue Begriffe. Zunächst führen wir die Inklusion ein.

Definition 7. (a) A, B seien Mengen:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B), \qquad A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$

(gelesen: *A Teilmenge* (*von*) *B* bzw. *A echte Teilmenge* (*von*) *B*),