

de Gruyter Lehrbuch
Dworatschek · Schaltalgebra

Schaltalgebra und digitale Grundsaltungen

Teilprogrammierter Text

von

Sebastian Dworatschek

unter Mitarbeit von *Hermann Gehring*

mit zahlreichen Bildern

und 73 Übungsaufgaben mit Lösungen



Walter de Gruyter & Co · Berlin 1970

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag, Verlags-
buchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp.



Copyright 1970 by Walter de Gruyter & Co., vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung – J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung – Georg Reimer – Karl J. Trübner – Veit & Comp., Berlin 30. – Alle Rechte, einschl. der Rechte der Herstellung von Photokopien und Mikrofilmen, vom Verlag vorbehalten. Archiv-Nr. 12 06 70 4 – Satz: IBM-Composer, Walter de Gruyter & Co. – Druck: Neue Presse, Coburg – Printed in Germany

Vorwort

Die digitale Schaltungstechnik wurde in der Datenverarbeitung entwickelt und findet immer mehr auch in der Regelungs-, Steuerungs-, Meß- und Fernmelde-technik Eingang. Ingenieure und Techniker, Studierende und Praktiker mit recht unterschiedlichen Arbeitsgebieten müssen sich demnach heute mit der digitalen Schaltungstechnik vertraut machen.

Das Buch basiert auf Lehrgängen, die der Verfasser für diesen Personenkreis durchgeführt hat. Der erste Teil behandelt die Schaltalgebra (Boole'sche Algebra), die der formalen, algebraischen Darstellung von Schaltfunktionen und der Aufwandsminimierung dient. Dieser Teil baut auf dem gleichlautenden Kapitel in ‚Einführung in die Datenverarbeitung‘ (S. Dworatschek) auf. Der zweite Teil zeigt nach der Erklärung der Schalterfunktion von Diode und Transistor die elektronische Realisierung von digitalen Grundsaltungen, wie AND, OR und Kippstufen.

Das Buch wurde als teilprogrammierter Text geschrieben, d. h., jedes Kapitel umfaßt die Stoffdarstellung, eine bzw. mehrere Übungs- oder Kontrollaufgaben, Stoffwiederholung und -ergänzung durch Lösungsangaben. Diese Dreiteilung wurde durch unterschiedliche Farbgebung gekennzeichnet (schwarz, rote Strichmarkierung, rot). Die teilprogrammierte Form besitzt den Vorteil der Aktivierung des Lesers und der Auflockerung des Stoffes, ohne an Übersichtlichkeit zu verlieren. Diese Einführung in die digitale Schaltungstechnik eignet sich demnach zum Selbststudium und als Lehrgangsunterlage. Ein weiterführender Band ‚Anwendungen der digitalen Schaltungstechnik‘ (ebenfalls teilprogrammiert) ist in Vorbereitung.

Aachen, im Mai 1970

S. Dworatschek

Inhaltsverzeichnis

I. Schaltalgebra	9
1. Die Entwicklung der Schaltalgebra	9
2. Grundfunktionen	12
2.1. Identität und Negation	12
2.2. AND-Funktion	13
2.3. OR-Funktion	16
3. Darstellungsarten	18
3.1. Kurzzeichen-Darstellung	18
3.2. Die Wertetafel	19
3.3. Die Kontaktskizze	21
3.4. Symboldarstellung	23
3.5. Gebietsdarstellung	26
3.6. Das Karnaugh-Diagramm	31
4. Funktionen bei 2 Eingangsvariablen.	33
4.1. Allgemeine Überlegungen	33
4.2. NAND-Funktion	36
4.3. NOR-Funktion	37
4.4. Äquivalenz	39
4.5. Antivalenz	40
4.6. Inhibition	41
4.7. Implikation	43
4.8. Zusammenfassung	44
5. Rechenregeln	45
5.1. Postulate	45
5.2. Theoreme	46
5.3. Kommutatives und Assoziatives Gesetz	48
5.4. Distributives Gesetz	50
5.5. Morgan'sches Theorem	51
5.6. Entwicklungstheorem	53
6. Vereinfachung von Schaltfunktionen	54
6.1. Vereinfachung mit den Rechenregeln	55
6.2. Vereinfachung über das Entwicklungstheorem	56
6.3. Vereinfachung über die Gebietsdarstellung	57
6.4. Vereinfachung über das Karnaugh-Diagramm	59
6.5. Vereinfachung über die Kontaktskizze	60

7. Normalformen der Schaltfunktion	61
7.1. Disjunktive Normalform	61
7.2. Konjunktive Normalform	63
8. Anwendungsbeispiele	65
8.1. Beleuchtungsschaltung	65
8.2. Papiertransport	67
8.3. Erkennen von Pseudotetraden	71
8.4. Dualaddierer	74
8.4.1. Halbaddierer	75
8.4.2. Volladdierer	77
II. Digitale Grundschaltungen	80
1. Schaltungstechniken	80
1.1. Die Digital-Technik	80
1.2. Schaltungen mit diskreten Bauelementen	83
1.3. Integrierte Schaltungen	84
1.4. Hybrid-Techniken	85
2. Dioden-Schaltungen	86
2.1. Die Diode	86
2.2. Die Grundschaltungen AND, OR	90
2.2.1. AND-Grundschaltung	91
2.2.2. OR-Grundschaltung	92
2.3. Dioden-Zuordner	95
3. Transistor-Schaltungen	98
3.1. Grundlagen des Transistors	99
3.1.1. Aufbau und Wirkungsweise	99
3.1.2. Kennlinien	103
3.1.3. Der Transistor als Schalter	105
3.2. Grundschaltungen mit Transistoren	108
3.2.1. Negation	108
3.2.2. NAND-Grundschaltung	110
3.2.3. NOR-Grundschaltung	112
4. Kippstufen	113
4.1. Dynamisches Verhalten des Transistors	114
4.2. Bistabile Kippstufe (Flip-Flop)	116
4.3. Monostabile Kippstufe (Monoflop)	121
4.4. Astabile Kippstufe (Multivibrator)	124
Literatur	127

I. Schaltalgebra

1. Die Entwicklung der Schaltalgebra

Zwei Entwicklungsstufen führten zur heute gebräuchlichen Schaltalgebra: die mathematische Logik und die Bool'sche Algebra.

Die *mathematische Logik* geht auf den griechischen Philosophen Aristoteles (384–322 v. Chr.) zurück. Um den Wahrheitsgehalt von Aussagen und deren Verknüpfungen zu untersuchen, benützte er den heute noch üblichen zweiwertigen Aussagenkalkül. Darin wird den Aussagen einer von zwei Wahrheitswerten zugeordnet. Die Aussagen sind entweder ‚wahr‘ oder ‚falsch‘ – eine andere Möglichkeit wird nicht zugelassen und ist auch nicht definiert. Der Wahrheitsgehalt einer Aussage ist demnach objektiv eine zweiwertige Größe – oder m. a. W. eine binäre Größe. Auf die spezifische, subjektive Bedeutung der Aussage für den Empfänger wird nicht eingegangen.

Zwei oder mehr Aussagen können nach bestimmten Regeln und Gesetzen zu neuen Aussagen verknüpft werden. Auch diese Verknüpfungsaussagen sind zweiwertiger Natur, d. h. sie können ‚wahr‘ oder ‚falsch‘ sein. Ihr Wahrheitswert ist aber durch die Verknüpfungsregeln aus den Worten der Ursprungsaussagen heraus eindeutig festgelegt.

Diese Beschränkung auf binäre Größen bedeutet keinesfalls eine Einschränkung der Aussagefähigkeit. Die mathematische Logik zeigt, daß sich alle mehrwertigen Aussagen auf die elementaren Wahrheitswerte ‚wahr‘ und ‚falsch‘ zurückführen lassen, ohne an Gehalt zu verlieren.

Beispiel für die Rückführung auf binäre Wahrheitswerte:

Die keineswegs binäre Aussage, daß während einer Woche nur an 2 Tagen, nämlich Sa und So, nicht gearbeitet wird, läßt sich durch folgende sieben Aussagen mit binärem Charakter (nämlich ‚wahr‘ oder ‚falsch‘) darstellen:

Aussage:	(binärer) Wahrheitswert:
Mo wird gearbeitet	wahr
Di wird gearbeitet	wahr
Mi wird gearbeitet	wahr
Do wird gearbeitet	wahr
Fr wird gearbeitet	wahr
Sa wird gearbeitet	falsch
So wird gearbeitet	falsch

Beispiel für die Verknüpfung von zwei binären Aussagen:

Die Aussage ‚es regnet‘ kann ebenso wie die Aussage ‚es ist Sonntag‘ entweder ‚wahr‘ oder ‚falsch‘ sein; m. a. W. wir haben zwei Aussagenvariable vorliegen.

Verknüpfen wir die Aussagenvariablen, so erhalten wir eine neue Aussage:

‚Ich gehe ins Kino, wenn es regnet
und wenn es Sonntag ist‘

Diese Aussage ist eine eindeutige Funktion der beiden ersten. Sie ist dann und *nur dann* ‚wahr‘, wenn die beiden ersten Aussagen *gleichzeitig* erfüllt, d. h., ‚wahr‘ sind. Also nur dann, wenn es sowohl regnet als auch Sonntag ist. Wir werden sehen, daß dies eine AND-Verknüpfung ist.

Aufgabe 1

Welche Wahrheitswerte sind der Verknüpfungsaussage ‚ich gehe ins Kino‘ in den vier möglichen Kombinationsfällen der beiden Ursprungsaussagen zuzuordnen?

Ursprungsaussagen:		Verknüpfungsaussage:
es regnet	es ist Sonntag	ich gehe ins Kino
falsch	falsch	
falsch		
.....		
.....		

An diesem einfachen Beispiel schon kann man sehen, daß die textmäßige Darstellungsform solcher Aussagen in ihrer Verknüpfung recht umständlich ist. Bei mehr als zwei Ursprungsaussagen verliert die Wiedergabe als Text sehr schnell an Übersichtlichkeit.

In der Mitte des vorigen Jahrhunderts hat George Boole – aufbauend auf der gewöhnlichen Algebra – einen eigenen Formalismus für die mathematische Behandlung derartiger Aussagenverknüpfungen entwickelt.

Zum Zwecke des Vergleichs sei hier auf die gewöhnliche Algebra zurückgegriffen. Grundgrößen sind dort sog. Variable, die beliebige Zahlenwerte annehmen können. Durch Verknüpfung derartiger Variabler nach bestimmten Gesetzen, wie Addition oder Multiplikation, entsteht eine neue Größe. Sie wird Funktion der ursprünglichen Variablen genannt.

Beispiel:

Benützt werden 3 Variable: x_1 , x_2 und x_3 . Über die Verknüpfungsgesetze: Multiplikation und Addition entsteht die Funktionsgröße y :

$$y = x_1 + x_2 \cdot x_3$$

Im konkreten Fall nehmen die Variablen spezielle Zahlenwerte an. Hier sei z. B.: $x_1 = 2$, $x_2 = 7$ und $x_3 = 5$. Für die Funktion errechnet sich hiermit eindeutig der Zahlenwert 37:

$$y = 2 + 7 \cdot 5$$
$$y = 37$$

Denkt man primär an den ganzen Ausdruck $y = x_1 + x_2 \cdot x_3$, so spricht man von der *Funktion* y . y kann jedoch auch als Variable für weitere Verknüpfungen dienen. Steht also mehr der Zahlenwert für y im Vordergrund, so nennt man y eine *Ausgangs-* oder *Ergebnis-Variable*.

George Boole übertrug die Erkenntnisse und Erfahrungen aus der Darstellungsmethode der gewöhnlichen Algebra auf die mathematische Logik. Diesen Formalismus nennt man *Boole'sche Algebra* (engl.: boolean algebra), manchmal auch logische Algebra. Den Variablen der gewöhnlichen Algebra entsprechen die Aussagen der Boole'schen Algebra. Ein bedeutender und zugleich vereinfachender Unterschied besteht allerdings. Im Gegensatz zu den Variablen der gewöhnlichen Algebra können die Aussagen(-variablen) nur einen von zwei Werten annehmen: entweder ‚wahr‘ oder ‚falsch‘. Für diese beiden Wahrheitswerte der Aussagen wird das Binäralphabet benutzt, das in der digitalen Datenverarbeitungstechnik oft mit O oder L abgekürzt wird. Es sei vereinbart:

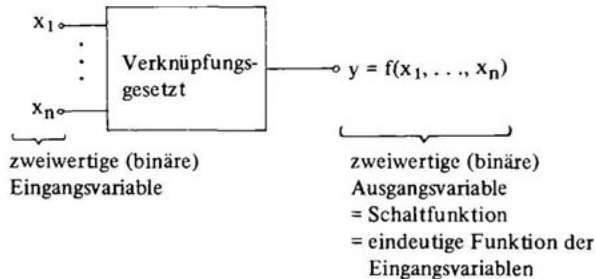
L = ‚wahr‘

O = ‚falsch‘

Aussagenvariable können nach eindeutig definierten Verknüpfungsarten zu neuen Aussagen verbunden werden – ähnlich der Funktion bzw. Ergebnisvariablen y . Für diese Verknüpfungsarten werden Kurzzeichen definiert – ebenso wie in der gewöhnlichen Algebra für die Addition das Zeichen $+$ eingeführt wurde. Eindeutige Rechenregeln erlauben es dann, mit den Aussagenvariablen und den Kurzzeichen zu ‚rechnen‘.

Die Darstellungsart der Boole'schen Algebra eignet sich besonders gut zur Beschreibung digitaler, meist elektronischer Schaltungstechnik. Die digitale Schaltungstechnik wurde vor allem als Hilfsmethode zur Konstruktion von elektronischen DVA entwickelt, setzte sich aber immer mehr in vielen anderen Zweigen der Elektrotechnik, wie Meß-, Regel- und Steuerungstechnik durch. Im Gegensatz zur konventionellen, analogen Schaltungstechnik arbeitet sie mit diskreten, zweiwertigen Ein- und Ausgangsspannungswerten, sog. binären Impulsen. Wird der Formalismus der Boole'schen Algebra zur Beschreibung derartiger digitaler Schaltungsvorgänge angewandt, so spricht man von der ‚*Schaltalgebra*‘ (engl.: switching algebra).

Die Schaltalgebra ist damit ein spezieller Anwendungsbereich der Boole'schen Algebra. Als elementares Arbeitsmodell dient folgendes Schema:



Aufgabe 2

Welcher der beiden Begriffe ‚Boole'sche Algebra‘ und ‚Schaltalgebra‘ ist der umfassendere?

2. Grundfunktionen

Als Grundfunktionen seien die mit Identität, Negation, AND und OR benannten Verknüpfungsgesetze binärer Eingangsvariablen bezeichnet. Für sie werden eigene Kurzzeichen eingeführt. Alle anderen denkbaren Verknüpfungsgesetze lassen sich auf diese Grundfunktionen zurückführen.

2.1. Identität und Negation

Die einfachsten und trivialen Schaltfunktionen sind die Identität und die Negation. Die Ausgangsvariable y entsteht als Funktion nur *einer* Eingangsvariablen x .

a) Identität

Die Identität zwischen der Eingangsvariablen x und der Ausgangsvariablen y wird wie folgt definiert:

$$\text{und} \quad \begin{array}{ll} y = L & \text{wenn } x = L \\ y = O & \text{wenn } x = O \end{array}$$

Antwort 1

es regnet	es ist Sonntag	ich gehe ins Kino
falsch	falsch	falsch
falsch	wahr	falsch
wahr	falsch	falsch
wahr	wahr	wahr

Man kann demnach einfacher schreiben:

Identität: $y = x$

Es ist leicht einzusehen, daß die Identität in der Schaltalgebra keine große Rolle spielen wird. Denn wozu sollte man eine neue Größe y einführen, wenn sie ohnehin mit einer vorhandenen Größe x identisch ist?

b) Negation

Die Negation zwischen der Eingangsvariablen x und der Ausgangsvariablen y ist folgendermaßen definiert:

	$y = L$	wenn	$x = O$
und	$y = O$	wenn	$x = L$

Die Negation stellt also einfach die Umkehrung des Wahrheitswertes dar. Für die Negation schreibt man allgemein:

Negation: $y = \bar{x}$

(sprich: y ist gleich x nicht)

Die Aussage „heute ist Werktag“ kann als Negation der Aussage „heute ist Sonntag“ aufgefaßt werden. Die Negation ist, im Gegensatz zur Identität, von großer Bedeutung einerseits für die Rechenregeln der Schaltalgebra und andererseits für die technische Realisierung von Schaltfunktionen mit elektrischen Schaltkreisen.

Aufgabe 3

Was bedeutet die zweistufig angewandte Negation:

1. $y = \bar{x}$
2. $z = \bar{y}$?

Identität und Negation arbeiten mit nur einer Eingangsvariablen. Meist zwei, aber auch mehrere Eingangsvariable benutzen die Funktionen AND und OR. Sie werden im folgenden zunächst verbal formuliert an jeweils zwei praktischen Beispielen erläutert.

2.2. AND-Funktion

Definition: AND-Funktion

Die Ausgangsvariable y ist dann und *nur* dann ‚wahr‘ (L), wenn *alle* Eingangsvariablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ gleichzeitig ‚wahr‘ (L) sind.

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, d. h. ist *wenigstens eine* der Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ ‚falsch‘ (O), so ist auch die Ergebnisgröße y ‚falsch‘ (O).