Theoretische Physik

Mechanik

von

Dr.-Ing. Werner Döring

Mit 23 Abbildungen

Vierte, verbesserte Auflage

Sammlung Göschen Band 5076

Walter de Gruyter

Berlin · New York · 1973

Dr.-Ing. Werner Döring
Professor an der Universität Hamburg
I. Institut für theoretische Physik

Folgende Bände in der Sammlung Göschen sind weiterhin lieferbar:

Das elektromagn. Feld (Band 76)
Optik (Band 78)
Thermodynamik (Band 374)
Statistische Mechanik (Band 1017)

Zur Schreibweise der Formeln:

Alle Formelbuchstaben dieses Buches bedeuten physikalische Größen, also Produkte aus Zahlenwert und Einheit, die von der Wahl der Einheit unabhängig sind.

Vektoren sind durch Fettdruck gekennzeichnet.

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ bedeutet das skalare Produkt der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$.

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ bedeutet das Vektorprodukt der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$.

Eine Ziffer in Klammern verweist auf eine Formel des gleichen Paragraphen. Andere Hinweise auf Formeln enthalten Paragraph- und Formelnummer.

 — Satz: Walter de Gruyter & Co, Berlin 30 — Druck: Mercedes-Druck, Berlin. Printed in Germany

ISBN 3 11 004241x

Inhaltsverzeichnis

Verzeichnis einiger einschlägiger Werke

a) Werke über theoretische Physik

F. Hund: *Theoretische Physik* (3 Bände). 1. Band: *Mechanik*, 5. Aufl. Stuttgart 1962.

S. Flügge: *Lehrbuch der theoretischen Physik* (5 Bände) Bd. I. *Einführung. Elementare Mechanik und Kontinuumsphysik.* Berlin, Göttingen, Heidelberg 1961.

G. Joos: *Lehrbuch der theor. Physik*, 10. Aufl., Leipzig 1959.

L. D. Landau, E. M. Lifschitz: *Lehrbuch der theoretischen Physik.* (9 Bände, Orig. russisch)
Bd. I. *Mechanik.* Deutsche Übersetzung 2. Aufl. Berlin 1963. Englische Übersetzung Oxford, London, Paris 1960.

W. Macke: *Lehrbuch der theoretischen Physik* (6 Bände): *Mechanik der Teilchen, Systeme und Kontinua.* Leipzig 1962.

M. Planck: *Einführung in die allgemeine Mechanik*, 3. Aufl., Leipzig 1921; *Einführung in die Mechanik deformierbarer Körper*, 2. Aufl., Leipzig 1922 und 4 weitere Bände.

Cl. Schäfer, M. Päsler: *Einführung in die theor. Physik* (3 umfangreiche, z. T. mehrteilige Bände). *I. Mechanik materieller Punkte, Mechanik starrer Körper und Mechanik der Kontinua*, 6. Aufl. Berlin 1962.

A. Sommerfeld: *Vorlesungen über theor. Physik* (6 Bände). Band I. *Mechanik*, 6. Aufl. Leipzig 1962. Band II. *Mechanik der deformierbaren Körper.* 4. Aufl. Leipzig 1957. (Bearbeitet und ergänzt von E. Fues).

W. Weizel: *Lehrbuch der theor. Physik* (2 Bände), Berlin, Göttingen, Heidelberg, 3. Aufl. 1963.

b) Werke über theoretisch-physikalische Mechanik

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. IV, Teil 1 bis 4, *Mechanik*, Leipzig 1901 bis 1935.

H. Goldstein: *Klassische Mechanik* (übersetzt aus dem Englischen) Frankfurt a. M. 1963.

G. Hamel: *Theoretische Mechanik* (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 57), Berlin, Göttingen, Heidelberg 1949.

Handbuch der Physik, herausgegeben von Geiger und Scheel, Bd. V. *Grundlagen der Mechanik. Mechanik der Punkte und starren Körper*, Berlin 1927.

Handbuch der Physik, herausgegeben von S. Flügge. Bd. III/1: *Prinzipien der klassischen Mechanik und Feldtheorie*. Berlin. Göttingen, Heidelberg 1960.

E. Mach: *Die Mechanik in ihrer Entwicklung*, Leipzig 1904 (historisch-kritische Darstellung).

G. Mie: *Die Grundlagen der Mechanik*, Stuttgart 1950.

Th. Pöschl: *Einführung in die analytische Mechanik*, Karlsruhe 1949.

J. C. Slater, N. H. Frank: *Mechanics*, New York, London 1947.

J. L. Synge, B. A. Griffith: *Principles of Mechanics*, 3. Aufl. New York, Toronto, London, Tokyo 1959.

A. G. Webster: *The dynamics of particles and of rigid, elastic and fluid bodies*, Leipzig 1925.

E. T. Whittaker: *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, 4. Aufl. 1937.

c) Einige Werke über angewandte Mechanik

G. Hamel: *Mechanik der Kontinua*. Stuttgart 1956.

R. Grammel: *Der Kreisel, seine Theorie und Anwendungen*, 2 Bde. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1950.

F. Klein und A. Sommerfeld: *Über die Theorie des Kreisels*, 4 Bände, Leipzig 1897/1914.

H. Lamb: *Lehrbuch der Hydrodynamik*, Leipzig 1931.

A. E. H. Love: *Lehrbuch der Elastizität*, Leipzig und Berlin 1907.

M. Päsler: *Mechanik deformierbarer Körper*. (Sammlung Göschen, Bd. 1189/1189 a), Berlin 1960.

Th. Pöschl: *Lehrbuch der technischen Mechanik*, 2. Aufl. 1930.

L. Prandtl: *Führer durch die Strömungslehre*, 2. Aufl., Braunschweig 1944.

R. Sauer: *Theoretische Einführung in die Gasdynamik*, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1951.

I. Kinematik

§ 1. Physikalische Begriffsbildung

Die Aufgabe der Physik besteht darin, die Naturerscheinungen kurz und vollständig zu beschreiben. Die Mechanik speziell befaßt sich mit dieser Aufgabe an den Bewegungen und Kräften. Alle physikalischen Aussagen beruhen auf der Erfahrung. Wenn wir experimentell feststellen, daß eine Erscheinung stets in der gleichen Weise abläuft oder daß gewisse Erscheinungen immer gekoppelt auftreten, so sprechen wir diesen Tatbestand als ein Naturgesetz aus. Wir fügen also — über die Erfahrung hinausgehend — die Annahme hinzu, daß dieser Zusammenhang ausnahmslos gültig sei. Der nächste Schritt der physikalischen Arbeit pflegt darin zu bestehen, unter immer neuen Bedingungen die Richtigkeit dieses Naturgesetzes an der Erfahrung zu prüfen. Es wird sich dann entweder als nur eingeschränkt gültig erweisen oder als ein allgemeines Naturgesetz bewähren, welches einen großen, umfassenden Erfahrungsbereich beschreibt.

Man formuliert die Naturgesetze in der Regel als mathematische Beziehungen zwischen verschiedenen Beobachtungsresultaten. Das Ergebnis einer quantitativen Beobachtung bezeichnet man in der Physik als G r ö ß e.

Die Bedeutung einer Größe kennzeichnet man durch Nennung des zugehörigen physikalischen Begriffes wie Länge, Geschwindigkeit, Volumen, Arbeit, kinetische Energie usw. Diese Worte sind eigentlich nur kurze Bezeichnungen für das Verfahren, wie die betreffende Größe im Prinzip gemessen oder aus gemessenen Größen berechnet wird. Selbstverständlich kann man praktisch jede physikalische Größe auf verschiedene Weise ermitteln. Von diesen Verfahren ist aber immer eines dadurch ausgezeichnet, daß es den Begriff definiert. Alle anderen Meßverfahren benutzen zur Messung die Gültigkeit eines Naturgesetzes, in welchem die betreffende Größe vorkommt, und liefern nur so lange richtige Resultate, als die Gültigkeit dieses Gesetzes sichergestellt ist.

Hinsichtlich der Art ihrer Definition teilt man die physikalischen Begriffe in zwei Gruppen ein: Die Grundbegriffe werden durch Angabe eines Verfahrens zur Messung der betreffenden Größe definiert. Die abgeleiteten Begriffe werden durch Angabe einer Vorschrift definiert, wie man die Größe aus anderen Größen berechnet. Es liegt nicht eindeutig fest, was Grundbegriffe und was abgeleitete Begriffe sind. Wenn z. B. eine Größe a eine eindeutig umkehrbare Funktion einer anderen Größe b ist, $a = f(b)$, so kann man entweder b als Grundbegriff einführen und a durch $f(b)$ definieren oder umgekehrt a als Grundbegriff einführen und b durch die Umkehrfunktion von a. Bei mehreren Grundbegriffen und vielen daraus abgeleiteten Begriffen bestehen dabei viele verschiedene Möglichkeiten. In der Kinematik, der Bewegungslehre, werden in der Regel Länge und Zeit als Grundbegriffe, alle anderen als abgeleitete Begriffe eingeführt.

Auch die Zahl der Grundbegriffe ist in den verschiedenen Darstellungen der Physik nicht gleich. Das liegt, wie sogleich gezeigt werden soll, daran, daß die Angabe eines Meßverfahrens eine Größe grundsätzlich nicht eindeutig festlegt, sondern nur bis auf eine Naturkonstante als Faktor. Unter Verfügung über diesen Faktor kann man einen Grundbegriff durch einen verwandten und gleich benannten abgeleiteten Begriff ersetzen, ohne daß sich an dem Inhalt der mit diesen Größen formulierten physikalischen Aussagen irgend etwas ändert. Lediglich das Aussehen der Formeln und evtl. die Benennung der Größen wird etwas anders. Das soll im folgenden an dem Beispiel des Volumens erläutert werden.

In den meisten Lehrbüchern der theoretischen Physik wird auf die Definition der grundlegenden Begriffe „Länge“ und „Zeit“ ganz verzichtet, weil sie jedermann verständlich sind. Das ist insofern richtig, als wir ihren begrifflichen Inhalt durch den täglichen Gebrauch weitgehend kennenlernen. Dabei schleichen sich aber leicht Unklarheiten oder falsche Vorstellungen ein. Z. B. war eine der größten gedanklichen Leistungen Einsteins bei der Aufstellung der Relativitätstheorie die Erkenntnis, daß der Begriff „gleichzeitig“ bzw. der Begriff

„Zeitdifferenz zwischen zwei Ereignissen an verschiedenen Orten“ bis dahin nicht einwandfrei definiert war und für zwei gegeneinander bewegte Beobachter etwas Verschiedenes bedeutet. Bevor man in einem Teilgebiet der Physik mit der Aufstellung quantitativer Gesetze und der Definition der in ihnen vorkommenden Größen beginnen kann, muß man es schon qualitativ untersucht haben. Bei der Definition des Begriffes Länge können wir uns dementsprechend bereits auf qualitative Kenntnisse stützen wie die, daß es feste, flüssige und gasförmige Körper gibt und daß man mehrere stabförmige feste Körper in eine Ordnung bringen kann derart, daß jeweils der nächste länger ist als der vorige. Wie man das macht, kann im Grunde nur durch Handlungen demonstriert werden, die wir aber alle beim Erlernen des Inhaltes der Worte kürzer und länger kennengelernt haben. Unter den festen Körpern gibt es nun solche, bei denen die Stellung in dieser Ordnungsreihe durch irgendwelche Maßnahmen, wie z. B. Ziehen an den Enden, verändert werden kann. Diejenigen, bei denen das nicht der Fall ist, bezeichnet man als starr. Die genauere physikalische Untersuchung zeigt zwar, daß es keine in aller Strenge starren Körper gibt; aber unter Beachtung gewisser Bedingungen (Temperaturkonstanz, keine erheblichen Beanspruchungen usw.) kann man die meisten festen Körper als starr ansehen. Solch eine Idealisierung ist bei jeder physikalischen Definition unumgänglich. Damit hängt es zusammen, daß keine physikalische Größe mit absoluter Genauigkeit gemessen werden kann, sondern nur so weit, als die wirklichen Körper oder Vorgänge den bei der Definition gemachten Idealisierungen entsprechen. An solchen starren Körpern kann man Geraden markieren, d. h. Gesamtheiten von Punkten dieses Körpers mit der Eigenschaft, daß bei einer Bewegung des Körpers, bei der zwei Punkte der Gesamtheit relativ zu einem anderen Körper in Ruhe bleiben, die anderen Punkte der Gesamtheit auch in Ruhe bleiben.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun den Begriff Länge definieren, genauer die Länge einer Strecke zwischen zwei Punkten auf einer an einem starren Körper markierten Geraden, und zwar durch folgende Festsetzungen:

1. Die Länge einer solchen Strecke bleibt bei einer Verschiebung des Körpers unverändert. 2. Zwei solche Strecken an verschiedenen Körpern haben die gleiche Länge, wenn man die beiden Anfangs- und Endpunkte gleichzeitig zur Deckung bringen kann. 3. Wenn längs einer Geraden p gleich lange Strecken so aneinander anschließen, daß der Endpunkt der einen zugleich Anfangspunkt der nächsten ist, so ist die Länge der Strecke vom Anfangspunkt der ersten bis zum Endpunkt der letzten gleich dem p-fachen der Länge der Einzelstrecke. Damit sind kurz die Voraussetzungen genannt, die man beim Herstellen eines Maßstabes mit gleich langen Teilstrecken und dem Längenmessen mit ihm ständig ausnutzt. Die obigen Teilaxiome genügen, um das Verhältnis der Längen irgendwelcher Strecken zu bestimmen. Wenn man nun alle vorkommenden Längen mit der Länge einer Strecke an ein und demselben Körper in demselben Zustand vergleicht, also mit einer Einheitslänge, so können alle, die diese Einheit kennen, das Meßergebnis reproduzieren. Deshalb muß man zur Vervollständigung des Verfahrens der Längenmessung noch eine Vereinbarung über die Einheit treffen. Alle Kulturnationen benutzen heute als Einheit das Meter, welches ursprünglich als Länge einer an dem Normalmeter in Paris markierten Strecke unter bestimmten Zustandsbedingungen definiert wurde, heute aber aus Gründen der genaueren Reproduzierbarkeit als ein gewisses Vielfaches einer Wellenlänge.

Wenn man nach diesem Verfahren in einem Spezialfall festgestellt hat, daß die Länge L einer Strecke dreimal so groß ist wie die Länge des Meters (m), so schreibt man das Ergebnis $L = 3$ m. Man beachte, daß L keine Zahl ist. Diese Größe kann aber als Produkt aus der Zahl 3 und der Größe 1 m aufgefaßt werden. Allgemein gilt: Physikalische Größen kann man multiplizieren, dividieren, potenzieren und radizieren, wobei die gleichen Rechenregeln wie bei Zahlen gelten. Eine Addition von zwei Größen ist jedoch nur möglich, wenn sie als Vielfaches der gleichen Einheit geschrieben werden können. Also gibt die Summe aus einer Länge $L_1 = 3$ m und einer Länge $L_2 = 5$ m die Länge $L_1 + L_2 = 8$ m. Eine

Summe aus einer Länge $L_1 = 3$ m und dem Quadrat derselben Länge ist unmöglich.

Die obigen Rechenregeln gestatten ohne weiteres das Umrechnen auf andere Einheiten. Nach Definition der Länge 1 Zentimeter (cm) gilt 1 m = 100 cm; also folgt für obiges L auch $L = 3$ m = 300 cm. Die Größe L ändert sich also bei einem Wechsel der Einheit nicht, nur die Aufteilung des Produktes in Zahlenwert und Einheit. Aus diesem Grunde bevorzugt man in neueren Lehrbüchern die hier ausschließlich benutzte Schreibweise, bei welcher jeder Formelbuchstabe die Größe selbst bedeutet, also das Produkt aus Zahlenwert und Einheit. Dann ist nicht nur jede Formel, sondern auch jede in der Formel vorkommende Größe einzeln von der Wahl der Einheiten unabhängig. In älteren Darstellungen bedeuten die Formelbuchstaben zum Unterschied hierzu oft nur die Zahlenwerte der Größen in einer im Text oder im Vorwort angegebenen Einheit.

Den Begriff Volumen kann man nun zunächst als Grundbegriff einführen. Das definierende Meßverfahren kann durch die folgenden drei Sätze festgelegt werden:

1. Das Volumen starrer Körper ist von Ort und Zeit unabhängig. 2. Die Volumina zweier Körper sind gleich, wenn sie beim Eintauchen in eine Flüssigkeit die gleiche Hebung des Flüssigkeitsspiegels bewirken. 3. Das Verhältnis der Volumina zweier Körper ist gleich dem Verhältnis der Strecken, um die sich der Flüssigkeitsspiegel bei ihrem Eintauchen nacheinander in dasselbe zylindrische Meßgerät hebt. Als Einheit benutzt man das Liter (l), welches das Volumen einer Wassermenge mit der Masse 1 kg bei 4° C ist. Dann kann man feststellen, daß das Volumen V eines Quaders proportional dem Produkt aus den Längen a, b und c der drei Kanten ist. Man findet also als Naturgesetz

$$V = \alpha \cdot abc\,. \tag{1}$$

Die Naturkonstante α hat den Wert $\alpha = 999{,}973\ \mathrm{l/m^3}$.

Die obige Definitionsweise entspricht der Vorstellung, daß das Volumen eine Größe eigener Art ist, die insbesondere nicht gleich dem Produkt dreier Längen ist. α ist dann eine physikalische Größe, keine Zahl.

Die übliche Auffassung ist anders. Bei ihr wird unter dem Volumen die Größe $V' = V/\alpha$ verstanden. Offensichtlich erfüllt diese Größe auch die obigen drei Definitionen, da diese nur das Volumenverhältnis bestimmen. Bei der Bildung des Quotienten der Größen V oder V' zweier Körper fällt die Konstante α heraus. V' ist beim Quader gleich dem Produkt seiner Kantenlängen, hat also die Form: Zahlenwert mal m^3. Da man den Raum, den die Oberfläche eines beliebigen Körpers umschließt, angenähert, aber im Prinzip beliebig genau, aus Quadern zusammensetzen kann, gilt dasselbe für jedes Volumen. Entsprechend wird man bei dieser zweiten Auffassung unter 1 l die Größe $1\,\mathrm{l} = 1{,}000027 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 = 1000{,}027\,\mathrm{cm}^3$ verstehen. Für einen Quader gilt dann

$$V' = abc\,. \tag{2}$$

Durch diesen Begriffswechsel ist die Konstante α aus diesem Gesetz verschwunden. Aus dem Erfahrungsgesetz (1) ist die Definition (2) geworden. Die Erfahrungstatsache, welche (1) zum Ausdruck brachte, erscheint natürlich in der zweiten Auffassung an anderer Stelle, nämlich in der Aussage, daß beim Eintauchen eines Quaders in eine Flüssigkeit der Anstieg der Oberfläche in einem zylindrischen Gefäß seinem Volumen proportional ist.

Diese elementaren Betrachtungen machen deutlich, daß das Meßverfahren zur Einführung eines Grundbegriffes die betreffende Größe nur bis auf einen universellen Faktor festlegt. Diese Unbestimmtheit kann man ausnutzen, um die Proportionalitätskonstante aus irgendeinem Naturgesetz, in welchem diese Größe vorkommt, fortzuschaffen. Das entspricht einem Ersetzen eines Grundbegriffes durch einen abgeleiteten Begriff. Ob man solch einen Wechsel vornehmen will oder nicht und welches Naturgesetz man dabei benutzen will, ist weitgehend willkürlich. Er bestimmt aber die Gestalt der Gleichungen. Es wäre sehr erfreulich, wenn in den verschiedenen Darstellungen der Physik in dieser Hinsicht einheitlich vorgegangen würde; bisher ist aber keine Einmütigkeit erzielt worden. Der am Beispiel des Volumens geschilderte Wechsel der Begriffe, der in der Regel ohne Änderung des Namens durchgeführt wird, wird in der älteren Literatur oft als ein Wechsel der Einheit oder des Maßsystems bezeichnet, weil er in einer Darstellung, in der die Formelbuchstaben die Zahlenwerte der betreffenden Größen bedeuten, von dem Vorgang eines Wechsels der Einheiten nicht unterschieden werden kann.

Bei allen anderen Grundbegriffen geht man im wesentlichen genau so vor, wie es hier am Beispiel der Länge und des Volumens gezeigt wurde. Erstens werden einige qualitative Eigenschaften des zu definierenden Begriffes festgelegt, zweitens, wann die betrachtete Größe unter verschiedenen Bedingungen als gleich anzusehen ist und drittens, wie man unter Benutzung der ersten beiden Teildefinitionen das Verhältnis zweier Größen der gleichen Art ermittelt. Beim Begriff Zeitdauer wird entsprechend festgelegt, daß sie eine Eigenschaft einer Vorganges sein soll, die bei einem periodischen Vorgang, wie er in jeder Uhr möglichst genau realisiert wird, bei jeder Periode den gleichen Wert hat. Die Zeitdauer eines Vorgangs, dessen Anfang mit dem Beginn der ersten Periode und dessen Ende mit dem Ende der p-ten Periode zusammenfällt, ist p mal so lang wie eine Periode. Die Zeit ist also physikalisch, ebenso wie die Länge, das Resultat eines Meßvorganges mit Maßstäben bzw. starren Körpern oder Uhren bzw. periodischen Vorgängen, nicht wie bei manchen Philosophen etwas Transzendentes oder eine Anschauungsform. Unter Bedingungen, unter denen starre Körper oder periodische Vorgänge nicht existieren, können die physikalischen Begriffe Länge und Zeitdauer nur dann sinnvoll benutzt werden, wenn man irgendwelche Naturgesetze, in denen diese Größen vorkommen, geeignet verallgemeinern kann. Im Bereich der Atomkerne wird dazu z. B. der Zusammenhang zwischen Wellenlänge und Energie der Lichtquanten benutzt, im Kosmos das Gesetz von der geradlinigen Fortpflanzung des Lichtes in Verbindung mit den

Gesetzen der Euklidischen Geometrie. Wenn sich dann irgendwelche Widersprüche im Gedankengebäude der Physik zeigen, muß man die Zulässigkeit solcher Extrapolationen überprüfen.

Die zahlreichen abgeleiteten Begriffe pflegt man zu klassifizieren nach ihrer Größenart. Zwei Größen der gleichen Größenart können als Vielfache der gleichen Einheit geschrieben werden. Ihr Quotient ist eine Zahl. Man beachte aber, daß die Größenart kein Ersatz für die Definition einer Größe ist. Es gibt verschieden definierte Größen derselben Größenart. Jeder Größe, die als Grundbegriff definiert wird, wird eine eigene Größenart zugeschrieben, die durch Potenzprodukte aus anderen Größen nicht gewonnen werden kann. Die Größenart einer Größe kann man schon an der Einheit erkennen. Daher ist es unzweckmäßig, wenn zu viele Größen die gleiche Größenart bekommen. Darin liegt praktisch die Grenze für die Ausschaltung von Grundbegriffen nach dem oben am Volumen erläuterten Verfahren.

§ 2. Die Bewegung auf einer Geraden

Die Bewegung eines Punktes P auf einer Geraden wird beschrieben durch Angabe seiner Entfernung s von einem ruhenden Punkt P_0 der Geraden in Abhängigkeit von der Zeit t:

$$s = s(t)\,. \tag{1}$$

s wird auf der einen Seite von P_0 positiv, auf der anderen negativ gerechnet.

Unter der mittleren Geschwindigkeit von P im Zeitintervall von t_1 bis t_2 versteht man den Quotienten

$$\bar{v} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}\,. \tag{2}$$

Die Geschwindigkeit im Zeitpunkt t_1 ist der Grenzwert dieses Quotienten im Limes $t_2 \longrightarrow t_1$, also der Differentialquotient

$$v = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{ds}{dt}\,. \tag{3}$$

Dieser Begriff wurde erstmalig von Newton eingeführt und von ihm mit $\dot{s}$ bezeichnet. Ableitungen nach der Zeit bezeichnet man deshalb auch heute noch durch einen Punkt