Tropfke · Geschichte der Elementarmathematik · Band 1

Johannes Tropfke

Geschichte der Elementarmathematik

4. Auflage

Band 1 · Arithmetik und Algebra

Vollständig neu bearbeitet von
Kurt Vogel · Karin Reich · Helmuth Gericke

Walter de Gruyter · Berlin · New York 1980

Gedruckt mit Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft.

Dr. Kurt Vogel
em. Professor für Geschichte der Mathematik an der Universität München

Dr. Karin Reich
wiss. Mitarb. am Institut für Geschichte der Naturwissenschaften der Universität München

Dr. Helmuth Gericke
em. Professor für Geschichte der Naturwissenschaften an der Universität München

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Tropfke, Johannes:
Geschichte der Elementarmathematik / Tropfke. – Berlin, New York: de Gruyter. Bd. 1. Arithmetik und Algebra / vollst. neu bearb. von Kurt Vogel ... – 4. Aufl. – 1980.
ISBN 3-11-004893-0

NE: Vogel, Kurt [Bearb.]

© Copyright 1979 by Walter de Gruyter & Co., vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung Georg Reimer, Karl J. Trübner, Veit & Comp., Berlin 30. Alle Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie der Übersetzung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (durch Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des Verlags reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.
Satz: R. & J. Blank Composer- & Fotosatzstudio GmbH, München. Druck: Karl Gerike, Berlin. – Bindearbeiten: Dieter Mikolai, Berlin. Printed in Germany.

Vorwort

Im Vorwort zur ersten Auflage seiner „Geschichte der Elementarmathematik" schrieb Johannes Tropfke: „. . . Die vorwiegend historische Anordnung in Cantor's Werk bereitet dem Leser, der sich über ein Thema unterrichten will, große Schwierigkeiten, da die stufenweise Entwicklung des gesuchten Stoffes aus den verschiedenen Kapiteln mit Hilfe des Inhaltsverzeichnisses zusammengetragen werden muß. . . Für ein Werk, das imstande sein soll, schnell Auskunft über diesen oder jenen Punkt zu geben, das also als eine Art Nachschlagewerk dienen kann, ist deshalb die systematische Anordnung durchaus vorzuziehen. Nach diesem Gesichtspunkt ist die vorliegende Geschichte der Elementarmathematik behandelt worden." Und nach diesem Gesichtspunkt wird sie auch in der vorliegenden Neubearbeitung behandelt.

Ein solches Werk muß mit dem Fortschritt der Wissenschaft mitgehen und von Zeit zu Zeit neu bearbeitet werden. So folgte der ersten Auflage in 2 Bänden (Leipzig 1902) eine zweite Auflage in 7 Bänden (Berlin und Leipzig 1921–24). Von der dritten Auflage erschienen nur die Bände 1–4 (Berlin und Leipzig 1930–1940), die Manuskripte für die übrigen Bände waren bereits vorbereitet, gingen aber 1945 bei der Einnahme von Berlin verloren.

Seit der letzten Auflage ist durch die Forschung eine Fülle von Material neu erschlossen worden, so daß eine Neubearbeitung zu einem dringenden Desiderat geworden ist. Dabei erschien eine Straffung des Stoffes zweckmäßig. Statt der früheren 7 Bände sind jetzt 3 vorgesehen:

Band 1: Arithmetik und Algebra,
Band 2: Geometrie,
Band 3: Analysis.

Davon wird der erste hier vorgelegt. Für die Arithmetik und Algebra war die Anordnung des Stoffes in den früheren Auflagen stets die gleiche, lediglich der in der ersten Auflage bei der Geometrie behandelte Abschnitt über Logarithmen wurde in der zweiten Auflage der allgemeinen Arithmetik zugeordnet. Jetzt aber hielten wir eine neue Gliederung des Stoffes zwecks besserer Orientierungsmöglichkeit und größerer Übersichtlichkeit für sinnvoll.

Der vorliegende Band enthält im 1. Teil eine Darstellung der Zahlen und den Zahlbegriff. Ein Abschnitt über Maßsysteme kann und soll keine vollständige Aufzählung geben, sondern nur etwa das enthalten, was zum Verständnis der übrigen Teile, insbesondere der Aufgaben, notwendig ist. Dementsprechend wurde auf den in den früheren Auflagen vorhandenen Abschnitt Zeitmaße verzichtet. Die Eigenschaften der ganzen Zahlen, d.h. die elementare Zahlentheorie und die in der Schule gebräuchlichen Rechenhilfen wie Rechenstab und Taschenrechner sollen nach Möglichkeit in einem Ergänzungsband behandelt werden.

Im 2. Teil werden die Rechenoperationen, sowie die Logarithmen und die elementare Theorie der Proportionen und Reihen dargelegt.

Für den 3. Teil „Algebra" glaubten wir bis zum Beweis des Fundamentalsatzes von Gauß und etwa bis an die Schwelle der Galois-Theorie gehen zu sollen.

Wesentlich ausführlicher als in den alten Auflagen ist der 4. Teil „Das angewandte Rechnen", der von K. Vogel und K. Reich allein verfaßt wurde. Die Aufgabengliederung und die Stoffsammlung, die natürlich nicht erschöpfend sein kann, sollen helfen, kulturelle Abhängigkeiten festzustellen und Zusammenhänge mit anderen Gebieten, z.B. der Wirtschaft und Technik, aufzudecken.

Neu erstellt wurde auch speziell für den Band Arithmetik und Algebra ein eigenes Personen- und Sachregister. Außerdem wurde die Art der Zitierung umgestellt; das alte Verfahren mit den vielen Fußnoten und Verweisen war unübersichtlich. Der Darstellung wurde deshalb ein allgemeines Literaturverzeichnis angehängt, auf das sich die Zitate beziehen.

Zu den einzelnen Teilgebieten enthält die Spezialliteratur oft ausführlichere Angaben, die nicht alle aufgenommen werden konnten. Bei vielen Abschnitten ist daher auf weiterführende Literatur nach der Abschnittsüberschrift mit dem Buchstaben *L.* verwiesen. Selbstverständlich sind wir, soweit als möglich, auf die Originaltexte eingegangen. Das Literaturverzeichnis umfaßt nicht die gesamte, in den alten Auflagen angegebene Literatur; die Sekundärliteratur wurde auf einen modernen Stand gebracht; die zitierten Originaltexte sind davon abhängig, welche Bücher für uns zugänglich waren. Manches wertvolle Material, das Johannes Tropfke noch zitiert hat, war nicht mehr beschaffbar, da es, bedingt durch Kriegseinwirkungen, nun in deutschen Bibliotheken nicht mehr nachweisbar ist. Uns zur Verfügung standen vor allem unsere eigene Institutsbibliothek und die reichen Bestände der Bayerischen Staatsbibliothek und der Bibliothek des Deutschen Museums in München. Die im Literaturverzeichnis aufgeführten Bücher und Zeitschriften haben wir eingesehen, sonst wurde darauf verwiesen, woraus wir den Titel zitiert haben.

Die Arbeit wurde im Institut für Geschichte der Naturwissenschaften der Universität München und im Forschungsinstitut des Deutschen Museums durchgeführt und wäre ohne die Mittel dieses Instituts, die z.T. aus der Volkswagenstiftung stammten, nicht möglich gewesen. Die Deutsche Forschungsgemeinschaft gewährte uns Mittel zur Vergütung von Mitarbeitern und einen namhaften Druckkostenzuschuß.

Die Mitarbeiter des Forschungsinstituts des Deutschen Museums und der Institute der Naturwissenschaften und der Technik der Universität und der Technischen Universität haben uns bei unserer Arbeit stets bereitwillig unterstützt. Wir nennen insbesondere Professor Dr. Winfried Petri, der u.a. die Schreibweise der orientalischen Namen und Fachwörter überprüft hat, Professor Dr. Ivo Schneider, Dr. Kurt Elfering, Studienrat Dr. Hellfried Uebele, Studienrat Dr. Engelbert Huber. Rat und Hilfe gewährten uns Professor Dr. Menso Folkerts, bei arabischen Texten Patentanwalt Dr. Heinrich Hermelink, bei Leibniz' Gleichungstheorie Professor Dr. Eberhard Knobloch. Bei der Erstellung des Registers half Herr Willibald Pricha. Das Literaturverzeichnis verdanken wir zum größten Teil Frau Diplombibliothekarin Margret Nida-Rümelin, ohne deren mühevolle und sorgfältige Arbeit es nicht in der vorliegenden Form zustandegekommen wäre. Die Zeichnungen fertigte Herr Artur Weig vom Deutschen Museum, der unse-

ren oft schwierigen Wünschen stets bereitwilligst entgegengekommen ist. Ihnen allen sei an dieser Stelle herzlichst gedankt.

Dem Verlag und der Setzerei danken wir dafür, daß das Werk in einer gediegenen Ausstattung erscheinen kann, und für die Geduld bei der Überwindung der nicht gerade geringen satztechnischen Schwierigkeiten.

Wir hoffen, daß unsere neue Auflage den Ansprüchen gerecht werden kann, die dem Ansehen der früheren Auflagen des Tropfke in der Fachwelt entsprechen.

München, im Frühjahr 1979

Kurt Vogel
Karin Reich
Helmuth Gericke

Hinweise für den Leser

Eckige Klammern [. . .] verweisen auf das Literaturverzeichnis. Dort sind die näheren bibliographischen Angaben zu finden. Die Ziffer nach dem Namen vor dem Semikolon gibt, wenn vorhanden, die Nummer des Titels wieder, die Ziffern nach dem Semikolon geben die Bandzahl (fettgedruckt) oder nur die Seitenzahl. Beispiele hierzu siehe S.661. Ist das zitierte Werk zweisprachig derart, daß Originaltext und Übersetzung getrennt paginiert sind, z.B. bei Mahāvīra, Abraham ben Ezra, so bezieht sich die Seitenzahl normalerweise auf die Übersetzung und nicht auf den Text. Ist dies nicht der Fall, so wurde dies durch besondere Vermerke kenntlich gemacht: Text S. . . ., Übs.S. . . . . Literaturangaben bei der Fachsprache wurden dann weggelassen, wenn sie aus dem Register eines Standardwerkes ersichtlich sind.

Zitate und Fachwörter sind kursiv gesetzt. Eigene Einfügungen innerhalb von Zitaten stehen in spitzen Klammern ⟨ . . . ⟩. Übersetzungen von Zitaten sind als solche nicht besonders kenntlich gemacht. Lagen von Zitaten englische oder französische Übersetzungen vor, so wurden diese nicht immer ins Deutsche übersetzt, weil jede weitere Übersetzung sich weiter vom Original entfernen würde. Schwer erkennbare Abkürzungen innerhalb von Zitaten wurden aufgelöst und mit (. . .) gekennzeichnet, z.B. c° = c(ento).

Im Text wurden folgende *Abkürzungen* verwendet:

Keilschrifttexte:

AO	Antiquités Orientales, Paris, Musée du Louvre,
BM	British Museum, London,
MLC	Morgan Library Collection, New Haven,
SKT	Strasbourg, Bibliothèque Nationale et Universitaire,
VAT	Vorderasiatische Tontafelsammlung, Berlin, Staatliche Museen,
YBC	Yale Babylonian Collection, New Haven;

Papyri:

Pap.Br.Mus.	Papyrus British Museum;

Codices (Cod.):

Sie sind in der allgemein üblichen Weise unter Nennung des Aufbewahrungsortes der entsprechenden Sammlung und eventuell unter Angabe der Sprache, in der der Codex verfaßt ist, angegeben.

Cgm	Codex germanus Monacensis,
Clm	Codex latinus Monacensis,
Cod.Par.supplgr.	Codex Parisinus supplementum graecum
Cod.Cambridge Un.Lib.Ms.	Codex Cambridge University Library Manuscripts.

Währungseinheiten, s. S.91f.

Inhalt

1 Zahlen

1.1 Arithmetik und Algebra, Geschichte der Begriffe 1

1.2 Zahlwörter und Zahlsysteme, Zahlzeichen und Maßsysteme 7
1.2.1 Zahlwörter und Zahlsysteme 7
1.2.1.1 Allgemein 7
1.2.1.2 Zahlwörter für große Zahlen 13
1.2.1.3 Die Null 16
1.2.1.4 Die Beschreibung der Zahlen im Positionssystem 18
1.2.2 Zahlzeichen für ganze Zahlen 21
1.2.2.1 Zahlzeichen der Primitiven 22
1.2.2.2 Die ersten Kulturen 23
1.2.2.3 Die Ägypter 23
1.2.2.4 Die Babylonier 26
1.2.2.5 Die Griechen 31
1.2.2.6 Die Römer 34
1.2.2.7 Die Chinesen 35
1.2.2.8 Mexiko und Peru 38
1.2.2.9 Die Inder 40
1.2.2.10 Die Juden 46
1.2.2.11 Die Araber 49
1.2.2.12 Byzanz 60
1.2.2.13 Das Abendland 61
1.2.3 Maßsystem 70
1.2.3.1 Längenmaße 70
1.2.3.2 Flächenmaße 79
1.2.3.3 Raummaße 82
1.2.3.4 Gewichts- und Geldmaße 87
1.2.3.5 Weitere Maße 92
1.2.4 Die Brüche 93
1.2.4.1 Die Ägypter 94
1.2.4.2 Die Babylonier 99
1.2.4.3 Die Griechen 101
1.2.4.4 Die Römer 104
1.2.4.5 Die Chinesen 105
1.2.4.6 Die Inder 107
1.2.4.7 Die Araber 108
1.2.4.8 Das Abendland 112

1.3 Der Zahlbegriff und seine Erweiterungen 121
1.3.1 Das Wort „Zahl“ 121

1.3.2 Ganze Zahlen 122
1.3.2.1 Antike Definitionen 122
1.3.2.2 Die Eins 124
1.3.2.3 Moderne Definitionen 125
1.3.2.4 Fachsprache 128
1.3.3 Brüche und Zahlenverhältnisse 128
1.3.4 Irrationale Zahlen 131
1.3.5 Algebraische und transzendente Zahlen 139
1.3.6 Die Null 141
1.3.7 Negative Zahlen 144
Fachsprache 150
1.3.8 Komplexe Zahlen 151
Fachsprache 157

2 Rechenoperationen

2.1 Allgemeines 159
2.1.1 Die Behandlung der Rechenoperationen in den Rechenbüchern 159
2.1.2 Wie muß eine strenge Begründung des Rechnens aussehen? 161
2.1.3 Proben, insbesondere die Neunerprobe 165
2.1.4 Fachwörter für das Rechnen im Allgemeinen 167
2.1.5 Allgemeine Symbole 170
2.1.5.1 Gleichheitszeichen und Ungleichheitszeichen 170
2.1.5.2 Zeichen der Zusammenfassung 172

2.2 Die elementaren Rechenoperationen 175
2.2.1 Kopf- und Fingerrechnen 176
2.2.2 Das Rechnen auf einem Abakus 178
2.2.2.1 Beschreibung des Rechnens auf dem Rechenbrett und „auf den Linien". 180
2.2.3 Das schriftliche Rechnen 186
2.2.3.1 Addition 187
2.2.3.2 Subtraktion 194
2.2.3.3 Multiplikation 207
2.2.3.4 Division 231

2.3 Bruchrechnen 248
2.3.1 Brüche in einem Positionssystem 248
2.3.2 Gewöhnliche Brüche 249
2.3.2.1 Grundlagen 249
2.3.2.2 Das Vergleichen von Brüchen 252
2.3.2.3 Umformen von Brüchen (Fachsprache) 252
2.3.2.4 Addition von Brüchen 255
2.3.2.5 Multiplikation von Brüchen 257
2.3.2.6 Division von Brüchen 261

2.4 Weitere Rechenoperationen 263
2.4.1 Potenzen und Wurzeln 263

2.4.2 Logarithmen 297
2.4.3 Verhältnisse und Proportionen 323
2.4.4 Reihen 344
2.4.4.1 Arithmetische und verwandte Folgen und Reihen 344
2.4.4.2 Endliche geometrische Reihen 354

3 Algebra

3.1 **Algebra ohne Symbole** 359
3.1.1 Dreisatz 359
3.1.2 Proportionale Verteilung. Gesellschaftsrechnung 363
3.1.3 Der einfache falsche Ansatz 367
3.1.4 Der doppelte falsche Ansatz 371

3.2 **Die algebraische Ausdrucksweise** 374
3.2.1 Bezeichnungen und Symbole für die Unbekannten 374
3.2.2 Das Rechnen mit Unbekannten 378
3.2.3 Symbole für bekannte Größen 380

3.3 **Gleichungen** 382
3.3.1 Einteilung der Gleichungen 382
3.3.2 Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten 385
3.3.3 Lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten 388
3.3.4 Quadratische Gleichungen 406
3.3.5 Kubische und biquadratische Gleichungen 425
3.3.6 Gleichungen höheren Grades mit einer Unbekannten 458
3.3.7 Gleichungen höheren Grades mit mehreren Unbekannten 468

3.4 **Allgemeine Gleichungstheorie** 474
3.4.1 Anfänge (Cardano) 474
3.4.2 Entwicklung einer angemessenen Darstellungsform 478
3.4.3 Viète. Neue Grundlagen der Algebra 480
3.4.4 Die Anzahl der Lösungen einer Gleichung 489
3.4.5 Der Fundamentalsatz der Algebra 494

3.5 **Methoden zur näherungsweisen Lösung von algebraischen Gleichungen** 501
3.5.1 Vorbemerkungen 501
3.5.2 Berechnung von Werten eines Polynoms 501
3.5.3 Verbesserung eines Lösungsintervalls 505
3.5.4 Verbesserung eines Näherungswertes 506
3.5.5 Iteration 509
3.5.6 Rekurrente Folgen und Potenzsummen 510

4 Das angewandte Rechnen

4.1 **Probleme aus dem täglichen Leben** 513
4.1.1 Kauf und Verkauf (Gewinn- und Verlustberechnungen) 514

4.1.2 Warentausch (Stich) 519
4.1.3 Arbeits- und Dienstleistungen 528
4.1.4 Prozentrechnung 530
4.1.5 Tara- und Fusti-Rechnung 532
4.1.6 Die Zinsrechnung 535
4.1.7. Rabatt und Diskont 550
4.1.8 Saldo- und Terminrechnung 552
4.1.9 Gesellschaftsrechnung (proportionale Verteilung) 554
4.1.10 Faktorrechnung 559
4.1.11 Vermietungen, Vieh- und Weidepacht 560
4.1.12 Geldwechsel und Maßumrechnungen 562
4.1.13 Münzlegierungen 565
4.1.14 Mischungsaufgaben 569
4.1.14.1 Verschiedene Mischungen 569
4.1.14.2 Das Problem der 100 Vögel 572

4.2 Probleme der Unterhaltungsmathematik 573
4.2.1 Lineare Probleme mit einer Unbekannten 573
4.2.1.1 Hau-Rechnungen 573
4.2.1.2 Zisternenprobleme (Leistungsprobleme) 578
4.2.1.3 Schachtelaufgaben 582
4.2.1.4 Bewegungsaufgaben 588
4.2.1.5 Diverse Probleme 598
4.2.2 Lineare Probleme mit mehreren Unbekannten 604
4.2.2.1 Die Zerlegung einer Zahl in zwei oder mehrere Summanden 605
4.2.2.2 Die gefundene Börse 606
4.2.2.3 Einer allein kann nicht kaufen (Pferdekauf) 608
4.2.2.4 Geben und Nehmen 609
4.2.2.5 2 Becher und 1 Deckel 612
4.2.2.6 Das Problem der 100 Vögel und die Zechenaufgaben 613
4.2.3 Aufgaben der rechnenden Geometrie 616
4.2.3.1 Der pythagoreische Lehrsatz in geometrischen Aufgaben 617
4.2.3.2 Aufgaben, in denen die Ähnlichkeit von Dreiecken verwendet wird 623
4.2.4 Aufgaben mit Folgen und Reihen 625
4.2.4.1 Arithmetische Reihen 625
4.2.4.2 Geometrische Reihen 628
4.2.5 Restprobleme 636
4.2.5.1 Die Regula Ta-yen 636
4.2.5.2 Die Eierfrau 640
4.2.6 Das Erraten von Zahlen 642
4.2.6.1 Rückwärtsrechnen 643
4.2.6.2 Erraten mit 9 643
4.2.6.3 Gerad oder Ungerad 645
4.2.6.4 Ratespiel im Kreis 645
4.2.6.5 Wo ist der Ring? 646

4.2.6.6 Die drei Spieler? 647
4.2.6.7 Verteilung von 3 Gegenständen 648
4.2.7 Anordnungsprobleme und andere Scherzaufgaben 651
4.2.7.1 Gleicher Erlös trotz Verkaufs verschiedener Mengen 651
4.2.7.2 Gewinn beim Verkauf um den Einkaufspreis 652
4.2.7.3 Das Joseph-Spiel 652
4.2.7.4 Die Zwillingserbschaft 655
4.2.7.5 Wolf, Ziege und Kohlkopf 658
4.2.7.6 Umfüllaufgaben 659
4.2.7.7 Verschiedenes 659

Literaturverzeichnis mit biographischen Angaben zu den Verfassern 661

Register 727

1 Zahlen

1.1 Arithmetik und Algebra, Geschichte der Begriffe

Aus der vorgriechischen Zeit ist eine Benennung mathematischer Teilgebiete nicht überliefert und auch nicht zu erwarten. Die Überschrift des Papyrus Rhind beginnt mit *tp ḥśb* (richtiges Rechnen), wobei „Rechnen" die ganze damalige Mathematik umfaßt, denn auch in der Geometrie kam es nur auf die zahlenmäßige Ausrechnung an. Während der Papyrus Rhind ein einigermaßen geordnetes Rechenbuch darstellt, sind aus der babylonischen Mathematik nur Beispiele (wenn auch gelegentlich in Serien) erhalten. Es fehlen Worte für das allgemeine Rechnen oder mathematische Teilgebiete.

Die Griechen unterscheiden bereits zwischen *Logistik* (λογιστικὴ τέχνη), der Lehre vom Rechnen, und *Arithmetik* (ἀριθμητικὴ τέχνη), die theoretische Fragen behandelt, z.B. das Gerade und Ungerade, also Zahlentheorie [Platon; Gorgias 451 b, c]. Die Ἀριθμητικὴ εἰσαγωγή des **Nikomachos von Gerasa** ist Zahlentheorie.

Während die Logistik in den überlieferten philosophischen und wissenschaftlichen Werken nur am Rande erwähnt wird, gehört die Arithmetik zu den theoretischen Wissenschaften, deren Einteilung auf die Pythagoreer zurückgeht und z.B. in **Platons** Staat Buch IV auseinandergesetzt wird.

Eine systematische Erörterung gibt **Aristoteles**. Die Mathematik hat es mit Größen zu tun. Dabei sind diskrete und stetige Größen zu unterscheiden (Τοῦ δὲ ποσοῦ τὸ μέν ἐστι διορισμένον, τὸ δὲ συνεχές). [Cat. 6 = 4 b 20], ähnlich [Metaphysik Δ13 = 1020 a 10 ff.].

Eine Motivierung der weiteren Einteilung (die als solche schon älter ist) steht bei **Nikomachos von Gerasa** [1; 5 = I,3]:

Die diskreten Größen an sich, sofern sie kein Verhältnis zu anderen haben, sind Gegenstand der Arithmetik, die Verhältnisse diskreter Größen sind Gegenstand der Musik; die unbewegten stetigen Größen behandelt die Geometrie, die ewigen Bewegungen derselben die Astronomie. Jede dieser Wissenschaften baut auf der vorangehenden auf.

Eine etwas andere Einteilung gibt **Heron** [4, 165]:

Wie viele Teile der Mathematik gibt es? Der edleren und höchsten gibt es zwei Hauptteile, Arithmetik und Geometrie, der mit dem Sinnlichen sich befassenden aber sechs: Rechenkunst, Feldmessung, Optik, Musiktheorie, Mechanik, Astronomie.

Boetius hat die Einteilung des **Nikomachos** als *Quadrivium* übernommen [I, Kap. 1], und durch ihn und **Cassiodorus** [Buch II] ist sie in den Lehrplan der mittelalterlichen Schulen und Universitäten eingegangen.

Die Algebra paßt in dieses Schema nicht hinein, weil bei (z.B.) quadratischen Gleichungen irrationale Lösungen auftreten können, die keine Zahlen im griechischen Sinne sind. So steht denn einerseits die Lösung quadratischer Gleichungen bei **Euklid** in geo-

metrischer Form in [El. 6,27-29] – irrationale Zahlen können nur als Streckenverhältnisse aufgefaßt werden –, andererseits achtet **Diophant** darauf, daß keine irrationalen Lösungen auftreten, was u.U. durch Angabe von Nebenbedingungen für die Lösbarkeit einer Aufgabe zu erreichen ist.

Die Chinesen haben ein Fachwort für Rechnen *Suan*, das z.B. in den Titeln der ältesten Rechenbücher auftritt: *Chiu Chang Suan Shu* = Neun Bücher arithmetischer Technik (2. Jh. v.Chr.). *Shu* entspricht dem griechischen τέχνη und dem lateinischen *ars* = Kunstfertigkeit, Technik. Oder: *Chou Pei Suan Ching* = Klassisches Buch *(Ching)* des Rechnens *(Suan)* für die Kreisbahnen *(Chou)* – nämlich der Himmelskörper – und den Gnomon *(Pei)* – womit vielleicht das rechtwinklige Dreieck gemeint ist. Diese Interpretation des Titels ist allerdings nicht ganz sicher [N; 3, 19]. In späterer Zeit verwendet **Li Yeh** in seinem algebraischen Werk *I Ku Yen Tuan* (Neue Schritte im Rechnen) für die Unbekannte den Ausdruck *thien yuan shu* (himmlisches Element), woraus sich wohl auch eine Bezeichnung für Algebra entwickelte, wie im Abendland entsprechend *Coß* aus *cosa* [N; 3, 45], [Vanhée 3; 505].

Die Inder benützten das schon sehr alte Wort *gaṇita* für Rechnen und Mathematik allgemein, so z.B. **Āryabhaṭa I** in der Eingangsstrophe seines *Āryabhaṭīya* (499). **Brahmagupta** behandelt in seinem astronomischen Lehrbuch *Brāhma-sphuṭa-siddhānta* unter der Überschrift *gaṇita-adhyāya* (= Kapitel über die Mathematik) elementares Rechnen mit Anwendungen, etwa Zinsrechnung, Reihenlehre, Flächen- und Raummessung.

Über dem 18. Kapitel **Brahmaguptas** erscheint *kuṭṭaka* (wörtl.: der Zerhacker) als Fachwort für das euklidische Teilerverfahren; hier werden die damit behandelbaren Gegenstände dargestellt: Das Rechnen mit ganzen und gebrochenen Zahlen, die Gleichungslehre (quadratische und Systeme linearer Gleichungen).

Mahāvīra nennt sein Buch (ca. 830) *Gaṇita-sāra-saṅgraha*, d.h. wörtlich: Zusammenfassung des Besten aus der Mathematik. Es enthält die arithmetischen Operationen bis zur Kubikwurzel (*Parikarma-vyavahāra* = Kapitel über die arithmetischen Operationen [Kap. 2]), Bruchrechnen, Dreisatz, Gleichungen, Flächenrechnung.

Für Algebra ist später die Bezeichnung *bīja-gaṇita* gebräuchlich, und zwar seit der Zeit von **Pṛthūdakasvāmī** (860) [DS; 2, 1].

Bhāskara II behandelt unter *bīja-gaṇita* nach einer Einleitung über das allgemeine Rechnen vor allem die Gleichungslehre. Ferner benutzt er das Wort *avyakta-gaṇita* für das Rechnen mit unbekannten Größen (Algebra) im Gegensatz zu *vyakta-gaṇita* für das Rechnen mit bekannten Größen, wobei er bereits in der Einleitung das erstere als Grundlage des letzteren an den Anfang stellt [DS; 2, 1].

Bei den Arabern heißt Rechnen *ḥisāb* (vgl. ägyptisch: *ḥśb*). Bücher, in denen die Rechenoperationen gelehrt werden, enthalten meist dieses Wort im Titel. Sie heißen z.B.:

al-uṣūl fī al-ḥisāb al-hindī (Kapitel über das indische Rechnen) bei **al-Uqlīdisī**,
al-kāfī fī al-ḥisāb (Genügendes über das Rechnen) bei **al-Karaǧī**,
uṣūl ḥisāb al-hind (Grundlagen des indischen Rechnens) bei **Kūšyār ibn Labbān**,
miftāḥ al-ḥisāb (Schlüssel des Rechnens) bei **al-Kāšī**.

Das Wort Algebra erscheint erstmalig im Titel des Werkes von **al-Ḫwārizmī**: *al-kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ǧabr wa-l-muqābala* (ein kurzgefaßtes Buch über die Rechenverfahren des *al-ǧabr* und des *al-muqābala*); *al-ǧabr*, wörtlich: Einrichten eines gebrochenen Knochens, wurde mit der Beseitigung negativer Glieder einer Gleichung durch Addition, *al-muqābala* mit der Weglassung von positiven Gliedern, die auf beiden Gleichungsseiten stehen, in Verbindung gebracht. Demgemäß wurde mit *Ergänzung* und *Ausgleichung* übersetzt [Ruska 2; 5–11].

Vielleicht hängt *al-ǧabr* mit dem assyrischen *ǧabru* = entsprechend, Nachbildung zusammen, das wir jedoch in rein mathematischen Texten nicht finden konnten [Gandz 1 und 4; 275].

Die unter *Ergänzung* und *Ausgleichung* begriffenen beiden Operationen erscheinen bereits bei **Diophant** mit den Bezeichnungen προστιθέναι und ἀφαιρεῖν [1; **1**,14].

Um 1000 gebraucht **Iḫwān al-Ṣafā'** unter Weglassung des *muqābala* die Bezeichnung *al-ǧabrīyūn* für „Algebraiker" [Ruska 2; 13]. **Al-Karaǧī** (gest. um 1030) läßt auch die Beseitigung von Brüchen in einer Gleichung durch Multiplikation unter den Begriff *ǧabr* fallen [Ruska 2; 13].

Im Abendland wird die Lehre vom Rechnen mit indischen Ziffern bekannt durch die lateinischen Übersetzungen und Bearbeitungen von **al-Ḫwārizmī**'s Schrift etwa durch **Johannes Hispalensis** (gest. 1153). Ein lateinisches Manuskript aus dem 13. Jh. beginnt mit: *Dixit algorizmi* . . . [al-Ḫwārizmī 2; 8 f.]. Was hier noch als Name kenntlich ist, wird später als Algorithmus zum Fachwort für die Lehre vom Rechnen. Diese Bezeichnung findet sich z.B. bei **Alexander von Villa Dei**: *Carmen de algorismo*, und bei **Sacrobosco**: *Algorismus vulgaris*, bis hin zum *Algorismus Ratisbonensis* und zu **Pedro Ciruelo**: *Tractatus arithmetice practice qui dicitur algorismus* (1495). Die Herkunft dieses Fachworts war sogar zeitweise in Vergessenheit geraten; erst 1849 hat der Orientalist **J. Reinaud** [303 f.] wieder darauf aufmerksam gemacht.

Außerdem wurde das Wort *Abacus* für Rechenbrett zum Ausdruck für das Rechnen allgemein; die Rechenmeister hießen *Abacisten (maestro del Abaco)*; bei **Paolo Dagomari** ist das sogar zum Namen geworden; er wurde **Paolo dell'Abbaco** genannt. Sein Werk hieß *Trattato d'Abbaco* . . . (ca. 1339), dasjenige von **Leonardo von Pisa** *Liber abbaci* (1202). Ein Manuskript von **Luca da Firenze** heißt *Inprencipio darte dabaco* (ca. 1475) [D.E. Smith 1; 435–440, 468 ff.].

Seltener wird die griechische Bezeichnung *Logistik* (für Arithmetik) gebraucht, z.B. von **Barlaam**: Λογιστική.

Nebenher ist stets das Wort *Arithmetik* in Gebrauch geblieben, das über **Nikomachos von Gerasa** durch **Boetius** ins Abendland gekommen ist. Es erscheint z.B. in Titeln von **Piero Borghi** (1484), **Filippo Calandri** (1491) und **Luca Pacioli** (1494).

Das Wort *Algebra* wird im Abendland übernommen. So heißt es in der Überschrift zum 15. Kapitel des *Liber abbaci* des **Leonardo von Pisa** . . . *de questionibus algebre et almuchabale* [1; **1**, 387]. **Leonardo** erwähnt im *Liber abbaci* auch einen (nicht erhaltenen) *Liber minoris guise* (Buch über die geringere Art) [1; **1**; 154]. 1460 findet sich in einem italienischen Manuskript: *la regola de Algebra amucabale* [D.E. Smith 1; 463]. **Cardano** stellt die Algebra als *ars magna* dem *computus minor* gegenüber.

Ein weiterer Fachausdruck für das, was wir heute Algebra nennen, entsteht aus der italienischen Bezeichnung *cosa* für die Unbekannte. Das deutsche Wort *Coss* ist auf dem Wege über *Regeln der Coss* – Regeln für das Umgehen mit einer Unbekannten – zur Bezeichnung für Algebra geworden. So heißt ein Buch von **Chr. Rudolff**: *Behend und Hubsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre so gemeinicklich die Coß genennt werden.*

Viète führt ein neues Fachwort ein: *Analysis.*

Der Begriff selbst ist nicht neu. Man versteht darunter eine bestimmte Methode, mathematische Ergebnisse zu finden, eine δύναμις εὑρητική [Pappos 1; 634] bzw. *doctrina bene inveniendi* [Viète 3; 1], die darin besteht, daß man das Gesuchte als bekannt annimmt, danach durch Folgerungen zu etwas tatsächlich Bekanntem fortschreitet und daraus dann rückwärts (durch *Synthesis*) das Gesuchte gewinnt.

Proklos berichtet [1; 67] = [2; 210], daß **Eudoxos** sich dieser Methode bedient habe. Auch andere griechische Mathematiker haben sie benutzt; eine ausführliche Beschreibung finden wir bei **Pappos** [1; 634].

Viète wendet diese Begriffsbildung auf algebraische Probleme an. In der *Analysis zetetike* etwa nimmt er die gesuchte Größe als bekannt an (was – das sagt **Viète** nicht ausdrücklich – dadurch geschieht, daß man ihr einen Namen gibt, sie durch ein Symbol darstellt) und geht mit ihr wie mit etwas Bekanntem um, bis er aus den vorgelegten Forderungen eine Gleichung oder Proportion erhält.

Mit dem so erläuterten Wort ist nun – anders als durch *Algebra* oder *Coss* – die verwendete Methode sinnvoll und umfassend bezeichnet. **Viète** nennt sein einführendes Werk von 1591 [3; nur in der Originalausgabe, 3^{v}]: *Opere restitutae mathematicae Analyseos seu Algebrâ novâ.* Er faßt unter diesem Titel eine ganze Reihe seiner Schriften zusammen. In dem Widmungsbrief schreibt er etwas abschätzig: *Zwar stimmten alle Mathematiker darin überein, daß in ihrer Algebra oder Almucabala, die sie priesen und eine große Kunst nannten, unvergleichliches Gold verborgen sei, aber gefunden haben sie es nicht . . .* [3; 2^{v}, 3^{r}] = [12; 34].

Mit **Viète** ist die Reihe der im Abendland benutzten Bezeichnungen vollständig: *Logistik, Arithmetik, Algebra, Algorithmus, Abacus, Coss, Analysis.*

Einige Ausdrücke sind nun ziemlich bald verschwunden: *Logistik* erscheint noch 1559 bei **Buteo.** Der Titel seines Buchs lautet: *Logistica, quae et Arithmetica vulgo dicitur . . .*; im 3. Buch *tractatur Algebra.* **Viète** fügt zur *logistica speciosa*, worunter das Rechnen mit Arten (Potenzen der Unbekannten) begriffen wird, die *logistica numerosa* hinzu, die von der zahlenmäßigen Auflösung von Gleichungen handelt.

Leibniz gebraucht das Wort *Logistik* für das Rechnen: die vier Grundrechenarten, das Wurzelziehen und die sogenannten *Algorithmen* (Tabellen, Logarithmen) [1; 7, 11].

Hérigone nennt 1644 in seinem *Cursus mathematicus* drei Bezeichnungen gleichbedeutend: *Doctrina analytica, qua Algebra et Italico vocabulo cosa dicitur*; als Definition gibt er die Erklärung der Analysis im Sinne des oben Erläuterten an [2, 1].

Ähnlich 1699 **Samuel Reyher**: *Die Lösekunst (sonst Analysis, Algebra oder Regula Cos genannt) ist eine Wissenschaft/ welche bey aller Größen Betrachtung das Begehrte durch ein oder mehr Gegebene oder Gestandene Dinge ausfindig machet* [87].

Die Bezeichnung *Abacus* für ein mathematisches Teilgebiet ist verschwunden, das Wort *Algorithmus* bekommt einen neuen Sinn als eine nach vorgeschriebenen Regeln eindeutig ablaufende Rechnung im Gegensatz zu *Kalkül*, das eine Zusammenfassung beliebig anwendbarer Regeln bedeutet.

Übrig bleiben die Bezeichnungen *Arithmetik, Algebra, Analysis*; diese überdecken zu verschiedenen Zeiten und bei verschiedenen Autoren nicht die gleichen der anfangs genannten Sachgebiete.

Arithmetik

In einem Prager Codex aus der 2. Hälfte des 15. Jh. steht die Erklärung: *Arismetrica hayßt Die kunst von raiten* ⟨rechnen⟩ [Kaunzner 1; 102 und 2; 1].

Stifels *Arithmetica integra* (1544) umfaßt die Lehre von den Zahlen, den Rechenoperationen und den Gleichungen. Dasselbe gilt von **Stevins** *Arithmétique* (1585). **Wallis'** Werk über unendliche Reihen heißt *Arithmetica infinitorum* (1655), und **Newtons** Algebra trägt den Titel *Arithmetica universalis* (1707). **Leibniz** bezeichnet in einem Manuskript die Lehre von den unbestimmten Gleichungen als *Arithmetica Diophantea* [1; 7, 11].

Weidler setzt *Arithmetica universalis* mit *Analysis* gleich und behandelt hier Gleichungslehre und allgemeine Rechenregeln [4]. **Gauß** nennt sein zahlentheoretisches Hauptwerk *Disquisitiones arithmeticae* (1801). Allmählich bildet sich dann die heutige Bedeutung, elementare Zahlenrechnung und Zahlentheorie, heraus.

Algebra

Bombelli behandelt in *L'algebra* das Rechnen mit Polynomen und die Gleichungslehre. In **Girards** *Invention nouvelle en l'algèbre* (1629) handelt es sich um Gleichungslösungen, insbesondere den heute sog. Fundamentalsatz der Algebra. **Descartes** behandelt algebraische Gegenstände im 3. Buch der *Geometrie* (1637), ohne daß das Wort Algebra dabei auftaucht; er verwendet es dagegen in seinem *Discours de la méthode* [5; 17, 20, 21]. In einem Manuskript erklärt **Leibniz** Algebra als *Methode, die Werte von unbekannten, durch Buchstaben ausgedrückten Zahlen zu finden* oder nach den Regeln der *Logistik* eine Gleichung aufzustellen, die eine Relation zwischen Bekanntem und Unbekanntem ausdrückt, und sie dann durch Wurzelziehen exakt oder durch unendliche Reihen in beliebiger Näherung zu lösen [1; 7, 11]. Ein weiteres Manuskript unter dem Titel *Nova algebrae promotio* [1; 7, 154–189] enthält neben Ausführungen über algebraische Gleichungen u.a. einen Beweis des kleinen Fermatschen Satzes.

Einen erweiterten Sinn bekommt das Wort *Algebra* vor allem im 18. und 19. Jh.: Unter Geometrie und Mechanik verstand man die Lehre von den stetigen, unter Algebra die Lehre von den diskreten Größen. Diese stark erweiterte Auffassung von Algebra findet sich z.B. bei **Euler** in seiner *Vollständigen Anleitung zur Algebra* von 1770. Er betrach-

tet als Grund aller mathematischen Wissenschaften die vollständige Behandlung der Lehre von den Zahlen und aller Rechnungsarten, die dabei vorkommen können und sagt: *Dieser Grundteil der Mathematik wird Analytic oder Algebra genennet* [5; 1.Teil, 1. Abschn., Kap. 1, § 5]. Der erste Teil des Werkes handelt von den Rechenoperationen, von einfachen und zusammengesetzten Größen sowie von Proportionen, der zweite Teil zunächst *Von den algebraischen Gleichungen und ihrer Auflösung*, dann *Von der unbestimmten Analytik* (d.h. von Gleichungssystemen mit mehr Unbekannten als Gleichungen, deren Lösung durch Nebenbedingungen wie z.B. Ganzzahligkeit in das Gebiet der Zahlentheorie übergreift).

Ähnlich wird der Begriff auch noch von **Vega** in seinen Vorlesungen von 1821 [2] und **Desberger** in seiner Algebra von 1831 [2] gefaßt.

Daneben erscheint *Algebra* immer wieder in engerer Bedeutung als Gleichungslehre oder Auflösekunst.

Diese Auffassung, die sich bis in dieses Jahrhundert hinein gehalten hat, findet sich in **Chr. von Wolffs** Lexikon von 1716, wo außerdem *Algebra numerosa, die gemeine oder alte Algebra, oder die Algebra in Zahlen*, gleichbedeutend mit Rechenkunst oder *Regel Coß*, und *Algebra Speciosa, die neuere Algebra* in der Bedeutung von Buchstabenrechnung (ähnlich wie *logistica speciosa* bei **Viète**) unterschieden werden [3; Sp. 35 ff.]. Algebra als Gleichungslehre erscheint ferner bei **Kästner** (1760) [2; 29], **Gauß** (1801) [2; 5], in den mathematischen Wörterbüchern von **Klügel** (1803) [2; **1**, 43] und **Hoffmann** (1858) [**1**, 43], bei **J. A. Serret** (1849).

Hankel spricht von Algebra als der *Anwendung arithmetischer Operationen auf zusammengesetzte Größen aller Art, mögen sie rationale oder irrationale Zahl- oder Raumgrößen sein* [2; 195].

G. Bauer geht in seinen *Vorlesungen über Algebra* (1903) von den algebraischen Funktionen aus, worunter er solche versteht, in denen die Variablen nur einer endlichen Anzahl von Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen, Divisionen oder Potenzierung und Radizierung mit konstanten ganzen Exponenten unterworfen sind [1].

Heute verstehen wir unter Algebra im weitesten Sinne die Theorie der algebraischen Strukturen, d.h. von Mengen, für deren Elemente Verknüpfung definiert sind, die bestimmte Axiome erfüllen.

Analysis

Diese Bezeichnung gebraucht **Harriot** im Sinne von **Viète**; sein Werk heißt *Artis analyticae praxis* (1631) **Viète** nannte den Algebraiker *Analysta* [3; 8] im Gegensatz zum Geometer. Diese Ausdrucksweise kommt u.a. auch bei **Leibniz** [1; 7, 180] und **Gauß** [7; 4] vor.

Schon von **Newton** wurde das Wort *Analysis* auf die Differential- und Integralrechnung angewandt, seine erste Schrift darüber heißt *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (1669).

Später unterschied man zwischen Analysis des Endlichen und Analysis des Unendlichen, dabei bedeutet der erste Ausdruck Arithmetik und Algebra, der zweite die Infinitesimal-

rechnung. Beispiele dafür sind das Werk von **Chr. von Wolff** (1730) mit den Abschnitten *Elementa Analyseos Finitorum* [2; **1**, 297] und *Elementa Analyseos Infinitorum* [2; **1**, 543]; ferner die Lehrbücher von **Euler**: *Introductio in analysin infinitorum* (1748) und **Kästner**: *Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen* (1760) und *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen* (1761). Auch in den Wörterbüchern von **Chr. von Wolff** (1716) [3; Sp. 53 f.] und **Klügel** (1803–1836) [2; **1**, 100] findet sich diese Terminologie. **Klügel** definiert übrigens: *Analysis, als wissenschaftliches System, ist die allgemeine Darstellung und Entwickelung der Zusammensetzungsarten der Größen durch Rechnung* [2; **1**, 77].

Im Laufe des 19. Jahrhunderts tritt die Bezeichnung *Analysis des Endlichen* zurück, Analysis wird unter Weglassung des Zusatzes *des Unendlichen* zum Fachwort für die Infinitesimalrechnung. Herausragendes Beispiel ist **A. L. Cauchys** *Cours d'analyse* von 1821 mit dem ersten Teil *Analyse algébrique.*

1.2 Zahlwörter und Zahlsysteme, Zahlzeichen und Maßsysteme

1.2.1 Zahlwörter und Zahlsysteme

1.2.1.1 Allgemein

Schon in den ältesten schriftlichen Denkmälern finden sich Zahlen aufgezeichnet. Auf die schriftlose Zeit geht das Festhalten von Zahlen auf Kerbhölzern bei den Jägern der Steinzeit zurück (s.S. 22 f.). Dieses Verfahren entspricht einer Abbildung des unbekannten Abzuzählenden auf eine Reihe leicht herstellbarer einfacher Symbole, nämlich den Kerben auf einem Holz oder Knochen. Im 4. Jahrtausend v. Chr. wurde wahrscheinlich von den Sumerern die Schrift erfunden (s. S. 26). Wirtschaftstexte aus Uruk (um 3000 v. Chr.) enthalten nicht nur ganze Zahlen, sondern sogar schon Brüche bis zu $\frac{1}{64}$. In Ägypten wurden in Königsinschriften aus der vordynastischen Zeit (um 3000 v. Chr.) sehr große Beutezahlen genannt, z.B. 1 420 000 Ziegen (s. S. 24).

Über die Entstehung und Entwicklung eines Zahlbegriffs in der Frühzeit ist direkt aufgrund von schriftlicher Überlieferung nichts zu erfahren. Lediglich die Sprachen selbst geben Hinweise hierzu. Eine sprachliche Möglichkeit, um die Anzahl von bestimmten Gegenständen zum Ausdruck bringen zu können, besteht in der Form eines über den Singular und Plural hinausgehenden grammatischen Numerus. So bezeichnet der in vielen Sprachen (Griechisch, Arabisch, Altägyptisch, Altindisch, Altpersisch usw.) auftretende Dual die Zweiheit, im Gegensatz einerseits zur Einheit, andererseits zur Mehrheit. Es existieren sogar Sprachen, in denen neben dem Dual noch ein Trial, Quaternal und noch höhere Numeruskategorien vorkommen [Hartner; 67 f.]. So hängen in manchen Primitivsprachen der grammatische Numerus und das Zahlwort engstens zusammen und können prinzipiell nicht voneinander unterschieden werden. Auf be-

merkenswerte Weise wird im Sumerischen und im Altägyptischen der Plural gebildet. So bedeutet im Sumerischen das Zahlwort 1 soviel wie „Mann", das Zahlwort 2 soviel wie „Frau", das Zahlwort 3 soviel wie „die Mehrheit". Das Zahlzeichen für 3 bildet sowohl im Sumerischen wie auch im Altägyptischen allgemein das Pluralzeichen.

Auf andere Weise kann eine Zählung durchgeführt werden, indem man ein abstraktes Zahlwort neben das Gezählte stellt. Der Begriff der Zahl hängt dann ausschließlich am Zahlwort selbst. Dabei ist es, wie manche Sprachen zeigen, durchaus keine Selbstverständlichkeit, für die verschiedenen abzuzählenden Gegenstände jeweils dieselben Zahlwörter zu gebrauchen. Es gibt Völker, die z.B., wenn sie runde Gegenstände abzählen, andere Zahlwörter gebrauchen, als wenn sie längliche Gegenstände abzählen [Menninger; **1**, 41]. Reste dieses Phänomens finden sich auch heute noch, wenn wir von einem Joch Ochsen, einem Paar Schuhe, Zwillingen oder einem Duett sprechen. Ähnliche Beispiele liefert die Metrologie; so wurden früher die Eier in Mandeln (15 Stück) oder Stiegen (20 Stück) verkauft, aber niemand hätte damals 1 Mandel Ziegel gesagt. In anderen Sprachen, so im Chinesischen, Japanischen, Neupersischen, Türkischen usw. kommt es zur Ausbildung von bestimmten „Zählklassen", d.h. die Zahlwörter lassen sich mit den abzuzählenden Dingen nicht unmittelbar verbinden, es muß ein sog. Zählklassenwort zwischen das Zahlwort und dem Abzuzählenden eingeschoben werden; vergleiche z.B. unsere Wendungen „3 Stück Vieh", „3 Kopf Salat", „Stück" und „Kopf" sind quasi die jeweiligen Zählklassen [Menninger; **1**, 42, **2**, 54, 272], [Fettweis 2; 55 f.].

Ein weiterer Schritt ist es, wenn die jeweils verwendeten Zahlwörter unabhängig sind von der Art des Gezählten; das Gezählte ist dann beliebig austauschbar, man kommt mit nur einer Art von Zahlwörtern aus. Hier wiederum werden in vielen Sprachen die Zahlwörter bis zu einer bestimmten Zahl n als mit dem gezählten Gegenstand so verbunden betrachtet, daß sie wie Adjektive dekliniert werden. Im Griechischen, wie auch in den slawischen Sprachen, werden die Zahlwörter bis $n = 4$, im Lateinischen bis $n = 3$, im Litauischen bis $n = 9$ und im Sanskrit sogar bis $n = 19$ dekliniert [Hartner; 69]. Doch gibt es auch Sprachen, bei denen alle Zahlwörter indeklinabel sind, z.B. das Englische; es besteht dann keine direkte grammatische Verbindung mehr zwischen dem Zahlwort und dem Gezählten.

In manchen Primitivsprachen treten Zahlwörter nur für wenige Einheiten auf. Es gibt auch Völker, bei denen die Zahlwörter durch Gesten oder Namen von Körperteilen ausgedrückt werden [Hartner; 88–92]. Bei den so entstehenden Zahlreihen hat keine „Zahl" vor der anderen eine Vorrangstellung, es liegt kein Ordnungsprinzip zugrunde [Neugebauer 5; 84]. Andere Völker besitzen Zahlreihen, bei denen in der Sprache bei bestimmten Zahlen Einschnitte auftauchen; diese Einschnitte sind quasi Bündelungen von Einheiten. Das ist eine Grundlage für die Entwicklung eines Zahlensystems. So gibt es einen sumerischen Dialekt, in dem sprachlich ein Dreiersystem angedeutet ist; es bedeutet

3 vorüber		soviel wie 4
3 vorüber	und 1	soviel wie 5
3 vorüber	und 1 und 1	soviel wie 6
3, 3 und 1		soviel wie 7 .

Das klassische Sumerisch weist dagegen eine Fünferbasis auf, es bedeutet hier:

5 + 1 gleich 6
5 + 2 gleich 7
5 + 4 gleich 9

[Neugebauer 5; 85]. In unserer Sprache, die dem indogermanischen Sprachstamm angehört, hat das Zahlwort für 8 im Altindischen *astȧu*, im Griechischen ὀκτώ, im Indogermanischen *ok'tȯu* eine Dualendung. Vielleicht handelt es sich hier um die Verdoppelungsform eines sonst im Indogermanischen nicht mehr nachweisbaren Wortes für 4 [Hartner; 77]. Dann könnte „Neun", lateinisch *novem*, in diesem Vierer- bzw. Achtersystem die „neue Zahl" bedeuten. In diesem Zusammenhang ist es bemerkenswert, daß auch die altindische Karoṣthi-Schrift eine Gruppierung der Zahlzeichen bis 9 nach einem Vierersystem aufweist (s. S. 43 f.). Ferner hängt vielleicht unser Wort „fünf" mit dem Wort „Hand" zusammen und es ist nicht ausgeschlossen, daß „zehn", althochdeutsch *ze-han*, gotisch *tai-hun(d)* soviel wie „zwei Hände" bedeutet [Menninger; **1**, 142].

Nach **Neugebauer** [5; 85] kann man jedoch von einem Zahlensystem an sich erst dann sprechen, wenn auch die in der Zahlenreihe auftretenden Gruppenzeichen ihrerseits wieder laufend weitergezählt werden. In diesem Sinne liegt im südamerikanischen *Saraweka* (einer Arawakensprache) ein Fünfersystem zugrunde, es bedeutet das Zahlwort:

für 5 gleich Hand
für 10 gleich 2 Hände
für 25 gleich 5 Hände usw.

[Hartner; 77]. Auch reine Vierer- und Sechsersysteme treten in einigen Sprachen – wenn auch nur andeutungsweise – auf. Die meisten Zahlensysteme jedoch sind dezimal aufgebaut. Neben dem Dezimalsystem spielt aber auch das reine Zwanzigersystem eine bestimmte Rolle, so bei den Maya und Azteken (s. S. 38 f.). Ferner benützten es in Westeuropa sowohl die Basken wie auch die Kelten. Erst in historischer Zeit wurde hier das Zwanzigersystem vom Dezimalsystem abgelöst, Reste davon sind heute noch im Französischen erhalten (*quatre-vingts* = 80). Auch im Dänischen, also auf nichtkeltischem Gebiet, werden die Zahlen 50, 60, 70, 80, 90 durch Multiplikation von 20 (tyve) mit $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4 und $4\frac{1}{2}$ gebildet:

halvtredsindstyve = 50 (dritthalb mal zwanzig)
tresindstyve = 60 (dreimal zwanzig)
halvfjerdsindstyve = 70 (vierthalb mal zwanzig)
firsindstyve = 80 (viermal zwanzig)
halvfemsindstyve = 90 (fünfthalb mal zwanzig).

(*sind* bedeutet „mal").

Viele der bei den einzelnen Völkern vorkommenden Zahlwörter und Zahlzeichen gehen auf kombinierte Zahlensysteme zurück. So spielt im Sexagesimalsystem der Babylonier auch ein Zehnersystem eine Rolle (s. S. 26). Bei den Germanen weist die Sprache, abweichend vom Indogermanischen, ein duodezimales Element auf. So unterscheiden sich in allen germanischen Sprachen die Namen der Zahlwörter von 11 und 12 deutlich von

denen von 13–19. Unseren Wörtern elf und zwölf liegt die Wurzel *lif* zugrunde, was wohl verwandt ist mit griech. λείπειν, übriglassen. Gotisch bedeutet *ainlif* 11 und *twalif* 12. Jedoch sind elf und zwölf damit keinesfalls Individualwörter, sondern sie sind nach dem Dezimalsystem konstruiert; nach ihnen aber liegt ein Einschnitt vor [Hartner; 79].

Die Bildung der Vielfachen von Zehnern, Zwanzigern, Hunderten usw. erfolgt im Deutschen gewöhnlich multiplikativ: 2 x 10, 3 x 10 usw. Die Schlußsilbe -zig hängt mit gotisch *tigus* (= Zehner, Zehnheit) zusammen [Menninger; **1**, 162].

Hundert, griechisch:		*ἑκατόν*
	lateinisch:	*centum*
	althochdeutsch:	*zehenzog*

bedeutet also soviel wie Zehner-Gezehnt. Die zwischen den Zehnern liegenden Zahlen werden gewöhnlich additiv gebildet. Die Subtraktion (im Sumerischen s. S. 144, im Lateinischen z.B. *duodeviginti* = 2 von zwanzig = 18) wird im Deutschen bei der Bildung von Zahlwörtern nicht benutzt.

Wissenschaftliche Betrachtungen über Zahlensysteme gehen bis auf die Griechen zurück. Sie betonten die Bedeutung der Zehn, so z.B. **Philolaos** um 400 v. Chr. [Diels; 44 B 1] und brachten sie mit der Tatsache in Zusammenhang, daß 10 die Summe der ersten vier Zahlen ist. **Aristoteles** erwähnt erstmals, daß vermutlich alle Menschen mit ihren zehn Fingern zu zählen angefangen haben [Probl. XV, 3 = 910b 23 ff., bes. 38/39]. **Theon von Alexandria** hebt in seinem Kommentar zu **Ptolemaios** hervor, daß es günstig ist, als Einheit für den Radius die Zahl 60 zu verwenden, weil sie durch verhältnismäßig viele Zahlen teilbar ist [2, 450]. Dieses Argument findet sich auch bei **Stevin** bei der Darstellung des in den astronomischen Rechnungen üblichen Sexagesimalsystems [3; 31] = [4; 26] und in ähnlichem Zusammenhang bei **Wallis** [4; 30].

Im 17. Jahrhundert rückt die Frage nach Zahlensystemen mit einer Basis $\neq 10$ und $\neq 60$ ins allgemeine Interesse. So hat sich **Harriot** mit Zweier-, Dreier-, Vierer-, Fünfer- und höheren Systemen beschäftigt; dies bezeugt der bisher nicht edierte Nachlaß [Shirley]. **Harriot** gilt heute als der erste Entdecker des dyadischen Systems (Dyadik) [Zacher; 21]. Die entsprechenden Manuskripte **Harriots** sind leider undatiert. **Harriot** führt vor, wie man Dezimalzahlen in dyadische Zahlen verwandelt *(conversio)* und umgekehrt *(reductio)*, z.B. im Manuskript British Museum Add. MSS (Egremont) 6786, fol. 346^{v}, Faksimile bei Shirley:

reductio	*conversio*		
1101101	109		
	64	7	
64	45		
32	32	6	1101101
8	13		
4	8	4	
1	5		
109	4	3	
	1	1	

Anschließend führt **Harriot** Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division im dyadischen System vor.

Auch **Napier**, ein Zeitgenosse **Harriots**, beschäftigt sich in dem seiner *Rabdologia* angefügten Werk *Arithmetica localis* [3; 115–154] mit einem dyadischen Zahlensystem. Ausgehend von einer Tabelle der Zweierpotenzen, die er als *numeri locales* oder

Tabelle 1: Potenzen von 2 [Napier 3; 116 f.].

a)	32 768
p)	16 384
o)	8 192
n)	4 096
m)	2 048
l)	1 024
k)	512
i)	256
h)	128
g)	64
f)	32
e)	16
d)	8
c)	4
b)	2
a)	1

numeri literales bezeichnet, rechnet **Napier** z.B. die Jahreszahl 1611 in sein dyadisches System um: 1611 = 1024 + 512 + 64 + 8 + 2 + 1 = l k g d b a [3; 118]. In einer *Tabula reductionis* gibt **Napier** die den Dezimalzahlen entsprechenden dyadischen Zahlen an [3; 126 f.] und führt, wie **Harriot**, die einzelnen Rechenoperationen vor. 1623 erscheint in **F. Bacons** *De dignitate et augmentis scientiarum* ein binäres Buchstabensystem der folgenden Art [148]:

A	B	C	D	E	F
aaaaa	aaaab	aaaba	aaabb	aabaa	aabab
G	H	I	K	L	M
aabba	aabbb	abaaa	abaab	ababa	ababb
N	O	P	Q	R	S
abbaa	abbab	abbba	abbbb	baaaa	baaab
T	V	W	X	Y	Z
baaba	baabb	babaa	babab	babba	babbb

Pascal bemerkt 1654 in der Arbeit *De numeris multiplicibus* (publiziert 1665), daß das Dezimalsystem nicht auf einer natürlichen Notwendigkeit, sondern auf einer Konvention beruhe und daß man jede beliebige Zahl als Basis für ein System benützen könne [1; **3**, 316 f.]. Anschließend untersucht er Teilbarkeitskriterien im Dezimalsystem und im Duodezimalsystem und kommt zu dem Schluß, daß während im Dezimalsystem eine Zahl dann durch 9 teilbar ist, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist, im Duodezimalsystem dasselbe Gesetz für die Zahl 11 gilt. 1670 bespricht der gelehrte Bischof **Juan Caramuel y Lobkowitz** Zahlensysteme mit den Basen 2 bis 10, 12 und 60 [LV ff., 91]. Für das Rechnen im Zwölfersystem führt er die Zeichen p für 10 und n für 11 ein, bei denen offensichtlich an eine Verschmelzung der Ziffern zu denken ist:

$$10 \rightarrow 1^0 \rightarrow \mathrm{p} \qquad 11 \rightarrow \mathrm{n}\,.$$

Wie **Pascal** so zweifelt auch **E. Weigel** in seiner *Tetractys*, die zwar erst 1673 publiziert, aber sicher schon viel früher ausgearbeitet worden ist, an der „Natürlichkeit" der Zahl 10 und sieht das von ihm entwickelte Vierersystem als die *höchste Vereinfachung sowohl der Arithmetik wie auch der Philosophie* an [Zacher; 31 f.].

Auch **Leibniz**, der früher vielfach als der Erstentdecker des dyadischen Zahlensystems betrachtet worden ist [Shirley; 453], hat sich mit den verschiedenen Zahlensystemen auseinandergesetzt, so z.B. mit dem Zwölfer- und dem Sechzehnersystem [Zacher; 11, 13, 17 f.]. **Leibniz'** Ideen für ein dyadisches Zahlensystem fallen – nach **J.E. Hofmann** – wahrscheinlich in die Zeit 1672–1676 (Pariser Aufenthalt). Vielleicht gingen für **Leibniz** die Anregungen zur Erschaffung der Dyadik von **Weigels** Vierersystem [Zacher; 9] bzw. vom Werk des **Caramuel y Lobkowitz** [Leibniz 5; 15] aus. Die ersten datierten Abhandlungen von **Leibniz** zur Dyadik stammen, wie aus dem Nachlaß hervorgeht, aus dem Jahre 1679: *De progressione dyadica* und *Summum calculi analytici fastigium* [Zacher; 9, 218–224]. Zum Neujahr 1697 teilte **Leibniz** dem Herzog **Rudolf August von Wolfenbüttel** brieflich seine Erfindung mit und legte ihm zugleich einen Entwurf für eine entsprechende Medaille vor, die allerdings nicht geprägt worden ist [Zacher; 34]. Bei **Leibniz** kommt dem Gedanken, die Dyadik als Bild der biblischen Schöpfung zu betrachten, erhebliche Bedeutung zu. Gedruckt erschienen **Leibniz'** Gedanken zur Dyadik zu seinen Lebzeiten nur in einem einzigen Aufsatz von 1705 (*Explication de l'arithmétique binaire* [1; **7**, 223–227] = [Zacher; 293–301]). Aus diesem geht hervor, daß **Leibniz** sein dyadisches System als identisch mit dem System der Hexagramme im chinesischen *I Ching* betrachtet hat. Das *I Ching* spielt ab 1698 im Briefwechsel zwischen **Leibniz** und dem Jesuitenpater **Joachim Bouvet**, der damals Missionar in China war, eine gewisse Rolle. Das *I Ching*, das *Buch der Wandlungen*, ist wohl ein Orakelbuch, das vielleicht aus dem 8. bis 7. Jahrhundert v. Chr. stammt; schriftlich erwähnt wird es erstmals im 3. Jh. v. Chr. [N; **2**, 307]. Das *I Ching* enthält Strichkombinationen von unterbrochenen und durchgezogenen Linien. Die Anzahl der Linien beträgt in einem Fall 3, es gibt dann 8 Kombinationen von unterbrochenen und durchgezogenen Linien, im anderen Fall 6 (Hexagramme), es gibt dann 64 Kombinationen; diese werden *Kua* genannt. Bereits in früher chinesischer Zeit sind für die Strichkombinationen im *I Ching* verschiedene Interpretationen gegeben worden, u.a.

astronomische und alchemistische [N; 2, 329–335]. Im Jahre 1701 entdeckte **Bouvet**, daß man, wenn man die durchgezogenen Linien in den Strichkombinationen gleich 1 und die unterbrochenen Linien gleich 0 setzt, die Hexagramme des *I Ching* mit dem dyadischen Zahlensystem identifizieren kann [Zacher; 110 f.]. Es entspricht dann

z.B. = 101 001 = 41. Allerdings sind im *I Ching* die Strichkombinationen

nicht in der Reihenfolge der natürlichen Zahlen im dyadischen System aufgeführt. **Leibniz** erhielt den Brief von **Bouvet**, in dem dieser seine Entdeckungen mitteilt, am 1.4.1703; als eine Reaktion darauf verfaßte **Leibniz** u.a. den bereits erwähnten, 1705 im Druck erschienenen Aufsatz *Explication de l'arithmétique binaire* [Zacher; 116].

Später diskutiert **Buffon**, nachdem er Zahlen in verschiedenen Systemen ausgedrückt hat, die Vor- und Nachteile der verschiedenen Zahlensysteme, so z.B. des Zwölfersystems, des Binärsystems, des Sexagesimalsystems etc. [70–82 = Kap. 26,27].

Eine Darstellung des ganzen Gebietes der Zahlensystem gibt **W. Ahrens** [**1**, 24–38, 2, 319–324], speziell zur Geschichte des binären Zahlensystems siehe **Zacher**.

1.2.1.2 Zahlwörter für große Zahlen

Will man große Zahlen ausdrücken, so kann man entweder immer neue Namen für die höheren Einheiten bilden oder aber man zählt die höheren Einheiten selbst wieder ab. Diesen zweiten Weg gingen die Griechen. Bei ihnen ist die höhere Einheit, die selbst wieder abgezählt wird, gewöhnlich die *Myriade* (μυριάς) = 10^4. **Archimedes** [1; 2, 236 ff.] faßt die Zahlen bis 10^8 zu einer *Oktade* zusammen; 10^8 wird als Einheit einer neuen Oktade genommen, die also bis 10^{16} reicht; die dritte Oktade geht bis 10^{24}, usw. Im ganzen stellt **Archimedes** 10^8 solcher Oktaden auf; er nennt die Reihe dieser Zahlen die erste Periode. Hier beginnt eine zweite Periode, der noch andere folgen können. Damit kann die Menge der Sandkörner, die eine Kugel vom Radius der Fixsternkugel enthalten kann, nach oben abgeschätzt werden: sie ist höchstens 10 000 000 Einheiten der achten Oktade in der ersten Periode, also 10^{71}. Ähnliche Gruppierungen, aber jetzt zu Myriaden = 10^4, nimmt **Apollonios von Perge** nach dem Zeugnis von **Pappos** vor [1; 2 ff.].

Die Römer drücken große Zahlen durch Vielfache von *mille* = 1 000 aus, so:

centum milia	für 10^5
decies centena milia	für 10^6 .

Bei den Chinesen [N; **3**, 87 f.] erscheinen um 190 n. Chr. Namen für Zehnerpotenzen, die über 10^4 hinausgehen. Diese Namen werden allerdings durch verschiedene Zahlenwerte interpretiert:

1. als Potenzen von $(10^4)^{2^n}$ $(n = 0, 1, ...)$,
2. als Potenzen von $10^{4 \cdot n}$ $(n = 1, 2, ...)$,
3. als Potenzen von 10^{4+n} $(n = 0, 1, ...)$:

	1.	2.	3.
wan	10^4	10^4	10^4
i	10^8	10^8	10^5
chao	10^{16}	10^{12}	10^6
ching	10^{32}	10^{16}	10^7
⋮	⋮	⋮	⋮
tsai		10^{44}	

Bei den Indern [DS; **1**, 10 ff.] treten Bezeichnungen für große Zahlen schon in sehr früher Zeit auf. Im *Lalitavistara* (1. Jh. v. Chr.) bedeutet 1 *koṭi* = 10^7, 100 *koṭis* sind 1 *ayuta*, 100 *ayuta* = 1 *niyuta*, . . ., 1 *tallakṣana* = $10^7 \cdot 10^{23}$. **Āryabhaṭa I** (499 n. Chr.) benennt in Gaṇ. 2 die Potenzen von 10^0 bis 10^9 ebenfalls mit immer neuen Einzelnamen. Mit teilweise anderen Namen erscheint diese Reihe bei **Mahāvīra** [7 f.] bis 10^{23} erweitert, bei **Śrīdhara** [DS; **1**, 13] und **Bhāskara II** [1; 4, Nr. 10–11] bis 10^{17} (siehe Tabelle 2).

Für die Araber sind die Zahlen 10^4 und 10^5 jeweils Vielfache von 1000 = *'alf*, das – als neue Einheit aufgefaßt – selbst wieder durch Wiederholung abgezählt wird:

'alf–'alf für 10^6
'alf–'alf–'alf für 10^9 usw.,

vgl. **al-Kāšī** [13 f.]. Ferner existiert im Arabischen das Wort *lakk* für 10^5, das indischen Ursprungs ist, vgl. *lakṣa* für 10^5 bei **Mahāvīra**, **Śrīdhara** und **Bhāskara II.**

In Byzanz tritt um 1450 auch das Wort *Legion* für 10^9 auf [Heiberg 1; 168 f.]. In russischen Handschriften des 17. Jhs. kommt dieses Wort in verschiedenen Bedeutungen vor, einmal für 10^5 („kleine Zählung"), einmal für 10^{12} („große Zählung") [Juškevič 1; 361].

Auch im Abendland werden manchmal die höheren Einheiten mit je einem Eigennamen versehen. So stehen in der *Deutschen Algebra* des Cod. Dresden C 80 auf fol. 378^v folgende Namen: *legio* für 10^4, *cuneus* für 10^5, *agmen* für 10^6, *caterna* für 10^7, *phalanx* für 10^8, *tunna* für 10^9; sie sind wohl von der Hand des **Johannes Widman** geschrieben.

Gleichzeitig bezeichnet man Potenzen von 10^3 auch durch Wiederholungen von Tausend, wie z.B. *mille milium* im Cod. Cambridge Un. Lib. Ms. I i 6. 5, 105^v [al-Ḫwārizmī 2; 15 ff.], *milia milia milium* bei **Leonardo von Pisa** [1; **1**, 4], *duysentich-duysent* im anonymen niederländischen Rechenbuch von 1508 [Bockstaele; 68]. **Simon Stevin** sagt noch 1585 für 75 687 130 789 276 [2a; 6]: *septante cinc mille mille mille six cents huictantesept mille mille mille, cent trente mille mille, sept cens huictanteneuf mille, deux cens septante six.*

Jedoch waren schon früher auch Bezeichnungen für höhere Einheiten aufgetaucht. Das Wort *Million* ist offenbar italienischen Ursprungs. Nach **Du Cange** [**5**, 389] soll es schon um 1250 gebräuchlich gewesen sein. Im 14. Jh. liest man es bei **Marco Polo** [**2**,

Tabelle 2: Indische Namen für die Potenzen von 10, vgl. [Elfering; 48 ff.].

	Āryabhaṭa I	Mahāvīra	Śrīdhara	Bhāskara II
10^0	*eka*	*eka*	*eka*	*eka*
10^1	*daśa*	*daśa*	*daśa*	*daśa*
10^2	*śata*	*śata*	*śata*	*śata*
10^3	*sahasra*	*sahasra*	*sahasra*	*sahasra*
10^4	*ayuta*	*daśa-sahasra*	*ayuta*	*ayuta*
10^5	*niyuta*	*lakṣa*	*lakṣa*	*lakṣa*
10^6	*prayuta*	*daśa-lakṣa*	*prayuta*	*prayuta*
10^7	*koṭi*	*koṭi*	*koṭi*	*koṭi*
10^8	*arbuda*	*daśa-koṭi*	*arbuda*	*arbuda*
10^9	*vṛnda*	*śata-koṭi*	*abja*	*abja oder padma*
10^{10}		*arbuda*	*kharva*	*kharva*
10^{11}		*nyarbuda*	*nikharva*	*nikharva*
10^{12}		*kharva*	*mahā-saroja*	*mahā-padma*
10^{13}		*mahā-khavra*	*śaṅku*	*śaṅku*
10^{14}		*padma*	*saritā-pati*	*jaladhi oder samudra*
10^{15}		*mahā-padma*	*antya*	*antya*
10^{16}		*kṣoni*	*madhya*	*madhya*
10^{17}		*mahā-kṣoni*	*parārdha*	*parādha*
10^{18}		*śaṅkha*		
10^{19}		*mahā-śaṅkha*		
10^{20}		*kṣityā*		
10^{21}		*mahā-kṣityā*		
10^{22}		*kṣobha*		
10^{23}		*mahā-kṣobha*		

199], im 15. Jh. in der Treviso-Arithmetik [2^v], bei **Borghi** [5^v] und bei **Luca Pacioli** [a; 19^v]; dieser drückt auch Potenzen von 10^6 einfach durch Wiederholungen aus, z.B. *millione di millioni*. Im Rechenbuch des **Jehan Adam** (1475) [Thorndike; 156] finden sich statt der Wiederholungen die Worte *bymillion* und *trimillion*.

Chuquet verwendet 1484 für $(10^6)^n$ die Worte *million, byllion, tryllion, quadrillion, . . ., nonyllion* (für $(10^6)^9$) [1; 594], ebenso **La Roche** [7^r]. **Girard** setzt 1 *Trillion* = 1 *Billion Billionen* = 10^{24} [2; A 1^r], doch hat sich das nicht durchgesetzt.

Das Wort *Million* erscheint 1508 im anonymen niederländischen Rechenbuch [Bockstaele; 68], in Deutschland bei **Christoph Rudolff** [2; a 3^{r}]. **Clavius** bemerkt 1585 [2; 11]: *Wenn wir nun gar nach der Sitte der Italiener die millena millia Millionen nennen wollen, werden wir mit weniger Worten und vielleicht deutlicher, jede beliebige gegebene Zahl ausdrücken. . .* In seinem *Cursus mathematicus* setzt **Kaspar Schott** 1677 [23] bei höheren Zahlen *milliones* mehrfach, er führt aber auch die Worte *Bimilliones* für *milliones millionum, Trimilliones* für 10^{18} usw. bis *Octimilliones* ein. Diese Bezeichnungen nimmt **J. Chr. Sturm** in seiner *Mathesis enucleata* 1689 auf [1; 6]. Auch **Leibniz** empfiehlt die Worte *Billion* für 10^{12}, *Trillion* für 10^{18} usw. bis zu *Nonillion* für 10^{54}, *denn weiter braucht man wohl beim Gebrauch der Zahlen nicht zu gehen* [2; **5**, 143]. Durch die weitverbreiteten Lehr- und Handbücher des Freiherrn **Chr. von Wolff** (z.B. [3; Sp. 903], Stichwort *Millio*) sind dann diese Bezeichnungen allgemein üblich geworden.

Die *Billion* bedeutet in Deutschland, England usw. 10^{12}, in den USA und in Frankreich dagegen 10^{9}. Das Wort *Milliarde* hat bei **Peletier** 1554 noch die Bedeutung *million de millions* [1; 15], nimmt aber schon 1558 bei **Trenchant** den Wert 10^{9} an [1; 14]. In Deutschland kommt *Milliarde* erst nach dem Frankfurter Frieden 1871 (5 *Milliarden Francs* Kriegskostenentschädigung) in den allgemeinen Sprachgebrauch.

1.2.1.3 Die Null

In China bezeichnet **Ch'in Chiu-shao** (13. Jh.) die Null entweder durch *k'ung* (= leer) oder durch *wu* (= nichts) [Libbrecht; 74].

In den indischen Texten wird die Null durch Worte ausgedrückt, die die Leere bedeuten können, so durch

śūnya leer, abweisend
in **Varāhamihiras** Pañcasiddhāntikā (z.B. in XVIII, 35) (ca. 505 n.Chr.),
bei **Brahmagupta** (z.B. in seinem *Brāhmasphuṭasiddhānta* XVIII, 31),
im *Bakhshālī*-Manuskript [25],
bei **Bhāskara** II (*Līlāvatī* § 44, 45);

kha Loch, Öffnung, Höhle, Luft, Himmel, Leere
bei **Āryabhaṭa** I [Elfering; 33 ff.],
bei **Mahāvīra** [6],
bei **Bhāskara** II (*Līlāvatī* § 44, 45).

Ferner werden die Wortzahlen (s. S. 40 f.) gebraucht, die Synonyme für Raum, Himmel usw. sind, so

ambara Himmel, Luft, Umfang
ākāśa freier Raum, Leere, Himmel, Äther
ananta Himmel, kein Ende habend (z.B. bei **Mahāvīra** [287])

usw., s. [DS; **1**, 54] und [BSS; 173].

Die **Araber** bezeichnen die Null durch *al-ṣifr*, was wörtlich – vgl. bei den Indern – das „Leersein", die „Leere" bedeutet, so *al-ṣifr* bei **Ǧābir ibn Ḥaiyān**, zwischen 760 und 770; siehe [Sezgin; 220 ff.] und [Ruska 3; 263 f.]; ferner s. S. 52, **al-Uqlīdisī** [2; 42, 358], **Kūšyār ibn Labbān** [9, 46, 108], **Ṭabarī** [1; 5 und 7].

Der byzantinische Mönch **Maximos Planudes** verwendet in Anlehnung an das Arabische τζίφρα [1; 1].

Im Abendland erscheint das arabische *al-ṣifr* latinisiert als:

ciffra	in einem Algorismus aus dem 12. Jh. [Curtze 5; 18],
cifra	in einer lateinischen Übersetzung der astronomischen Tafeln **al-Ḫwārizmīs**, ebenfalls aus dem 12. Jh. [al-Ḫwārizmī 6; 10], im Codex Salem [M. Cantor 1; 2],
zephirum	bei **Leonardo von Pisa** [1; **1**, 2],
sciffula	bei **Jordanus Nemorarius** [Eneström 3; 26].

Bei **Johannes Hispalensis** (12. Jh.) heißt die Null *circulus* [29], eine Bezeichnungsweise, die auch in dem oben genannten Algorismus [Curtze 5; 19] vorkommt, **Radulph von Laon** schreibt *sipos* und *rotula* [91]. Im 13. Jh. sagt Meister **Gernardus** in seinem Algorismus [1; 293]: *figura talis .0., quae cifra dicitur sive circulus sive figura nichili*; ähnlich drückt sich auch **Johannes de Sacro Bosco** (13. Jh.) aus [2]: *O dicitur teca, circulus, vel cyfra, vel figura nichili.* Nach **Curtze** [5; 9] bedeutet *tecca* eigentlich das kreisrunde Brandmal, das man Dieben und Räubern auf die Stirn oder in die Wangen einzubrennen pflegte. **Johannes de Sacro Bosco** (bzw. dessen Kommentator **Petrus de Dacia**) ist die eigentliche Bedeutung von *cifra* als „das Leere" nicht mehr bekannt; er erklärt es als aus *circumfacta vel circumferenda* entstanden [26]. **Tartaglia** zählt 1556 folgende, zu seiner Zeit geltende Bezeichnungen für Null auf [1; **1**, 5^{v}]: *teccha, circolo, zerro, nulla.*

Aus *cifra* entsteht in Frankreich *chiffre*, z.B. **Chuquet** 1484 [1; 593]: *chiffre ou nulle ou figure de nulle valeur* (ebenso **La Roche** [7^{r}]), in England im 15. Jh. *cifre* [Steele; 4], und *cyphar* 1542 bei **Recorde** [1; C 3^{v}], in Italien *zevero* bei **Jacobus de Florentia** (um 1307) [Boncompagni 2; 673], *cevero* in der Arithmetik des **Giovanni de Danti** aus Arezzo (um 1370) [D. E. Smith 6; **2**, 71], *cefiro* bei **Borghi** (1484) [2^{r}]. Aus *zefiro* wird *zero*, das in Frankreich 1485 [Jordan; 191], in Italien 1494 bei **Luca Pacioli** [a; 19^{r}], 1518 bei **F. Calandri** [2; b 1^{r}] usw. nachweisbar ist.

In Frankreich bedeutet *chiffre* bereits im 15. Jh. nicht nur die Null, es hat auch schon den erweiterten Sinn für die Bezeichnung aller Zahlzeichen 0, 1, 2, ..., 9 angenommen [Jordan; 191]. Bei **Huswirt** (1501) wird *cifra* noch als Null gebraucht, während es auch als „Ziffer" im modernen Sinn erscheint [7, 23], ebenso bei **Köbel** [1; A 4^{v}]: *die ... figurenn (die der gemain man Zyfer nendt), newn ... figuren ... vnd ain Zyffer.* Bei **Rudolff** [2; a 2^{v}] hat *ziffer* nur noch die erweiterte Bedeutung Zahl bzw. Stelle. *Cifra* bzw. *Ziffer* speziell für Null ist aber noch lange gebräuchlich geblieben, so bei **Metius** 1611 [1], **Cavalieri** 1643 [3, Nr. XXIII], **Hérigone** 1644 [2, 2] usw. 1783 erscheint *cifra* für Null in einer lateinischen Abhandlung **Eulers** [10; 402]. 1789 sagt **Meinert** in seinem *Lehrbuch der Mathematik* historisch getreu [**1**, 15]: *Das Zeichen 0 heißt nach der*

Abstammung Ziffer. Selbst **Gauß** nennt 1799 noch die Null *cifra* [7; 8, Z. 20]. In England ist diese Auffassung von *cipher* gleich Null bis heute nachweisbar: *he is a mere cipher.*

Das Wort *nulle* bzw. *nulla* erscheint fast gleichzeitig in Frankreich bei **Chuquet** [1; 593] (ebenso bei **La Roche** [7r]), in Italien, z.B. 1478 in der Treviso-Arithmetik [1v] (vgl. auch [D. E. Smith 5; 316]), 1484 bei **Borghi** [2r], 1494 bei **Luca Pacioli** [a; 19r], ferner in einem deutschen Algorismus von 1488 [Rath 2; 244]. Es fehlt im Bamberger Rechenbuch von 1483 sowie bei **Widman** und wird erst wieder in Deutschland in den Rechenbüchern des 16. Jhs. benützt, so:

nulla bei **Böschensteyn** 1514 [A 2r], **Grammateus** 1518 [1; A 2v], **Apian** 1527 [A 3r], **Rudolff** 1550 [2; a 2v], **Gehrl** 1577 [2], usw.

In den deutschen Schriften behält *Nulla* verhältnismäßig lange seine lateinische Endung. Von **Schwenter** wird es 1636 sonderbarerweise nicht weiblich gebraucht [2; 44, 52]: *ein Nulla.* Im 18. Jh. fängt man an, *eine Nulle* zu sagen, z.B. **Chr. von Wolff** 1716 [3; Sp. 1486] und **Euler** 1770 [5; 2. Teil, 2. Abschn., Kap. 13, § 205, Nr. IX]. In der Bearbeitung des **Wolff**schen Lexikons von 1747 heißt es endlich kurz „Null", (nach [Schirmer 2; 48]). **Karsten** 1767 schreibt ebenfalls nur „die . . . Null" [1, 12].

1.2.1.4 Die Beschreibung der Zahlen im Positionssystem

Zur Beschreibung der Zahlen im Positionssystem dienen uns heute die Ausdrücke Einer, Zehner, Hunderter, usw., sowie das Wort Stelle. Für die Anzahl der Einheiten der jeweiligen Stelle haben wir jedoch kein ausgesprochenes Fachwort mehr.

Bei den Griechen nennt **Apollonios** diese Anzahl πυθμήν [Pappos 1; 2 ff.]. So hat etwa τ (= 300) den *Pythmen* γ (= 3); den gleichen *Pythmen* hat λ (= 30). Um etwa die Zahlen $3 \cdot 30 \cdot 400$ zu multiplizieren, multipliziert **Apollonios** zuerst die *Pythmenes* $3 \cdot 3 \cdot 4$ und dann die zugehörigen Potenzen von 10.

Der Inder **Brahmagupta** verwendet in seinem *Brāhmasphuṭasiddhānta* in XII, Vers 63, in dem das Quadrieren einer Zahl beschrieben wird, den Ausdruck *rāsér ūnam*, was wörtlich und dem Sinn nach „der kleinere Teil einer vorgegebenen Zahl" bedeutet. Bei **Datta-Singh** [DS; **1**, 156] wird dieser Ausdruck als *the digit in the lowest place* interpretiert (ebenso bei **Saidan** [2; 107]). Diese Interpretation ist zwar möglich, aber durch aus nicht zwingend und daher zweifelhaft. Die Dezimalstelle allgemein nennt **Mahāvira** [13] *sthāna*, wörtlich „das Stehen, der Platz, die Stelle", vgl. [DS; **1**, 161].

In der arabischen Arithmetik bemerkt **al-Ḫwārizmī** in seiner Algebra, daß zur Darstellung aller Zahlen nur 12 Wörter benötigt werden, nämlich eins, zwei, –, neun, zehn, hundert und tausend [Ruska 2; 71]: *Und ich fand die Gesamtheit dessen, was von den Zahlen ausgesprochen wird (d.i. wofür es besondere Zahlwörter gibt), was über die Eins hinausgeht bis zur Zehn, fortschreitend um den Betrag der Eins; dann wird die Zehn verdoppelt und verdreifacht wie es getan wurde mit der Eins, so daß daraus die Zwanzig und Dreißig entstehen bis zur Vollendung der Hundert; hierauf wird die Hundert verdoppelt und verdreifacht, wie es getan wurde mit der Eins und mit der Zehn bis zu*

Tausend usw.; dann wird ebenso wiederholt die Tausend bei jedem ᶜaqd bis zum Äußersten des Bereichs der Zahl."

Al-Ḫwārizmī verwendet *ᶜaqd*, wörtlich Knoten, auch noch bei den Stellenangaben bei der Multiplikation; **Ruska** [2; 79 f.] übersetzt *ᶜaqd* mit „Glied, Gliedzahl". Im 10. Jh. bezeichnen die Verfasser einer Enzyklopädie, die sich selbst **Iḫwān al-Ṣafā'** nannten [Sezgin; 348 f.], die einzelnen Stellen einer Zahl als *marātib*, wörtlich „Rangordnungen": *„Und wisse, o Bruder, daß die ganze Zahl abgestuft wird in vier Stufen (marātib) nach Einern, Zehnern, Hundertern und Tausendern."* [Ruska 2; 76].

Al-Uqlīdisī schreibt, daß es Einer, Zehner, Hunderter und Tausender gibt [2; 186]: *Thus when we say units we mean (something) between one and nine; after that units are over, and ten comes out like one. . . We add up ten to until we reach 90. . . Tens are now over and we say one hundred. . .* **Kūšyār ibn Labbān** führt folgende Reihe auf [9]:

'āḥād	Einer,
ᶜašarāt	Zehner,
mi'īn	Hunderter,
'ulūf	Tausender,
ᶜašarāt 'ulūf	Zehntausender,
mi'īn 'ulūf	Hunderttausender,
⋮	

usw. bis 10^8.

Die Stelle allgemein nennt **al-Uqlīdisī** sowohl *manzila* (Pl. *manāzil*) wie auch *martaba* (Pl. *marātib*) [2; 41, 357], **Kūšyār** [9; 46 f.] *martaba* sowie *rutba*, was wörtlich alles soviel wie Rang, Stufe bedeutet.

In den lateinischen Darstellungen des Mittelalters verwendet man, um das von den Arabern übernommene neue dezimale Positionssystem zu beschreiben, eine komplizierte, wohl auf dem Arabischen fußende Fachsprache. **Gerbert** [2; 7 f.] unterscheidet um 980 n. Chr. bei den Zahlen *digiti* (= einstellige Zahlen), *articuli* (= Zehnerzahlen, n · 10) und *minuta* (= Brüche). In einem etwa aus derselben Zeit (10./11. Jh.) stammenden Kommentar zu **Gerbert** findet man zwei Bezeichnungsweisen [Gerbert 2; 251 ff.]:

1. *singulares* für Einer,
   deceni für Zehner,
   centeni für Hunderter,
   milleni für Tausender,
   usw.

   sie wird vor allem bei der Bezeichnung der Spalten auf dem Rechenbrett benutzt (vgl. auch [Gerbert 2; 200]);

2. *digiti* = Zahlen 1, 2, ..., 9, wörtlich: Finger⟨zahlen⟩,
   articuli = Zehner, 10, 20, ..., 90, wörtlich: Glied⟨zahlen⟩, Knöchel, Gelenk,
   numeri compositi = aus *digiti* und *articuli* zusammengesetzte Zahlen wie 11, 12, ..., 19, 21, ...,

sie hat ihren Ursprung wohl im Fingerrechnen (s.S. 49), das z.B. der Lehrer **Gerberts, Abbo von Fleury** mit eben diesen Termini beschreibt.

Robert von Chester verwendet in seiner Bearbeitung des **al-Ḫwārizimī** nicht *articulus*, sondern *nodus* (= Gelenk, Knoten) [al-Ḫwārizimī 4; 90]. Auch bei **Leonardo von Pisa** kommt *nodus* einmal vor [1; **1**, 5] und zwar bei der Beschreibung des Fingerrechnens. **Ruska** [2; 80] vertritt die Meinung, daß, wer *articulus* bzw. *nodus* verwendet hat, das arabische *ʿaqd* vor sich gehabt hat, während, wer *unitates* (bzw. *singulares*) geschrieben hat, *ʾāḥād* übersetzt hat.

Die Bezeichnung der Zahlen durch *digiti, articuli, numeri compositi* ist im Mittelalter weit verbreitet, sie steht z.B. im Codex Salem aus dem 12. Jh. [M. Cantor 1; 2]: bei Pseudo-Boetius [Boetius; 395 ff.], bei **Johannes Hispalensis** [25 f.], bei **Johannes de Sacro Bosco** [1].

Johannes Hispalensis beschreibt ferner, daß die *digiti* den ersten *limes* bilden, die Zehner den zweiten *limes*, die Hunderter den dritten *limes*, die Tausender den vierten *limes* usw.; an anderer Stelle [133] verwendet er auch *limes* als Synonym für *articulus*. Dies entspricht dann der späteren Definition von *articulus* = eine durch 10 teilbare Zahl. In diesem Sinn von *articulus* steht:
bei **Beldomandi** 1483 [1; 2^r]: *digiti, numerus articulus*,
bei **Borghi** [2^v]: *numero simplice, numero articolo, numero articolo ecomposito.*

Chr. von Wolff schreibt 1716: *Digiti, die Finger-Zahlen* [3; Sp. 532]. *Articulus, Wird eine Zahl genennet, die sich durch zehen dividiren lässet . . .* [3; Sp. 182].

Articulus erscheint sogar noch in **Klügels** Mathematischem Wörterbuch 1803 [2; **1**, 220]. An das Wort *digiti* erinnert noch heute engl. *digit* = Finger, Zahlen unter 10.

Gleichzeitig waren bereits während des ganzen Mittelalters die Fachwörter unitates (bzw. singulares), deceni, centeni, milleni, usw. üblich, z.B. bei **Leonardo von Pisa** [1; **1**, 21].

Es schreiben:

Chuquet [1; 593] und **La Roche** [7^r]	*primes*	*secondes*	*tierces*	*quartes*
Pellos [4^r]	*numbre simple*	*desenal*	*centenal*	*milhiers*
Tartaglia [1; **1**, 6^r]	*digito = numero*	*decene*	*centenara*	*millia*
Buteo [8 f.]	*monadici = digiti*	*decades = articuli*		

In den deutschen Rechenbüchern benützt **Harsdörffer** [2. Teil, 32]:
einzehlich = *Monadici*
Zehner = *Decadici*

Chr. von Wolff verwendet 1728 dann die heute übliche Bezeichnungsweise *Einer, Zehner, Hunderte, Tausende* [4; 18], ebenso 1765 **Pescheck** [2; 9, 12] usw.

Die Stelle einer Zahl heißt in den ältesten lateinischen Schriften, die das indische Rechnen ins Abendland brachten, gewöhnlich *differentia* oder *locus*, so bei **Johannes Hispalensis** [27 f.], im Codex Salem [M. Cantor 1; 2], **Johannes de Sacro Bosco** [1 f.], **al-Ḫwārizmī** [2; 11]. Gelegentlich kommen auch *mansio, ordo, species, statio* und *limes* vor [al-Ḫwārizmī 2; 45]; **Leonardo von Pisa** verwendet *gradus* [1; **1**, 2]. Später tritt entsprechend im Italienischen *luogo* auf, z.B. bei **Borghi** [2^{r}], **Luca Pacioli** [a; 19^{r}], **Tartaglia** [1; **1**, 5^{v}], im Französischen zunächst *ordre* [Chuquet 1; 593], dann *lieu*, z.B. [Livre de getz; b 3^{v}], [Trenchant 1; 12], im Englischen *place* [Recorde 1; B 6^{r}]. In den deutschen Rechenbüchern heißt die Stelle

stede	im Clevischen Algorithmus (um 1445) [125],
stat	im Bamberger Rechenbuch von 1483 [4^{r}],
	bei **Widman** [5^{v}],
	bei **Rudolff** [2; a 2^{v}],
stet	bei **Stifel** 1546 [3; 2],
	bei **Gehrl** 1577 [2].

Das Wort *Stelle* wird erst im 18. Jh. durch **Chr. von Wolff** bekannt (z.B. [3; Sp. 1486]). **Kästner** bildet die Zusammensetzung *Dezimalstelle* [1; 85].

1.2.2 Zahlzeichen für ganze Zahlen

Nach der Bildung von Zahlwörtern, die das Ohr beim Gespräch aufnahm, ergab sich bald die Notwendigkeit, die Zahlen auch für das Auge sichtbar zu machen. Dies konnte einmal geschehen durch Aufzeigen der entsprechenden Zahl von Fingern oder nach Vereinbarung bestimmter Formen von *Fingerzahlen*, ferner durch Auslegen von handlichen Gegenständen (wie Steinchen, Muscheln, Holzstäbchen). Damit konnten auch große Zahlen dargestellt werden, wenn man nur die Einheiten der einzelnen Zählstufen entweder durch verschiedenartige Objekte unterschied oder sie geordnet auf einem *Abakus* niederlegte, einem durch Kolumnen oder Linien eingeteilten Tisch oder einer Tafel. In diese Kolumnen bzw. auf oder auch zwischen diese vorgezeichneten Linien konnten die Einheiten der verschiedenen Zählstufen in Gestalt von Rechensteinen (*Calculi, Projectiles, Jetons, Rechen-* oder *Legpfennige*) eingelegt werden. Zum längeren Festhalten einer Zahl eignete sich eine derartige Tafel freilich nicht. Eine Verbesserung war die zuerst bei den Römern feststellbare starre Form des Abakus, bei dem die Rechensteine in Rillen oder auf Drähten laufen. Dauerhaft wurde eine Zahl auch festgehalten, wenn man die Zahlzeichen – ursprünglich waren es nur die Einerstriche – in ein *Kerbholz* einschnitt oder durch Knoten in *Zählschnüren (Quipus)* darstellte.

Das gegenständliche Auslegen von Rechensteinen konnte sich wie im mittelalterlichen Linienabakus zu einer *Zahlenschrift* entwickeln: statt der auf und zwischen den Linien aufgelegten Jetons wurde die entsprechende Zahl von Punkten mit Kreide oder Tinte auf die mit dem Linienschema versehene Schreibunterlage eingeschrieben.

Zur schriftlichen Fixierung einer Zahlenangabe z.B. in einem fortlaufenden Text haben ferner folgende Mittel Anwendung gefunden: Man konnte das Zahlwort entweder mit seinem ganzen *Buchstabenbestand* oder auch nur mit dem *Anfangsbuchstaben (akrophonisch)* anschreiben oder besondere *Individualzeichen* einführen. Diese wurden vielfach nur für die Stufenzahlen verwendet, während innerhalb der Stufen die Individualzeichen wie die Zählstriche auf dem Kerbholz aneinandergereiht wurden; die dabei auftretenden langen Reihungen konnten durch multiplikative Bildungen oder durch Einschaltung von Zwischenstufen verkürzt werden. Manchmal – wie bei den Zahlbuchstaben der Griechen, Juden und anderen Völkern des nahen Ostens – treten die Individualzeichen auch innerhalb der Stufen auf.

Die geringste Anzahl von Individualzeichen erfordert die in einem *Positionssystem* geschriebene Zahl. In diesem wird in der zweiten und jeder folgenden Stufe ein Individualzeichen der ersten Stufe verwendet; lediglich der Platz, auf dem das Zeichen steht, legt den Wert der Zahl fest. Nur muß jetzt noch ein Symbol für eine leere Stelle, die Null eingeführt werden.

Im Folgenden soll geschildert werden, welcher Zahlzeichen bzw. Zahlzeichensysteme sich die verschiedenen Völker bedienten, wobei sich zeigen wird, daß vielfach mehrere der genannten Mittel zur Wiedergabe von Zahlen teils nebeneinander, teils zeitlich hintereinander in Gebrauch waren; in diesem Fall ist nicht zu verkennen, daß man bestrebt war, das Bisherige zu verbessern, während ein Nebeneinander seinen Grund darin haben konnte, daß gelehrtere Kreise ein System verwendeten, das zwar besser, aber schwieriger zu verstehen und zu handhaben war als ein anderes einfacheres Verfahren, das für die Bedürfnisse des oft schreibunkundigen Mannes aus dem Volke genügte.

1.2.2.1 Zahlzeichen der Primitiven

Literatur allgemein (im folgenden abgekürzt: L.): Fettweis [2], Frolov, Humboldt, Marshack, Menninger, Zaslavsky.

Von den genannten Möglichkeiten, Zahlen sichtbar zu machen, also Zahlzeichen zu bilden, kommen für die primitiven Völker nur in Betracht: Das Aufzeigen von Zahlen an den Fingern, das Einschneiden von Kerben, welche die Zählfinger ersetzen, ferner Knüpfungen in Zählschnüren und Auslegen von Objekten (Steinchen, Muscheln u. dgl.), was – übersichtlich angeordnet – bald zu einem Abakus führen könnte.

Dabei müssen als Primitive nicht nur die Stämme der vorgeschichtlichen Zeit angesehen werden, die noch nicht die Kenntnis der Schrift erworben hatten (obwohl z.B. die Künstler von Altamira keine Primitiven mehr waren), sondern auch die Menschen aller Zeiten, die schreibunkundig geblieben sind.

Ein hierher gehörendes Dokument ist z.B. ein aus der Altsteinzeit stammender Wolfsknochen, der in Mähren, dem Gebiet der späteren Bandkeramiker, gefunden wurde. Dort ist die Zahl 55 eingekerbt, wobei die nebeneinandergereihten Einerstriche bei 25 zusammengefaßt wurden. Aus demselben Raum, aber bereits der Bronzezeit (ca. -1400) angehörend, stammen ca. 3 bis 4 cm lange Knochen von Haustieren, auf denen Kerben

von 1 bis 13, auf einigen auch ein Kreuz (vielleicht 20) eingeritzt sind. Derartige Zahlenangaben gehören wohl zur Buchführung eines Kaufmanns oder sind Aufzählungen der Jagdbeute [VM; 1, 16].

1.2.2.2 Die ersten Kulturen

Eine systematisch ausgebildete Zahlenschrift findet sich bereits vom 4. vorchristlichen Jahrtausend an in Wirtschaftstexten verschiedener Kulturvölker des Mittelmeerraumes und des Ostens. In einem protoelamischen Text aus *Tepe Sialk* (Zentralpersien) aus dem 3. Jahrtausend v. Chr. sind die Einer durch und die Zehner durch dargestellt, z.B.

für 24

[Ghirshman; 116]. Im *minoischen* Kulturbereich treten in der frühminoischen Periode (ca. 2600–2000) die Zeichen

|	für die Einer,
•	für die Zehner,
\ oder /	für die Hunderter,
◇	für die Tausender

auf, die in den sog. Linearschriften A und B aus mittel- und spätminoischer Zeit (ca. 2000–1550 bzw. 1550–1150) die folgenden Formen annehmen:

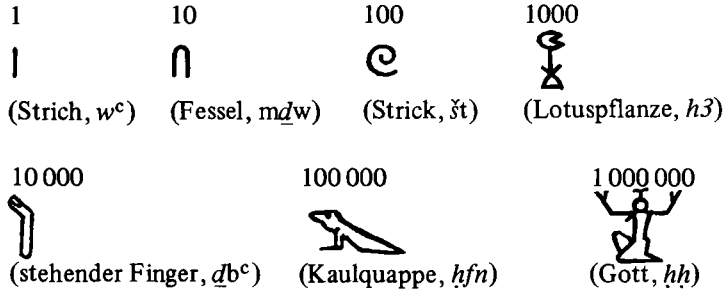
Linear-schrift	1	10	100	1000	10 000
A	|	• oder –	o		
B	|	–	o		= 10 · 1000

[Furumark; 116], [Sarton 3; 378], vgl. [VM; 1, 17 ff.]. Auf den Siegeln von *Mohenjodaro* und *Harappa* (Induskultur) erscheint nur der Einheitsstrich und zwar bis zu 13mal wiederholt; ein Extrazeichen für 10 existiert hier wohl nicht [Hartner; 102].

1.2.2.3 Die Ägypter

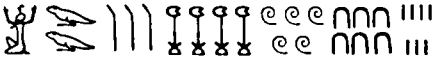
L.: Breadsted, A. H. Gardiner, Gillings, Sethe [1], Vogel [VM; 1].

Nach **Herodot** haben auch die Ägypter mit Steinchen gerechnet [II, 36, 4]. Schriftlich wurden die Zahlzeichen schon in der Frühzeit (um 3000 v. Chr.) in der vor allem auf Denkmälern verwendeten hieroglyphischen Schrift durch folgende Zahlzeichen wiedergegeben:



Es treten also außer dem Einerstrich Individualzeichen für die Zehnerpotenzen von 1 bis 10^6 auf. Die Ähnlichkeit der Symbole für 1 und 10 000 legt den Gedanken nahe, daß der Strich, der Eins bedeutet, letztlich eine Andeutung eines einzelnen Fingers darstellt. Die 10 000 wäre bei dieser Auffassung gleichsam eine „große Eins". Diese Deutung wird gestützt durch eine Stelle im Suda-Lexikon [162b], nach dem der Finger sowohl 1 wie 10 000 bedeutet. Ansonsten kommt den Zahlzeichen ihre Rolle als Ziffern wahrscheinlich nur aus phonetischen Gründen zu; man schreibt die Zahlwörter mit den Bildern solcher Wörter, die die gleichen Radikale enthalten. Das heißt, die ägyptischen Wörter für Strich, Fessel, Strick, . . . haben die Radikale w^c, m$\underline{d}$w, št, . . . und diese sind gleichzeitig die Radikale der Zahlwörter 1, 10, 100, . . .

Die übrigen Zahlen, d.h. die Zahlen, die keine Zehnerpotenzen sind, werden durch Aneinanderreihung dargestellt, z.B.

 1 234 567

Die größeren Zahlen gehen den kleineren voran, es entstehen oft lange Zahlenbilder. Diese Ordnung der Ziffern in absteigender Reihenfolge entspricht auch dem aus dem Koptischen zu entnehmenden Gebrauch der Sprache.

Große Zahlen wurden bereits in der ganz alten Zeit aufgezeichnet. So steht z.B. auf der Keule des Königs Narmer (vordynastisch um 3000 v. Chr.), daß die Zahl der gemachten Gefangenen 120 000 beträgt, die der erbeuteten Rinder 400 000 und die der erbeuteten Ziegen 1 420 000 [Quibell, Plate 26b].

Im mittleren Reich (12. Dynastie, ab 1991) tritt eine gewisse Änderung der alten Ziffernordnung ein. Das Wort *ḥḥ* hat im Ägyptischen auch die Bedeutung „viel". Vermutlich aus diesem Grunde ist es als Zeichen und Wort für Million nun nicht mehr anzutreffen [Sethe 1; 8 f.]. Die Kaulquappe als Zeichen für 100 000 ist jetzt das höchste Zahlzeichen. So schrieb man 2 800 000 als 28 · 100 000:

Nur einmal erscheint hierbei das Zeichen der Kaulquappe. Das Zahlbild ist nun erheblich kürzer; man bezeichnet diesen Vorgang als „multiplikative Schreibung". Diese

Hieratisch:

1–9									
10–90									
100–900									
1 000–9 000									

Demotisch:

1–9									
10–90									
100–900									
1 000–9 000									

Abbildung 1. Ägyptische Zahlzeichen [Sethe 1; Tafel I].

findet sich dann im Neuen Reich, nach etwa 1554/51 (18. Dynastie) herunter bis zu den Tausendern, z.B. für 4 000.

Bei der ägyptischen Zahlenschreibweise ist ein besonderes Zeichen für die Null nicht erforderlich. In einer späten Inschrift am Tempel in Edfu (2./1. Jh. v. Chr.) tritt allerdings ein Bildzeichen für Null auf, die abwehrenden Hände . Es handelt sich dabei um Näherungsberechnungen für die Flächen von schmalen viereckigen Grundstücken mit den Seiten a, b, c, d nach der Formel $F = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$. Im Falle eines Dreiecks wird mit der Formel $F = \frac{0+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$ gerechnet [Lepsius 1; 82 f.].

Durch kursive Vereinfachung der Schrift auf Papyri werden im Hieratischen und noch mehr im Demotischen aus den Symbolen für die ursprünglich durch Aneinanderreihung entstandenen Zahlen 1–9, 10–90, 100–900, 1 000–9 000 allmählich Individualzeichen, siehe hierzu Abbildung 1. Es entstehen nun zwar wesentlich kürzere Zahlbilder, diese sind aber nicht mehr so übersichtlich, z.B.

24

(Pap. Brit. Mus. 10520, aus römischer Zeit) [Parker; 85].

1.2.2.4 Die Babylonier

L.: Falkenstein, Lewy, Meissner, Neugebauer [MKT], [5], [2], Neugebauer/Sachs [MCT], Thureau-Dangin [TMB], [3], Vajman [1], Vogel [VM; 2].

Im Zweistromland lösten sich zwei Kulturen ab. Hier wohnten im 4. Jahrtausend die nichtsemitischen Sumerer, die wahrscheinlich erst nach ihrer Landnahme die Schrift erfunden haben. Sie wurden seit der Mitte des 3. Jahrtausends von den vom Westen eindringenden semitischen Stämmen bedrängt und verloren unter der Dynastie von Akkad (König **Sargon**, um 2300) ihre politische Selbständigkeit. Die sumerische Sprache wurde allmählich durch das Akkadische verdrängt, hat sich aber – dem Lateinischen im Mittelalter vergleichbar – in Literatur und Wissenschaft erhalten.

Die Sumerer schrieben ursprünglich mit Griffeln verschiedenen Querschnitts, die sie senkrecht oder schräg in die weichen Tontafeln eindrückten. Damit wurden in altsumerischer Zeit hauptsächlich die Zahlen 1, 10, 60, 600, 3 600 und 36 000 (s. Abb. 2, Spalte 1) dargestellt. Daneben existierte auch – allerdings weniger häufig verwendet – ein dezimales System mit Zeichen für 1, 10, 100 und einer größeren Einheit, die vielleicht als 300 zu deuten ist (s. Abb. 2, Spalte 2). Als das bisherige Schreibgerät durch einen gespitzten Griffel ersetzt wurde, entstanden zwei neue Formen, der Keil und der

Winkelhaken (s. Abb. 2, Spalte 3). Hier ist die neue Einheit 60 deutlich als ein größerer Keil, also als große Eins zu erkennen, wie auch früher 3 600 und 100 als große „Zehn".

Am Ende der Entwicklung steht, wie es die ältesten Aufgabentexte aus frühbabylonischer Zeit zeigen, ein Positionssystem mit der Basis 60, wobei der Winkelhaken, der Zehner, zur Verkürzung der Reihe innerhalb der einzelnen Stufe diente. Dieses gelehrte System war freilich noch unvollständig. Es diente zwar auch zur Darstellung der 60er

	altsumerisch 60-er System	altsumerisch 10-er System	spät-sumerisch	Positions-system	akkadisch
1					
10					
60					
100					
120					
300					
600					
1 000					
1 200					
3 600					
36 000					
60^3					

Abbildung 2. Sumerische und akkadische Zahlzeichen.

Brüche, aber es existierte kein Trennungszeichen[1]) zwischen den Ganzen und den Brüchen, so daß der wahre Wert aus dem Zusammenhang entnommen werden mußte, wenn er nicht durch eine Glosse bestimmt war (s. S. 101). So wird z.B. die Zahl 44, 26, 40 als 0; 44, 26, 40 festgelegt durch die Erklärung „dies ist $\frac{1}{9}$ von $\frac{2}{3}$ von 10".

Unklarheiten entstehen auch, wenn eine oder beide Ziffern, aus denen eine Sexagesimalstelle besteht, fehlen (gleich Null sind). Solche Unklarheiten können durch die übliche Anordnung der Zeichen schon ausgeschlossen sein, oder lassen sich durch einen Zwischenraum oder durch ein Lückenzeichen ausschließen.

Beispiele:

[ST; Texte V, Face, Col. II, Z. 5]: = 11,7

⟨18 wäre zu schreiben: ⟩

[ST; Texte V, Revers, Col. II, Z. 12]: = 12, 30, 25 .

⟨Zwar wäre 50 so zu schreiben , aber ohne die Lücke wären noch andere Lesarten möglich.⟩

[ST; Texte V, Face, Col. II, Z. 3]: = 10, 10 .

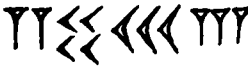
[ST; Texte XII, Z. 4]: = 1, 30, 16 .

⟨damit nicht 1, 46 gelesen wird.⟩

AO 6484 [MKT; 2, Tafel 1] (seleukidisch):

Rs. Z. 8: = 10, 25

Rs. Z. 24: = 2, 0, 15

Rs. Z. 11:  = 2, 0, 0, 33

---

[1]) Wir trennen nach dem Vorschlag von **Neugebauer** die einzelnen Sexagesimalstellen durch Kommata, die Ganzen von den Brüchen durch Semikolon.

Das gelehrte sumerische Positionssystem wurde von den Akkadern übernommen, die in der Umgangssprache nur dezimal rechneten und neben 1 und 10 auch besondere Worte und Wortzeichen für 100 (= *me*) und 1 000 (= *lim*) hatten.

Mit Hilfe des Zeichens für *lal* ( ) konnten wie im Lateinischen manche Zahlen auch subtraktiv geschrieben werden, z.B. = 20 – 1 = 19 [Neugebauer 5; 17]. [MKT; 2, 30].

Über die Frage, wie das sexagesimale Positionssystem entstanden ist, wurden viele Hypothesen aufgestellt. Auf die vielseitige Teilbarkeit der Zahl 60 hatte schon **Theon von Alexandria** [2, 450] hingewiesen. **Wallis** hält die Zahl 60 deshalb als Basis für besonders geeignet (s. S. 10). Dann erklärt man es mit dem angeblichen Zusammentreffen zweier Völker, von denen das eine ein auf 10, das andere ein auf 6 aufgebautes Zahlensystem besaß [Kewitsch 2; 73 ff. und M. Cantor 3; **1**, 32, 37]. Man ging auch von dem Rundjahr mit 360 Tagen [Zimmern] oder von den Winkeln des gleichseitigen Dreiecks aus [Hoppe; 3]; beides kommt zeitlich nicht in Betracht. Daß das sexagesimale Positionssystem – wie jedes andere – auf einem Abakus dargestellt werden kann [Veselovskij; 252], ist richtig. Aber abgesehen davon, daß nur geringe Spuren auf einen babylonischen Abakus hinweisen [VM; **2**, 24, Fn. 2], muß der Entschluß, die Einheiten so zu ordnen, vorausgegangen sein.

Aus den ältesten Keilschrifttafeln aus Uruk um 3000 v. Chr. sieht man, daß eine sexagesimal einzuordnende Zahlenreihe wie sie die Abbildung 2, S. 27 (Spalte 1) zeigt, bevorzugt wurde. Dazu existierten Varianten, wie bei den Getreidemaßen in Texten aus Ǧemdet Naṣr und Warka mit 1, 10, 30, 100, 300, 3 000, wo 30 *qa* die monatliche Verpflegung eines Arbeiters darstellt, die später aufgrund eines verbesserten Lebensstandards (verfeinerte Zubereitung vermindert den Nährwert) auf 60 erhöht worden sein soll [Lewy; 9]. Zur Zeit der Könige von Akkad findet sich auch die Reihe 1, 10, 60, 600, 6 000 [Thureau-Dangin 3; 24].

Ein Beispiel für das in den Texten aus Uruk nur selten verwendete dezimale System (Abb. 2, Spalte 2) steht in [Falkenstein; Tafel 66, Nr. 626 Rs.]. Hier wird 44 zu 231 addiert, was 275 ergibt; Abbildung 3 zeigt die Darstellung der Zahlen:

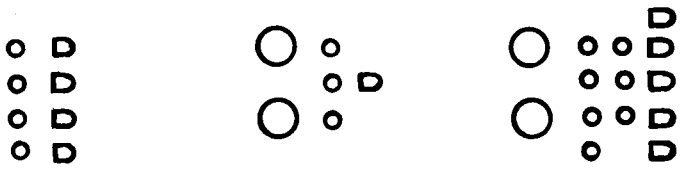


Abbildung 3. Zahlen aus einem Text aus Uruk.

Auch bei verschiedenen Maßsystemen erkennt man Relationen zwischen Einheiten, die in ein dezimales System passen würden. So ist das Flächenmaß 1 *iku* = 100 SAR. Da dies aber als 100 GAR^2 und nicht als $(10\ GAR)^2$ erscheint, fehlt ein Zwischenglied (s. [Powell; 174]). Daß die ganz unterschiedlich – darunter auch mit der Verhält-

niszahl drei – aufgebauten metrologischen Systeme bei der Entwicklung eine Rolle spielten, spricht eine These **Neugebauers** aus, daß nämlich das Sexagesimalsystem seine Entstehung einer bewußten Anpassung des Zahlensystems an die Erfordernisse des Wägens und Messens verdanke [2; 43]. In dem Gewichtssystem

1 Talent = 60 Minen = 3 600 Schekel *(gín)*

sieht man einen Teilbereich des Sexagesimalsystems deutlich vor Augen, dessen Erweiterung nach oben und unten (großes Talent, kleiner Schekel) keine Schwierigkeit machen würde.

Thureau-Dangin unterscheidet bei seinen Ausführungen über die Entstehung des Sexagesimalsystem zwischen dem sumerischen System und dem gelehrten System der Babylonier. Während das erste auf der Verbindung der Zahlen 10 (Finger) mit der Zahl 6 (teilbar durch 2 und 3) beruhe [TMB; IX, Fn. 3], knüpfe das andere an die sumerischen, aus dem Gewichtssystem hergeleitete Brucheinheiten $\frac{1}{6}$ (šuš) und $\frac{1}{60}$ (gín) an [Thureau-Dangin 3; 33, 49 f. und TMB; X]. Geschrieben haben die Sumerer $\frac{1}{6}$ als Bild des Sextanten, nämlich als (, dann aber als 10 *gín* und später nur als 10. So hätten sich die Schreiber daran gewöhnt, nur 1 für 10 *gín*, 10 für 1 *šuš* = $\frac{10}{60}$ und 1,40 für 1 $\frac{40}{60}$ zu schreiben. Wir verstehen ja auch was gemeint ist, wenn wir z.B. einen Preis von 2 M 50 Pf. als 2,50 aussprechen. Bei einer Verallgemeinerung dieses Prinzips sei dann das die Ganzen wie die Brüche umfassende gelehrte System entstanden, in dem man mit nur zwei Zeichen auskommt, mit einem Keil als Einheit jeder Potenz von 60 (Exponent: positiv, negativ oder 0) und einem Winkelhaken als Nebeneinheit 10, die nur fünfmal auftreten kann.

Näheres und Genaueres über die Entstehung des Sexagesimalsystems wird man nicht sagen können; auch der Fragestellung, ob Messen vor Zählen oder Zählen vor Messen anzunehmen ist, kommt keine Bedeutung zu, da sich beides Hand in Hand entwickelt hat. Bei den Babyloniern besteht der Unterschied zwischen dem *gín* als Gewichtsmaß und dem *gín* als $\frac{1}{60}$ der Einheit nicht mehr; für beides wird *šiqlu* (Schekel) verwendet [TMB; X, Fn. 2].

Die Babylonier, die ja im täglichen Leben und in literarischen Texten die Wörter für 100 und 1 000 verwendeten, haben ihre mathematischen Aufgaben in dem gelehrten System niedergeschrieben. Daß dabei aber das Dezimale mitspielt, zeigen die Zahlenwerte, die vielfach bei der Aufgabenstellung gewählt wurden. Beispiele dafür sind neben 100 (1, 40), 200 (3, 20) und 1 000 (60, 40) Zahlen wie 500 (8, 20), 1 300 (21, 40), 2 225 (37, 5), 3 125 (52, 5), 4 400 (1, 13, 20) u.a. [MKT; **1**, 115, 245 f.; und **3**, 7, 23].

Die Babylonier haben auch die sumerischen Namen für 60, 600 und 3 600 als *šuššu*, *neru* und *šāru* übernommen, die sich dann bei dem griechisch-babylonischen Historiker **Berossos** (1. Hälfte des 3. Jhs. v. Chr.) als σῶσσος, νῆρος und σάρος wiederfinden [Thureau-Dangin 3; 26].

1.2.2.5 Die Griechen

L.: Friedlein [2], Heath [2], Löffler, Menninger, Vogel [7].

Die Darstellung von Zahlen mit den Fingern sowie durch Steinchen ist auch für die Griechen bezeugt. An den fünf Fingern zählte der Meergott **Proteus** die Seehunde ab [Homer, δ, 412]; sie werden „abgefünft" (πεμπάζεσθαι). Auch noch später wurde in einfachen Fällen das Fingerrechnen verwendet. So sagt **Aristophanes** in den *Wespen* [Vers 656]: *Rechne ganz einfach, nicht mit Steinen, sondern von der Hand weg* (λόγισαι φαύλως, μὴ ψήφοις ἀλλ'ἀπὸ χειρός). Über das Fingerrechnen in Byzanz s. S. 46.

Das griechische Wort für „Steinchen legen" ψηφίζειν, ψήφους τιθέναι ist das Fachwort für Rechnen überhaupt geworden; schon **Herodot** [II, 36] berichtete davon.

Aus einer Anordnung der Steinchen in Kolumnen auf einer Unterlage konnte dann der griechische Abakus entstanden sein, wie er sich z.B. in einem Exemplar in der Salami-

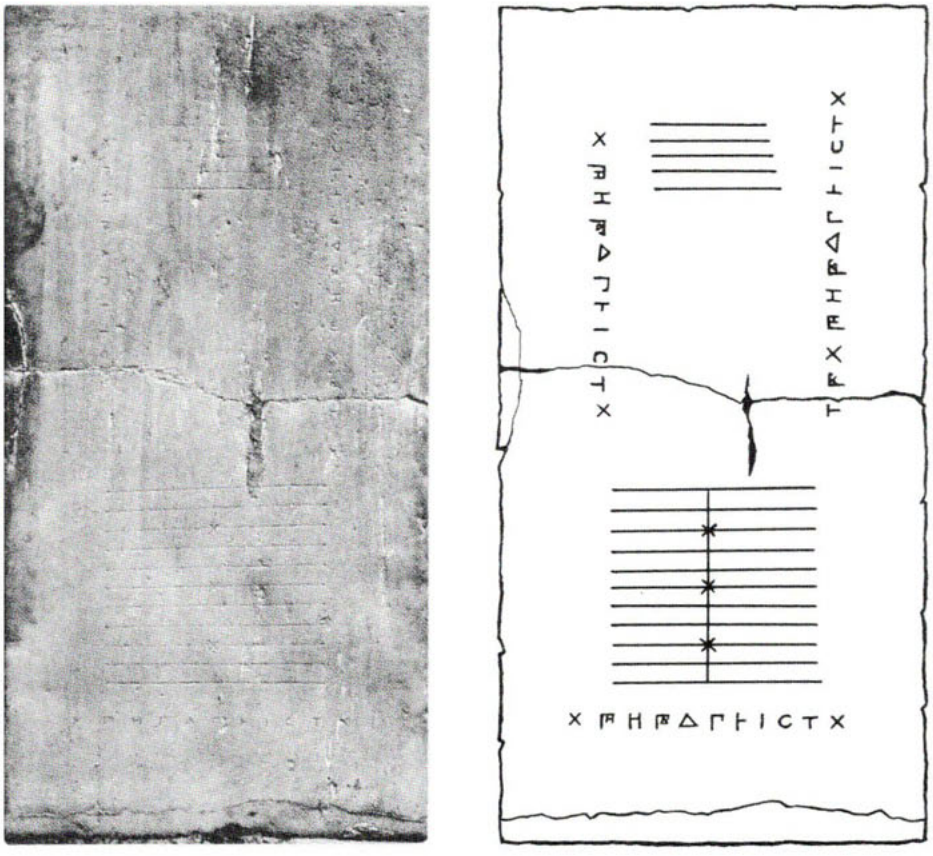


Abbildung 4. Salaminische Rechentafel [van den Waerden 2; 73].

nischen Rechentafel (s. Abb. 4) erhalten hat [Nagl 2; 18 f.]. Die Kolumnenüberschriften 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1 000, 5 000 zeigen den dezimalen Aufbau mit Zwischenstufen. Andere Kolumnen sind, da es sich um ein kaufmännisches Hilfsmittel handelt, bestimmt für das Talent (6 000 Drachmen), den Obolos ($\frac{1}{6}$ Drachme) und weitere Bruchteile s. S. 180.

Für die Zahlenschreibung mit Individualzeichen gab es bei den Griechen zwei Systeme: Das erste, auch auf der Salaminischen Rechentafel und auf Tributlisten und Abrechnungen verwendete, ältere attische System [Menninger; 2, 73 f.] ist „akrophonisch", d.h. es verwendet für die Zehnerstufen jeweils den Anfang des betreffenden Zahlwortes; dazu werden Zwischen-Stufen bei fünf eingeschaltet, so daß z.B. 500 als eine Fünf im Bereich der Hunderter erscheint. Die Formen sind (neben dem Einerstrich |):

	10 Δ (*έκα*)	100 H (*εκατόν*)	1 000 X (*ίλιοι*)	10 000 M (*ύριοι*)
5 Π (*έντε*)	50 ⸤Δ	500 ⸤H	5 000 ⸤X	50 000 ⸤M
	πεντήκοντα	*πεντακόσια*	*πεντακισχίλια*	*πεντακισμύρια*

Beispiel: 1978 = X ⸤H HHHH ⸤Δ ΔΔ Π III

Diese Zeichen lassen sich von 454 bis gegen 95 v. Chr. in Inschriften nachweisen [Larfeld; 292]. Sie sind von dem Grammatiker **Herodian** (2. Jh. n. Chr.) beschrieben worden und werden deshalb gelegentlich „Herodianische Zeichen" genannt.

Wesentlich kürzer, aber nicht so übersichtlich ist das jüngere System, das von der Mitte des 5. Jh. v. Chr. an nachgewiesen ist. Es verwendet die 24 Buchstaben des Alphabets zusammen mit den drei Episemen *Vau* (ϛ), *Koppa* (ϟ) und *Sampi* (ϡ) zur Bezeichnung der Zahlen in der folgenden Weise:

α	1	*ι*	10	*ρ*	100
β	2	*κ*	20	*σ*	200
γ	3	*λ*	30	*τ*	300
δ	4	*μ*	40	*υ*	400
ε	5	*ν*	50	*φ*	500
ϛ	6	*ξ*	60	*χ*	600
ζ	7	*ο*	70	*ψ*	700
η	8	*π*	80	*ω*	800
ϑ	9	ϟ	90	ϡ	900

Die Tausender erhalten links einen kleinen Strich oder eine Schleife, z.B. [Gerstinger/Vogel; 48], z.B. 1978 = ,*αϡοη*. Zur Unterscheidung von den Wortbuchstaben werden die Zahlbuchstaben (bei sorgfältiger Schreibung) überstrichen oder es wird ihnen oben ein Strich angehängt, welch letzterer auch bei den Brüchen verwendet wird (s. S. 103). Die Zehntausender werden durch M mit dem darüber gesetzten Zahlenfaktor bezeichnet, z.B.

$$349\,450 = \frac{\lambda\delta}{M}\,,\overline{\vartheta\upsilon\nu}..$$

In dem Zahlensystem des **Apollonios** [Pappos 1; 28], das auf Myriaden aufgebaut ist, wurden Myriaden erster, zweiter usw. Ordnung unterschieden, z.B.

$$5462\ 3600\ 6400\ 0000 = \overset{\gamma}{\mu}\text{,}\varepsilon\upsilon\xi\beta\ \kappa\alpha\grave{\iota}\ \overset{\beta}{\mu}\text{,}\gamma\chi\ \kappa\alpha\grave{\iota}\ \overset{a}{\mu}\text{,}\varsigma\upsilon.$$

Im Oktadensystem des **Archimedes** wurden keine Zahlen symbolisch bezeichnet. Ein Zeichen für Null war weder beim Abakus-Rechnen noch bei den Herodianischen und den Buchstabenziffern nötig. Über spätere Systeme der griechischen Zahlenschreibung in Byzanz s. S. 60 f.

Sexagesimalzahlen

Vor allem für astronomische Rechnungen verwendeten die Griechen das sexagesimale Zahlensystem, das sie wahrscheinlich zusammen mit Beobachtungsdaten von den Babyloniern übernahmen. Im Gegensatz zu diesen benützten die Griechen das Sexagesimalsystem nicht für die Ganzen, sondern nur für die Brüche, die sie mit den Buchstaben ihres Alphabets wiedergaben, z.B. sieht bei **Theon von Alexandria** die Division von $1515°20'15'' : 25°12'10'' = 60°7'33''$ (vgl. S. 234) so aus: ,*αφιεκ ιε* ⟨:⟩ *κε ιβ ι* ⟨=⟩ *ξ ζ λγ* d.h. links stehen die Grade (*τμήματα*, *μοῖραι*, oftmals abgekürzt als μ°), dann die Minuten (*λεπτά* oder ⟨*πρῶτα*⟩ *ἐξηκοστά* = ⟨erste⟩ Sechzigstel), Sekunde (*δεύτερα ἐξηκοστά* = zweite Sechzigstel), usw. Oftmals erscheinen die Minuten und Sekunden, gemäß der Bruchbezeichnungsweise (s. S. 102 f.) mit einem bzw. zwei Akzenten versehen, z.B.

$$\mu^\circ\,\mu\zeta'\ \mu\beta'\ \mu'' = \mu o\iota\rho\tilde{\omega}\nu\ \mu\zeta'\ \mu\beta'\ \mu'' = 47°42'40''\ .$$

Während der Gebrauch des griechischen Zahlenalphabets bei den Dezimalzahlen ein Symbol für die Null überflüssig macht, gilt das für die griechischen Sexagesimalbrüche nicht mehr, hier ist es wesentlich, eine Leerstelle durch ein Symbol zu kennzeichnen. Dieses Symbol, das in den jeweiligen Handschriften ein etwas anderes Aussehen hat, ist im wesentlichen ein Omikron mit einem Strich darüber, also z.B.:

$\bar{o}\ ,\overline{o}\ ,\overline{o}\ ,\overline{o}$ [Woepcke 5; 467 f.],

was wohl als eine Abkürzung von *οὐδέν* (= nichts) aufzufassen ist. Allerdings stammt die älteste dieser Handschriften mit einem Symbol für eine Sexagesimalnull, eine Ptolemaioshandschrift, erst aus dem 9. Jh. n. Chr. Da jedoch bei **Ptolemaios** in seiner *Syntaxis* häufig Sexagesimalzahlen mit Leerstellen vorkommen, z.B.

$0\ 0\ 0\ 0\ \overline{\iota\alpha}\ \overline{\mu\varsigma}\ \overline{\lambda\vartheta}$ ($0°0'0''0'''\ 11^{IV}46^{V}39^{VI}$) [2; **1**, 204] und [1; **1**, Teil 1, 279]

so darf man wohl annehmen, daß es schon in relativ früher Zeit bei den Griechen üblich war, sexagesimale Leerstellen durch ein Symbol zu kennzeichnen.

1.2.2.6 Die Römer

L.: Friedlein [2], Gardthausen, Kretschmer/Heinsius, Löffler, Menninger, Mommsen [1].

Bei den Römern war das Fingerrechnen stets in Gebrauch. Dies zeigt z.B. eine Stelle bei **Plautus** [Miles glor. 204]: *dextera digitis rationem computat*, späte Zeugnisse liefern die Kirchenväter **Hieronymus** und **Augustinus**, sowie auch **Martianus Capella** [VII, 746] und **Macrobius** [Menninger; 2, 11 ff.]. Dieser berichtet, daß im Denkmal des Gottes **Ianus** in Rom die Zahl 365 also die Anzahl der Tage im Jahr, an den Fingern aufgezeigt werde: *manu dextera trecentorum, et sinistra sexaginta quinque numerum retinens*. Diese Aussage geht fast wörtlich auf **Plinius** zurück.

Als Zahlzeichen verwenden die Römer – ähnlich den herodianischen Zahlzeichen der Griechen – Individualzeichen für die Zehnerpotenzen und die Zwischenstufen 5, 50, 500 usw.

I		X		C		Ⓘ (auch (|), ∞).
	V		L (auch ↓, ⊥, ⊥)		D	

Die Schreibweise M als Tausenderzeichen wird erst im Mittelalter üblich.

Wie beim herodianischen System der Griechen gilt bei den Römern für zusammengesetzte Zahlen gewöhnlich das additive Prinzip: XXXX, LXXXVIIII. Die subtraktive Schreibweise IV = 4, IXX oder XIX = 19 kommt nur vereinzelt vor und bürgert sich im römischen Zahlensystem erst im Laufe des Mittelalters ein [Hartner; 103].

Für höhere Einheiten existierten weitere Symbole:

5 000	10 000	50 000	100 000	1 000 000
|))	((|))	|)))	(((|)))	$\boxed{X}$ oder $\boxed{X}$.

Einige dieser Symbole sind auf dem Handabakus (Abb. 5) zu erkennen. Diese Handabaci, von denen noch mehrere Exemplare erhalten sind [Menninger; 2, 112], sind recht praktische Recheninstrumente. Auf einer Bronzetafel sind Rillen eingeschnitten, die in der Mitte unterbrochen sind; hier stehen die Zahlzeichen 1, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000, 1 000 000. Im jeweils oberen Teil der Rille befindet sich eine Kugel, die 5 bedeutet, im unteren Teil sind jeweils vier Kugeln. Will man eine Zahl darstellen, so werden die betreffenden Kugeln gegen die Mitte zusammengeschoben, z.B. werden für 8 in der Einer-Kolumne eine Kugel von oben und drei Kugeln von unten in der Mitte zusammengeschoben (Abb. 6). Für die Bruchteile der Einheit sind weitere Rillen vorhanden. an denen in unserem Bild die Zeichen ○ , ∠ , ⁊ , 2 für $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ Unzen stehen.

Über den Ursprung der römischen Zahlen besteht keine einheitliche Auffassung. So könnte aus dem Einerstrich durch Hinzufügen eines weiteren Striches (decussatio) der jeweils zehnfache Wert ausgedrückt worden sein. Nach **Mommsen** [1; 598 f.] sollen für die Zahlzeichen 10, 100 und 1 000 die im griechischen, im lateinischen Alphabet nicht vorhandenen Buchstaben X, Θ und Φ verwendet worden sein. Auch hieraus lassen sich die Fünferstufen durch Halbieren herleiten [Menninger; 2, 49]. Demnach haben C und M nichts mit den Zahlwörtern *centum* und *mille* zu tun.

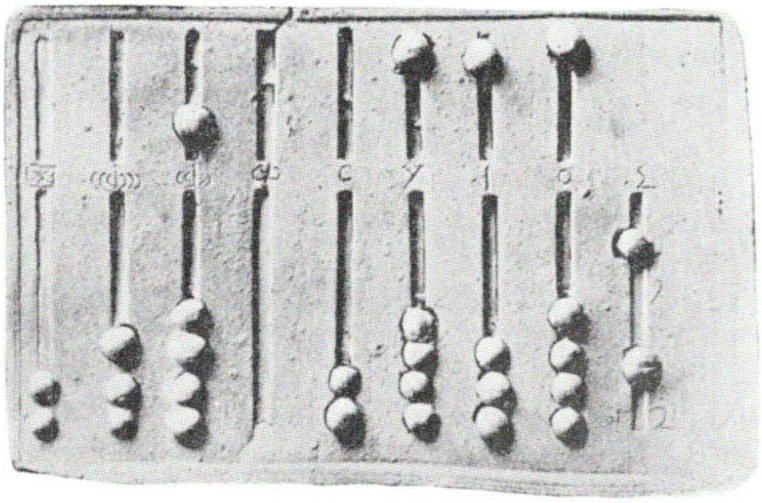


Abbildung 5. Römischer Handabakus [Menninger; 2, 112].
Abguß von dem Stück im Cabinet des médailles, Paris. Fast natürliche Größe.

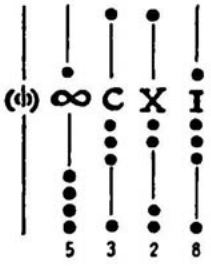


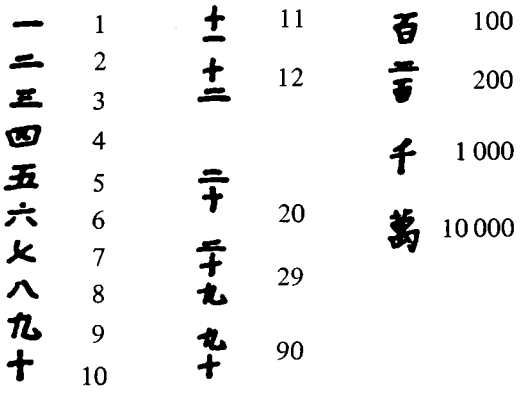
Abbildung 6. 5328 auf dem römischen Handabakus [Menninger; 2, 113].

1.2.2.7 Die Chinesen

L.: Chiu Chang Suan Shu [3]; Juškevič [1; 9–19], Lam, Libbrecht, Menninger [2, 266 ff.], Mikami, Needham [N; 3], Smith/Mikami.

Bei den Chinesen sind alle Möglichkeiten der Zahlendarstellung von den Fingerzahlen bis zu der Positionsschreibung vertreten. Der Zählfinger ist noch in den Zahlzeichen für 1 bis 3 festgehalten, aber auch 4 und 9 gehen wohl auf alte Zahlgebärden zurück [Menninger; 2, 23 f.]. Daß auch einmal Knotenzahlen in Gebrauch waren, zeigt ein Text aus dem 6. vorchristlichen Jahrhundert, in dem es heißt: Das Volk soll zu den geknoteten Stricken zurückkehren und sie verwenden [D.E. Smith 6; 2, 195]. Noch jetzt sind in Tibet Zählschnüre in Gebrauch, auf denen eine Zahl, z.B. die der auferlegten Gebete, festgehalten wird [Menninger; 2, 59].

Die Grundformen der chinesischen Zahlzeichen sind schon seit der Han-Zeit (ab 3. Jh. v. Chr.) bekannt (Grundziffern) [Hartner; 105]:



Es handelt sich um die Individualzeichen von 1 bis 9; dazu kommen noch Zeichen für 10, 100, 1 000, 10 000 sowie ein Zeichen für $10\,000^2 = 100\,000\,000$, für die unten die Abkürzungen Z, H, T, ZT und HM verwendet werden sollen. Vielleicht sind alle diese Symbole identisch mit den Hieroglyphen des betreffenden Zahlwortes selbst; so ist z.B. 1 000 gleichlautend mit dem Wort für Skorpion. Ähnlich war es bei den Ägyptern, bei denen die Lotosblume oder die Kaulquappe auch zur Bezeichnung höherer Zahlenwerte dienten (s. S. 24). Die Zahlenwerte innerhalb der Stufen wurden multiplikativ vermittels der Zeichen von 1 bis 9 wiedergegeben. So wurde in einem Rechenbuch der Han-Zeit, im *Chiu Chang Suan Shu* [3; 105] die Zahl 1 6448 6643 7500 geschrieben als:

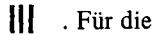
1 ZT 6 T 4 H 4 Z ⟨und⟩ 8 HM 6 T 6 H 4 Z ⟨und⟩ 3 ZT 7 T 5 H .

Man sieht, es sind immer vier Stellen zu Myriaden zusammengefaßt. Das derart dezimal aufgebaute Bild sieht so aus, als ob dabei die Kolumnenüberschriften aus einem Abakus übernommen worden wären. Da noch kein vollständiges Positionssystem vorliegt, erübrigt sich auch ein Zeichen für eine Fehlstelle, also für die Null.

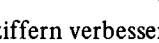
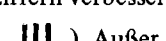
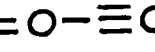
Das gleiche multiplikative Prinzip findet sich schon bei Zahlen auf Orakelknochen aus der Shang-Zeit (ca. 1520–1030 v. Chr.) [N; **3**, 14].

Seit dem 2. Jh. v. Chr. ist die Verwendung eines Abakus nachgewiesen, der auch dem Schreibunkundigen die Darstellung der Zahlen und das Rechnen mit ihnen gestattete. An Stelle von Steinen wurden Holz- oder Bambusstäbchen senkrecht und waagrecht für die Zahlen von 1 bis 9 in folgender Weise ausgelegt:

In dieser Form liegen die Stäbchen in der Kolumne der Einer und jeder weiteren 10^{2n}-Kolumne ($n = 0, 1, 2, \ldots$), während in den übrigen Kolumnen die Stäbchen der besseren Übersicht wegen um 90° gedreht ausgelegt werden:

Diese Zahlen konnten nun auch als „Strichzahlen" geschrieben werden, z.B. 27 703 =  . Für die Null ist in allen frühen Rechenbüchern eine Lücke gelassen (vgl. **Ch'in Chiu-shao** [Libbrecht; 69]). Dadurch liegt vorerst eine Art dezimales Positionssystem ohne eine Null vor.

Das Individualzeichen der Grundziffern für die 10 (+) ist vielleicht als eine Kombination von 1 (–) und 10 (|) der Strichzahlen zu denken. (Früher waren die Einer waagrecht und die Zehner senkrecht geschrieben worden.) Damit könnten dann die Zahlen 20, 30 und 40 der Chou-Zeit (ca. 1030–221 v. Chr.), nämlich , und als 2 · 10, 3 · 10 und 4 · 10 erklärt werden [N; **3**, 14].

Mit der Einführung eines eigenen Zeichens für eine fehlende Stelle, der Null, wird die Positionsschrift wesentlich verbessert. Ein Zeichen für die Null, nämlich ein Punkt, erscheint in China erstmals in einem astronomisch-astrologischen Text aus der Zeit zwischen 718 und 729 n. Chr. [N; **3**, 12]. Bei **Ch'in Chiu-shao**, bei dem ein Zeichen für die Null erstmals im Druck auftaucht, hat diese bereits die Form eines Kreises [Libbrecht; 69]. Eine Entlehnung des Zeichens für die Null von den Indern wird von chinesischen Gelehrten bestritten [Chiu Chang Suan Shu 2; 14], zumal in Schriften aus Südostasien die Null schon im 7. Jh., in Indien dagegen erst 870 nachgewiesen ist (s. S. 45) [N; **3**, 11]. Es könnte so sein, daß durch Einrahmung des leeren Platzes das Schriftbild der Stäbchenziffern verbessert werden sollte (bei 27 703  statt ). Außer bei den Strichzahlen wird das Nullzeichen auch bei den mit den Grundziffern dezimal geschriebenen Zahlen verwendet, so in einer Logarithmentafel von 1713 [Menninger; **2**, 279], wo die Zahl 49 420 130 164 (= log 87 501) als  geschrieben wird.

Außer den Grundziffern und den Strichziffern gibt es in China besondere „Amtsziffern" und „Handelsziffern" [Menninger; **2**, 274]. Die chinesische Zahlendarstellung hat sich auch in Japan und in Korea durchgesetzt und dort die älteren einheimischen Darstellungen verdrängt [Menninger; **2**, 272]. Erst in neuester Zeit ist man in China und Japan dazu übergegangen, die chinesischen Ziffern durch die arabischen Ziffern mit Stellenwert nach europäischem Vorbild zu ersetzen. Dieser Gebrauch beschränkt sich aber vorläufig noch auf das wissenschaftliche und geschäftliche Schrifttum [Hartner; 105].

Seit dem 15. Jh. existiert in China ein dem römischen ähnlicher fester Abakus mit Rechensteinen, der *Suanpan* [N; **3**, 74–80], der dann im nächsten Jahrhundert in Japan als *Soroban* erscheint. Statt der römischen vier Kugeln unten und einer Kugel oben (s. S. 34 f.) haben aber *Suanpan* und *Soroban* – diesmal auf Drähten – unten fünf, der *Suanpan* oben zwei Kugeln, wodurch das Festhalten auch von Zahlen > 9 (bis 15) auf

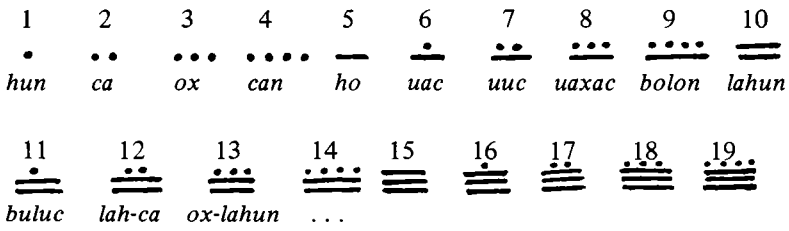
einem Draht möglich ist [Menninger; 2, 114–120]. Ob der noch heute in Rußland gebräuchliche Abakus *(sčety)* chinesischen Ursprungs ist, ist umstritten [N; 3, 80], [Spasskij].

1.2.2.8 Mexiko und Peru

L.: Menninger, Richeson, Satterthwaite, Thomas, Thompson, Wassén.

Unter dem Namen **Maya** faßt man die sprachverwandten Indianerstämme von Yukatan und Guatemala zusammen. Nur mit Unsicherheit ist die Entstehungszeit des Zahlengebäudes der Maya bestimmbar. Zur Zeit der spanischen Eroberung blickte es zweifellos auf ein Alter von mehr als 1000 Jahren zurück.

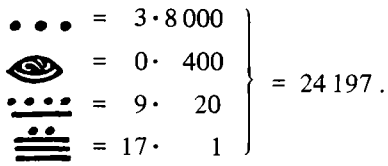
Das Zahlensystem ist ein auf 20 aufgebautes Positionssystem, in dem seit ältester Zeit ein Symbol für Null existiert. In der Sprache läßt sich außerdem eine Zehnerbasis, in der Schrift eine Fünferbasis nachweisen. Die Zahlen in den Handschriften werden durch 3 Elemente dargestellt, die muschel- bzw. augenförmige Null, der Punkt für die Einheit, und der horizontale Strich für die 5:



Die höheren Stufen heißen:

20 = *kal*
400 = *bak*
8 000 = *pic*
160 000 = *cabal*
3 200 000 = *kinchil*
64 000 000 = *alau*
1 280 000 000 = *halblat* .

Mit Hilfe dieser Ziffern werden alle Zahlen nach dem vigesimalen Prinzip dargestellt, die Schrift läuft dabei von oben nach unten, z.B.:

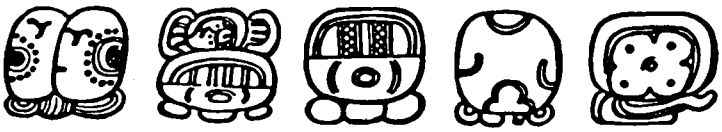


= 24 197 .

In Monumentalinschriften können die Zahlen 0–19 durch 20 verschieden geformte Götterkopf-Hieroglyphen wiedergegeben werden. Wir entnehmen die Abbildung 7 aus [Hartner; 112]:

1 *3* *4* *5* *6* *9* *10*

Maya-Hieroglyphenzahlen.



baktun *katun* *tun* *uinal* *kin*

Tageszählungseinheiten.

Abbildung 7. Zahlzeichen der Maya.

Bei den astronomischen Rechnungen der Maya, in deren Mittelpunkt immer die Tageszählung, beginnend bei einem im 34. vorchristlichen Jh. gelegenen Nullpunkt, steht, ist das vigesimale Prinzip mit Rücksicht auf eine Jahreslänge von 360 Tagen durchbrochen, nicht 20, sondern 18 Einheiten 2. Ordnung ergeben eine Einheit 3. Ordnung. An die Stelle von *hun* = 1 tritt *kin* = 1 Tag:

20 Tage = 20 *kin* = 1 *uinal* (verkürzter Monat)
360 Tage = 18 *uinal* = 1 *tun*
7 200 Tage = 20 *tun* = 1 *katun*
144 000 Tage = 20 *katun* = 1 *baktun* usw.

Das oben gegebene Beispiel würde im astronomischen Stellenwertsystem $3 \cdot 7\,200 + 9 \cdot 20 + 17 = 21\,797$ Tage bedeuten. [Menninger; **1**, 70 ff.; **2**, 218 ff.], [Hartner; 112 ff.].

Auch die Azteken benützen ein Vigesimalsystem, jedoch mit einer mit der Zahl 5 gegliederten Einerreihe. 5, 10, 15 haben Eigennamen wie die 20-Stufen. Die Schreibweise in den Bilderschriften ist sehr umständlich, da nur folgende Zahlzeichen bekannt sind:

1 *(ce)*: o
20 (*cempoualli* bzw. *pantli*): P (Fahne)
400 *(tzontli)*: (Haarbusch)
8 000 *(xiquipilli)*: (Jagdtasche)

z.B. = 1 780.

[Menninger; **1**, 73 f.], [Thompson; 41 f.].

Peru

Die Inka in Peru benützen ausschließlich Knotenschnüre *(Quipu)*, um Zahlen festzuhalten. Auf einer Schnur wurden an verschiedenen Stellen Knoten für Einer, Zehner usw. geknüpft. Mehrere Schnüre (zur Bezeichnung verschiedener Gegenstände, verschiedener Steuerbezirke usw.) hängen an einem Hauptstrang; auf einer besonderen Schnur wird die Summe angegeben.

Eine Abart des *Quipu*, *Chimpu* genannt, findet sich bei den Indianern Boliviens und Perus: man zieht Fruchtkapseln für die Einer auf eine Schnur, für die Zehner auf zwei Schnüre, für die Hunderter auf drei Schnüre, usw.
Neben dem *Quipu* hatten die Peruaner in vorkolumbianischer Zeit auch einen Abacus [Wassén].

1.2.2.9 Die Inder

L.: Bose/Sen/Subbarayappa [BSS; 136–212], Datta/Singh, Gokhale, Juškevič [1; 102–109], Kaye, Srinivasiengar.

Wie die meisten Völker haben auch die Inder bei der Wiedergabe der Zahlen die verschiedenen Arten der Darstellung verwendet. Vom Fingerrechnen *(mudrā)*, das in indischen Schriften als die niederste Art der Rechenkunst genannt wird, sind in der *Kharoṣṭhi*-Schrift die Zeichen für die Zahlen bis 5, in der *Brāhmī*-Schrift die bis 3 übrig geblieben [DS; 1, 105 f.]. Auch die Zahlwörter selbst konnten ausgeschrieben werden; sie wurden auch zu Paaren zusammengefaßt, so daß z.B. 4325 als 43 25 erscheint.

Wortzahlen

In vielen, besonders späteren Schriften werden Zahlen durch Worte von Dingen und Begriffen ersetzt, die in der betreffenden Anzahl auftreten, so 1 durch Mond, Erde, Anfang u.a., 2 durch Zwillinge, Augen, Flügel, Hälfte, Hand, Arm, Ohr u.a. [DS; 1, 54 ff.]. Bei größeren Zahlen treten diese Wörter dekadisch aneinander.

Diese Wortzahlen erscheinen schon sehr früh – ab der vedischen Literatur – ohne Positionscharakter. Außer in der allgemeinen Literatur kommen sie ab der klassischen Periode (ca. ab 300 n. Chr.) sehr häufig auch in den astronomisch-mathematischen Werken vor, hier bereits als dezimale Positionszahlen. Dazu diene als Beispiel die Zahl 3179 bei **Bhāskara I** [I, 4]:

nava	–	*adri*	–	*rūpa*	–	*agni*
neun		Berg		Form		Feuer
9		7		1		3

Hier steht die höchste Zehnerpotenz entgegen der altindischen Ziffernschreibweise ganz rechts. Dies ist die bei Wortzahlen übliche Richtung. Auch sieht man, daß die gewöhnlichen Zahlworte hier *nava* = 9, mit echten Wortzahlen gemischt werden können.

In dem Beispiel ist
adri = Berg = 7, nach 7 mythischen Hauptbergen bzw. Bergketten
rūpa = Form, Gestalt, Zeichen, Schönheit, Einheit usw. = 1
agni = Feuer = 3, nach den 3 Opferfeuern.

Diese Wortzahlenkombinationen erfreuten sich großer Beliebtheit, da es viele Möglichkeiten gibt, mit ihnen Zahlen auszudrücken und ins Versmaß einzupassen. Seit 600 n. Chr. erscheinen sie auch in Inschriften [BSS; 172–175].

Alphabetische Zahlensysteme

Auch Zahlbezeichnungen durch Buchstaben kommen vor. Solche Darstellungsweisen, sog. alphabetische Zahlensysteme, waren in der indischen astronomisch-mathematischen Literatur, in Inschriften und Widmungen bis in die neuere Zeit hinein beliebt. Das älteste alphabetische Zahlensystem stammt von **Āryabhaṭa I** [Gī. 1] und hat folgende Struktur:

Die 25 sog. „*Varga*-Konsonanten" (in *Gutturale*, *Palatale*, *Cerebrale* und *Labiale* klassifizierte Konsonanten) von k bis m werden mit den Zahlen 1 bis 25, die sog. „*Avarga*-Konsonanten" (nicht klassifiziert) von y bis h mit den Zahlen 3 bis 10 belegt. Der Stellenwert wird durch die indischen Vokale a bis au (ohne Berücksichtigung der Länge) gebildet. Jedem Vokal entspricht eine *Varga*stelle (Wert 10^{2n} mit n = 0, 1, 2, 3, ...). Die *Varga*-Konsonanten können nur der *Varga*stelle eines Vokals zugeordnet werden. Entsprechendes gilt für die Avargastellen. Tabelle 3 verdeutlicht den Zusammenhang:

Tabelle 3

	au	o	ai	l	ḷ	ṛ	u	i	a
varga	10^{16}	10^{14}	10^{12}	10^{10}	10^{8}	10^{6}	10^{4}	10^{2}	10^{0}
avarga	10^{17}	10^{15}	10^{13}	10^{11}	10^{9}	10^{7}	10^{5}	10^{3}	10^{1}

Die Vokalreihe ist von rechts nach links angeschrieben, um die gewohnte Richtung der Positionsstellen zu erhalten.

Varga-Konsonanten:

k	kh	g	gh	ṅ
1	2	3	4	5
c	ch	j	jh	ñ
6	7	8	9	10
ṭ	ṭh	ḍ	ḍh	ṇ
11	12	13	14	15
t	th	d	dh	n
16	17	18	19	20
p	ph	b	bh	m
21	22	23	24	25

Avarga-Konsonanten:

y r l v ś ṣ s h

3 4 5 6 7 8 9 10

Beispiele für *Varga*-Bildungen:
ka = 1, *ki* = 100, *kau* = $1 \cdot 10^{16}$,
ta = 16, *ti* = $16 \cdot 10^2$, *te* = $16 \cdot 10^{10}$,
ma = 25, *mu* = $25 \cdot 10^4$, usw.

Beispiele für *Avarga*-Bildungen:
ya = $3 \cdot 10^1$, *ri* = $4 \cdot 10^3$.

Die Zuordnung der Buchstaben zu den Zahlen ist nicht eindeutig, so ist: *ki* = *ha* = 100; *ku* = $1 \cdot 10^4$ = *hi* = $10 \cdot 10^3$.

Als belegtes Beispiel sei hier die Zahl der Jahre in einer Weltperiode, „Yuga", genannt:

khyughṛ = *kh* *y* *u* *gh* *ṛ*
$2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^6 = 4\,320\,000$.

Dieses alphabetische Zahlensystem kommt nur im Werk von **Āryabhaṭa I** vor. Es ist kein Positionssystem, denn die Zehnerpotenz wird angeschrieben und nicht aus der Stellung der Ziffern abgelesen. Es wurde in zahlreichen Abhandlungen der Sekundärliteratur, doch nicht immer korrekt, wiedergegeben. Richtige Darstellungen geben u.a. **Datta/Singh** [DS; **1**, 63–72], **Sen** [297–302] und **Elfering** [29–41].

Ein Positionssystem ist dagegen das sog. *Kaṭapayādi*-System, das in vier Varianten auftritt. In ihm werden die Ziffern 1 bis 9 und die Null verschiedenen Konsonanten nach folgendem Schema zugeordnet:

1 →	*k,*	*ṭ,*	*p,*	*y*
2 →	*kh,*	*ṭh,*	*ph,*	*r*
3 →	*g,*	*ḍ,*	*b,*	*l*
4 →	*gh,*	*ḍh,*	*bh,*	*v*
5 →	*ṅ,*	*ṇ,*	*m,*	*ś*
6 →	*c,*	*t,*	*ṣ*	
7 →	*ch,*	*th,*	*s*	
8 →	*j,*	*d,*	*h*	
9 →	*jh,*	*dh*		
0 →	ñ,	n		

Dieses System hat seinen Namen nach den Konsonanten, die der 1 zugeordnet werden können: *ka-ṭa-pa-ya-ādi*; *ādi* bedeutet soviel wie „beginnend mit". Es wird zuerst bei **Bhāskara I** in seinem Werk *Laghu-Bhāskarīya* [I, 18] erwähnt [DS; **1**, 69–73], ferner bei **Āryabhaṭa II** [I, 2] und anderen Autoren [BSS; 175].

Im *Kaṭapayādi*-System werden die Konsonanten wie Ziffern im dezimalen Positionssystem aneinandergereiht und durch beliebige Vokale, denen keine Bedeutung für die Zahlenbildung zukommt, voneinander getrennt. Auf diese Weise können die Lautkombinationen als Zahlen oder gegebenenfalls auch als Sanskrit-Wörter gelesen werden. Die Ziffern mit der höchsten Zehnerpotenz stehen dabei am rechten Ende, z.B.

sū-r-ya = 127; das Wort *sūrya* bedeutet „Sonne";
7 2 1

ka-ro-ti = 621; das Wort *karoti* bedeutet „er macht";
1 2 6

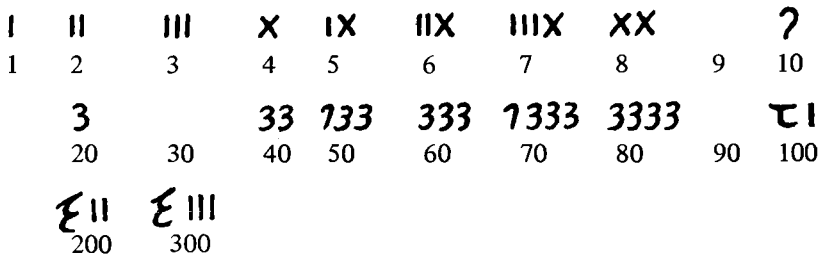
gha-ṭhu-bi-ra = 2324, ohne Wortbedeutung.
4 2 3 2

Auf die Verwendung eines Abakus bei den Indern deutet die Bezeichnungsweise *pāṭīgaṇita* hin, die als ein Synonym für Rechnen anzusehen ist. Es setzt sich zusammen aus *pāṭī, paṭṭa* bedeutet ein Brett (Schreibbrett) oder eine Tafel (*paṭ-* = spalten, abspalten, z.B. von Holz) und *gaṇita* = Rechnen. **Śrīdhara** z.B. hat ein Werk über das Rechnen mit dem Titel *Pāṭīgaṇita* [3; 4;] verfaßt.

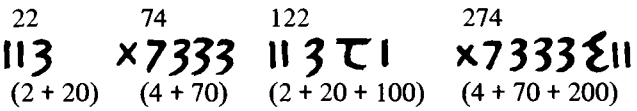
Dezimales Positionssystem und Ziffernschreibweise

Wann und wie unser modernes, nach allen Berichten aus Indien stammendes dezimales Positionssystem entstanden ist und wann die Null zum ersten Mal dort auftritt, darüber besteht noch keine vollständige Gewißheit. Aus Indien selbst besitzen wir nur wenige Quellen, deren Datierung zum Teil noch umstritten ist [BSS; 175–179]. Dies gilt besonders für eine erste vorchristliche Periode, aus der die *Śulvasūtras* (vgl. *Āpastamba-Śulba-Sūtra*) stammen (vielleicht zwischen dem 5. Jh. v. und dem 2. Jh. n. Chr.). Sie enthalten Regeln, die der rituellen Konstruktion von Altären unter Verwendung von Meßschnüren dienen. Andererseits kam Indien öfters in Berührung mit griechischer Kultur, z.B. hat **Varāhamihira** in seinen *Siddhāntas* auch das astronomische System des Griechen **Paulos von Alexandria** (ca. 380 n. Chr.), den *Puliśa-Siddhānta* und den *Romaka-Siddhānta* seinen Landsleuten bekannt gemacht. Im 5. Jh. n. Chr. nimmt die indische Mathematik einen plötzlichen Aufschwung, und zwar zuerst als Werkzeug der Astronomie. Beginnend mit dem *Sūrya-Siddhānta* und dem *Āryabhaṭīya* stehen uns Quellen zur Verfügung, aus denen man die Entwicklung der indischen Mathematik verfolgen kann. Es ist die sog. „klassische" oder nach **G. Thibaut** 3. Periode der indischen Naturwissenschaften. Man rechnet sie bis einschließlich **Bhāskara II** (12. Jh. n. Chr.).

Zu den ältesten Zahlzeichen in Indien zählen die in der *Kharoṣṭhī*-Schrift niedergelegten Ziffern. Hier verwendet man Individualzeichen für 1, 4, 10, 20 und 100, die bis 100 additiv miteinander verknüpft werden; die Vielfachen von 100 dagegen werden multiplikativ abgekürzt (Abbildung 7):



Die fehlenden Zahlen sind nicht belegt. Diese *Kharoṣṭhī*-Ziffern weisen bis zu 10 einen rein tetradischen Aufbau auf und zeigen damit, daß das Vierersystem dem Indischen nicht fremd ist [Hartner; 77]. Bemerkenswert ist die – gemäß der von rechts nach links laufenden *Kharoṣṭhī*-Schrift – Linksläufigkeit der mehrstelligen Ziffern. Demgemäß erscheinen größere Zahlen in der Form:



[BSS; 177]. Die *Kharoṣṭhī*-Ziffern wurden vom 4. bis zum 2. Jh. v. Chr. verwendet, wobei in der Spätzeit Varianten der Ziffernformen vorkommen.

Neben den *Kharoṣṭhī*-Ziffern wurden gleichzeitig auch die *Brāhmī*-Ziffern verwendet. Diese setzten sich seit der Zeit des Königs **Aśoka**, also von der Mitte des 3. Jhs. v. Chr. an allmählich allgemein durch. Die *Brāhmī*-Ziffern sind Individualzeichen für 1 und von 4 bis 9. In früheren Zeiten existierten ferner Individualzeichen für die Zehnerpotenzen. Im Gegensatz zu den Wortzahlen und den *Kharoṣṭhī*-Ziffern wurden die *Brāhmī*-Ziffern gemäß der *Brāhmī*-Schrift rechtsläufig geschrieben, d.h. die höchste Zehnerpotenz steht links.

Wie sich aus der *Brāhmī*-Schrift die über 200 indischen Schriftarten entwickelt haben, von denen die wichtigste die moderne *Nāgarī*-Schrift ist, so sind aus den ursprünglichen *Brāhmī*-Ziffern für 1 bis 9 über mancherlei Zwischenstufen die heute in den indischen Schriften verwendeten Ziffernformen entstanden.

Will man aus den Quellen feststellen, seit wann das dezimale Positionssystem mit den neun Ziffern und der Null in Indien voll entwickelt ist, dann muß man unterscheiden zwischen literarischen Zeugnissen und der durch epigraphische Dokumente gegebenen Gewißheit.

Es besteht wohl kaum ein Zweifel, daß das dezimale Positionssystem schon in den ersten nachchristlichen Jahrhunderten bekannt war. So ist bei **Āryabhaṭa I** ([Gaṇ. 2], vgl. [Elfering; 47 ff.]) und allen späteren Autoren das Prinzip des Stellenwertes nachweisbar. **Brahmagupta** und **Mahāvīra** nennen die Null und rechnen mit ihr, jedoch ohne das Stellenrechnen selbst ausdrücklich zu erwähnen; sie setzen also das Stellenwertsystem als selbstverständlich voraus. In ihren Texten erscheinen aber keine Ziffern, sondern nur ausgeschriebene Zahlwörter und Wortzahlen.

Als ältestes epigraphisches Beispiel der Ziffern gilt die *Gurjara*-Inschrift von 595 n.Chr. [Dhruva], [BSS; 177], [DS; **1**, 118]. Vom 8. Jh. an werden die Inschriften und Manuskripte mit Positionsziffern häufiger; eine entsprechende Liste gibt **Datta/Singh** [DS; **1**, 40 ff.]. Eine Null in Kreisform erscheint zuerst im Jahre 870 in den *Gwalior*-Inschriften des Bhojadeva [BSS; 177], [DS; **1**, 118], während eine Null in Punktform im *Bakhshālī*-Manuskript [105 ff.] auftritt [DS; **1**, 77]. **Datta** [1; 454] meint aus der Art der Verwendung des Wortes *śūnya* bei **Piṅgala** (200 v. Chr.) schließen zu können, daß bereits zu dieser Zeit nicht nur der Begriff des Leeren, sondern auch ein Symbol für die Null vorhanden war. Ausführlich sind die verschiedenen Ziffernformen aus den In-

schriften in [DS; **1**, 118ff.] zusammengestellt (vgl. auch [Menninger; 2, 233], [Smith/Karpinski; 49] und [BSS; 176 f.]). Abbildung 13, S. 66 gestattet nur einen kurzen Überblick über die Entwicklung der *Brāhmi*-Ziffern bis zu der modernen *Nāgarī*-Schrift: Schon **al-Bīrūnī** [3; **1**, 174] sind die verschiedenen Formen der Zahlzeichen *(aṅka)* aufgefallen. Über die Weiterentwicklung der indischen Ziffern zu den modernen „arabischen" Ziffern in ihren ost- und westarabischen Formen s. S. 66 f.

Bereits aus einer Zeit, die vor der Zeit der in Indien selbst nachweisbaren paleographischen Dokumente für die Ziffern einschließlich der Null liegt, nämlich aus dem 7. Jh., stammen Inschriften aus Südostasien, auf denen Ziffern im dezimalen Positionssystem geschrieben sind, z.B.

605 608 [BSS; 178]

in Kambodscha (605), Sumatra (605, 606), auf der Insel Banka (608) und Java (682); die jeweiligen Jahreszahlen in Klammern sind *Śaka*-Daten. Daher verwundert es nicht, daß es über die Frage, ob das dezimale Positionssystem eine echte Erfindung der Inder ist oder ob eine Entlehnung von anderer (chinesischer?) Seite angenommen werden muß, unterschiedliche Meinungen gibt. Die Ansichten von **Carra de Vaux** [2], **Kaye** [31] und **Bubnov** [9, 269 f.] stehen in schroffem Gegensatz zu denen von **Gāṅguli** [134] und **Datta** und **Singh** [DS; **1**, 48 f.]. Doch stimmen die Ansichten der Inder mit allen späteren Zeugnissen der Araber und des Abendlandes darüber überein, daß die Methoden beim Rechnen mit den neun Ziffern und der Null aus Indien stammen.

Was die indischen Ziffern gegenüber anderen auszeichnet, ist ihre einfache Form, welche die Durchführung der Rechenoperationen auf knappem Raum ermöglicht und übersichtlich gestaltet. So hebt schon im Jahre 662 n. Chr. der syrische Gelehrte **Severus Sēḇōḵt**, der sich in seinen Schriften gegen „die übertriebene Hochschätzung der Griechen in der Wissenschaft" wendet, die großen Entdeckungen der Inder in der Astronomie und Mathematik rühmend hervor und fügt hinzu, „daß ihre Zahlenschreibweise, die mit Hilfe von neun Zeichen vorgenommen wird, über jedes Lob erhaben sei" [Sezgin; 20, 211], [Nau; 225–227], [DS; **1**, 96]. Freilich teilt **Sēḇōḵt** nicht mit, wie die indischen Ziffern geschrieben wurden; auch spricht er nur von neun Zahlzeichen und nicht von der Null. Es ist jedoch durchaus möglich, daß er die Null zwar kannte, sie aber nicht zu den Zahlzeichen rechnete, wie es bei vielen späteren Autoren üblich war [Juškevič 1; 107]. Aus der Tatsache, daß bereits **Severus Sēḇōḵt** die indischen Ziffern erwähnt, kann man schließen, daß schon im 7. Jh., lange vor den vom Kalifen **al-Manṣūr** angeordneten Übersetzungen indischer astronomischer Werke (s. S. 51 f.) auch Gelehrte anderer Nationen im Nahen Osten – wohl Perser und Araber – mit den indischen Ziffern in Berührung gekommen sind [Sezgin; 212].

Sexagesimalzahlen

Wie in der griechischen Mathematik so erscheinen bei den Indern die Sexagesimalzahlen bei der Gradmessung des Kreises; sie finden aber fast ausschließlich nur in der Astrono-

mie Verwendung. Ein altbabylonischer Einfluß kann nur vermutet werden; belegt ist, daß die Sexagesimalzahlen aus dem hellenistischen Kulturkreis übernommen wurden.

Die Sanskritbezeichnungen lauten:
aṃśa, aṃśaka, lava, bhāga
für Grad (bei **Āryabhaṭa I** [Elfering; 190], im *Sūryasiddhānta* [I, 28], bei **Āryabhaṭa II** [I, 6 ff.] usw.),
kalā, liptā (vom griechischen λεπτή)
für Minute,
vikalā, viliptā
für Sekunde.

Āryabhaṭa I gibt in seiner Sinustafel [Gī. 10] die Sinusdifferenzen mit den Werten 225, 224, 222, ..., 7 in Minuten *(kalā)* an. Hier ist die Bezeichnungsweise Minute quasi nur eine Maßeinheit; von Sexagesimalzahlen kann hier eigentlich nicht die Rede sein. Das *Bakhshālī*-Manuskript dagegen bringt ein Beispiel, bei dem $\frac{178}{29}$ in die Sexagesimalzahl

$$6 + \frac{8}{60} + \frac{16}{60^2} + \frac{33}{60^3} + \frac{6 + \frac{6}{29}}{60^4}$$

verwandelt wird, die im Manuskript folgendermaßen aussieht [24]:

6		Während die Bedeutung von *cha°* unbekannt ist, steht *li°* für *liptā*, das sonst die Benennung für die 2. Sexagesimalpotenz, hier aber für die 3. Potenz ist, und *vi°* für *viliptā* für die 4. Potenz; *śe* ist die Abkürzung von *śeṣam*, was soviel wie Rest bedeutet.
8		
60		
16	*cha°*	
60		
33	*li°*	
60		
6	*vi°*	
60		
śe°	6	
	29	

Nach **Kaye** ist dies als das früheste Beispiel für eine Sexagesimalzahl in Indien außerhalb der Astronomie anzusehen; er vermutet daher hier bereits einen Einfluß der arabischen Mathematik, bei der ja die Sexagesimalzahlen eine große Rolle spielen, auf die indische Mathematik [Bakhskālī-Manuskript; 73].

1.2.2.10 Die Juden

L.: Gandz [6; 401–464].

Wie bei anderen Völkern so waren auch bei den Juden mehrere Systeme zur Darstellung von Zahlen in Gebrauch. Bereits aus der Zeit um das 9./8. Jh. v. Chr. existieren Ostraka, auf denen neben dem Einerstrich (I) und der 2 (II) Zahlzeichen vorkommen, über deren

spezielle Werte noch keine einheitliche Meinung herrscht und die gewisse Ähnlichkeiten mit den ägyptischen Zahlen aufweisen. Aramäische Inschriften aus der Zeit von 495–404 v. Chr., die man in Assuan gefunden hat, enthalten ein vollständiges Ziffernsystem, deren Ziffernformen den phönikischen Zahlzeichen zu ähneln scheinen (hebräisch-aramäische Zahlzeichen). Die Phöniker schrieben die Zahlen von 1–9 durch Einerstriche |, ||, |||, ..., ||| ||| ||| und kannten spezielle Zeichen für 10 (⟌), 20 (𐡊) und 100 (|°|); z.B. 90 = ⟌𐡊𐡊𐡊𐡊 , 300 = |°||| [Gandz 6; 421]. Hebräische Zahlzeichen finden sich ferner auf Ossarien in Jerusalem, die aus dem 1. Jh. v. Chr. stammen [Gandz 6; 408–415].

Eine wesentlich größere Bedeutung als diesen Zahlzeichen kommt den alphabetischen Ziffernsystemen zu. Auch hier waren mehrere Arten in Gebrauch. In einer Sabäischen Inschrift aus dem 8. Jh. v. Chr. z.B. wird ein System angewendet, das, was das Prinzip anbelangt, dem Herodianischen System der Griechen äquivalent ist: die Zehnerpotenzen werden durch die Anfangsbuchstaben des jeweiligen Zahlwortes wiedergegeben:

100, hebr. *mē'āh*, durch *m* = 𐤌 , hier speziell 𐡌 geschrieben,
1000, hebr. *'elef*, durch *a* = 𐤀 , hier speziell 𐡀 geschrieben.

Die 50 wird durch 𐡍 $= \frac{100}{2}$ ausgedrückt. Die Zahl 6 350 erhält dann, da das Hebräische eine linksläufige Schrift ist, das folgende Aussehen:

𐡍𐡌𐡌𐡌 𐡀𐡀𐡀𐡀𐡀𐡀

Ein weiteres alphabetisches Zahlensystem der Juden bestand darin, daß man dem hebräischen Alphabet, das wie das phönikische aus 22 Buchstaben besteht, in entsprechender Reihenfolge die Zahlen 1–22 zuordnete. Dieses System, in dem *yōd* = 10, *kaf* = 11, *lāmed* = 12 . . . ist, kommt auf Münzen im 2. und 1. Jh. v. Chr. vor [Gandz 6; 437 f.].

In einem dritten System wurden, wie beim griechischen Zahlen-Alphabet, den Buchstaben des Alphabets die Zahlenwerte 1, 2, ..., 9; 10, 20, ..., 90; 100, 200, ... beigelegt. Hier bedeutet also *yōd* = 10, *kaf* = 20, *lāmed* = 30, ... Diese Art der Ziffernschreibweise taucht erstmals in der sog. *Gematria* auf, was etymologisch auf griechisch γραμματεία zurückgeht [Gandz 6; 439] und soviel wie zahlenmäßige Interpretation der Buchstaben des Alphabets bedeutet. In der Bibel kommt, entgegen früheren Annahmen, die numerische Gematria noch nicht vor, die ältesten schriftlichen Dokumente dieser Art von Gematria gehen auf das 1. Jh. v. Chr. zurück [Gandz 6; 446 f.]. Im Gegensatz zum griechischen Alphabet, das aus 27 Buchstaben besteht, hat das hebräische Alphabet nur 22 Buchstaben; das bedeutet, daß der letzte Buchstabe des Alphabets 400 bezeichnet. Um auch die Zahlen 500, 600, ..., 900 ausdrücken zu können, verwendete man zunächst Zusammensetzungen wie:

500 = 400 + 100,
600 = 400 + 200,
700 = 400 + 300,
800 = 400 + 400,
900 = 400 + 400 + 100 .

Später, um 900 n.Chr., führte man dafür die Formen von fünf hebräischen Buchstaben ein, die diese annehmen, wenn sie am Wortende stehen, nämlich für 500 *kaf*, für 600 *mēm*, für 700 *nūn*, für 800 *pēh*, für 900 *ṣādē*. Das ergibt die folgende Zusammenstellung:

1	α	א	*'alef*	10	ι	י	*yōd*	100	ρ	ק	*ḳōf*
2	β	ב	*bēṯ*	20	κ	כ	*kaf*	200	σ	ר	*rēš*
3	γ	ג	*gimmel*	30	λ	ל	*lāmeḏ*	300	τ	ש	*šīn*
4	δ	ד	*dāleṯ*	40	μ	מ	*mēm*	400	υ	ת	*taw*
5	ϵ	ה	*hē'*	50	ν	נ	*nūn*	500	φ	ך	*kaf*
6	ς	ו	*waw*	60	ξ	ס	*sāmeḵ*	600	χ	ם	*mēm*
7	ζ	ז	*zayin*	70	o	ע	*ᶜayin*	700	Ψ	ן	*nūn*
8	η	ח	*ḥēṯ*	80	π	פ	*pēh*	800	ω	ף	*pēh*
9	ϑ	ט	*ṭēṯ*	90	ς	צ	*ṣādē*	900	$\curlywedge$	ץ	*ṣādē*

Die Zahlen $\geqslant$ 1 000 wurden durch zwei über dem jeweiligen Buchstaben stehende Punkte wiedergegeben, z.B.:

$\ddot{\text{א}}$ = 1 000, $\ddot{\text{ב}}$ = 2 000, ..., $\ddot{\text{י}}$ = 10 000.

[Hartner; 106 f.].

Darüber hinaus war es im Mittelalter bei den Juden auch üblich, das vollständige dezimale Positionssystem mit den Ziffern 1, 2, ..., 9, 0, das ja zuvor die Araber von den Indern übernommen hatten (s. S. 51 ff.), mit den entsprechenden hebräischen Buchstabenzahlen (Abb. 9, 1. Spalte), einschließlich dem Zeichen für die Null 0 wiederzugeben; diese habe, so schreibt im 12. Jh. **Abraham ben Ezra**, die Form eines Rades *(galgal)* [2 f.]; also z.B. 1930 = א ל ג ○. Auf diese Art schrieben auch andere Autoren wie z.B. **Moses ben Tibbon** (13. Jh.), **Levi ben Gerson** (14. Jh.) und **Šālōm ben Yōsēf ᶜAnābi** (15. Jh., er übersetzte das Rechenbuch des **Kūšyār ibn Labbān** ins Hebräische) usw. ihre Zahlen.

Sexagesimalzahlen

Wie die Griechen (s. S. 33), so benützten auch die Juden das sexagesimale Zahlensystem nur für die Brüche, und zwar bevorzugt für die Brüche, die bei astronomischen Rechnungen auftraten. Entsprechend dem *Abǧad*-System der Araber (s. S. 55) verwendeten die Juden für die Sexagesimalbrüche die hebräischen Buchstabenzahlen für 1, 2, ..., 9 und 10, 20, ..., 50. Im Gegensatz zu den ganzen Zahlen steht hierbei die höchste Sexagesimalstelle rechts und die niedrigste links. Die einzelnen Sexagesimalstellen sind, wie z.B. **Abraham ben Ezra** ausdrücklich erwähnt [27], bei den Rechenbeispielen durch lange Striche voneinander zu trennen, also z.B. 3° 8′ 33″ 42‴ 30⁗. [Übs. 88, hebr. Text 79]:

	Quarten	Terzen	Sekunden	Minuten	Grade
hebr.	*rbīᶜīyīm*	*šlīšīyīm*	*šēnīyīm*	*rīšōnīm*	*maᶜalōṯ*
wörtl.	Vierte	Dritte	Zweite	Primen	Stufen
	ל	מב	לג	ח	ג

Bei **Levi ben Gerson** dagegen erscheinen die Sexagesimalbrüche in der anderen Richtung, die höchste Potenz steht links und die niedrigste rechts, z.B. 20′ 40″ 30‴ = ל מ כ [Übs. 61, hebr. Text 52]; dies ist wohl als eine Analogie zur Schreibrichtung der ganzen Dezimalzahlen anzusehen.

Nicht in der oben erwähnten Weise gibt **Abraham ben Ezra** in seinen Rechendiagrammen die Sexagesimalbrüche wieder; hier schreibt er sie wie die ganzen Zahlen im vollständigen Positionssystem, d.h. durch die Ziffern 1, ..., 9 einschließlich der Null in hebräischen Buchstaben, z.B. 3° 18′ 44″ 11‴ [Übs. 45, hebr. Text 43]:

Terzen	Sekunden	Minuten	Grade
א א	ד ד	ח א	ג

1.2.2.11 Die Araber

L.: Gerhardt [1], Juškevič [1; 186–196], Löffler, Ruska [2], Saidan [2], Sezgin, Smith/Karpinski, Uqlīdisī [2], Woepcke [4], [5].

Unter dem Namen Araber pflegt man alle die Autoren zusammenzufassen, die in dem islamischen Kulturbereich vom Ebro bis zum Indus durch die gemeinsame Religion verbunden waren und ihre Schriften vornehmlich in Arabisch, manchmal auch in Persisch verfaßten. Die Araber haben verschiedene Möglichkeiten, eine Zahl wiederzugeben.

Zahlendarstellungen mit Hilfe der Finger

Eine besondere Rolle spielt das Fingerrechnen. Leider ist bisher kein Text ediert, der dem Fingerrechnen allein gewidmet wäre; auch bildliche arabische Darstellungen sind bislang unbekannt [Saidan 2; 21]. Man hielt mit den Fingern nicht nur die Zahlen von 1–10 fest, sondern man konnte unter Berücksichtigung der Möglichkeit, die Finger an 3 bzw. 2 Gelenken abzubiegen, auch mehrstellige Zahlen bequem darstellen. Dies beschreibt **Leonardo von Pisa**, der ja in seinem *Liber abbaci* vor allem arabisches Gedankengut vermittelt, so [1; **1**, 51]: mit den letzten drei Fingern der linken Hand stellt man die Einer dar, mit dem Zeigefinger und dem Daumen der linken Hand die Zehner (*articuli, nodi,* s. S. 20 vgl. Arabisch *ʿaqd*, Plural *ʿuqūd*). Die letzten drei Finger der rechten Hand bezeichnen die Hunderter, der Zeigefinger und der Daumen der rechten Hand die Tausender. Das bedeutet, daß man auf diese Weise an den Fingern die Zahlen von 1–9 999 darstellen kann. Das sagt auch **Abū Manṣūr** (+ 1037) in seinem noch nicht edierten Werk *al-takmila* (= die Vollendung) [Uqlīdisī 2; 349 f.]. Ein Bild, wie man sich demgemäß die Zahlen an den Fingern vorzustellen hat, vermitteln viele mittelalterliche Handschriften sowie z.B. auch **Luca Pacioli** [a; 36^{v}] (siehe Abb. 8); vgl. [D.E. Smith 6; 2, 196–202].

Sicherlich konnte man nicht beliebig große Zahlen mit Hilfe der Finger wiedergeben. Das Fingerrechnen ist eigentlich ein Kopfrechnen, bei dem man sich die betreffenden Ziffern an den Fingern merkt. Dem Fingerrechnen liegt nicht unbedingt ein dezimales Positionssystem der Zahlen zugrunde, es folgt aber bei den Arabern der in der Sprache verankerten dezimalen Bezeichnungsweise der Zahlen.

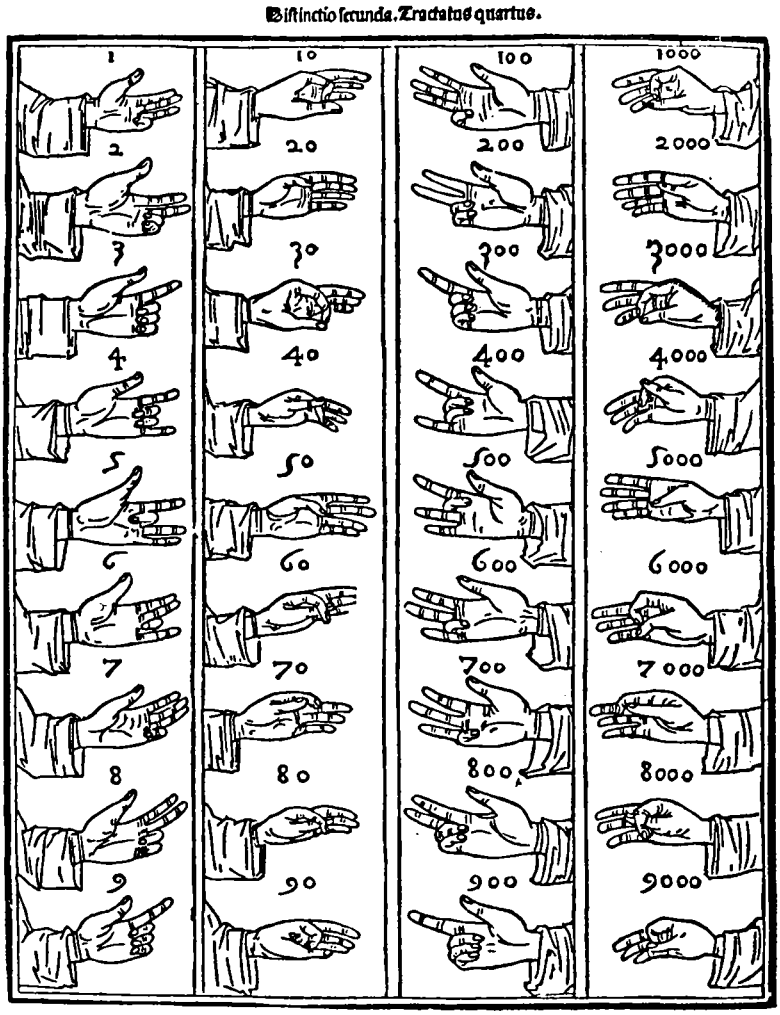


Abbildung 8. Fingerzahlen nach Luca Pacioli.

Sowohl in astronomischen wie auch in mathematischen Texten wird von der Anwendung des Fingerrechnens berichtet, das gewöhnlich als *ḥisāb al-yadd*, wörtlich Hand-Arithmetik bezeichnet wird. Diesen Terminus benützt 952/3 **al-Uqlīdisī**, der synonym auch *ḥisāb al-Rūm wa al-ʿArab* (das Rechnen der Byzantiner und Araber) dafür schreibt [Uqlīdisī 2; 7]. Vom Fingerrechnen schreiben ferner **Abū al-Wafā'**, **al-Karaǧī** und viele spätere Autoren [Saidan 2; 453].

Griechische Zahlbuchstaben

Im täglichen Leben verwendeten die Araber, um Zahlen schriftlich wiederzugeben, zunächst die Darstellungsweisen, die in den von ihnen eroberten Gebieten üblich waren.

Im östlichen Mittelmeerraum waren das die griechischen Zahlbuchstaben $\alpha = 1, \beta = 2$, ..., $\iota = 10$ ... Erst allmählich erfolgte eine Arabisierung des Finanz- und Verwaltungswesens. Viele Urkunden und Erlasse aus der Eroberungszeit sind nur griechisch geschrieben, manche zweisprachig griechisch und arabisch [Ruska 2; 38]. Zwischen 705 und 715 hat nach arabischen Quellen in Damaskus der Kalif **Walīd** den Gebrauch der griechischen Sprache bei der Führung von Steuerregistern verboten; er war aber gezwungen, die griechische Zahlbezeichnungsweise beizubehalten, *weil es unmöglich wäre, eins oder zwei oder drei oder acht einhalb usw. auf Arabisch zu schreiben* [Woepcke 5; 237], vgl. [Ruska 2; 39 f.]. Welche Bedeutung den griechischen Zahlbuchstaben im täglichen Leben zukam, zeigen z.B. die vielen arabischen Papyri aus dem Faiyūm (Oberägypten), siehe [Dietrich] und [Papyrus Erzherzog Rainer]. Diese Papyri reichen mit abnehmender Häufigkeit bis ins 10. Jh. Ja sogar aus dem Jahre 1120 existiert eine arabische Schuldverschreibung, bei der die Jahreszahl 513 *Hiğra* in griechischen Zahlbuchstaben geschrieben ist [Papyrus Erzherzog Rainer; 267, Nr. 1281].

Geschriebene Zahlwörter

Eine andere Art, Zahlen schriftlich wiederzugeben, bestand im vollständigen Ausschreiben der Zahlwörter. So existiert ein Erlaß aus dem Beginn des 8. Jhs., der zweisprachig in arabisch und griechisch verfaßt ist. Während in der griechischen Version die Zahlen in griechischen Zahlbuchstaben geschrieben sind, werden in der arabischen alle Zahlenangaben in Worten ausgeschrieben [Sezgin; 22]. Diese Methode wurde auch in Rechenbüchern verwendet. **Woepcke** [4; 52 f.] zählt eine Reihe arabischer Schriften auf, in denen nur geschriebene Zahlwörter vorkommen. Dazu gehören z.B. das Rechenbuch des **Abū al-Wafā'** (10. Jh. [Saidan 3], das Rechenbuch *Genügendes über Arithmetik* von **al-Karaǧī** [1] (Anfang 11. Jh.) und *Al-lumaᶜ fī ᶜilm al-ḥisāb* (= Weniges über die Wissenschaft der Arithmetik) von **ibn al-Hā'im** (14./15. Jh.). Rechenbücher dieser Art rechnet **Saidan** [Uqlīdisī 2; 15 f.] zu den sog. A-Typen (Abkürzung von „Arabischen" Typen), da sie nicht, was zeitlich möglich wäre, auf die indischen Zahlenschreibweisen und Rechenmethoden eingehen.

Die indischen Ziffern

Wann die Araber Kenntnis von den indischen Ziffern erhielten, ist nicht exakt feststellbar. Kalif **Walīd** (regierte von 705–715) erwähnt in seinem Erlaß, in dem er für amtliche Dokumente die griechische Schrift zwar verbietet, aber die griechischen Zahlbuchstaben zuläßt, die indischen Ziffern nicht, sie waren zu diesem Zeitpunkt wohl noch nicht bekannt (vgl. [Gerhardt 1; 21]). **Ǧābir ibn Ḥaiyān** dagegen erwähnt zwischen 760 und 770 sowohl die Null *al-ṣifr* (s.S. 17) als auch die Ziffern. Nach **Ruska** [3; 264] ist damit die Kenntnis der Null und der Ziffern bei den Arabern auf die Zeit um bzw. kurz vor 760–770 anzusetzen (vgl. auch [Sezgin 220 ff.]). Nach einem Bericht von **al-Qifṭī** in seinem Werk *al-hukamā'* (Chronik der Gelehrten) war im Jahre 773 eine indische Gesandtschaft an den Hof des Kalifen **al-Manṣūr** nach Bagdad gekommen; darunter befand sich *ein Mann aus Indien, ein Fachmann im Rechnen, das man mit Sindhind bezeichnet, über die Bewegungen der Sterne sowie über das Gleichsetzen, welches auf die Sinusse angewandt wird* . . . [Woepcke 5; 473]. Mit arabisch *Sindhind* wird das indische Wort *Siddhānta* wie-

dergegeben, was soviel wie „umfassendes Lehrbuch" bedeutet. Wahrscheinlich handelt es sich bei dem genannten indischen astronomischen Werk um den *Brahmāsphuṭasiddhānta* des **Brahmagupta** (entstanden um 628) [Woepcke 5; 475]. Weiter schreibt **al-Qifṭī**, der Kalif habe eine arabische Überarbeitung des Sindhind durch **al-Fazārī** herstellen lassen, die unter dem Namen *Großer Sindhind* schnell bekannt geworden sei. Dieses Ereignis aus dem 8. Jh. beschreiben ähnlich auch der weitgereiste Gelehrte **al-Masᶜūdī** (+ ca. 957) und **al-Bīrūnī** [Smith/Karpinski; 8f.]. Diese (nicht erhaltene) Überarbeitung des Sindhind hat selbständige Arbeiten arabischer Astronomen eingeleitet. So erfolgte später unter dem Kalifen **al-Ma'mūn** eine Neubearbeitung durch **Muḥammad ibn Mūsā al-Ḫwārizmī**. Dieser verfaßte u.a. eine Algebra [5], in der allerdings keine indischen Ziffern vorkommen, sowie danach ein Lehrbuch über das indische Rechnen, von dem die Urschrift nicht erhalten ist. Wir besitzen nur mehrere lateinische Bearbeitungen davon, z.B. *Dixit algorizmi* im Cod. Cambridge Un. Lib. Ms. I i. 6.5. [al-Ḫwārizmī 2], *Liber alghoarismi*, das dem **Johannes Hispalensis** zugeschrieben wird, siehe [Allard 2].

Das älteste, bisher bekannte arabische Dokument, auf dem sich indische Ziffern befinden, ist ein Papyrus, auf dem die Jahreszahl 260 der *Hiǧra* (= 873/4 n. Chr.) vermerkt ist: ٢٦٠ [Papyrus Erzherzog Rainer; 216 f., Nr. 798]. Dies gilt zugleich als die älteste arabische Urkunde, auf der die Null – hier als Punkt – dargestellt ist. Ein in Ostberlin aufbewahrter Papyrus gibt die Jahreszahl 275 der *Hiǧra* (= 888/9 n. Chr.) mit folgenden Ziffernformen wieder ٢٧٥ [Karabacek 2; 13]. Die in einer Felseninschrift bei Tōr angegebene Jahreszahl 378 H. (= 988/9) sieht so aus: ٣٧٨ [Karabacek 1; 187 f.].

Aus dem *Fihrist*, einem zusammenfassenden Werk des **ibn Abī Yaᶜqūb al-Nadīm** über arabische Geschichte und Literatur (geschrieben im Jahre 987) erfahren wir die Namen mehrerer Verfasser von Rechenbüchern, z.B. **al-Kindī** (ca. 800–870), **ᶜAbd al-Raḥmān al-Ṣūfī** (903–986), usw. [Smith/Karpinski; 10 f., 92 f.], [Suter 2; 23, 63]. Diese Rechenbücher sind jedoch nicht mehr erhalten, so daß uns die verwendeten Ziffernformen nicht überliefert sind. Soweit bisher bekannt, ist das älteste in Arabisch erhaltene Rechenbuch, in dem die indischen Ziffern vorkommen, das Werk *Kitāb al fuṣūl fī al-ḥisāb al-hindī* (= das Buch der Kapitel über das indische Rechnen) des **al-Uqlīdisī**, dessen Text im Jahre 341 H. (= 952/3 n. Chr.) in Damaskus geschrieben worden ist [2; 17 f.]. Dieses Werk steht am Anfang einer langwährenden Tradition von arabischen Rechenbüchern, die das Rechnen mit den indischen Ziffern lehren, so z.B.:

Kūšyār ibn Labbān: *Kitāb fī uṣūl ḥisāb al-hind*
(= Das Buch der Prinzipien des Rechnens der Inder),
al-Nasawī: *Al-muqniᶜ fī al-ḥisāb al-hindī*
(= Das Befriedigende über das indische Rechnen),
al-Ṭūsī [2]: *Ǧawāmiᶜ al-ḥisāb bi al-taḫt wa al-turāb*
(= Zusammenfassungen des Rechnens mit Hilfe von Brett und Staub).

Saidan bezeichnet diese Art von arabischen Rechenbüchern, die ja vielfach schon im Titel *ḥisāb al-hind* (= indisches Rechnen) tragen, als H-Typ. Später erfolgt eine Ver-

schmelzung der A-Typen und H-Typen zu den HA-Typen (z.B. bei **Abū Manṣūr** [Uqlīdisī 2; 15 f., 23–28].

Bemerkenswert ist, daß bei den Arabern das indische Rechnen immer mit dem Staubbrett *al-taḫt* verbunden war, siehe z.B. im Titel des oben genannten Rechenbuchs von **al-Ṭūsī** [2]. Das Wort *al-taḫt* ist eigentlich persischen Ursprungs [Uqlīdisī 2; 351]. Dieses Staubbrett muß man sich als ein Brett bzw. einen Tisch vorstellen, der mit Sand bzw. feinem Staub bedeckt ist, auf dem man mit einem Griffel geschrieben und, wenn notwendig, mit den Fingern wieder ausgelöscht hat; so beschreibt es bereits **al-Uqlīdisī** [2; 35 f.]. Linien, wie etwa beim Abakus, waren jedoch auf einem derartigen Staubbrett nicht vorhanden. Von einem Rechnen auf einem Linienabakus ist in den Texten der frühen Araber – im Gegensatz zu früheren Meinungen, vgl. **Gandz** [2; 310] und **Weißenborn** [2] – keine Rede. Erst im 13. Jh. beschreibt der in Marokko wirkende **al-Bannā'** einen Linienabakus [Uqlīdisī 2; 351 f.].

Die Ziffernformen

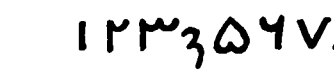
L.: Irani

Die Formen der indischen Ziffern bei den Arabern waren nicht einheitlich. In den mittelalterlichen Handschriften lassen sich deutlich 2 Hauptformen der indischen Ziffern bei den Arabern unterscheiden, die östlichen und die westlichen, siehe **Woepcke** [5; 56].

1. Im Osten verwendet **al-Uqlīdisī**, wie aus der 952/3 in Damaskus verfaßten Handschrift hervorgeht, folgende Ziffern:

die er als *ḥurūf al-hind* (= indische Ziffern) und als *al-ḥurūf al-tis*^{c} *a* (= die neun Ziffern) bezeichnet [Saidan 2; 94]. Die Null, *al-ṣifr*, schreibt er als kleinen Kreis ○. Diese Ziffernformen erscheinen, mit geringfügigen Varianten in fast allen mittelalterlichen arabischen Rechenbüchern von Persien bis Ägypten, also im ganzen östlichen arabischen Kulturbereich (indische Ziffern vom ostarabischen Typ). Beispiele s. Abb. 13, S. 66.

Die Null ist bei den eben genannten Ostarabern ein kleiner Kreis, aber schon in den Papyri (s. S. 52) erscheint sie als Punkt. In einer Handschrift der *kifāya* von **al-Arbilī** ist die Null sowohl als · als auch als ○ dargestellt [Uqlīdisī 2; 355]. Noch heute ist in den entsprechenden Ländern diese Art von Ziffern in Gebrauch und zwar in der Form

 [Menninger; 2, 228 ff.].

Woepcke zeigte, daß die ostarabischen Ziffernformen aus dem 10. Jh. große Ähnlichkeiten mit den indischen *Devanāgarī*-Zahlen des 10. Jhs. aufweisen [5; 483]. Bereits **al-Bīrūnī** vertritt in seinem Buch über Indien [3; 1, 174, Kap. XVI] die Meinung, daß die Zahlen, die die Araber benützen, von den entsprechenden indischen Ziffern abstammen.

2. Im westlichen Teil des arabischen Kulturbereichs dagegen, also speziell in Spanien und Marokko, erscheinen zur gleichen Zeit die indischen Ziffern in anderer Weise, sowohl in lateinischen Handschriften (z.B. im Cod. Vigilianus aus dem 10. Jh., s. S. 62), wie auch in arabischen Handschriften, s. Abb. 13, S. 66. Die Null wird generell als Kreis geschrieben.

Diese Ziffern zeigen zwar deutliche Unterschiede gegenüber den ostarabischen, doch scheint festzustehen, daß beide aus denselben Formen entstanden sind; die Varianten von 1, 4 und 9 weisen große Ähnlichkeit auf, die westarabischen Formen 2 und 3 entsprechen in etwa den ostarabischen nach einer Drehung um 90° und auch die anderen Ziffernformen kann man sich durch andere Strichführung entstanden vorstellen [Beaujouan].

Die westarabischen Ziffern werden von den jeweiligen Autoren als *ḥurūf al-ġubār* (= (= Staubziffern) bezeichnet, nicht im Gegensatz zu den ostarabischen indischen Ziffern, sondern im Gegensatz zu den *Ǧummal*zahlen (s. S. 55). Der Name *Ġubār*-Ziffern ist schon in der Mitte des 10. Jhs. in Tunis nachweisbar [D.E. Smith 6; 2, 73] und gibt einen deutlichen Hinweis auf die Benützung des Staubbretts. Aus diesen westlichen Formen haben sich unsere heutigen in Europa gebräuchlichen Ziffern entwickelt.

Sprachliche Besonderheiten bei den zusammengesetzten Zahlen

Das Arabische wird linksläufig geschrieben, die europäischen Sprachen und das Sanskrit hingegen rechtsläufig. Trotzdem werden bei den Arabern die mehrstelligen Zahlen in derselben Richtung – . . . Tausender, Hunderter, Zehner, Einer – angeschrieben, wie es bei uns geläufig ist, also z.B. 4 321:

T H Z E

٤ ٣ ٢ ١ ← arabische Schriftrichtung.

Auf diesem Hintergrund ist es von Interesse, wie die Araber diese mehrstelligen Zahlen ausgesprochen haben. Es gibt im klassischen Arabisch zwei Möglichkeiten dafür:

1. Man spricht eine Zahl genauso wie im Deutschen, und wie es auch im Lateinischen und Griechischen möglich ist, in der Reihenfolge . . . H, E, Z, z.B. bei **al-Uqlīdisī** [2; 357]: ٣٢١ (321): dreihunderteinundzwanzig. So ist es auch heute in den arabischen Ländern üblich.

2. Man nennt gemäß der arabischen Schriftrichtung zuerst die Einer, dann die Zehner, Hunderter, Tausender usw., z.B. liest **al-Ḥaṣṣār** 13 523 als „drei und zwanzig und fünfhundert und dreizehntausend" [Cod. Gotha 1489; 8b].

Darstellung großer Zahlen

Um größere Zahlen bequemer lesen zu können, teilt man diese in Gruppen zu je 3 Ziffern ein. Dies sieht z.B. bei **al-Ḥaṣṣār** im Cod. Gotha 1489 [6b] folgendermaßen aus:

6 5 4 3 2 1

. . . 000000000000000000 .

Die Ǧummalziffern und Sexagesimalzahlen

L.: Luckey [2; 37–53].

Ähnlich wie bei den Griechen, haben auch die Araber den Buchstaben ihres Alphabets Zahlenwerte zugeordnet.

α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ	ι	κ	λ	μ	ν
ا	ب	ج	د	ه	و	ز	ح	ط	ي ـ	ك	ل ـ	م ـ	ن ـ
a	*b*	*g*	*d*	*h*	*w*	*z*	*h*	*t*	*i*	*k*	*l*	*m*	*n*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50

Abbildung 9. Einfache Ǧummalzahlen.

Diese Zahlenschreibweise bezeichnet man als *Abǧad*-System gemäß der früheren Reihenfolge des arabischen Alphabets *alif, bā, ǧim, dāl* . . ., die der hebräischen und griechischen entspricht, nicht aber der heutigen *alif, bā, tā, ṯā*. . . Ein anderer Name für diese arabischen Buchstabenzahlen ist *Ǧummalzahlen (ḥurūf al-ǧummal)*; *ǧumla,* (Plural *ǧumal*) bedeutet nach **Juškevič** [1; 237] Menge, Summe, Schar.

Die Buchstabenformen 2, 3, 7 und 10 wurden ohne diakritische Punkte geschrieben und die 3 erscheint zur Unterscheidung von der 8 immer nur in der Form des nach links verbundenen Buchstabens.

Zweistellige Zahlen wurden wie Buchstaben verbunden geschrieben; dabei treten dann leicht Unklarheiten auf. So ist z.B. ه (15) und ه̇ (55) nur durch den Punkt zu unterscheiden. Auch die ه (5) und das Zeichen für die Null ٥ bieten Verwechslungsmöglichkeiten, weshalb man die Null durch ٣ bzw. ٢ ersetzt findet [Woepcke 5; 471 f.]. **Al-Bīrūnī** empfiehlt ferner zur Unterscheidung des ٤ (30) vom ٤ (20) dessen breitere Form ٤ zu verwenden [Luckey 2; 38].

1 ا	10 ى	100 ق	1000 غ	10 000 يغ	100 000 قغ
2 ب	20 ك	200 ر	2000 بغ	20 000 كغ	200 000 رغ
3 ج	30 ل	300 ش	3000 جغ	30 000 لغ	300 000 شغ
4 د	40 م	400 ت	4000 دغ	40 000 مغ	400 000 تغ
5 ه	50 ن	500 ث	5000 هغ	50 000 نغ	500 000 ثغ
6 و	60 س	600 خ	6000 وغ	60 000 سغ	600 000 خغ
7 ز	70 ع	700 ذ	7000 زغ	70 000 عغ	700 000 ذغ
8 ح	80 ف	800 ض	8000 حغ	80 000 فغ	800 000 ضغ
9 ط	90 ص	900 ظ	9000 طغ	90 000 صغ	900 000 ظغ

Abbildung 10. Zusammengesetzte Ǧummalzahlen.

Für die Zahlen > 59 setzte man also die noch übrigen, nur durch diakritische Punkte von den anderen unterschiedenen Buchstaben ein. Allerdings gibt es hierbei auch Unterschiede, s. maghrebinische Form [Woepcke 5; 463, Fn. 1].

Al-Bīrūnī geht in seinem Werk über Astrologie auf die (nach der Umstellung) verwirrend komplizierte Reihenfolge der arabischen Buchstaben bei den *Ǧummalzahlen* ein [5; 40–42], deren Darstellung in Abb. 11 wiedergegeben ist.

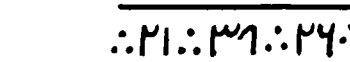
Al-Bīrūnī meint, daß man für die Ziffernschreibung auch die neue alphabetische Ordnung *(a, bā, tā, ṯā . . .)* hätte verwenden können, doch schließlich sei dies alles nur eine Sache der Konvention. Als Grund für die Verwendung der Ǧummalziffern führt **al-Bīrūnī** an, sie trügen zur Platzersparnis bei und seien leicht zu schreiben.

Im Gegensatz zu den indischen Ziffern wurden die *Ǧummalziffern* mit von rechts nach links fallenden Potenzen angeschrieben, z.B.:

$$\overrightarrow{59} = \overleftarrow{\text{ṭn}}\,.$$

Das älteste bisher bekannte schriftliche Zeugnis für die Ǧummalzahlen stellt ein Papyrus aus dem Faiyūm (Oberägypten) dar. Es handelt sich hierbei um eine zweisprachige (griechisch-arabische) Steuerurkunde aus dem 8. Jh., bei der in dem an zweiter Stelle stehenden arabischen Text die Steuersumme in Ǧummalzahlen erscheint [Papyrus Erzherzog Rainer; 154, Nr. 605], vgl. [Ruska 2; 40]. Ebenfalls Ǧummalzahlen weist die *Bilanz des Schatzhauses von el-Faijūm* aus dem Jahre 851 n. Chr. auf [Papyrus Erzherzog Rainer; 200 f., Nr. 761]. Ein weiterer Papyrus aus dem 9./10. Jh. enthält die Zahlenwerte der Buchstaben des arabischen Alphabets zu astronomischen Zwecken [Papyrus Erzherzog Rainer; 246, Nr. 927]. Tabellen der Ǧummalzahlen geben die aus dem 10. Jh. stammenden Schriften der **Iḫwān al-Ṣafā'** [Ruska 2; 44].

In den Rechenbüchern und astronomischen Lehrbüchern finden die Ǧummalzahlen weite Verbreitung. Sie werden hier im Gegensatz zu den Papyri meistens zur Darstellung der Sexagesimalzahlen bzw. Sexagesimalbrüche verwendet. Das heißt, daß vor allem die Zahlen ⩽ 59 von Wichtigkeit sind. Die in den astronomischen Tafelwerken auftretenden Sexagesimalbrüche werden fast ausschließlich in Ǧummalzahlen geschrieben [Woepcke 5; 464 f.]; demzufolge wird das Rechnen mit Sexagesimalzahlen als „Rechnungsverfahren der Astronomen" aufgefaßt, z.B. bei **al-Kāšī** [Luckey 2; 37]. In den Rechenbüchern dagegen werden die Sexagesimalzahlen sowohl in Ǧummalzahlen wie auch in indischen Ziffern, bevorzugt in Kolumnenform, angeschrieben (s. auch S. 109 ff.) **Al-Uqlīdisī** z.B. vertritt die Meinung, daß für die Sexagesimalbrüche die Schreibweise in Ǧummalzahlen der Eindeutigkeit und Klarheit wegen vorzuziehen sei. Doch verwendet er ebenso die indischen Ziffern, dann jedoch sind die Brüche entweder in Kolumnenform oder aber in einer Reihe angeschrieben, z.B. erscheint 2; 26, 38, 21 (zu dieser modernen Schreibweise der Sexagesimalzahlen s. S. 28, Fn. 1) als:



[Saidan 2; 165 ff.];

Alif, Wāw und Yā werden auch zur Bezeichnung der langen Vokale $\bar{a}$, $\bar{u}$ und $\bar{i}$ verwendet. In der Literatur auftretende Varianten der Transkription sind: *j* (für *ǧ*), *kh* (für *ḫ*), *dh* (für *ḏ*), *sh* (für *š*), *gh* (für *ġ*), *th* (für *ṯ*), *k* (für *q*) und *j* (für *y*). ▷

Arabisches Alphabet						Zahlenwerte	
Name	Transkription	Figuren				Normalform	maghrebinische Form
		Nicht verbunden	Nur mit dem vorhergehenden verbunden	Von beiden Seiten verbunden	Nur mit dem folgenden verbunden		
Alif	ʾ	ا	ـا	—	—	1	1
Bā	b	ب	ـب	ـبـ	بـ	2	2
Tā	t	ت	ـت	ـتـ	تـ	400	400
Ṯā	ṯ	ث	ـث	ـثـ	ثـ	500	500
Ǧīm	ǧ	ج	ـج	ـجـ	جـ	3	3
Ḥā	ḥ	ح	ـح	ـحـ	حـ	8	8
Ḫā	ḫ	خ	ـخ	ـخـ	خـ	600	600
Dāl	d	د	ـد	—	—	4	4
Ḏāl	ḏ	ذ	ـذ	—	—	700	700
Rā	r	ر	ـر	—	—	200	200
Zāj	z	ز	ـز	—	—	7	7
Sīn	s	س	ـس	ـسـ	سـ	60	300
Šīn	š	ش	ـش	ـشـ	شـ	300	1 000
Ṣād	ṣ	ص	ـص	ـصـ	صـ	90	60
Ḍād	ḍ	ض	ـض	ـضـ	ضـ	800	90
Ṭā	ṭ	ط	ـط	ـطـ	طـ	9	9
Ẓā	ẓ	ظ	ـظ	ـظـ	ظـ	900	800
ᶜAin	ᶜ	ع	ـع	ـعـ	عـ	70	70
Ġain	ġ	غ	ـغ	ـغـ	غـ	1 000	900
Fā	f	ف	ـف	ـفـ	فـ	80	80
Qāf	q	ق	ـق	ـقـ	قـ	100	100
Kāf	k	ك	ـك	ـكـ	كـ	20	20
Lām	l	ل	ـل	ـلـ	لـ	30	30
Mīm	m	م	ـم	ـمـ	مـ	40	40
Nūn	n	ن	ـن	ـنـ	نـ	50	50
Hā	h	ه	ـه	ـهـ	هـ	5	5
Wāw	w	و	ـو	—	—	6	6
Yā	y	ى	ـى	ـيـ	يـ	10	10

Abbildung 11. Arabische Buchstaben und ihre Zahlenwerte.

Die Potenzen fallen hier im Gegensatz zu den indischen Dezimalzahlen von rechts nach links. Diese Art der Darstellung ist jedoch relativ selten anzutreffen. **Kūšyār ibn Labbān** nennt sie nicht; seine Sexagesimalzahlen erscheinen im laufenden Text entweder in Worten ausgeschrieben oder in Ğummalzahlen. In den Rechenansätzen dagegen verwendet er die indischen Ziffern in Kolumnenform [Luckey 2; 78 f.]. Und **al-Ṭūsī** führt ausdrücklich zwei Wege für „die Bruchrechnung nach dem Verfahren der Astronomen" an:

1. ihr Verfahren mittels der Rechnung der Inder,
2. ihr Verfahren mittels der Ğummalrechnung.

Das sexagesimale Positionssystem wird bei den Arabern jedoch nicht nur auf die Brüche, sondern auch auf die ganzen Zahlen mit $n > 60$ angewandt. Es handelt sich dann wieder um allgemeine Sexagesimalzahlen, vergleichbar denen der Babylonier. Von diesen Zahlen im reinen 60er-System handelt wahrscheinlich ein nicht mehr erhaltenes Werk des **Abū al-Wafā'** (940–998) *Kitāb al-ᶜamal bil-ǧadwal al-sittīnī* (= Schrift über die Rechnung mit der sexagesimalen Tafel) [Luckey 2; 82 f.], ferner ein zwar in Handschriften erhaltenes, aber noch nicht ediertes Werk des **Abū Naṣr Manṣūr** (um 1000): *Lehrbrief über die Minutentafel* [Luckey 2; 86] und ein von **Luckey** [2; 39, 65–72] ausführlich beschriebenes Werk des **Sibṭ al-Māridīnī** (1423–1506) *Raqā'iq al-ḥaqā'iq fī ḥisāb al-daraǧ wa al-daqā'iq* (= Feinheiten der Wahrheiten über die Rechnung der Grade und Minuten). In edierter Form zugänglich ist die reine Sexagesimalrechnung bei **Kūšyār ibn Labbān** [72–99], **al-Ṭūsī** [2; 276–286], **al-Kāšī** [73–101].

Ein besonderes Problem bei den Sexagesimalzahlen liegt in der Kennzeichnung der einzelnen Sexagesimalstellen. Die Stellen mit $a_i \cdot 60^{+n}$, $n = 1, 2, \ldots$ werden von **al-Kāšī** [Luckey 2; 42, 131] als *al-marfūᶜa* (= Erhöhte) bezeichnet; demgemäß sind die Ziffern bei:

60^1 = einmal Erhöhte
60^2 = zweimal Erhöhte
⋮ ⋮ ⋮

usw. *bis ins Unendliche.*

Entsprechend werden die Stellen für $a_i \cdot 60^{-n}$ als *al-maḥtūtā* (= Erniedrigte) bezeichnet und zwar die Ziffern bei:

60^{-1} als Minuten (*daqīqa*, Pl. *daqā'iq*),
60^{-2} als Sekunden (*ṯānī*, wörtlich „Zweites"),
60^{-3} als Terzen (*ṯālīṯ*, wörtlich „Drittes"),
⋮ ⋮ ⋮

usw. *bis ins Unendliche.*

Die der Einerstelle entsprechenden Zahlen bei 60° werden mit *daraǧāt* = Grade (wörtlich: Leiter, Stufe, Sprosse) benannt. Somit wird eine beliebige Sexagesimalzahl nach dem Schema

m-mal Erhöhtes	zweimal Erhöhtes	einmal Erhöhtes	Grade	Minuten	Sekunden

$$a_m \cdot 60^m + \ldots + a_2 \cdot 60^2 + a_1 \cdot 60^1 + a_0 \cdot 60^0 + a_{-1} \cdot 60^{-1} + a_{-2} \cdot 60^{-2} \ldots$$

mit $0 \leqslant a_i \leqslant 59$ beschrieben. Die Koeffizienten a_i bezeichnet **al-Kāšī** sinngemäß als *al-arqām al-sittīniya* (= Sexagesimalziffern) [Luckey 2; 41].

Um bei einer beliebigen Sexagesimalzahl die einzelnen Stellenwerte sichtbar zu machen, werden verschiedene Möglichkeiten verwendet. Bei **Sibṭ al-Māridīnī** z.B. findet man in den Handschriften folgende Bezeichnungsweisen:

(4) (25) (40):
Erhöhtes, Grade und Minuten, d.h. alle Stellen werden bezeichnet,
(7) (38) (30) (49) (41) (45):
Quarten, und ihre erste Stelle ist einmal Erhöhtes, d.h. bei längeren Zahlen werden nur die erste und die letzte Stelle bezeichnet,
(0) (30) (0) (36):
Terzen, d.h. die Grade bilden, ohne daß dies gesagt wird, die höchste Stelle.

Die Klammern ( ) bedeuten, daß diese Zahlen im Original als Ǧummalzahlen geschrieben sind. Darüber hinaus schreibt **Sibṭ al-Māridīnī** [Luckey 2; 68]: *Du mußt aber die Stelle der Grade durch ein Zeichen markieren, wenn bei ihnen Erhöhtes steht. . .* Eine derartige Markierung der sexagesimalen Einerstelle entspräche im dezimalen Positionssystem etwa dem Komma. Doch fehlt in den von Luckey untersuchten Handschriften des **Sibṭ al-Māridīnī** eine derartige Markierung.

Al-Kāšī gibt, wenn er im fortlaufenden Text Sexagesimalzahlen schreibt, jeweils deren niedrigste Stelle in Worten daneben an, z.B.:

1 33 26 45 37 Sekunden für 1, 33, 26; 45, 37 .

Ferner stellt **al-Kāšī**, wenn es sich um sexagesimale Rechnungen handelt, die Sexagesimalzahlen in Tabellenform dar, wobei entsprechende Sexagesimalstellen in einer Spalte stehen, z.B.:

Sekunden	Minuten	Grad	Einmal Erhöhtes	Zweimal Erhöhtes	Namen der Stellen
an wl y	m ḥm wy	ḥy k zm	k bm l		Die Zahlen, die wir addieren wollen
zl	hm	wk	gl	a	Das Ergebnis

[Luckey 2; 42 f.]. Hier sind die Sechzigerstellen und die Umschriftbuchstaben der von **al-Kāšī** verwendeten Ǧummalzahlen in der von rechts nach links laufenden Anordnung des Urtextes wiedergegeben.

1.2.2.12 Byzanz

L.: Smith/Karpinski, Tannery [4], Vogel [13].

Belege für das Fingerrechnen gibt es auch bei den Byzantinern, z.B. in einem um 1341 geschriebenen Brief von **Nikolaos Rhabdas** in dem Abschnitt Ἔκφρασις τοῦ δακτυλικοῦ μέτρου [90 ff.]. Die Verwendung der Fingerzahlen beim Rechnen schildert sehr anschaulich **Nikolaos Mesarites** (ca. 1200) bei der Beschreibung der Apostelkirche [Heisenberg; 17 ff., 60 ff.]. Im schriftlichen Rechnen benützt man die klassischen griechischen Buchstabenzahlen. Schon bald treten auch die indischen Zahlzeichen auf, doch wird die Positionsschreibung noch nicht voll erfaßt, so im **Euklid**-Scholion von der Hand des **Arethas** in der **Euklid**-Handschrift von 888 [Euklid 1; **5**, XIX] und bei **Neophytos** (um 1200) [Tannery 3]. Die Null tritt hier noch nicht als gleichberechtigt neben die anderen Ziffern, sondern sie erscheint als diakritisches Zeichen (Punkt oder Omikron) über den Ziffern, also 10 = i̇, ..., 10 000 = ï̈. Für die richtige Verwendung der Null haben wir erst ab dem 12. Jh. Belege, so in **Euklid**-Scholien [Euklid 1; **5**, 490, 495]. **Planudes** nimmt in seinem Rechenbuch [1; 1], [3] die östlichen Ziffern formen, während in einer ähnlichen Schrift aus dem Jahre 1253 [Allard 5], die **Planudes** als Quelle benützt hat [Vogel 13; 663], die westlichen Formen erscheinen (z.B. im Cod. Par. suppl. gr. 387 aus dem 14. Jh.). **Planudes** hat seine Vorlage erweitert und die westlichen Ziffern durch die ostarabischen ersetzt, vielleicht unter dem Einfluß der um diese Zeit stärker hervortretenden Beziehung zur persischen Wissenschaft, deren Weg über Trapezunt ging.

Neben den indischen Ziffern bleiben nach wie vor auch die griechischen Zahlbuchstaben in Gebrauch; man sieht dies bei **Pachymeres**, einem Zeitgenossen von **Planudes**, dann bei **Moschopulos**, **Pediasimus**, **Barlaam**, **Isaak Argyros** und sogar bei **Nikolaos Rhabdas**, der das Rechenbuch des **Planudes** neu herausgab [Tannery 4; 204]. Man machte sich auch die Vorteile der neuen Schreibweise zunutze, indem man für die Zahlen von 1 bis 9 an den Buchstaben festhielt und nur noch ein Zeichen für die Null dazunahm, wie in Handschriften der Parlamentsbibliothek in Athen aus dem 14. Jh. [Sarton 2; **3**, 121] oder in einem Rechenbuch aus dem 15. Jh. [Hunger/Vogel; 107]. Die Null ist hier entweder ein Punkt oder ein Zeichen, wie die ostarabische 6 oder die westarabische 5. Manchmal wurden auch beide Prinzipien vermengt, z.B. steht in einer Escorialhandschrift αφ7ο für 1570 [Vogel 13; 664].

Sexagesimalzahlen

Bei den Byzantinern bleibt für die Sexagesimalbrüche – ganze Sexagesimalzahlen kommen nicht vor – die hellenistische Bezeichnungsweise mit Hilfe des griechischen Zahlenalphabets erhalten. Mit dem Aufkommen der indischen Ziffern findet man auch die ostarabische Kolumnenschreibung (s. S. 109 ff), so in Euklidscholien [Euklid 1; **5**, 571 ff.] und bei **Planudes** die sonst seltene Form der Schreibung in Zeilen mit nach rechts fallenden Potenzen, z.B. [1; 24]:

	ζώδια	μοῖραι	λεπτὰ	δεύτερα
	ο.	γγ.	ών.	μώ
0	Tierkreiszeichen	22°	57′	35″

Auf die engen Kontakte zwischen Byzanz und Rußland ist es zurückzuführen, daß man auch in Rußland eine alphabetische Zahlenschreibweise benützte, die den griechischen Zahlbuchstaben sehr ähnlich ist [Simonov], [Juškevič 1; 357 f.], [Juškevič 2; 11]. Wie bei den Griechen wurden die Zahlen von 1, 2, ..., 9, 10, 20, ..., 90, 100, 200, ..., 900 durch die Buchstaben des kyrillischen bzw. griechischen Alphabets geschrieben:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
а	в	г	д	є	ѕ	з	и	ѳ

10	20	30	40	50	60	70	80	90
і	к	л	м	н	ѯ	о	п	ч

100	200	300	400	500	600	700	800	900
р	с	т	у	ф	х	ѱ	ѡ	ц

1 000	10 000
҂а	ⓐ

Die indischen Ziffern erscheinen in einem russischen Lehrbuch erstmals 1703 und zwar in **L.F. Magnizkijs** enzyklopädischem Werk *Die Arithmetik oder die Lehre vom Rechnen.* Doch sind hier noch die Jahreszahl auf dem Titelblatt [Juškevič 2; 60] sowie die Seitenzahlen mit kyrillischen Ziffern dargestellt, siehe hierzu [Juškevič 2; 58–73]. Von diesem Zeitpunkt an werden die Ziffern in kyrillischen Buchstaben allmählich von den indischen verdrängt.

1.2.2.13 Das Abendland

L.: Friedlein [2], Hill, Löffler, Menninger, Smith/Karpinski, Treutlein [1].

Bevor die indischen Ziffern im Abendland bekannt wurden, lernten die jungen Völker, die auf dem Boden des Imperiums Fuß gefaßt hatten, wie die Römer ihre Zahlen darstellten: Sie übernahmen ihre Zahlzeichen und rechneten auch mit ihren Fingerzahlen. Über die „Sprache der Finger" *(de computo vel loquela digitorum)* hat **Beda** (gest. 735) ausführlich geschrieben [1; 179 ff.]: An den beiden Händen wurden die Zahlen bis 9999 aufgezeigt (s. S. 49); größere Zahlen bis 1 000 000 konnten durch Gesten wiedergegeben werden, z.B. eine Million durch Falten beider Hände über dem Kopf. **Leonardo von Pisa** empfiehlt die Fingerzahlen für den gewandteren Rechner; offenbar sollen Zwischenresultate auf diese Weise besser gemerkt werden [1; 1, 5, 17 f., 30]. Noch 1727 wurde diese Art von Fingerzahlen beschrieben [Menninger; 2, 10].

Mußte eine Zahl schriftlich festgehalten werden, wie in den Rechnungsbüchern der Kaufleute, der Klosterverwalter, der Stadt- und Kammerschreiber, so wurden die römischen Zahlzeichen in ihrer kursiv abgewandelten Form bis weit ins 16. Jh. hinein verwendet. **Köbel** nannte sie im Gegensatz zu den neuen Ziffern *die gemein Teutsch zale*. Er gebraucht sie in seinem Rechenbüchlein noch durchwegs – auch bei den Brüchen – zum Nutzen der Laien, *dem die Zyfferzale am Erstenn zu lernen schwere* [1; A 3^{v}]. Dabei machte er auch von einer multiplikativen Verkürzung des Zahlenbildes Gebrauch, wenn er z.B. 1612 als $MVI^{C}XII$ schreibt [1; A 5^{v}].

Die indischen Ziffern sind im Abendland zuerst wohl über Spanien bekannt geworden. In einer Handschrift, dem Codex Vigilanus aus dem Kloster Albelda (vollendet 976) z.Zt. im Escorial [Hill; 28 f.], sind die Ziffern 1 bis 9 ohne die Null in einer Form verzeichnet, die im wesentlichen mit den Ġubārziffern übereinstimmt (s. Abb. 14 S. 67). Dasselbe bietet der Codex Emilianus aus San Millan de la Cogolla bei Burgos, vollendet im Jahre 992 [Ewald; 357 f.], [Smith/Karpinski; 138]. Dort in der spanischen Mark hatte sich im Jahre 967 **Gerbert**, der spätere Papst **Sylvester II** (999–1003), aufgehalten, wie sein Schüler und Biograph **Richer** berichtet [100]. **Gerbert** hat dort mathematische Studien betrieben und vielleicht dabei die neuen Ziffern kennen gelernt. Er ist aber vor allem bekannt durch den nach ihm benannten Abakus, auf den sich eine Schrift von ihm bezieht [2; 8–22, 155 f.] und den weitere Autoren beschreiben [Schröbler]. Dieser Abakus besteht aus einem Rechenbrett mit bis zu 27 senkrechten Kolumnen, die der Reihe nach von rechts nach links für die Einer, Zehner usw. bestimmt waren und danach die Überschriften . . . M, C, X, I trugen, manchmal mit darübergesetzten Bögen, „Bögen des Pythagoras" *arcus pictagorae*. [Menninger; 2, 133 ff.]. Zum Rechnen dienten die sog. *characteres* oder *apices*, Marken aus Holz oder Horn; sie trugen als Aufschrift entweder die römischen Ziffern oder häufiger die indischen Ziffern 1 bis 9, die in ihrer Form den Ġubārziffern nahestehen. Gelegentlich wurden auch die griechischen Zahlzeichen von 1 bis 9 eingetragen [Gerbert 1; 361]. Sie wurden in die jeweiligen Kolumnen eingelegt; eine Null war deswegen unnötig. Vom 12. Jh. an sind auch die Namen für diese Ziffern überliefert: 1 *igin*, 2 *andras*, 3 *ormis*, 4 *arbas*, 5 *quimas*, 6 *caltis*, 7 *zenis*, 8 *temenias*, 9 *celentis* [Gerhardt 1; 11], Wortbildungen, die z.T. latinisierte arabische Zahlwörter wiedergeben. Die Herkunft der Namen und Formen der *Apices* aus dem europäischen Raum herzuleiten, wie es **Bubnov** meint [63 ff.], dürfte nicht haltbar sein [Ruska 2; 82–92].

Dann wurde noch ein Steinchen benutzt, um Kolumnenstellen anzumerken, an denen gerade gerechnet wurde. Es ist dies aber keine Null, auch wenn es in einem Kommentar zu **Gerberts** Beschreibung gelegentlich einmal benutzt wird, um bei der Zahl 302 die fehlende Stelle anzudeuten [Gerbert 2; 275]. Der Name des Merksteins, *sipos*, lat. *rota* oder *rotula*, deckt sich mit dem griechischen Wort für Rechenstein ($\psi\tilde{\eta}\varphi o\varsigma$). **Gerbert** hat nun nicht das Abakusrechnen selbst erfunden; es war schon zu seiner Lehrzeit verbreitet, wie sich aus einem Brief **Gerberts** (ca. 980) [2; 6] und aus zeitgenössischen Berichten ergibt, z.B. aus den Mitteilungen des Mönches **Abbo** [Gerbert 2; 197–204] (ca. 970).

Die den Gubārziffern nachgebildeten Apiceszeichen fanden mit dem **Gerbert**schen Abakus im Abendland Verbreitung, so in einer Handschrift der Kapitularbibliothek von