Hydraulik für Bauingenieure

von

Paul-Gerhard Franke

1974

Walter de Gruyter · Berlin · New York

SAMMLUNG GÖSCHEN 9004

Dr. *Paul-Gerhard Franke*

ord. Professor an der Technischen Universität München
Direktor des Instituts für Hydraulik und Gewässerkunde

 — Printed in Germany — Satz: Walter de Gruyter & Co., 1 Berlin 30 — Druck: Mercedes-Druck, 1 Berlin 61 — Buchbinder: Lüderitz & Bauer, 1 Berlin 61

ISBN 3 11 003900 1

Inhalt

Einleitung

Flüssigkeiten sind, im Gegensatz zu festen Körpern, durch leichte Verschieblichkeit ihrer Teilchen gekennzeichnet. In der Strömungslehre unterscheidet man zwischen wirklichen oder natürlichen Verhältnissen und vollkommenen oder idealen Verhältnissen. Für letztere wird vorausgesetzt, daß die Flüssigkeiten reibungsfrei und raumbeständig sind. Aufgrund dieser vereinfachenden Annahmen werden theoretische Untersuchungen der Strömungsprobleme wesentlich erleichtert.

Die Lehre vom Verhalten tropfbarer Flüssigkeiten – mehr oder weniger der sogenannten idealen Flüssigkeiten – heißt Hydromechanik. Hierbei werden die Verhältnisse der ruhenden Flüssigkeit in der Hydrostatik und diejenigen der Flüssigkeitsbewegung in der Hydrodynamik behandelt.

Hydraulik ist die Lehre von der Bewegung reibungsbehafteter Flüssigkeiten, im ursprünglichen Sinne die Lehre von der Bewegung des Wassers. Sie ist aufgrund von Erfahrungen und Versuchen entstanden. Daraus kann jedoch nicht gefolgert werden, daß das hydraulische Rechnen lediglich auf dem Gebrauch von empirischen Formeln beruht. Hydraulik ist vielmehr eine angewandte Hydromechanik für die technische Praxis. Die Schwierigkeiten für hydraulische Berechnungen liegen darin, daß einerseits auf empirische Beiwerte nicht verzichtet werden kann und daß andererseits der Strömungsverlauf unverzüglich und rücksichtslos jeden begangenen Fehler aufzeigt. Aus diesem Grunde müssen die Berechnungsmethoden auf theoretisch fundierten Ansätzen aufgebaut sein und somit auch den Ähnlichkeitsbedingungen genügen. Alle anderen Formeln können keine allgemeine Gültigkeit haben.

Der für den Bauingenieur maßgebende Teil der Hydraulik soll in diesem Bande in gedrängter Form aufgezeigt werden. Dabei ist es nicht möglich auf die Vielzahl der wasserbaulichen Strömungsprobleme einzeln und vollständig einzugehen. Es kann lediglich versucht werden, eine breite Grundlage herzustellen, mit deren Hilfe die in der Praxis vorkommenden Strömungsvorgänge behandelt werden können.

1. Grundgleichungen der Hydraulik

1.1 Allgemeine Beziehungen

1.1.1 Druckverhältnisse

Der gesamte Druck, der in einer Flüssigkeit an beliebigem Orte vorhanden ist, wird durch die Beziehung $p^* = p + \overline{p}$ erfaßt. Hierin sind p der Flüssigkeitsdruck und $\overline{p}$ der atmosphärische Luftdruck.

An der Oberfläche eines beliebigen Teilchens einer reibungsfreien Flüssigkeit können als Kräfte nur Normaldrücke auftreten, weil Schub- bzw. Reibungskräfte voraussetzungsgemäß ausgeschlossen und Zugkräfte nicht übertragbar sind. Der Flüssigkeitsdruck $p = dP/dF$ ist unabhängig von der Schnittrichtung (Fig. 1-1). Er ist somit eine richtungslose oder skalare Größe. Die Druck-Kraft hingegen ist eine vektorielle Größe und wirkt stets normal zur betreffenden Fläche.

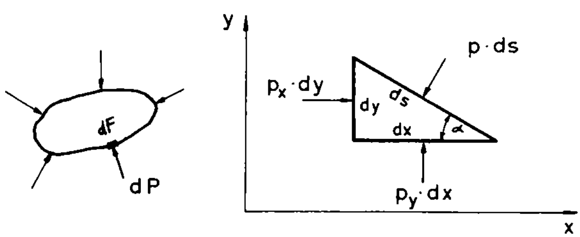

Fig. 1-1 Flüssigkeitsdruck

Aus der Gleichgewichtsbedingung der Kräfte in der horizontalen x-Richtung $p_x\, dy\, dz = p\, ds \sin\alpha\, dz = 0$ folgt unmittelbar $p = p_x$. Analog können die Beziehungen $p = p_y$ und $p = p_z$ erhalten werden. Daraus ist zu ersehen, daß in einer reibungsfreien Flüssigkeit der hydrostatische Druck nur eine Funktion des Ortes ist. Bei der

Flüssigkeitsbewegung ist der Druck im allgemeinen auch mit der Zeit veränderlich. Diese Betrachtungen sind für zähe Flüssigkeiten nur dann zutreffend, wenn keine Formänderung des Flüssigkeitskörpers eintritt.

Wenn bei einem Fließvorgang der Druck bis auf den Dampfdruck absinkt, beginnt im Flüssigkeitsstrom die Entwicklung von Dampf- bzw. Gasblasen. Durch diese Hohlraumbildung, auch Kavitation genannt, wird der Abflußvorgang wesentlich beeinflußt. In einem nachfolgenden Gebiet höheren Druckes entstehen durch das plötzliche Zusammenfallen der Hohlräume starke Verdichtungsstöße, die u. U. Materialzerstörungen herbeiführen können.

Der atmosphärische Luftdruck in Meereshöhe entspricht bei einer Temperatur von 0° C durchschnittlich einer Wasserhöhe von $p/\gamma = 10{,}33$ [m]. Für andere Höhenlagen genügt die Näherungsformel $p/\gamma = 10{,}33 - M/900$ [m], wobei mit M die geodätische Ortshöhe bezeichnet ist.

1.1.2 Begriffe der Fließbewegung

Die Geschwindigkeit ist eine vektorielle Größe, deren Komponenten durch das betreffende Koordinatensystem festgelegt werden. Nach der Zahl der jeweils in Betracht gezogenen Geschwindigkeitskomponenten kann die Strömung in drei Gruppen eingeteilt werden.

Im allgemeinen ist die Strömung räumlich oder dreidimensional. Eine mathematische Behandlung ist hierfür nur unter bestimmten Voraussetzungen möglich. Bewegen sich alle Flüssigkeitsteilchen gleichartig in parallelen Ebenen, so wird dieser Vorgang als ebene oder zweidimensionale Strömung bezeichnet. Unter dieser Voraussetzung kann der Strömungsverlauf für reibungsfreie Verhältnisse theoretisch verfolgt und dargestellt werden. Wenn nur die Hauptströmung in einer ausgezeichneten Richtung betrachtet wird und die normal zur Fließrichtung auftretenden Querbewegungen vernachlässigt werden können, spricht man von einer linearen oder eindimensionalen Strömung. Diese vereinfachte Betrachtungsart wird in der technischen Hydraulik vorwiegend zugrunde gelegt.

Von den charakteristischen Linien eines Fließvorganges – Stromlinien, Bahnlinien und Streichlinien – haben die Stromlinien besondere Bedeutung. Sie verlaufen an jeder Stelle des Flüssigkeitsgebietes in der Richtung der momentan herrschenden Geschwindigkeit. Daher können sie sich niemals schneiden, weil sonst im betreffenden Punkt gleichzeitig zwei verschiedene Geschwindigkeitsrichtungen existieren müßten. Aus dem gleichen Grunde kann auch kein Knick auftreten. Eine Ausnahme stellt lediglich die Verzweigung einer Stromlinie an einem Hindernis dar, wobei die Geschwindigkeit im Staupunkt v = 0 ist. Bahnlinien bezeichnen den Weg der Flüssigkeitsteilchen. Sie können z. B. durch Färbung sichtbar gemacht werden. Streichlinien verbinden die Bahnpunkte zur jeweils betrachteten Zeit.

Bei der instationären Strömung ist die Fließgeschwindigkeit an jedem Orte des betrachteten Flüssigkeitsstromes auch von der Zeit abhängig, wobei Größe und Richtung der Geschwindigkeit je allein oder auch gemeinsam veränderlich sein können. Die Geschwindigkeit ist somit eine Funktion des Ortes und der Zeit. Mit der zeitlichen Änderung der Geschwindigkeitsrichtung folgt auch zu jedem Zeitpunkt ein anderes Bild der Stromlinien. Bahnlinien und Stromlinien sind hierbei voneinander verschieden. Wenn hingegen lediglich die Größe der Geschwindigkeit von der Zeit abhängig ist und die Richtung unverändert bleibt, so sind die Stromlinien ihrer Gestalt nach unveränderlich und mit den Bahnlinien identisch. Dies ist z. B. der Fall bei einem variablen Abfluß durch eine formbeständige Leitung.

Bei stationärer Strömung ist die Geschwindigkeit weder der Größe noch der Richtung nach zeitabhängig. Die Flüssigkeitsbewegung ist also nur eine Funktion des Ortes. Die Stromlinien haben somit unveränderliche Gestalt und sind zugleich Bahnlinien.

Die gesamte, materielle oder substantielle Beschleunigung eines Flüssigkeitsteilchens besteht aus dem von der Zeit abhängigen lokalen oder instationären Anteil und dem vom Ort abhängigen konvektiven oder stationären Anteil. Die lokale Beschleunigung, d. h. die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit an einem bestimmten Ort des Strömungsfeldes, stellt den Grad des Instationären dar, während die konvektive Beschleunigung den Grad der Ungleichförmigkeit ausdrückt.

Nach dem Grundgesetz der Dynamik gilt für die Beschleunigung der Ausdruck $b = dK/dm = dv/dt$. Die daraus folgenden Beziehungen für gleichförmige Bewegung ($b = 0$) und ungleichförmige Bewegung ($b \neq 0$) gelten ebenso für die Fließvorgänge. In natürlichen Gerinnen kommt normalerweise nur die ungleichförmige Bewegung vor. Die Annahme der gleichförmigen Bewegung ist mehr oder weniger eine zweckmäßige Voraussetzung zur Vereinfachung der Strömungsprobleme, die in vielen praktischen Fällen durchaus zulässig ist.

1.1.3 Bewegungsgleichungen von Euler

Für die Ableitung der Gleichungen wird ein Massenelement $dm = \rho\, dx\, dy\, dz$ einer Flüssigkeit unter idealen Verhältnissen betrachtet, in dessen Mitte der Druck p herrscht. Auf dieses Element wirken Druck- und Massenkräfte. Die auf die Masseneinheit be-

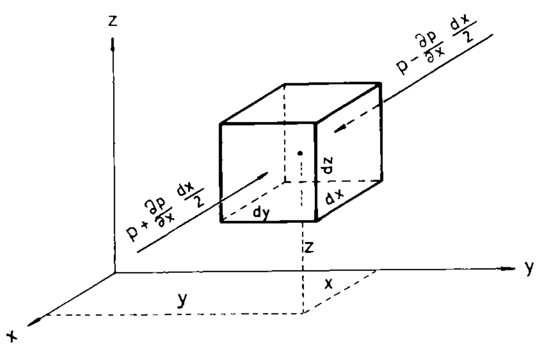

Fig. 1-2 Betrachtung an einem Parallelepiped

zogene Massenkraft $\vec{K}$ wird, entsprechend den Richtungen x, y, z in die Komponenten X, Y und Z zerlegt.

Die Anwendung der dynamischen Grundgleichung auf die Verhältnisse in der x-Richtung (Fig. 1-2) ergibt

$$dm\,X - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\,dz + \left(p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\,dz = dm\,\frac{dv_x}{dt}\,.$$

Entsprechend sind die Beziehungen für die anderen beiden Richtungen aufzustellen. Daraus folgen dann die Gleichungen

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dv_x}{dt} = b_x$$

$$Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dv_y}{dt} = b_y$$

$$Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dv_z}{dt} = b_z$$

wobei b_x, b_y und b_z die substantiellen Beschleunigungen in den betreffenden Koordinatenrichtungen sind.

Die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors sind abhängig von den Koordinaten x, y, z und von der Zeit t. Somit folgt für die substantielle Beschleunigung in der x-Richtung

$$\frac{dv_x}{dt} = v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial t}\,.$$

Mit den analogen Beziehungen für die beiden anderen Richtungen gehen die Bewegungsgleichungen über in

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial t} = b_x$$

$$Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_y}{\partial t} = b_y \qquad (1.1)$$

$$Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial t} = b_z$$

Diese drei Komponentengleichungen können ebenso durch die Vektorgleichung

$$\vec{K} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\;p = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{1.2}$$

ausgedrückt werden. In analoger Weise kann die Darstellung in lokalen oder natürlichen Koordinaten erfolgen.

Diese Gleichungen wurden von Leonhard Euler im Jahre 1755 aufgestellt. Sie bilden die Grundlage für viele Betrachtungen in der Strömungslehre. Werden außer den am Flüssigkeitselement wirkenden Massenkräften und Druckspannungen noch die Reibungseinflüsse berücksichtigt, so folgen sinngemäß die Navier-Stokesschen Gleichungen für die Bewegung zäher Flüssigkeiten.

1.1.4 Kontinuitätsbedingung

In einem Flüssigkeitsstrom kann Masse weder entstehen noch verlorengehen. Diese Forderung nach Erhaltung der Masse besagt, daß für jedes Volumenelement der Unterschied zwischen zugeführter und abgeführter Masse gleich der zeitlichen Massenänderung im betreffenden Element sein muß. Für die Massenerhaltung gilt somit

$$\iiint \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV + \oint\!\!\int \rho\, \vec{v}\, d\vec{F} = 0\,. \tag{1.3}$$

Wird ein Raumelement von unveränderlicher Größe im Innern einer raumbeständigen Flüssigkeit betrachtet, so lautet die Kontinuitätsbedingung

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \mathrm{div}\,\vec{v} = 0\,. \tag{1.4}$$

1.1.5 Oberflächenspannung

In ruhender Flüssigkeit wirken zwischen den einzelnen Teilchen innerhalb eines kleinen Bereiches gegenseitig molekulare Kohäsionskräfte. An der Oberfläche bedingt dies einen Spannungszustand. Maßgebend für diese Verhältnisse ist die sogenannte Kapillarkonstante der Flüssigkeit. In engen Röhrchen ist bei benetzenden Flüssigkeiten eine Kapillardepression festzustellen. Die Steighöhe kann nach der vereinfachten Beziehung

$$h = \frac{2c}{\gamma\, r} \tag{1.5}$$

ermittelt werden, wenn mit c die Kapillarkonstante und mit r der Innenradius des Kapillarrohres bezeichnet sind.

1.2 Eindimensionale Bewegung

1.2.1 Begriff des Stromfadens

Ein Bündel benachbarter Stromlinien in einer Flüssigkeit wird Stromröhre genannt und deren Inhalt als Stromfaden bezeichnet. Nach der Definition der Stromlinien ist somit jeder Querschnitt einer Stromröhre von den gleichen Stromlinien begrenzt. Voraussetzungsgemäß kann durch die Wandungen einer Stromröhre keine Flüssigkeit ein- und austreten.

Im allgemeinen Falle der instationären Bewegung ist mit der zeitlichen Änderung des Stromlinienbildes auch die Gestalt der Stromröhre veränderlich. Dies trifft zu, wenn die Richtung des Geschwindigkeitsvektors von der Zeit abhängig ist. Bei stationärer Bewegung hat die Stromröhre stets unveränderliche Gestalt. Für die Bewegung in einer Stromröhre wird die mittlere Fließgeschwindigkeit des Stromfadens anstatt der einzelnen Geschwindigkeiten, die durch die betreffenden Stromlinien gekennzeichnet sind, zugrunde gelegt. Diese eindimensionale Betrachtung wird auch Stromfadentheorie genannt.

In der Praxis werden die Fließvorgänge in vielen Fällen eindimensional behandelt. Die angenommene Stromröhre wird bei Druckleitungen durch die festen Wandungen und bei Freispiegelgerinnen durch Wandungen und freie Oberfläche begrenzt. Zur Berücksichtigung der Geschwindigkeitsverteilung im Fließquerschnitt ist sodann die Einführung von entsprechenden Korrektionsfaktoren erforderlich.

1.2.2 Bewegungsgleichungen

Für die Betrachtung in der Strömungsrichtung folgt ausgehend von der dynamischen Grundgleichung für ein Volumenelement (Fig. 1-3) die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(z+\frac{p}{\gamma}\right)+\frac{1}{g}b_s=\frac{\partial}{\partial s}\left(z+\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v}{g}\right)=0\,. \tag{1.6}$$

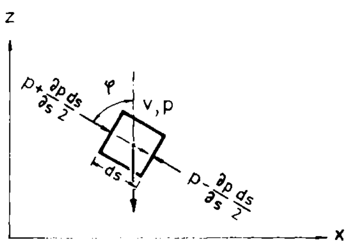

Fig. 1-3 Flüssigkeitselement und die in Stromlinienrichtung wirkenden Druckkräfte

Als Ausdruck für die Druckänderung in der Bewegungsrichtung wird danach

$$\frac{\partial p}{\partial s}=-\gamma\frac{\partial z}{\partial s}-\gamma\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2g}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v}{g}\right)\right] \tag{1.7}$$

erhalten.

Für die Betrachtung in der Richtung normal zur Stromlinie gilt für das Volumenelement (Fig. 1-4) die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) + \frac{1}{g} b_n = \frac{\partial}{\partial n}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) + \frac{1}{g}\frac{v^2}{r} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v_n}{g}\right) = 0\,. \tag{1.8}$$

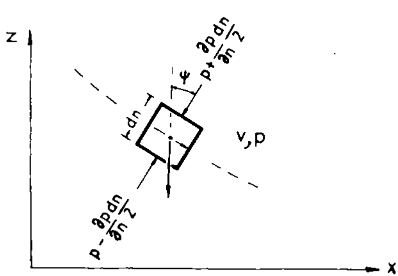

Fig. 1-4 Flüssigkeitselement und die quer zur Stromlinienrichtung wirkenden Druckkräfte

Danach wird für die Druckänderung in Richtung der Normalen die Beziehung

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\gamma\frac{\partial z}{\partial n} - \gamma\left[\frac{1}{g}\frac{v^2}{r} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v_n}{g}\right)\right] \tag{1.9}$$

erhalten.

Bei stationärer Strömung entfallen die lokalen oder instationären Differentialquotienten. Die entsprechenden Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}\right) = 0 \tag{1.10}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) + \frac{1}{g}\frac{v^2}{r} = 0 \tag{1.11}$$

folgen unmittelbar aus den vorstehenden Beziehungen.

1.2.3 Kontinuitätsgleichung

In einem Flüssigkeitsstrom sollen in zwei Querschnitten im Abstand ds die Abflußmengen je Zeiteinheit Q und Q + (∂Q/∂s) ds vorhanden sein. Nach der Kontinuitätsbedingung muß der zeitabhängige Überschuß zwischen Austritts- und Eintrittsmenge der Flüssigkeit gleich der Volumenverminderung im betreffenden Bereich sein. Danach folgt bei Vernachlässigung der kleinen Glieder höherer Ordnung die Beziehung

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial t} = v\,\frac{\partial F}{\partial s} + F\,\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \tag{1.12}$$

wobei mit v die mittlere Geschwindigkeit bezeichnet ist.

Bei stationärer Bewegung ist die Strömung nur ortsabhängig. Demnach folgt aus der Beziehung dQ/ds = 0 unmittelbar die Gleichung

$$Q = F\,v = \text{const} \tag{1.13}$$

die besagt, daß die sekundliche Durchflußmenge in jedem Querschnitt konstant ist. Das Kontinuitätsgesetz wurde bereits von Leonardo da Vinci genannt.

1.2.4 Energiesatz

Aus der Bewegungsgleichung für die eindimensionale instationäre Strömung folgt nach Integration längs der Stromlinie die Beziehung

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + \frac{1}{g}\int_{(S)} \frac{\partial v}{\partial t}\,ds = \text{const}\,. \tag{1.14}$$

Nach Multiplikation mit Masse und Fallbeschleunigung (m · g) stellt jedes Glied eine Energieform dar.

Für die stationäre Strömung folgt sinngemäß die Beziehung

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = e = \text{const} \tag{1.15}$$

welche besagt, daß die Summe aus Ortshöhe, Druckhöhe und Geschwindigkeitshöhe konstant ist. Diese Gleichung der gesamten Energiehöhe wird auch Gleichung von Bernoulli genannt. Daniel Bernoulli hat die Beziehung im Jahre 1738 als Theorem von der Änderung der Druckhöhe aufgestellt.

1.2.5 Impulssatz

Mit Bewegungsgröße oder Impuls wird das Produkt aus Masse und zugehöriger Geschwindigkeit bezeichnet. Der Impulssatz oder Satz von der Erhaltung der Bewegungsgröße wurde von I. Newton angegeben und folgt unmittelbar aus dessen Hauptgesetz zu

$$\Sigma \vec{K} = \Sigma \left(m \frac{d\vec{v}}{dt}\right) = \frac{d}{dt} \Sigma (m \vec{v}) = \frac{d\vec{J}}{dt}$$

worin mit $\vec{K}$ die äußeren Kräfte, die auf die betrachtete Masse wirken, bezeichnet sind.

Im Falle der stationären Strömung einer raumbeständigen Flüssigkeit ist die zeitliche Änderung der Bewegungsgröße gleich dem Unterschied zwischen austretendem und eintretendem Impuls im betrachteten abgegrenzten Raum. Werden die Begrenzungs- oder Kontrollquerschnitte in Fließrichtung mit (L) und (R) bezeichnet, so gilt für die in der Zeiteinheit stattfindende Impulsänderung der Ausdruck

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{J}_R - \vec{J}_L) = \rho\, Q\, (\vec{v}_R - \vec{v}_L) \,.$$

Der Impulssatz für stationäre Strömungsverhältnisse lautet somit in allgemeiner Form

$$\Sigma \vec{K} = \rho\, Q\, (\vec{v}_R - \vec{v}_L) \tag{1.16}$$

wofür auch die entsprechenden Komponentengleichungen geschrieben werden können. Bei eindimensionaler geradliniger Strömung ist es zweckmäßig, alle Größen auf die Bewegungsrichtung zu beziehen. Es wird dann die einfache Beziehung

$$\Sigma K = \rho\, Q\, (v_R - v_L) \tag{1.17}$$

erhalten. Werden von den äußeren Kräften lediglich die in den beiden Begrenzungsquerschnitten wirkenden Druckkräfte berücksichtigt, so folgt nach Umstellung die Beziehung

$$\gamma\left(\frac{Q}{g}\, v_R + \frac{p_R}{\gamma}\, F_R\right) - \gamma\left(\frac{Q}{g}\, v_L + \frac{p_L}{\gamma}\, F_L\right) = 0 = \gamma(S_R - S_L) \tag{1.18}$$

wobei der Ausdruck $\gamma\, S$ seit A. Koch als Stützkraft bezeichnet wird.

1.2.6 Druckverteilung bei stationärer Strömung

Für den Druck normal zur Strömungsrichtung besteht bei zeitlich gleichbleibendem Fließvorgang die Beziehung

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\gamma\, \frac{\partial z}{\partial n} - \rho\, \frac{v^2}{r} = -\gamma \cos\psi - \frac{\gamma}{g}\frac{v^2}{r} \tag{1.19}$$

wie unmittelbar aus der Bewegungsgleichung (1.11) hervorgeht. Die positive z-Achse ist nach oben und die positive n-Achse zum Krümmungsmittelpunkt gerichtet. Der Winkel ψ wird im Uhrzeigersinn von der z-Richtung zur n-Richtung gemessen. Die Beziehung für den Druck kann somit in der Form $p = p_s + p_z$ ausgedrückt werden, wobei mit p_s der statische und mit p_z der zusätzliche Anteil des Flüssigkeitsdruckes bezeichnet wird. Bei geradlinigen Strombahnen ist $r \to \infty$ und somit $p_z = 0$.

Für die Bestimmung der Druckverteilung ist es häufig empfehlenswert, eine schrittweise Berechnung anzuwenden. Die in jedem Falle erforderlichen bekannten Druckverhältnisse sind bei Freispiegelgerinnen am Wasserspiegel gegeben und bei Druckleitungen auf deren Achse bezogen. Nach Einführung endlicher Intervalle und mit Berücksichtigung des Ausdruckes für die Geschwindigkeitshöhe lautet die Bestimmungsgleichung

$$\frac{\Delta p_i}{\gamma} = -\cos\psi_i\,\Delta n_i - 2\,\frac{k_{mi}}{r_{mi}}\,\Delta n_i \tag{1.20}$$

wobei mit dem Index (mi) die mittleren Größen im betreffenden Intervall Δn_i bezeichnet sind. Zur Vereinfachung werden die Strombahnen für die einzelnen Schritte jeweils als konzentrische Kreise angesehen und je Schnitt ein einziger Krümmungsmittelpunkt angenommen.

1.2.7 Stationäre Strömung in gekrümmten Bahnen bei konstanter Strömungsenergie

Wenn lediglich die Wirkung der Schwerkraft berücksichtigt wird, so folgt ausgehend von der Eulerschen Gleichung und unter Beachtung der Bernoulli-Gleichung die Beziehung

$$\frac{v^2}{r} = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{v^2}{2}\right) = v\,\frac{\partial v}{\partial n} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{v}{r}\,. \tag{1.21}$$

Für die Kreisströmung wird danach $v \cdot r = \text{const}$ erhalten.

1.2.8 Eindimensionale Strömung mit Verlusten

Der Fließvorgang reibungsbehafteter Flüssigkeiten erfordert einen ständigen Arbeitsaufwand entlang des Weges. Hierbei wird ein Teil der mechanischen Energie in andere Energieformen umgewandelt, die für den weiteren Verlauf der Strömung nicht mehr wirksam sind. Diese Anteile werden als Verluste bezeichnet und im allgemeinen durch eine Höhe ausgedrückt. Die für den Strömungsvorgang maßgebende Energielinie hat somit in der Bewegungsrichtung stets ein Gefälle.

Durch Einführung des Ausdruckes Δe für die Verlusthöhe wird die Gleichung von Bernoulli entsprechend erweitert. Für die instationäre Fließbewegung zwischen zwei Querschnitten folgt sodann die Beziehung

$$\Delta z + \frac{\Delta p}{\gamma} + \Delta k = \Delta e + \frac{1}{g}\int_L^R \frac{\partial v}{\partial t}\,ds\,. \tag{1.22}$$

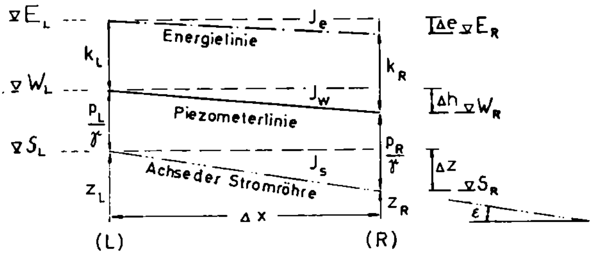

Fig. 1-5 Stationäre Fließbewegung

Bei stationären Strömungsverhältnissen (Fig. 1-5) folgt nach dem Vergleich der Energiehöhen zwischen zwei Querschnitten der Ausdruck

$$\Delta z + \frac{\Delta p}{\gamma} + \Delta k = \Delta e \tag{1.23}$$

als entsprechende Form für die Anwendung der erweiterten oder verallgemeinerten Gleichung von Bernoulli. Aus dem Vergleich von Ortshöhe und Druckhöhe in beiden Querschnitten wird ferner die Beziehung

$$\Delta z + \frac{\Delta p}{\gamma} = \Delta h \tag{1.24}$$

erhalten. Die Verlusthöhe der Energielinie ist in der Fließrichtung stets positiv. Deshalb kann ganz allgemein $\Delta e = \nabla E_L - \nabla E_R$ geschrieben werden. Analog folgen die Beziehungen für die anderen Größen.

Werden die Ausdrücke der absoluten Gefälle durch die Abschnittslänge Δl dividiert, so folgen die Beziehungen für die entsprechenden relativen Gefälle. Bei kleinem Relativgefälle kann mit hinreichender Genauigkeit

$$\Delta l = \frac{\Delta x}{\cos \epsilon} \approx \Delta x \tag{1.25}$$

gesetzt werden.

1.2.9 Korrektionsfaktoren

Bei der Betrachtung des gesamten Wasserstromes stellen die Strömungsgrößen im betreffenden Querschnitt jeweils rechnerische Mittelwerte dar. Diese Größen sind keinesfalls an allen Orten des Querschnittes vorhanden, sondern werden sowohl über- als auch unterschritten. In Berechnungen mit Mittelwerten sind somit die wirklichen Verhältnisse nicht exakt erfaßt. Für die Berichtigung der Ergebnisse werden in den Berechnungsformeln entsprechende Korrektionsfaktoren eingeführt.

Wird die Geschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens mit u bezeichnet, so folgt für die lebendige Kraft oder kinetische Energie dieses Elementes in der Zeiteinheit der Ausdruck

$$\rho \, dQ \frac{u^2}{2} = \frac{\gamma}{2g} u^3 \, dF .$$

Nach Integration über den gesamten Fließquerschnitt folgt ein Wert der bei ungleichförmiger Geschwindigkeitsverteilung stets größer ist als derjenige, den man aus den mittleren Verhältnissen im Querschnitt errechnet. Es ist somit

$$\frac{\gamma}{2g} \int_{(F)} u^3 \, dF = \alpha \frac{\gamma}{2g} v^3 F$$

woraus für den Korrektionsfaktor die Verhältniszahl

$$\alpha = \frac{\int_{(F)} u^3 dF}{v^3 F} \tag{1.26}$$

erhalten wird. Wenn für die Geschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens $u = v + \Delta v$ gesetzt wird, wobei $\Delta v \lesseqgtr 0$ ist, so folgt der Ausdruck

$$\alpha = 1 + \frac{3}{F} \int_{(F)} \frac{(\Delta v)^2}{v^2} \, dF + \frac{1}{F} \int_{(F)} \frac{(\Delta v)^3}{v^3} \, dF . \tag{1.27}$$

Das zweite Glied dieser Gleichung ist stets positiv und sein Absolutwert größer als derjenige des dritten Gliedes. Daraus folgt unmittelbar $\alpha > 1$. Im Falle gleichmäßiger Geschwindigkeitsverteilung wird $\Delta v = 0$ und somit auch $\alpha = 1$. Für Freispiegelgerinne gelten im allgemeinen die Werte

$$1{,}03 \leq \alpha \leq 1{,}15$$

wobei zu beachten ist, daß die Korrektionsfaktoren bei schießendem Fließvorgang immer kleiner als bei strömendem Fließvorgang sind. Aus praktischen Gründen wird häufig der Mittelwert $\alpha = 1{,}09$ und somit $2g/\alpha = 18{,}00\ [m/s^2]$ verwendet.

Der entsprechende Korrektionsfaktor für die Bewegungsgröße ist durch den Ausdruck

$$\overline{\alpha} = \frac{\int\limits_{(F)} u^2 dF}{v^2 F} \tag{1.28}$$

gegeben. Für Freispiegelgerinne gelten die Gebrauchswerte

$$1{,}01 \leq \overline{\alpha} \leq 1{,}05$$

analog dem Bereich der vorgenannten α-Werte. Zwischen den beiden Faktoren besteht die angenäherte Beziehung $\alpha + 2 = 3\overline{\alpha}$.

Bei gekrümmten Strombahnen kann die zusätzliche Druckänderung ebenfalls durch entsprechende Korrektionsfaktoren berücksichtigt werden. Diese Beiwerte sind positiv wenn die Krümmung der Wasserfäden konkav nach oben ist und negativ wenn die Bahnen konkav nach unten verlaufen. Die Bestimmung der Größe dieser Faktoren ist im allgemeinen kompliziert. Es ist daher vorteilhaft, die Berechnungsquerschnitte in Zonen mit geradlinigen Strombahnen zu legen, damit keine entsprechenden Korrektionsfaktoren einzuführen sind.

1.2.10 Dimensionslose Kenngrößen

In der Hydraulik sind verschiedene dimensionslose Kenngrößen von Bedeutung (s. a. Abschn. 10). Hier sollen nur die Zahlen von

Reynolds und von Reech–Froude sowie die relative Rauhigkeit erläutert werden.

Die Kennzahl von O. Reynolds charakterisiert die Fließverhältnisse in Abhängigkeit von Profilgröße, Geschwindigkeit sowie Zähigkeit und Dichte der Flüssigkeit. In der allgemeinen Ausdrucksform

$$Re = \frac{L\,V}{\nu}$$

sind L eine charakteristische Querschnittslänge, V eine charakteristische Geschwindigkeit und ν das kinematische Zähigkeitsmaß. Die ν-Werte sind von der Temperatur der Flüssigkeit abhängig. Für Wasser kann mit hinreichender Genauigkeit zwischen den Größen

$$1/\nu = 76{,}3\ [\mathrm{s/cm^2}] \quad \text{bei} \quad T = 10°\mathrm{C}$$

und

$$1/\nu = 99{,}0\ [\mathrm{s/cm^2}] \quad \text{bei} \quad T = 20°\mathrm{C}$$

linear interpoliert werden. Mit den Beziehungen L = 4R und V = v, wobei R = F/U als hydraulischer Radius (F = Querschnittsfläche; U = benetzter Umfang) bezeichnet wird und v die mittlere Fließgeschwindigkeit ist, folgt

$$Re = \frac{4}{\nu} R\, v\,. \tag{1.29}$$

Für Druckleitungen mit Kreisquerschnitt wird R = d/4, wenn mit d der Innendurchmesser des Rohres oder Stollens bezeichnet ist. Somit wird hierfür der Ausdruck Re = d v/ν erhalten. Aus Strömungsversuchen in Glasrohren hat Reynolds gefunden, daß bei kleinen Verhältniszahlen die Strömung geordnet oder laminar ist, während bei großen Verhältnissen eine ungeordnete oder turbulente Strömung auftritt. Als kritische Größe des Parameters für die Grenze zwischen laminarer und turbulenter Bewegung kann

$$Re = 2300$$

angenommen werden. Hiernach ist ersichtlich, daß die überwiegende Mehrzahl der Abflußvorgänge im turbulenten Bereich liegt.

Die Froudesche Zahl charakterisiert die Einwirkung der Schwerkraft auf den Fließvorgang. Diese Zahl wurde bereits von F. Reech angegeben und später von W. Froude erneut verwendet. In der allgemeinen Ausdrucksform

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{g\,L}}$$

sind mit V und L wiederum ausgezeichnete Größen und mit g die Beschleunigung durch die Schwerkraft bezeichnet. Nach Einführung der mittleren Fließgeschwindigkeit v und der Länge F/b folgt die Beziehung

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{g\,F/b}}\,. \tag{1.30}$$

Diese Kennzahl stellt das Verhältnis von zwei Geschwindigkeiten dar. Es kann deshalb auch

$$Fr = v/v_c$$

gesetzt werden, wobei v_c die Grenzgeschwindigkeit ist, die zum Energiehöhenminimum für den betreffenden Abfluß gehört und dem Satz von Bélanger–Böß entspricht (s. a. Abschn. 4-2). Danach werden zwei besondere Fließarten unterschieden.

$Fr < 1$: Ruhiger oder strömender Fließvorgang.
$Fr > 1$: Reißender oder schießender Fließvorgang.

Im Falle von $Fr = 1$ sind die sogenannten Grenzverhältnisse vorhanden.

Das Verhältnis zwischen Rauhigkeitserhebungen und einer maßgebenden Querschnittslänge wird relative Rauhigkeit genannt. Wenn als charakteristische Profilgröße ebenso wie für die Reynoldszahl der Wert 4R eingesetzt wird, so ist mit

$$r_s = \frac{\epsilon}{4R} \tag{1.31}$$

auch hier die direkte Verbindung zu den Größen für Druckrohre ($r_s = \epsilon/d$) hergestellt. Das Maß ϵ entspricht den Erhebungen von Sand bei größter Lagerungsdichte. Demzufolge ist für alle technischen Rauhigkeiten die gleichwertige Sandrauhigkeit maßgebend.

1.2.11 Reibungsverluste bei gleichförmiger Strömung

Im Bewegungszustand wirken als äußere Kräfte die treibende Kraft P und die Widerstandskraft W. Nach dem Newtonschen Grundgesetz gilt somit P - W = m b. Bei gleichförmiger Bewegung ist die Beschleunigung b = 0. Folglich muß die treibende Kraft gleich der Widerstandskraft sein.

Als treibende Kraft wirken die Komponente der Schwerkraft und die Resultierende der Druckkräfte auf die beiden Querschnitte. Es folgt somit

$$P = \gamma\, F\, l\, J$$

wobei $J = J_e = J_W$ das relative Gefälle von Energielinie und Piezometer- bzw. Wasserspiegellinie ist. Die Widerstandskraft infolge der Reibungseinflüsse kann in der Form

$$W = l \int_{(u)} \tau(U)\, dU = \tau\, U\, l$$

ausgedrückt werden, wenn mit τ die mittlere Wandschubspannung und mit U der betreffende benetzte Umfang bezeichnet sind. Aus der Bedingung für stationär gleichförmige Strömung folgen sodann die Beziehungen

$$\gamma\, F\, J = \tau\, U \quad \text{bzw.} \quad \frac{\tau}{\gamma} = \frac{F}{U}\, J = R\, J\,. \tag{1.32}$$

Das Widerstandsverhalten wird wesentlich von der Art des Strömungsvorganges beeinflußt. Unter Einbeziehung des Ausdruckes der sogenannten Schubspannungsgeschwindigkeit

$$v_* = \sqrt{\tau/\rho} \tag{1.33}$$

gilt auch der Zusammenhang $\tau/\gamma = v_*^2/g = 2\, k_*$.

Für die Schubspannung bei laminarer Bewegung besteht nach I. Newton der Ansatz

$$\tau = \eta \frac{du}{dn} \tag{1.34}$$

worin mit η das dynamische Zähigkeitsmaß der Flüssigkeit, mit dn der normale Schichtenabstand und mit du der zugehörige Geschwindigkeitsunterschied bezeichnet sind. Somit ist die Schubspannung proportional der Geschwindigkeitsänderung normal zur Bewegungsrichtung. Mit diesem Ansatz für die Flüssigkeitsreibung zwischen zwei Schichten folgt der Ausdruck

$$R\,J = \frac{\gamma}{g}\frac{du}{dn}\,.$$

Das ist die Differentialgleichung für die laminare stationär gleichförmige Strömung.

Für die Bestimmung der Schubspannung bei turbulenter Bewegung kann der empirische Ansatz

$$\tau = \psi \rho \frac{v^2}{2} = \psi\,\gamma \frac{v^2}{2g} = \psi\,\gamma\,k \tag{1.35}$$

verwendet werden. Hierin bedeuten ψ die Widerstandsziffer und $\rho\, v^2/2 = \gamma\, k$ den Staudruck. Die Widerstandsziffer ist keine konstante Größe. Sie ist von den Querschnittsabmessungen, der Fließgeschwindigkeit sowie von Zähigkeit und Dichte der Flüssigkeit, also von der Reynoldsschen Zahl und von der relativen Rauhigkeit des Gerinnes abhängig. Es kann somit

$$f(\psi; Re; r_s) = 0$$

geschrieben werden. Bei technisch glatter Gerinnebeschaffenheit ist die Widerstandsziffer nur von der Reynoldsschen Zahl abhängig, d. h.

$$\psi_0 = \psi(Re)\,.$$

Außerhalb eines gewissen Bereiches ist der Einfluß der Reynolds-Zahl ohne praktische Bedeutung. Es gilt dann für rauhe Gerinne bei voll ausgebildeter Rauhigkeitsströmung

$$\psi_I = \psi(r_s) .$$

In vielen praktischen Fällen liegt jedoch die Widerstandsziffer in dem sogenannten Übergangsbereich zwischen hydraulisch glatter und hydraulisch rauher Zone.

Mit dem Ansatz für die Schubspannung folgen aus der allgemeinen Gleichung die Beziehungen

$$J = \psi \frac{v^2}{2g\,R} \quad \text{bzw.} \quad v = \sqrt{\frac{2g}{\psi}}\,\sqrt{R\,J} . \tag{1.36}$$

Hierfür sind in der Praxis zwei andere Schreibweisen gebräuchlich. Mit $1/\psi = c^2$ oder mit $2g\,/\psi = C^2$ (Brahms–Chézy) folgt

$$J = \frac{v^2}{2g\,c^2 R} = \frac{v^2}{C^2 R} \quad \text{bzw.} \quad v = c\sqrt{2g}\,\sqrt{R\,J} = C\,\sqrt{R\,J} \tag{1.37}$$

und mit $\lambda = 4\psi$ (Weisbach–Darcy) werden die Gleichungen

$$J = \lambda \frac{1}{4R}\frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{k}{4R} \quad \text{bzw.} \quad v = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}\,\sqrt{R\,J} \tag{1.38}$$

erhalten. Zwischen den Beiwerten C und λ bestehen die Beziehungen

$$C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{8g}{C^2} . \tag{1.39}$$

Beide Koeffizienten sind natürlich ebenso von der Reynoldsschen Zahl und von der relativen Rauhigkeit abhängig.

Die von R. de Prony angegebene Formel zur Erfassung der Widerstände besteht – in Anlehnung an Untersuchungen von C. A. Coulomb – aus zwei Gliedern und lautet in allgemeiner Schreibweise

$$R\,J = a\,v + b\,v^2 . \tag{1.40}$$

Bei sehr kleinen Fließgeschwindigkeiten (laminare Strömung) gilt die lineare Abhängigkeit $R\,J = a\,v$ und bei den technisch vorherrschenden Fließvorgängen (turbulente Strömung) gilt die dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionale Abhängigkeit $R\,J = b\,v^2$ mit $b = 1/C^2$. Mit dieser zusammengesetzten Formel werden vor allem die Verhältnisse im unteren Turbulenzbereich, d. h. nahe der laminaren Zone, noch gut erfaßt.

1.2.12 Profilwiderstand

Der Widerstand von bewegten oder angeströmten Körpern in Flüssigkeiten ist vom Reibungswiderstand an der Körperoberfläche und vom Druckunterschied zwischen Vorder- und Rückseite des Körpers abhängig. Der Gesamtwiderstand setzt sich somit aus zwei Anteilen, dem Reibungswiderstand und dem Druck- oder Formwiderstand, zusammen.

Der Reibungswiderstand ist abhängig von der Größe des Körpers, der Geschwindigkeit, den physikalischen Eigenschaften der Flüssigkeit und von den Rauhigkeitsverhältnissen der umströmten Oberfläche. Der Druck- oder Formwiderstand wird durch die Ablösung der Strömung verursacht. Er ist von der Größe der Wirbelzone und somit von der Körperform abhängig.

Eine theoretische Erfassung dieser Verhältnisse ist nur in einigen Sonderfällen möglich. Deshalb erfolgt die Bestimmung der Widerstandskraft nach der allgemeinen Formel

$$W = c_w\,F\,\rho\,\frac{v^2}{2} = \gamma\,c_w\,F\,k \qquad (1.41)$$

wofür der dimensionslose Beiwert c_w auf dem Versuchswege zu ermitteln ist. Hierbei ist mit F die größte Querschnittsfläche des Körpers normal zur Bewegungsrichtung (Hauptspant) bezeichnet. Der Widerstandsbeiwert ist abhängig von der Körperform mit besonderer Berücksichtigung der rückwärtigen Ausbildung, der Reynoldsschen Zahl und der Oberflächenrauhigkeit.

Wenn der Reibungswiderstand im Verhältnis zum Druck- oder Formwiderstand relativ klein ist, bleibt die Größe des Widerstandsbeiwertes für den betreffenden Körper nahezu konstant. Dies gilt zum Beispiel für Platten normal zur Bewegungsrichtung. Anderenfalls ist der Beiwert nur konstant für geometrisch ähnliche Körper bei gleicher Reynoldsscher Zahl.

Im allgemeinen ist der Wert c_w klein, wenn die Größe der Wirbelzone möglichst klein ist. Das ist der Fall bei stromlinienförmiger Ausbildung des Körpers. Die Widerstandsbeiwerte bewegen sich somit zwischen dem Bereich der Platten und demjenigen stromlinienförmiger Rotationskörper. Das Verhältnis der c_w-Werte von Luftschiffmodell und Kreisplatte mit gleicher Querschnittsfläche F liegt in der Größenordnung von 1 : 20.

1.3 Potentialströmung

1.3.1 Allgemeines

Wenn bei einer Flüssigkeitsbewegung der Wirbelvektor im betrachteten Gebiet überall zu Null wird, so ist diese Bewegung wirbel- oder drehungsfrei. In diesem Falle können die Geschwindigkeitskomponenten als die partiellen Ableitungen einer Funktion φ nach den Ortskoordinaten ausgedrückt werden. Die Funktion φ wird nach H. v. Helmholtz Geschwindigkeitspotential genannt. Bei stationärer Strömung ist es unabhängig von der Zeit und somit eine reine Ortsfunktion. Da die Bedingungen der Wirbelfreiheit gleichzeitig das Vorhandensein eines Geschwindigkeitspotentiales beinhalten, werden wirbelfreie Strömungen auch Potentialströmungen genannt.

1.3.2 Ebene Potentialbewegung

Wird die x-y-Ebene als Bezugsebene angesehen, so geht mit den Ausdrücken für die beiden Geschwindigkeitskomponenten

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{und} \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \tag{1.42}$$

die Kontinuitätsgleichung (Gl. 1.4)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

über in die Laplacesche Form

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \Delta\varphi = 0 \,. \tag{1.43}$$

Als Bedingung der Wirbelfreiheit gilt schließlich noch

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \,. \tag{1.44}$$

Durch Verbindung der Punkte, für welche das Geschwindigkeitspotential konstante Werte hat, werden die Linien gleichen Potentials oder Äquipotentiallinien erhalten. Da entlang einer solchen Linie keine Änderung von φ eintritt, gilt hierfür

$$d\varphi = 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,dy = v_x dx + v_y dy \tag{1.45}$$

wobei dx und dy die Komponenten des Streckenelementes der Potentiallinie sind. Somit kann auch $\vec{v}\,\vec{ds} = 0$ geschrieben werden. Dies bedingt, daß die beiden Vektoren senkrecht zueinander stehen. Demnach verläuft eine Äquipotentiallinie an jedem beliebigen Orte normal zu dem dort vorhandenen Geschwindigkeitsvektor. Die Richtung des Geschwindigkeitsvektors entspricht aber zugleich der Richtung der Stromlinie. Daraus folgt, daß Stromlinien und Äquipotentiallinien ein orthogonales Netz von Kurvenscharen bilden.

Die Kontinuitätsgleichung wird auch erfüllt, wenn für die Geschwindigkeitskomponenten die Ausdrücke

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{und} \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{1.46}$$

gesetzt werden. Die Stromfunktion ψ ist, ebenso wie das Geschwindigkeitspotential φ, von den Ortskoordinaten abhängig. Mit diesen

Beziehungen geht die Bedingung der Wirbelfreiheit über in

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \Delta\psi = 0\,. \tag{1.47}$$

Die Stromfunktion genügt also auch der Laplaceschen Gleichung. Mit den Komponenten dx und dy eines Linienelementes der Stromlinie folgt aus der Ähnlichkeitsbeziehung die Gleichung der Stromlinie

$$v_x\,dy = v_y\,dx\,. \tag{1.48}$$

Werden in diese Gleichung die Geschwindigkeiten v_x und v_y nach der Ableitung aus der Stromfunktion eingesetzt, so folgt

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx = d\psi = 0. \tag{1.49}$$

Daraus ist zu ersehen, daß entlang einer Stromlinie ψ = const ist.

Ein Vergleich der Beziehungen für die Geschwindigkeitskomponenten führt zu den Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}\,. \tag{1.50}$$

Diese Ausdrücke haben besondere Bedeutung für die mathematische Behandlung der ebenen Potentialströmung.

Wenn für einen Ort im orthogonalen Netz der Strom- und Äquipotentiallinien lokale Koordinaten eingeführt werden (Fig. 1-6), so folgt unter Beachtung der Cauchy–Riemannschen Gleichung

$$v = \frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\partial\psi}{\partial n} \quad \text{und} \quad 0 = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial s} \tag{1.51}$$

da φ entlang der Äquipotentiallinie und ψ längs der Stromlinie jeweils konstant sind.

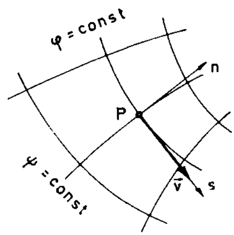

Fig. 1–6 Strom- und Äquipotentiallinien

Wird der Durchfluß in der Zeiteinheit zwischen zwei im Abstand δn liegenden benachbarten Stromlinien ψ und $\psi + \delta\psi$ für die Tiefeneinheit betrachtet, so folgt mit $v\,\delta n = \delta\psi$ der allgemeine Ausdruck

$$\int_{\psi_L}^{\psi_R} v\,\delta n = \psi_R - \psi_L\,. \tag{1.52}$$

Der sekundliche Durchfluß zwischen den beiden betrachteten Stromlinien ist also gleich der Differenz $\psi_R - \psi_L$, welche die Stromfunktion längs der betreffenden Stromlinie hat.

1.3.3 Komplexes Strömungspotential

Die Differentialgleichungen von Cauchy–Riemann werden erfüllt durch den Ansatz

$$\varphi + i\psi = w = w(z) \tag{1.53}$$

sofern $w(z) = f(x + i\,y)$ eine analytische Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + i\,y$ ist. Ferner sollen das Geschwindigkeitspotential φ und die Stromfunktion ψ sowie die entsprechenden partiellen Ableitungen stetige, reelle Funktionen von x und y sein. Die Funktion $w = \varphi + i\psi$ wird komplexes Strömungspotential genannt. Da eine analytische Funktion an jedem Ort des betreffenden

Bereiches differenzierbar ist, muß der Quotient dw/dz an jeder Stelle der z-Ebene von Größe und Richtung des Elementes dz unabhängig sein.

Die komplexe Zahl $z = x + i\,y$ entspricht einem Punkt der z-Ebene (Gaußsche Zahlenebene), wobei x die reelle und y die imaginäre Achse bezeichnen. Ebenso wird die komplexe Größe $w = \varphi + i\psi$ in einer w-Ebene dargestellt, mit φ als reeller und ψ als imaginärer Achse. Einem bestimmten Punkt in der z-Ebene entspricht ein zugeordneter Punkt in der w-Ebene (Fig. 1-7).

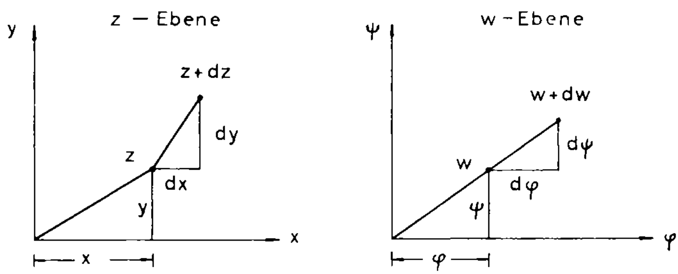

Fig. 1-7 Darstellung in der z-Ebene und in der w-Ebene

Die Bedingung, daß der Quotient dw/dz von $dz = dx + i\,dy$ unabhängig sein soll, wird erfüllt, wenn dw/dz unabhängig vom Verhältnis dx/dy ist. Aus der Ableitung

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d\varphi + i\,d\psi}{dx + i\,dy} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy + i\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx + i\,\frac{\partial\psi}{\partial y}\,dy}{dx + i\,dy}$$

folgt unmittelbar, daß die gestellte Bedingung mit

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\,\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \tag{1.54}$$

erfüllt wird. Werden die reellen und die imaginären Glieder jeweils einander gleichgesetzt, so folgen die Beziehungen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = v_x \quad \text{und} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = v_y \tag{1.55}$$

die identisch mit den Gleichungen von Cauchy–Riemann sind.

Somit können Real- bzw. Imaginärteil einer analytischen Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + i\,y$ als Geschwindigkeitspotential φ bzw. als Stromfunktion ψ einer ebenen, wirbelfreien Strömung betrachtet werden. Mit φ = const werden die Äquipotentiallinien und mit ψ = const die Stromlinien erhalten. Da sich die Kurvenscharen rechtwinkelig schneiden, können die Linien für φ = const auch als Stromlinien und diejenigen für ψ = const als Potentiallinien angesehen werden. Dies geht auch daraus hervor, daß die Gleichungen (1.55) unverändert bleiben, wenn im Ansatz (Gl. 1.53) anstatt $\varphi + i\,\psi$ der Ausdruck $i\,(\varphi + i\,\psi) = i\,\varphi - \psi$ eingeführt wird.

Ausgehend von Gleichung (1.54) folgt die Beziehung

$$\frac{dw}{dz} = v_x - i\,v_y = \overline{v}\ .$$

Diese als konjugierte Geschwindigkeit bezeichnete Größe entspricht der Spiegelung des Geschwindigkeitsvektors

$$v_x + i\,v_y = v$$

an der reellen Achse (Fig. 1-8).

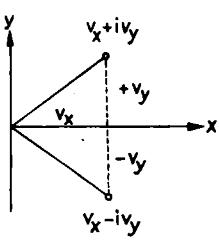

Fig. 1-8 Konjugierte Geschwindigkeit