Darstellende Geometrie

I

Die wichtigsten Darstellungsmethoden
Grund- und Aufriß ebenflächiger Körper

von

Dr. Wolfgang Haack
o. Professor an der Technischen Universität Berlin

Siebente, verbesserte Auflage

Mit 120 Abbildungen

Sammlung Göschen Band 2130

Walter de Gruyter & Co
Berlin 1971

Die Darstellung umfaßt folgende Bände:

Band I: Die wichtigsten Darstellungsmethoden.
Grund- und Aufriß ebenflächiger Körper.
(Sammlung Göschen 2130)

Band II: Körper mit krummen Begrenzungsflächen.
Kotierte Projektionen.
(Sammlung Göschen 143)

Band III: Axonometrie und Perspektive.
(Sammlung Göschen 144)

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Haack, Wolfgang
Darstellende Geometrie. – Berlin, New York : de Gruyter.
1. Die wichtigsten Darstellungsmethoden Grund- und Aufriß ebenflächiger Körper. – 7. Aufl. – 1971.

(Sammlung Göschen; 2130)
ISBN 3-11-001918-3

©

Copyright 1971 by Walter de Gruyter & Co., vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung - J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung - Georg Reimer - Karl J. Trübner - Veit & Comp., Berlin 30. - Alle Rechte, einschl. der Rechte der Herstellung von Photokopien und Mikrofilmen, von der Verlagshandlung vorbehalten. — Archiv-Nr. 77 12 704. — Druck: Kastner & Callwey, München. — Printed in Germany.

Inhaltsverzeichnis

Seite

Einleitung 5

I. Die wichtigsten Darstellungsmethoden 10
1. Zentralprojektion 10
2. Parallelprojektion 14
3. Senkrechte Parallelprojektion 17
4. Grund- und Aufriß einfacher Körper 19
5. Anwendungsgebiete der verschiedenen Darstellungsmethoden. Kavalierperspektive 23
6. Kavalierperspektive eines Rohrstückes 27
7. Axonometrische Darstellungen 28

II. Punkte, Gerade, Ebenen 30
8. Die vier Quadranten, Medianebenen 30
9. Gerade Linien, Strecken 33
10. *Monge*sche Drehkonstruktion 37
11. Umlegung des Stützdreiecks 40
12. Spurendarstellung der Ebene 43
13. Geraden und Punkte einer Ebene, die durch die Spuren gegeben ist 46
14. Ebene, gegeben durch drei Punkte 52
15. Wahre Gestalt einer ebenen Figur 57

III. Schnittkonstruktionen von Ebenen und Geraden . . 61
16. Schnittpunkt von Ebene und Gerade 61
17. Schnittgerade zweier Ebenen 66
18. Lot auf eine Ebene 68
19. Winkel zweier Ebenen 70
20. Winkel von Gerade und Ebene; kürzester Abstand zweier Geraden 72
21. Einführung einer neuen Projektionsebene 74

IV. Ebenflächige Körper 78
22. Schnitte durch einen Balken 78
23. Ebener Schnitt durch Pyramide; Abwicklung . . 82
24. Durchdringung zweier Balken 86
25. Durchdringung von Pyramide und Prisma . . . 87

V. Affinität 95
26. Affinität; invariantes Rechtwinkelpaar 95
27. Ellipse als affines Bild des Kreises 100
28. Ellipsenkonstruktionen 105

Aus dem Inhalt der weiteren Bände:

Band II (Sammlung Göschen 143). Körper mit krummen Begrenzungsflächen, Kotierte Projektionen.

I. Zylinder, Kegel, Kugel
II. Durchdringungen von Zylindern, Kegeln, Kugeln
III. Drehflächen und Schraubenflächen
IV. Kotierte Projektionen

Band III (Sammlung Göschen 144). Axonometrie und Perspektive

I. Axonometrie
II. Grundzüge der ebenen Perspektive
III. Elemente der angewandten Perspektive
IV. Perspektive von Kreisen
V. Schattenkonstruktion der Perspektive

Einleitung

Die Versuche des Menschen, Gegenstände seiner Umgebung, also räumliche Objekte, durch ebene oder flächenhafte Darstellungen wiederzugeben, sind so alt wie überhaupt die Kultur. Oft sind Steinzeichnungen die einzigen Zeugen kultureller Betätigung früherer Volksstämme. Sind diese primitiven Zeichnungen zunächst noch wenig entwickelte Ausdrücke eines ästhetisch-künstlerischen Schaffensdranges, aus dem im Laufe der Jahrtausende die Malerei entstanden ist, so findet sich auch schon bald die Zeichnung als praktisches oder technisches Hilfsmittel. Mit der fortschreitenden Entwicklung der Baukunst entstand das Bedürfnis und allmählich die Notwendigkeit, die Einzelteile des Bauwerkes, z. B. die einzelnen Bausteine, im voraus durch Zeichnungen wiederzugeben. So wird vom Tempelbau zu Jerusalem, den König Salomo etwa 1000 Jahre v. Chr. durch die Tyrier ausführen ließ, im Buch der Könige des alten Testaments (Kap. 6, V. 7) berichtet: „Und da das Haus gesetzet ward, waren die Steine zuvor ganz zugerichtet, daß man keinen Hammer noch Beil noch irgendein Eisenzeug im Bauen hörete." Wir können daraus schließen, daß die Steine schon am Steinbruch formgerecht geschnitten wurden, was nur bei Vorhandensein irgendeiner Art technischer Zeichnung möglich ist.

Die zeichnerische Darstellung räumlicher Objekte entsteht im wesentlichen aus zwei verschiedenen Beweggründen, einmal als Selbstzweck *künstlerischen Schaffens*, zum anderen als *Hilfsmittel des Baumeisters*. Der Maler wird den räumlichen Gegenstand so darzustellen versuchen, daß der Betrachter des Bildes unmittelbar einen Eindruck gewinnt, der die *anschaulich* plastische Vorstellung des Gegenstandes hervorruft. Das Bild des Gegenstandes soll möglichst den optischen Eindruck des räumlichen Objektes erwecken. Jedoch wird der wahre Künstler einen Gegenstand seiner Umgebung nicht einfach „abmalen", sondern in dem Kunstwerk sein subjektives Vorstellungsbild des Gegenstandes wiedergeben und dem Betrachter des Bildwerkes übermitteln.

Dagegen verfolgt die *technische Zeichnung* andere Ziele. Durch sie will der Baumeister oder Konstrukteur dem Handwerker die verschiedenen Maße des Bauteiles mitteilen, nach denen das Teilstück hergestellt werden kann. Es kommt daher bei der technischen Zeichnung nicht darauf an, daß sie bei dem Betrachter *unmittelbar* einen anschaulichen Eindruck des Gegenstandes erweckt, sondern daß sie in einfacher Weise *ein Ablesen der verschiedenen Maße des Objektes* gestattet. Der Fachmann, der die technische Zeichnung lesen kann, wird auch eine räumliche Vorstellung des Objektes gewinnen; aber diese Vorstellung entsteht nicht unmittelbar aus dem optischen Eindruck der Zeichnung, sondern aus einer gewissen Gedankenarbeit, die mit dem Studium der Zeichnung verbunden ist.

Für den Baumeister ist die technische Zeichnung schon von alters her zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel geworden. Er verwendet aber auch die *anschauliche Zeichnung*. Das Bauwerk existiert zunächst nur in der Vorstellung des Meisters; um anderen eine Vorstellung des geplanten Bauwerkes zu übermitteln, braucht er eine Zeichnung, die möglichst denselben Eindruck bei dem Betrachter hervorruft, den das Bauwerk nach seiner Fertigstellung ausüben wird. Wir können sagen, beim Betrachten der Zeichnung soll das Bauwerk in der Phantasie des Beobachters entstehen.

Wann in der Geschichte des Bauwesens zuerst Konstruktionszeichnungen oder anschauliche Zeichnungen auftreten, läßt sich nicht genau feststellen. Die Überlieferungen sind recht dürftig. Über die *Malerei des griechisch-römischen Altertums* geben einige Fresken Auskunft, die bei den Ausgrabungen in Pompeji und Herculaneum gefunden wurden. Sonst ist uns an Zeichnungen, die das Räumliche des Objektes wiederzugeben versuchen, so gut wie nichts überliefert. Dagegen sind Berichte über Malerei sowie vereinzelt auch über technische Zeichnungen erhalten geblieben. Einige Richtlinien über das, was wir heute Perspektive nennen, hat *Euklid* (300 v.Chr.) in seiner Optik zusammengefaßt. Später berichtet Marcus *Vitruvius* Pollio, Baumeister Julius Cäsars, in dem uns überlieferten Werk über Bauwesen, daß zur Ausführung eines Bauwerkes folgende Baurisse *(species)*

erforderlich sind: „der Grundriß *(ichnographia)*, der Aufriß *(orthographia)* und die Aussicht *(scenographia)*. Der Grundriß ist eine vermittels Zirkel und Lineal nach verjüngtem Maßstabe *(modice)* verfertigte Zeichnung, welche die Einrichtung der Grundfläche eines Gebäudes zeigt. Der Aufriß aber ist die Abbildung der errichteten Front nach verjüngtem Maßstabe und nach allen Verhältnissen des auszuführenden Gebäudes. Die Aussicht endlich ist der Front und der abgehenden Seiten schattierte Zeichnung *(adumbratio)* so, daß alle Linien in einem Augenpunkte *(centrum)* zusammentreffen." Dieses Zitat aus der *Rode*schen Übersetzung von *Vitruvius*' Baukunst unterrichtet uns lediglich von der Tatsache, daß solche Zeichnungen zur Ausführung eines Baues hergestellt, ohne jedoch anzudeuten, nach welchen Regeln und Prinzipien die Zeichnungen angefertigt wurden. Der Grundriß des Klosters St. Gallen aus dem 9. Jahrhundert ist der bekannteste uns erhaltene Plan.

Es liegt keineswegs in unserer Absicht, hier einen vollständigen *Überblick über die historische Entwicklung* des anschaulichen bzw. technischen Zeichnungswesens zu geben. Wir wollen darauf hinweisen, daß die Zeichnung Hilfsmittel des Ingenieurs ist, seitdem das Bauwesen die primitivsten Anfänge verlassen hat. Noch viele Jahrhunderte sollten jedoch vergehen, bis aus den handwerklichen technischen Zeichnungen die *Darstellende Geometrie* entstand. Wir müssen annehmen, daß begabte Meister gewisse Verfahren und Regeln zur Anfertigung der Zeichnung erfanden und sie als Berufsgeheimnis bewahrten oder ihren Schülern überlieferten. Später waren sie in den Zünften und Innungen verbreitet, aber auch gehütet. Es handelte sich dabei keineswegs um systematische Methoden, die geometrisch, also mathematisch begründet waren, sondern vielmehr um Regeln, die sich aus Praxis und Erfahrung ergeben hatten.

Nach der Erfindung des Buchdrucks erschienen seit dem 16. Jahrhundert Veröffentlichungen, die über die Konstruktionen insbesondere des Steinschnitts berichten, ohne allerdings den Versuch zu machen, die Richtigkeit der Konstruktion zu begründen. Auch das Werk *Albrecht Dürers* (1471—1528), *Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit in*

Linien, Ebenen und ganzen Körpern 1525[1], ist von exakter Methode und strenger Begründung noch weit entfernt. Aber es zeugt von tiefem geometrischem Verständnis und einer hochentwickelten Vorstellungsgabe. Der zweite Teil des *Dürer*schen Buches, dessen Lektüre auch heute noch reizvoll und fesselnd ist, behandelt im Zweitafelverfahren die Kegelschnitte und gibt eine Einführung in die Perspektive. Wichtige Fortschritte in Richtung geometrischer Begründung verdankt man *Girard Desargues* (1593—1662), dessen Schüler *Bosse* ein Buch über Steinschnitt veröffentlichte. Es entstand ein langer Streit zwischen *Desargues*, als geistigem Vater des *Bosse*schen Werkes, und den Praktikern, welche „die geometrische Auffassung zugunsten der handwerklichen, wenn auch nachweislich nicht selten irrigen Übung bekämpften".

Als *Vater der Darstellenden Geometrie* pflegt man *Gaspard Monge* (1746—1818) zu bezeichnen. An der 1795 unter wesentlicher Mitwirkung von *Monge* gegründeten *Ecole polytechnique* in Paris las *Monge* seit 1795 seine „*Leçons de géométrie descriptive*". Sie wurden als Nachschriften in Bd. I—IV des *Journal des écoles normales* veröffentlicht. Die in Jahrhunderten entwickelten handwerklichen Verfahren des technischen Zeichnens erscheinen hier in systematischer Methodik und einwandfreier Begründung als Zweig der Geometrie. Seitdem behandelt die Darstellende Geometrie die verschiedenen Methoden, die eine Darstellung räumlicher Gebilde durch ebene Abbildungen ermöglichen. Sie entwickelt Projektionsverfahren, die als Grundlage technischer Zeichnungen ein müheloses Ablesen der Längenmaße der Gegenstände gestatten, aber auch solche, die unmittelbar ein anschauliches Bild des Gegenstandes vermitteln.

Es ist nicht Aufgabe der Darstellenden Geometrie, eine Einführung in das *Technische Zeichnen* zu geben, sondern sie ist die geometrische Grundlage für das Technische Zeichnen. Die Darstellende Geometrie lehrt Abbildungsverfahren, die räumliche Objekte durch ebene Zeichnungen wiedergeben, und zwar in einer Art, die dem jeweiligen Zweck angemessen ist; sie lehrt

[1]) Herausgegeben von A. Peltzer mit Vorwort von Hans Thoma, München 1908.

ferner die Lösung räumlich geometrischer Aufgaben durch ebene Konstruktionen. Die technische Zeichnung dagegen ist eine Anwendung der Darstellenden Geometrie auf die Bedürfnisse des Ingenieurs. Hier sind neben den rein geometrischen Aufgaben zahlreiche technische Dinge von Bedeutung, wie zum Beispiel eine einheitliche Bezeichnungsweise oder schematische, abgekürzte Wiedergabe allgemein üblicher Einzelteile (etwa Schrauben) und schließlich Angaben über das Material des Gegenstandes und anderes mehr.

Wenn sich die Darstellende Geometrie selbst nicht mit technischen Dingen befaßt, so empfiehlt sich doch eingedenk des historischen Werdeganges, beim Aufbau der Darstellenden Geometrie stets ihre *Anwendung in der technischen Zeichnung* im Auge zu behalten und vornehmlich diejenigen geometrischen Zusammenhänge zu behandeln, die der Ingenieur braucht oder gebrauchen kann.

Der einleitende historische Überblick zeigt uns, daß Darstellende Geometrie unter *verschiedenen Gesichtspunkten* behandelt werden kann, von denen wir drei hervorheben. Als *Zweig wissenschaftlicher Erkenntnis* beschäftigt sich die Darstellende Geometrie mit den mathematisch-geometrischen Gesetzen und Relationen der Abbildungen mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten auf die Ebene unter Verwendung zeichnerischer Hilfsmittel ohne Rücksicht auf irgendwelche Anwendungszwecke. Als *Zweig der angewandten Mathematik* kann sie entweder die *Anschaulichkeit* oder die *Maßübermittlung* des dargestellten Körpers in den Vordergrund stellen. Dadurch ergibt sich eine natürliche Gliederung des Stoffes. Band I und II werden vornehmlich die Darstellungsmethoden behandeln, die die Maße der dargestellten Körper wiedergeben, während im dritten Band die unmittelbare Anschaulichkeit der Zeichnung hervorgehoben wird. In der Ableitung und Begründung der verschiedenen Konstruktionsmethoden liegt der Zusammenhang mit den reinmathematischen Ergebnissen.

I. Die wichtigsten Darstellungsmethoden

Die Grundelemente des Raumes sind Punkte, Geraden und Ebenen. Ihre gegenseitigen Beziehungen werden durch die Axiome der Geometrie festgelegt, auf die sich das Gebäude der Geometrie aufbaut. Unter einer *Abbildung des Raumes auf eine Ebene* π versteht man meist eine Vorschrift, die jedem Punkt P des Raumes (bis auf gewisse Ausnahmen) einen bestimmten Punkt $\overline{P}$ der Ebene π zuordnet. Der Punkt $\overline{P}$ heißt das *Bild* des Punktes P und die Ebene π die *Bildebene*. In der Mathematik gibt es noch allgemeinere Abbildungen, bei denen etwa jedem Punkt des Raumes eine Gerade oder auch ein Kreis der Ebene zugeordnet wird; doch wollen wir uns auf die Punktzuordnungen beschränken. Selbst diese sind nach der obigen Definition noch so allgemeiner Natur, daß ihr Studium weit über den Rahmen einer Darstellenden Geometrie hinausgeht. Durch die praktischen Anwendungen ist die zusätzliche Forderung bedingt, *daß bei der Abbildung jeder Geraden des Raumes,* bis auf unvermeidliche Ausnahmen, *stets eine Gerade in der Bildebene zugeordnet wird.* Diese Forderung schränkt die Mannigfaltigkeit der Abbildungen derart ein, daß sie sich, wie man in der Mathematik zeigt, auf die Zentral- und Parallelprojektionen zurückführen lassen. In diesem Kapitel wollen wir zunächst das Prinzip und einige Grundsätze dieser Abbildungsverfahren beschreiben.

1. Zentralprojektion

Im Raum sei fest gegeben die Bildebene π, die wir uns hier zunächst waagerecht vorstellen wollen, und ein fester Punkt O, den wir das *Projektionszentrum* oder auch das Auge *(oculus)* nennen (Bild 1). Das Lot von O auf die Bildebene π trifft diese im *Hauptpunkt* H. Ist P ein beliebiger, von O verschiedener Punkt des Raumes, so soll ihm als Bildpunkt der Schnittpunkt $\overline{P}$ der Geraden $P\ O$ mit der Bildebene π zugeordnet werden. Man sagt: Der Punkt $\overline{P}$ ist die *Projektion des Punktes P vom*

Zentrum O auf die Bildebene π. Die Gerade *O P* ist der *Projektionsstrahl* des Punktes *P*. Die Abbildung heißt die *Zentralprojektion* des Raumes auf die Ebene π mit dem Zentrum *P*. Sie steht in enger Beziehung zum *Sehvorgang,* bei dem die Punkte

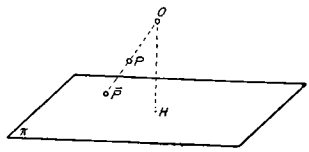

Bild 1
Zentralprojektion des Punktes *P* vom Zentrum *O* auf die Ebene π

des (sichtbaren) Raumes auf die Netzhaut des Auges abgebildet werden. Der optische Mittelpunkt der Augenlinse ist Projektionszentrum. Umgekehrt geht die Bezeichnung des Zentrums als „Auge" oder *O* = *oculus* auf diesen Zusammenhang zurück. Schon daraus kann man schließen, daß unter gewissen Voraussetzungen die Zentralprojektion als Grundlage für die Herstellung anschaulicher Bilder dienen kann. Sie wird eingehend erst im Band III behandelt. Hier erwähnen wir nur einige grundsätzliche Fragen.

Besitzt jeder Punkt des Raumes bei der Zentralprojektion einen eindeutig bestimmten Bildpunkt? Das ist sicher nicht der Fall. Denn der Punkt *O* ist ebenfalls ein Punkt des Raumes; für ihn versagt unser Projektionsverfahren. Aber es gibt noch andere Punkte, für die wir kein Bild angeben können. Ist nämlich *Q* ein Raumpunkt, dessen Verbindungsgerade *O Q* parallel zur Bildebene π ist, so gibt es keinen Bildpunkt $\overline{Q}$; denn die Gerade *O Q* schneidet π in keinem, im Endlichen gelegenen Punkt. Hier liegen die Dinge aber anders als beim Punkt *O*. Der Projektionsstrahl *O Q* ist eindeutig bestimmt, während der Punkt *O* keinen bestimmten Projektionsstrahl besitzt. Zur Erläuterung betrachten wir eine Anzahl Punkte $P_1, P_2, P_3 \ldots Q$, die auf einer vertikalen Geraden durch *Q* liegen und sich allmählich dem Punkte *Q* nähern (Bild 2). Die Bilder $\overline{P}_1, \overline{P}_2 \ldots$ der Punkte $P_1, P_2 \ldots$ wandern in der Bildebene auf einer Geraden immer weiter nach

rechts. Je mehr sich P dem Punkt Q nähert, desto weiter ab liegt der Bildpunkt $\overline{P}$. Strebt P auf der betrachteten Geraden gegen Q, so bewegt sich sein Bildpunkt $\overline{P}$ auf der Bildgeraden ins Unendliche. Die Bildgerade ist parallel zum Projektionsstrahl $O\,Q$. Man kann dem Punkt Q die zum Strahl $O\,Q$ parallele Richtung der Bildebene zuordnen. Es ist in vielen Fällen nützlich, für den Ausdruck „zwei Geraden sind parallel" die Worte „zwei Geraden schneiden sich im Unendlichen oder in einem *uneigentlichen Punkt*" einzuführen. Anstatt zu sagen, „dem Punkt Q ordnen wir die zu $Q\,O$ parallele Richtung der Bildebene zu", können wir uns einfacher ausdrücken durch: Das Bild von Q ist der uneigentliche Punkt $\overline{Q}$ der Bildebene in Richtung OQh. Mit diesem Ausdruck verbinden wir anschaulich die Vorstellung einer Richtung der Bildebene. Indem wir aber die uneigentlichen Punkte zu den eigentlichen Punkten des Raumes hinzufügen, können wir formal die Ausnahmestellung der Punkte in der Ebene, die durch O parallel zur Bildebene geht, beseitigen. Dadurch läßt sich die Zentralprojektion für alle Punkte des Raumes mit Ausnahme des Zentrums O eindeutig machen.

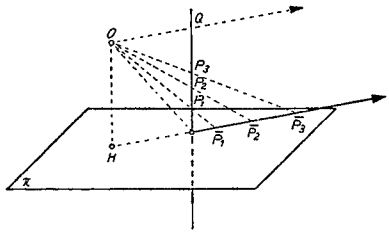

Bild 2
Nicht jeder Punkt des Raumes besitzt einen eigentlichen Bildpunkt, z. B. Q

Jedoch ist gerade diese Schwierigkeit beim Erreichen der *Eindeutigkeit der Zentralprojektion* der Anlaß dazu, die Zentralprojektion an letzter Stelle zu behandeln. Wir erwähnen sie hier als die allgemeinste Abbildung, von der die folgenden nur Sonderfälle darstellen. Wegen der Allgemeinheit der Zentralprojektion mag sie zur Erklärung einiger, allen Projektionen gemeinsamen Begriffe dienen.