de Gruyter Lehrbuch

Physik für Mediziner, Biologen, Pharmazeuten
5. Auflage

Alfred Trautwein · Uwe Kreibig
Erich Oberhausen · Jürgen Hüttermann

Physik für Mediziner, Biologen, Pharmazeuten

5., neu bearbeitete Auflage

W DE G

Walter de Gruyter
Berlin · New York 2000

Professor Dr. Alfred X. Trautwein
Institut für Physik
Medizinische Universität zu Lübeck

Prof. Dr. Uwe Kreibig
I. Physikalisches Institut der
Rheinisch-Westfälischen
Technischen Hochschule Aachen

Professor Dr. Dr. Erich Oberhausen †

Professor Dr. Jürgen Hüttermann
Fachrichtung Biophysik und
Physikalische Grundlagen der Medizin
Universität des Saarlandes

1. Auflage 1977
2. Auflage 1978
3. Auflage 1983
4. Auflage 1987

Das Buch enthält 365 Abbildungen und 29 Tabellen.

Die Deutsche Bibliothek CIP-Einheitsaufnahme

Physik für Mediziner, Biologen, Pharmazeuten / Alfred Trautwein
... - 5., neu bearb. Aufl. - Berlin ; New York : de Gruyter, 1999
(De-Gruyter-Lehrbuch)
Bis 4. Aufl. u.d.T.: Trautwein, Alfred: Physik für Mediziner, Biologen, Pharmazeuten
ISBN 3-11-013267-2

Textkonvertierung, Druck und buchbinderische Verarbeitung: Druckhaus „Thomas Müntzer“ GmbH, Bad Langensalza — Umschlagentwurf: Hansbernd Lindemann, Berlin
Printed in Germany

Vorwort

In ihrem klassischen Rahmen befaßte sich die Physik mit Vorgängen in der unbelebten Natur. Heute erstreckt sie sich auf alle Gebiete der Naturwissenschaften und Technik. So ist sie auch zu einer der wesentlichen Grundlagen in der Biologie und Medizin geworden. Dies beruht darauf, daß die grundlegenden Gesetzmäßigkeiten, die man in der unbelebten Natur beobachten kann, auch für die lebenden Organismen gelten, nur sind sie in der unbelebten Natur meist sehr viel einfacher zu erkennen. Physikalische Gesetze haben es ermöglicht, in Biologie und Medizin über die einfache Beschreibung von Lebensvorgängen hinaus zu ihrem naturwissenschaftlich begründeten Verständnis zu gelangen. Es ist daher notwendig, daß sich Biologen und Mediziner intensiv mit den physikalischen Grundlagen ihrer Wissenschaften beschäftigen. Erster Schritt dazu ist, an einfachen physikalischen Modellen zu lernen, wie man mit naturwissenschaftlichen Methoden arbeitet. Daran schließt sich der schwere Weg an, in der Vielfalt und Komplexität der Vorgänge am lebenden Organismus physikalische Einzelprozesse auszumachen.

In diesem Buch haben wir uns bemüht, grundlegende Begriffe und physikalische Zusammenhänge an einfachen Modellen einzuführen. Dadurch bleibt auch ihre mathematische Formulierung überschaubar. Vor dieser sind wir nicht ausgewichen; Physik ist, wie jede Naturwissenschaft, eine quantitative Wissenschaft. Sie begnügt sich nicht damit festzustellen, daß etwas geschieht, sondern untersucht, warum es in einem bestimmten Ausmaß geschieht. Grundlage des Verständnisses ist daher ein eindeutiges, mathematisch formulierbares Begriffssystem. Dieses nimmt besonders im ersten Abschnitt, der Mechanik, einen großen Raum ein. Wir sind der Überzeugung, daß auch derjenige, der die Physik nur als Hilfswissenschaft benötigt, in der Lage sein muß, einfache praktische Probleme, die in seinem Fachgebiet auftreten, selbst durchzurechnen.

Es wesentliches Anliegen war es uns, Grundlagen durch Beispiele aus dem medizinisch-biologischen Bereich zu veranschaulichen. Sie sollen darauf hinweisen, in welch unterschiedlichen Gebieten allgemeine physikalische Gesetzmäßigkeiten realisiert sind. Zur Prüfung seines Verständnisses sollte der Leser sich darin versuchen, andere Beispiele zu finden. Er wird rasch merken, wieviel Freude es machen kann, sich über die Physik klarzuwerden, die hinter Vorgängen des täglichen Lebens stehen, wie Radfahren, Kochen, Singen, Tanzen, Fußballspielen, Filmen, Musizieren oder hinter technischen Geräten wie CD-Spieler, Kühlschrank oder Magnetschwebebahn. Das alles sind Beispiele, die im vorliegenden Buch nicht behandelt werden, deren Erklärung aber in den besprochenen Gesetzmäßigkeiten enthalten ist.

Trotz unterschiedlicher Gegenargumente haben wir uns entschlossen, im wesentlichen die übliche Gliederung der Physik in Mechanik, Wärmelehre, Elektrizitätslehre, Optik und Kernphysik beizubehalten. Moderne Erkenntnisse der Quantenphysik und der Relativitätstheorie haben wir in den laufenden Text aufgenommen und nicht in spezielle Kapitel verbannt, als handle es sich dabei um eine andere Physik.

Die Stoffauswahl ist darauf abgestimmt, vornehmlich den Studierenden der Fächer Medizin, Biologie und Pharmazie sowie anderer Fachrichtungen mit biophysikalischen Aspekten Grundlagenkenntnisse in Physik vermitteln.

Zahlreiche Textverweise innerhalb des Buches sollen auch demjenigen Leser den Einstieg in die einzelnen Kapitel ermöglichen, der das Buch nicht kontinuierlich durchliest, sondern zum Nachschlagen verwendet. Enggedrucktes ist nicht gleichbedeutend mit Entbehrlichem, vielmehr sollen damit Zusatzinformationen vom laufenden Text abgesetzt werden. Das, was man sich als Gerüst an grundlegendem Wissen zur Vorbereitung auf die medizinische oder pharmazeutische Vorprüfung mindestens aneignen sollte, ist im Text durch Grauton hervorgehoben. Bei der Auswahl der Buchstaben für physikalische Größen und Einheiten sind wir im allgemeinen den Vorschlägen der IUPAP (International Union for Pure and Applied Physics) bzw. dem SI-Einheitensystem gefolgt.

In der vorliegenden 5. Auflage wurde die Stoffauswahl gestrafft und erneut aktualisiert. Eine Sammlung von 87 Aufgaben mit Lösungen ist den einzelnen Kapiteln inhaltlich zugeordnet. Auf den ersten Blick mögen einige der Aufgaben umfangreich und schwierig erscheinen. Wir stellen sie jedoch nicht als Prüfungs-, sondern als Übungsaufgaben und haben daher Wert auf ausführliche Lösungsbeschreibungen gelegt.

All denen, die uns bei der Edition der verschiedenen Auflagen und bei der Fehlersuche geholfen haben, möchten wir danken. Besonderer Dank gebührt unserem Mitautor, Herrn Professor Erich Oberhausen, der bis zu seinem Tod mitgewirkt hat, die neue Auflage vorzubereiten.

August 1999

Alfred Trautwein, Uwe Kreibig,
Jürgen Hüttermann

Inhalt

Mechanische Schwingungen und Wellen 71

Wärmelehre 117

Elektrizitätslehre 153

Einleitung

Der Physik liegen zwei Axiome zugrunde:

1. Naturgesetze sind allgemeingültig, d. h. unter gleichartigen Bedingungen bestimmen sie zu jeder Zeit und überall mit gleicher Notwendigkeit das Naturgeschehen.

2. Die Beobachtung liefert allein die Entscheidungskriterien über die Richtigkeit eines Modells zur Beschreibung eines Naturereignisses: Das Experiment ist Beweisgrundlage. Dabei wird unter dem *Experiment* die planmäßige Beobachtung verstanden, bei der alle wesentlichen Einflüsse auf das Geschehen messend kontrolliert werden.

Erst durch eindeutige Definition physikalischer Größen wird es möglich, Meßaufgaben zu formulieren und durch Messungen Gesetzmäßigkeiten aufzudecken. Dazu gehört es, Maßeinheiten für diese Größen festzulegen.

Physikalische Gesetze werden im allgemeinen in mathematischer Darstellung formuliert, weil sie die einfachste Beschreibung erlaubt und die Möglichkeit bietet, deduktive Schlußfolgerungen abzuleiten. Dies ändert jedoch nichts an der Tatsache, daß im Vordergrund der physikalischen Erkenntnis die messende Beobachtung von Vorgängen in der Natur steht.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen einem physikalischen Gesetz und einer mathematischen Formel ist, daß physikalische Größen prinzipiell nicht mit derselben Schärfe zu bestimmen sind wie mathematische Größen. Ein *Meßpunkt* stellt wegen prinzipieller Ungenauigkeiten und Meßfehler nie einen mathematischen Punkt dar. Daran sollte man sich bei der Beurteilung der Präzision mathematischer Formulierungen von physikalischen Gesetzmäßigkeiten erinnern. Die Grenze jedes Gesetzes liegt in der Meßgenauigkeit des jeweils entscheidenden Experiments. Die Abschätzung der Genauigkeitsgrenzen — oder *Fehlergrenzen,* wie man allgemein sagt — ist wesentlicher Bestandteil jeder Messung und auch jeder Anwendung eines physikalischen Gesetzes. Allgemein gilt, daß die Fehlerabschätzung ebenso wichtig ist wie die Angabe des Resultates selber. Ein Gesetz gilt mit Sicherheit nur für den Bereich der Variablen, innerhalb dessen Experimente durchgeführt wurden. Diese Einschränkung ist in der mathematischen Formulierung eines physikalischen Zusammenhanges meist nicht zu erkennen. Daher ist bei extremen Werten der Variablen Vorsicht geboten.

Um in der verwirrenden Vielfalt der Naturerscheinungen allgemeine Gesetzmäßigkeiten überhaupt erkennen zu können, sucht man in der Physik einfache *Modelle.* Diesem Vorgehen liegt die Vorstellung zugrunde, daß man auch verwickelte Naturvorgänge in eine Reihe von ineinandergreifenden Einzelvorgänge zerlegen kann. Unter verschiedenen, einen Sachverhalt beschreibenden Modellen sollte man, wie bereits Newton forderte, normalerweise dem einfachsten den Vorzug geben. Zur Vereinfachung enthalten solche Modelle meist idealisierende Annahmen, die in der Natur nur näherungsweise erfüllt sind. (Ein Beispiel ist der *Massenpunkt*). Berechtigt ist das allerdings nur, wenn man abschätzen kann, daß die dadurch entstehenden Abweichungen vom realen Verhalten klein bleiben. Ein aus einem Modell abgeleitetes Gesetz gilt in allen Naturbereichen für Vorgänge, die auf das Modell zurückgeführt werden können. Es ist also zu unterscheiden zwischen dem Modell und der speziellen Realisierung in der Natur.

Gerade für denjenigen, der die Physik als Hilfswissenschaft benötigt, ist es wichtig, sich immer wieder klarzumachen, daß hinter jedem physikalischen Gesetz eine Unmenge von Anwendungsbeispielen steht, die dem Gesetz erst seine Bedeutung geben. Für solche Anwendungsbeispiele den Blick zu schärfen, sollte der wesentliche Bestandteil der Physikausbildung für Mediziner, Biologen und Pharmazeuten sein.

Insbesondere Medizinern begegnet die Physik heute zunehmend in Form von chromblitzender Verpackung komplizierter technischer Geräte zur Diagnose, Überwachung und Therapie. Das Innenleben und die Funktionsweise dieser Geräte sind den Anwendern zumeist mehr oder weniger unbekannt. Es kann zu verhängnisvollen Konsequenzen führen, daß perfektes Design und optimistische Betriebsbeschreibung ebenso perfekte Meß- und Anwendungsergebnisse demjenigen suggerieren können, dem die näheren Kenntnisse physikalisch-technischer Zusammenhänge fehlen. Unerläßlich sind solche Kenntnisse, um sich eine Vorstellung von den Grenzen der Meßgenauigkeit und der Anwendbarkeit von Diagnose-, Meß- und Therapiegeräten zu verschaffen. Zu fordern, daß das Verständnis der technischen Komponenten eines Gerätes Voraussetzung für seine Bedienung sein soll, ist längst unrealistisch geworden. Ein realistischer Kompromiß dagegen ist, sich mit den physikalischen Grundlagen der technischen Anwendungen vertraut zu machen. Dazu soll das vorliegende Buch beitragen.

Mechanik

1. Raum und Zeit

1.1 Physikalische Größen und Einheiten

1.1.1 Länge als Beispiel

Zur quantitativen Beschreibung eines Ereignisses ist die zahlenmäßige Angabe der untersuchten physikalischen Größen erforderlich. Solche Größen sind z. B. Länge, Geschwindigkeit oder die elektrische Stromstärke. Sie können stetig oder diskret sein. Ein Beispiel für eine stetige Größe ist die Zeit, eine diskrete Größe ist die Zahl N radioaktiver Atome einer Probe, die sich ja stets nur um ganze Zahlen ändern kann. Diese Unterscheidung ist wesentlich, wenn N klein ist. Ist N dagegen sehr groß, so kann man die Größe näherungsweise als stetig veränderlich ansehen, wie dies beim Gesetz von der radioaktiven Umwandlung, Gl. (21-3), geschieht. Stetige Größen haben den Vorteil, daß sie mathematisch leichter zu behandeln (z. B. zu differenzieren oder integrieren) sind.

Eine physikalische Größe wird üblicherweise durch ein Buchstaben-Symbol abgekürzt, und sie ist festgelegt durch Angabe des *Zahlenwertes* und der *Maßeinheit*, z. B.:

Länge l	$= 0{,}097$	Meter (m),	
(physikal. Größe)	(Zahlenwert)	(Einheit).	(1-1)

Im Laufe der Zeit ist eine Unzahl von Einheiten erfunden worden. Allein für die Länge geht ihre Zahl in die Hunderte. Durch Einführung von Einheitensystemen, in denen geeignete Einheiten zusammengefaßt wurden, hat man versucht, dieses Durcheinander zu beseitigen.

In einem *Einheitensystem* sind einige physikalische Größen als *Grund- oder Basisgrößen* ausgewählt. Die übrigen Größen, die man als *abgeleitete Größen* bezeichnet, ergeben sich dann gemäß ihren Definitionsgleichungen als Kombinationen aus diesen Grundgrößen.

So ergibt sich z. B. die gleichförmige Geschwindigkeit v als abgeleitete Größe durch die Definitionsgleichung $v = s/t$, wobei s die während der Zeit t zurückgelegte Wegstrecke ist, aus den Basisgrößen Länge und Zeit. Diese Beziehung stellt eine *Größengleichung* dar und legt zugleich die *Dimension* von v fest, nämlich *Länge dividiert durch Zeit.* Die Dimension gibt die Zusammensetzung einer Größe aus den Basisgrößen an. In Tab. 1.1 sind die Dimensionen einiger physikalischer Größen angegeben, die sich aus den Basisgrößen Länge, Zeit und Masse ableiten. Setzen wir in die Größengleichung $v = s/t$ Zahlenwerte ein und geben an, daß z. B. 5 m in 3 s zurückgelegt werden, so erhalten wir eine Zahlenwertgleichung: $v = 5/3\ \mathrm{m\,s^{-1}}$.

Tab. 1.1 Die Dimensionen einiger physikalischer Größen

Physikalische Größe		Dimension
Fläche	A	Länge · Länge
Volumen	V	Länge · Länge · Länge
Geschwindigkeit	v	Länge/Zeit
Beschleunigung	a	Länge/(Zeit)^2
Impuls	p	Masse · Länge/Zeit
Kraft	F	Masse · Länge/(Zeit)^2
Energie	E	Masse · (Länge)^2/(Zeit)^2

Tab. 1.2 Basis-Einheiten einiger Einheiten-Systeme

Einheiten-System	Mechanik				Elektrizitätslehre	Thermodynamik		Photometrie
	Länge	Masse	Kraft	Zeit	Stromstärke	Temperatur	Stoffmenge	Lichtstärke
CGS	Zentimeter cm	Gramm g		Sekunde s				
MKSA	Meter m	Kilogramm kg		Sekunde s	Ampere A			
Technisches	Meter m		Kilopond kp	Sekunde s				
Angelsächsisches	foot ft	pound lb		second s		Fahrenheit °F		
Natürliches	Protonen-Compton-Wellenlänge l_p	Protonenmasse m_p		$t = l_p/c$ (c = Lichtgeschwindigkeit)				
Internationales (SI)	Meter m	Kilogramm kg		Sekunde s	Ampere A	Kelvin K	Mol mol	Candela cd

Den Basisgrößen werden Einheiten, *Basis-* oder *Grundeinheiten* zugewiesen. Damit sind auch die Einheiten der abgeleiteten Größen festgelegt, wenn man vereinbart, daß sie entsprechend ihrer Definitionsgleichungen zu bilden sind. So ist bei Verwendung der Basiseinheiten Meter (m) und Sekunde (s) die Einheit der Geschwindigkeit v gleich $1\,\mathrm{m}\,1\,\mathrm{s}^{-1} = 1\,\mathrm{m\,s}^{-1}$. (Auf Multiplikationspunkte bei Formeln und Einheiten wird in diesem Buch verzichtet.)

In Tabelle 1.2 sind die Basiseinheiten einiger heute üblicher Einheitssysteme, in Tab. 1.3 die zur Erweiterung von Einheiten vorgeschriebenen Vorsatzzeichen und in Tab. 1.4 die Einheiten des *Internationalen Einheitensystems* (SI = Système International d'Unités) mit den ihnen oft zusätzlich gegebenen Eigennamen zusammengestellt.

Das SI macht den Gebrauch weiterer bisher üblicher, nicht in Systemen zusammengefaßter Einheiten überflüssig. Hierzu gehören z. B. PS als Leistungseinheit, cal als Energieeinheit oder Torr als Druckeinheit. Diese und einige weitere systemfremde Einheiten sind in Tab. 1.5 zusammengestellt.

Tab. 1.3 Dezimale Vielfache und Teile von Einheiten

	Zehnerpotenzen	Vorsatz	Vorsatzzeichen
Vielfache:	10^{12}	Tera	T
	10^{9}	Giga	G
	10^{6}	Mega	M
	10^{3}	Kilo	k
Teile:	10^{-1}	Dezi	d
	10^{-2}	Zenti	c
	10^{-3}	Milli	m
	10^{-6}	Mikro	µ
	10^{-9}	Nano	n
	10^{-12}	Pico	p
	10^{-15}	Femto	f
	10^{-18}	Atto	a

1.1.2 Basiseinheiten des internationalen Einheitensystems

Physikalische Größen sind über Meßverfahren definiert. Eine Messung besteht aus dem direkten oder indirekten Vergleich der zu messenden Größen mit einem Eichnormal.

Die ständige Überprüfung der in Wirtschaft und Industrie verwendeten Meßgeräte mit Eichnormalen (die *Eichung*) ist durch Gesetze und staatliche Verordnungen geregelt. In der Bundesrepublik Deutschland ist die Zentralstelle für derartige Überwachungen die

Tab. 1.4 Abgeleitete und sonstige Einheiten des SI mit eigenen Namen

Mechanik	
Kraft:	1 kg m s^{-2} = 1 Newton (N)
Druck:	1 kg m^{-1} s^{-2} = 1 Nm^2 = 1 Pascal (Pa)
Energie:	1 kg m^2 s^{-2} = 1 Joule (J)
Leistung:	1 kg m^2 s^{-3} = 1 Watt (W)
Winkel:	
eben:	1 Radiant (rad)
räumlich:	1 Steradiant (Sr)
Frequenz:	1 s^{-1} = 1 Hertz (Hz)
Photometrie	
Lichtstrom:	1 cd Sr = 1 Lumen (lm)
Beleuchtungsstärke:	1 cd Sr m^{-2} = 1 Lux (lx)
Elektrizitätslehre	
Spannung:	1 kg m^{-2} s^{-3} A^{-1} = 1 Volt (V)
Widerstand:	1 kg m^{-2} s^{-3} A^{-2} = 1 Ohm (Ω)
Leitwert:	1 kg^{-1} m^{-2} s^3 A^2 = 1 Ω^{-1} = 1 Siemens (S)
Kapazität:	1 A s V^{-1} = 1 Farad (F)
Induktivität:	1 kg m^2 s^{-1} A^{-2} = 1 Henry (H)
Ladung:	1 A s = 1 Coulomb (Cb)
Magnetischer Fluß:	1 kg m^2 s^{-2} A^{-1} = 1 Weber (Wb)
Magnetische Induktion:	1 kg s^{-2} A^{-1} = 1 Tesla (T)
Atom- und Kernphysik	
Masse:	1 atomare Masseneinheit (1 u = 1,66058 · 10^{-27} kg)
Energie:	1 Elektronenvolt (1 eV = 1,60206 · 10^{-19} J)
Aktivität:	1 s^{-1} = 1 Becquerel (Bq)
Energiedosis:	1 J kg^{-1} = 1 Gray (Gy)
Äquivalentdosis:	1 J kg^{-1} = 1 Sievert (Sv)

Physikalisch-Technische Bundesanstalt in Braunschweig und Berlin.

Die *Eichnormale* der *Basiseinheiten* des SI sind:

1. Meter (m) Das Meter ist die Wegstrecke, die das Licht im Vakuum während des Zeitintervalls von (1/299 792 458) s durchläuft. Damit ist das Meter auf den Wert der Vakuumlichtgeschwindigkeit bezogen.

2. Sekunde (s) Die Festlegung der Zeiteinheit aus der Länge des Tages ist für heutige Ansprüche zu ungenau. Daher bezieht man sich auf Vorgänge im Atom. Die Sekunde ist das 9 192 631 770fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen 2 bestimmten Niveaus (den Hyperfeinstrukturniveaus des elektronischen Grundzustandes) des Nuklids ^{133}Cs entsprechenden Strahlung. Das Eichnormal ist in der Atomuhr realisiert.

3. Kilogramm (kg) Die Masseneinheit ist bisher nicht auf Naturkonstanten gegründet, sondern auf dem in Sèvres (Frankreich) aufbewahrten Kilogramm-Prototyp, einem Block einer Platin-Iridium-Legierung. Zur Festlegung von Atommassen bezieht man sich auf das Kohlenstoff-Isotop ^{12}C, mit der *Mol-Masse* $m = \frac{12}{N_A \cdot 10^3}$ kg mol^{-1}, wobei N_A *die Avogadro- (Loschmidtsche-) Konstante*, $N_A = 6{,}0220 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}, ist.

(Die atomare Masseneinheit *u* ist der zwölfte Teil der Masse eines Atoms des Nuklids ^{12}C; sie gehört nicht zu den Basiseinheiten des SI, darf jedoch verwendet werden).

4. Ampere (A) Ein Ampere ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen elektrischen Stromes, der, durch zwei im Vakuum im Abstand 1 m voneinander angeordnete, geradli-

Tab. 1.5 Einige nicht zum SI gehörige Einheiten

Größe	Einheit	Umrechnung → SI
Länge	Fermi	10^{-15} m
	Ångström (Å)	10^{-10} m
	Zoll (inch)	0,0254 m
	englische Meile	1609,33 m
	atomare Längeneinheit (a_0)	$0{,}529 \cdot 10^{-10}$ m
	Lichtjahr	$9{,}45 \cdot 10^{-15}$ m
Kraft	dyn	10^{-5} N
	Kilopond	9,81 N
Druck	physikal. Atmosphäre (atm)	101325 Pa
	techn. Atmosphäre (at)	98066,5 Pa
	bar	100000 Pa
	Torr (mm Hg-Säule)	133,3224 Pa
	Zentimeter Wassersäule (cm WS)	98,0665 Pa
Masse	Pfund	0,5 kg
	Zentner	50 kg
	Tonne	1000 kg
Energie	Kalorie (cal)	4,1868 J
	erg	10^{-7} J
	Hartree	$4{,}359 \cdot 10^{-18}$ J
	Rydberg	$2{,}179 \cdot 10^{-18}$ J
Leistung	Pferdestärke (PS)	735,49875 W
Lichtstärke	Hefnerkerze	0,903 cd
Magn. Feldstärke	Oersted (Oe)	$\frac{10^3}{4\pi}\,\mathrm{Am}^{-1}$
Magn. Flußdichte	Gauß (G)	10^{-4} T
Aktivität einer radioaktiven Substanz	Curie (Ci)	$3{,}7 \cdot 10^{10}\ \mathrm{s}^{-1}$ (Bq)
Energiedosis	rad	$0{,}01\ \mathrm{J\,kg}^{-1}$ (Gy)
Äquivalentdosis	rem	$0{,}01\ \mathrm{J\,kg}^{-1}$ (Sv)
Ionendosis	Röntgen	$2{,}58 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{C\,kg}^{-1}$
Zeit	Minute (min)	60 s
	Stunde (h)	3600 s
Temperatur	Fahrenheit (F)	0 °C ≅ 32 °F; 100 °C ≅ 212 °F

nige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbarem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern für jeden Abschnitt der Länge 1 m eine Kraft von $F = 2 \cdot 10^{-1}$ N hervorrufen würde.

5. Kelvin (K) Ein Festpunkt der Temperaturskala ist der Tripelpunkt des Wassers, bei dem Eis, Wasser und Dampf miteinander im thermischen Gleichgewicht stehen. Seine Temperatur ist auf genau 273,16 K festgelegt. Bei 1 K Temperatursteigerung dehnt sich ein ideales Gas bei konstantem Druck um 1/273,16 seines Volumens bei der Temperatur des Tripelpunktes des Wassers aus.

6. Candela (cd) Eine Candela ist die Lichtstärke, die von einer Strahlungsquelle erzeugt wird, die monochromatisches Licht der Frequenz $5{,}4 \cdot 10^{14}$ Hz mit einer Leistung von 1/683 Watt pro Raumwinkeleinheit emittiert.

7. Mol Ein Mol ist die Stoffmenge eines Systems, das aus ebensoviel Einzelteilchen besteht, wie Atome in 0,012 kg des Kohlenstoffisotops ^{12}C enthalten sind. Hierbei müssen die Einzelteilchen spezifiziert sein; es können Atome, Moleküle, Ionen, Elektronen sowie andere Teilchen sein. Das Einheitenzeichen der Stoffmengengröße *Mol* ist mol. Nach dieser Definition sind also Stoffmenge und Masse als voneinander unabhängige Größen anzusehen. In einem mol sind N_A Teilchen enthalten: $N_A = 6{,}0220 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$.

1.1.3 Längenmessung

Eine Längenmessung in einfacher Form ist unter den physikalischen Meßverfahren sicher das anschaulichste. Durch Anlegen eines Maßstabes, der meist in m, cm und mm unterteilt ist, wird durch direkten Vergleich die interessierende Länge eines Gegenstandes oder die Entfernung zwischen zwei Punkten bestimmt. Diesem Verfahren sind jedoch bezüglich der Größe der zu messenden Länge Grenzen gesetzt. Bis zu Größen von einigen Metern kann man sich noch dadurch helfen, daß man den Maßstab mehrere Male aneinandersetzt, was aber meistens mit bedeutenden Ungenauigkeiten verbunden ist. Deshalb verwendet man dort entsprechende Bandmeßgeräte. Reichen auch diese nicht mehr aus, werden, wie Tab. 1.6 zeigt, trigonometrische Meßverfahren angewandt. Dazu gehört die *Triangulation* (Abb. 1.1a), mit der sich nach dem Sinussatz durch Messung der beiden Winkel α_2 und α_3 und der Strecke d_1 die unbekannte Strecke d_2 bestimmen läßt, $d_2 : d_1 = \sin \alpha_2 : \sin (180° - \alpha_2 - \alpha_3)$. Im astronomischen Bereich dient schließlich als Maß für Entfernungen die Zeit, die das Licht braucht, um die zu messende Strecke zurückzulegen (alte Einheit: Lichtjahr), und man bestimmt den Stand weit entfernter Galaxien aus der Doppler-Verschiebung der von ihnen emittierten Lichtfrequenzen *(Rot-Verschiebung),* die auf die ständige Expansion des Weltalls zurückgeführt wird (vgl. Kap. 7.3).

Noch komplizierter und vielfältiger werden die Meßverfahren bei kleinen Längen. Da Messungen im Bereich von cm und mm sehr oft mit großer Genauigkeit durchgeführt werden müssen, hat man hierfür besondere Geräte (Abb. 1.1b) wie z. B. die Schraublehre entwickelt. Bei noch kleineren Abmessungen kann der Vergleich zwischen Objekt und Maßstab nach entprechender Vergrößerung durch Lupe, Lichtmikroskop oder Elektronenmikroskop durchgeführt werden. In diesem Größenbereich zwischen 10^{-3} m und 10^{-10} m liegt der Großteil der Abmessungen, die für Biologie und Medizin interessant sind. Bei technischen Messungen und in der Kristallographie werden auch die Wellenlängen des Lichtes und der Röntgenstrahlen als Maßstäbe benutzt und der Größenvergleich über die Interferenz der Strahlung durchgeführt.

Diese Aufzählung zeigt die Vielfalt der Methoden der Längenmessung und weist gleichzeitig auf ein allgemeines Problem der Physik hin: Bei der Durchführung von Meßaufgaben muß man sorgfältig diejenigen Meßmethoden auswählen, die dem Problem angepaßt sind und die bei möglichst geringem Aufwand die angestrebte Genauigkeit erreichen lassen.

Die spezielle Relativitätstheorie zeigt, daß die Länge einer Strecke keine absolut festgelegte Größe ist, sondern ihr Meßwert davon abhängt, ob und wie der Beobachter sich gegenüber dem Meßobjekt bewegt. Freilich treten meßbare Änderungen erst auf, wenn die Geschwindigkeit v dieser Bewegung sich der Lichtgeschwindigkeit (siehe Kap. 14.9.7.1) nähert. Dann erscheint dem bewegten Beobachter eine parallel zur Bewegungsrichtung liegende Strecke l_0 verkürzt, nämlich als

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

wobei c die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit bedeutet ($c \sim 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$). Man nennt diesen Effekt *relativistische Längenkontraktion.*

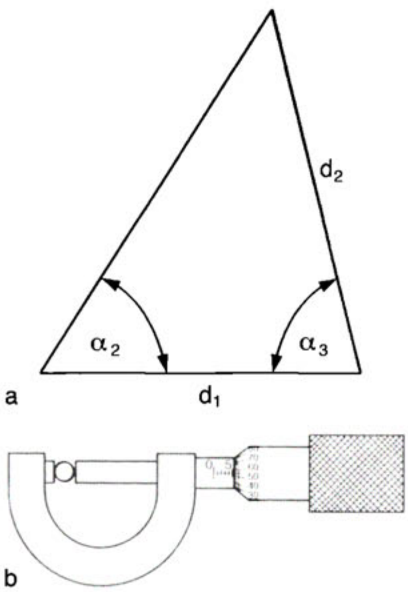


Abb. 1.1 Triangulation zur Bestimmung von d_2 aus den gemessenen Größen d_1, α_2 und α_3 (a); Schraublehre (b).

Tab. 1.6 Einige typische Längen, ihre Größenordnung und Meßverfahren

10^{-15}	Kern-Durchmesser 10^{-15}	indirekte atomphys. Methoden (Streuung)
10^{-12}		
	Atom-Durchmesser 10^{-10}	Röntgenbeugung
10^{-9}		Elektronenmikroskopie
10^{-6}	Wellenlänge des sichtb. Lichts 10^{-6}	
	Erythrozyten-Durchmesser 10^{-5}	Lichtmikroskopie
10^{-3}		
1		Bandmaße
10^{3}	Höhe des Mt. Everest 10^{4}	Trigonometrie
10^{6}		
	Erd-Durchmesser 10^{7}	
10^{9}	Abstand Erde-Mond 10^{9}	Laufzeit von Licht
10^{12}	Abstand Erde-Sonne 10^{12}	
	Durchmesser des Sonnensystems 10^{13}	
10^{15}		
	Entfernung nächster Fixsterne 10^{17}	
10^{18}		
10^{21}	Durchmesser der Milchstraße 10^{21}	
		indirekte astrophys.
10^{24}		Methoden (Rot-Versch.)
	weiteste sichtbare Galaxis 10^{26}	

Einheit: m

Tab. 1.7 Zeitdauer und ihre Größenordnung

10^{-23}	Lebensdauer kurzlebiger Elementarteilchen 10^{-23}
10^{-15}	Schwingungsdauer von sichtbarem Licht 10^{-15}
10^{-12}	
10^{-9}	Lebensdauer von angeregten Zuständen in Atomen 10^{-9}
10^{-6}	
10^{-3}	Dauer eines Blitzes 10^{-3}
1	Pulsschlag
10^{3}	
10^{6}	1 Jahr $3 \cdot 10^{7}$
10^{9}	Menschenalter 10^{9}
10^{12}	
	Alter der Menschheit 10^{14}
10^{15}	
10^{18}	Alter der Milchstraße 10^{18}

Einheit: s

1.1.4 Zeitmessung

Mit in der Natur nacheinander ablaufenden Vorgängen verbinden wir den Begriff der Zeit. Sie ist, wie in Kap. 1.1.1 bereits erwähnt, eine der Basisgrößen des SI, und ihre SI-Einheit ist die *Sekunde* (s). Weitere Zeiteinheiten sind in Tab. 1.5 aufgeführt. Unter den physikalischen Größen nimmt die Zeit eine Sonderstellung ein, weil ihr Betrag stets zu- und nie abnimmt.

Ein Zeitpunkt (eine Uhrzeit) wird durch hochgestelltes Einheitszeichen, z. B. 3^h, eine Zeitdauer (Intervall zwischen zwei Zeitpunkten) wird durch das Einheitszeichen auf der Zeile, z. B. 3 h, angegeben. Einige physikalisch interessante Zeitdauern sind in Tab. 1.7 zusammengestellt.

Vorgänge, bei denen sich in völlig gleicher Weise gleiche Zustände wiederholen, nennen wir *periodisch*. Die Zeitdauer zwischen zwei aufeinander folgenden gleichen Zuständen bezeichnen wir als die Periode oder Periodendauer T des Vorganges. Den Kehrwert von T nennen wir die Frequenz ν:

$$\nu = \frac{1}{T}, \tag{1-2a}$$

mit der SI-Einheit *Hertz*, $1\ \text{Hz} = 1\ \text{s}^{-1}$.

Die Größe ν gibt an, wie häufig sich der periodische Vorgang pro Sekunde wiederholt. Beispiele für periodische Vorgänge sind die Drehung der Erde um ihre Achse, die Bewegung eines Pendels, die Schwingung einzelner Atome in einem Molekül oder die Kontraktion des Herzens.

Die Zeitmessung besteht darin, zu vergleichen, wie oft die Zeiteinheit in einer zu messenden Zeitdauer enthalten ist. Meßapparate, die diesen Vergleich vornehmen, bezeichnet man als Uhren (Pendeluhr, Atomuhr, usw.). Zur Messung der Zeitdauer bedarf es der Feststellung der Gleichzeitigkeit ihres Anfangs und Endes mit dem angezeigten Gang der Uhr.

Der Begriff der *Gleichzeitigkeit* spielt in diesem Zusammenhang eine wesentliche Rolle, denn die Relativitätstheorie hat uns gelehrt, daß zwei mit einer Relativgeschwindigkeit v gegeneinander bewegte Uhren für scheinbar gleichzeitig ablaufende Vorgänge unterschiedliche Zeitdauern messen. Um dies zu veranschaulichen, ermitteln wir in einem bezüglich des Beobachters ruhenden und einem bewegten System die Zeit, die ein Lichtblitz braucht (Abb. 1.2), um von einer Lampe zu einem Spiegel und zurück zu einer Photozelle zu gelangen. In beiden Systemen sollen die Lichtblitze gleichzeitig emittiert werden und dabei gleichzeitig die Uhren zu laufen beginnen. Im ruhenden System wird die Uhr (Abb. 1.2a) bis zum Eintreffen des Lichtblitzes in der Photozelle die Zeit $t_0 = 2D/c$

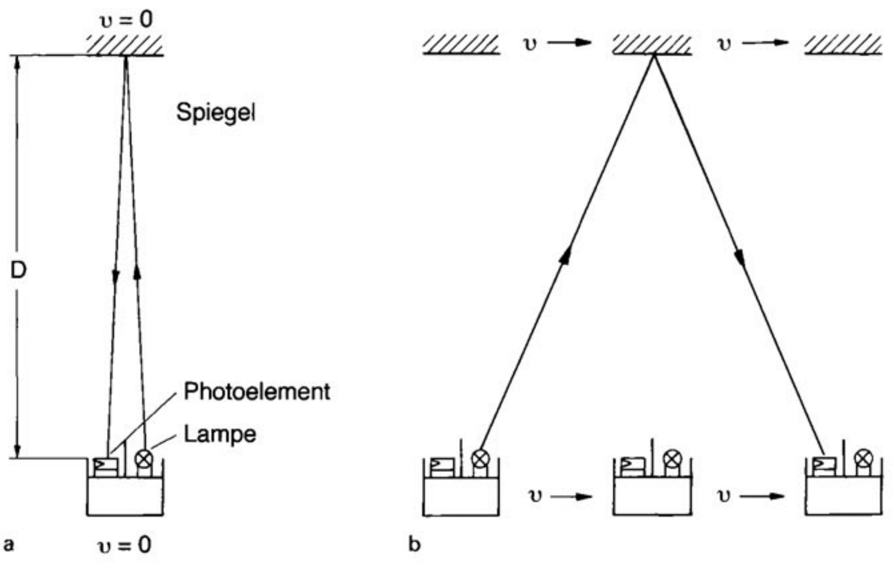


Abb. 1.2 Zeitdehnung bei bewegten Systemen.

($c \sim 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}; Lichtgeschwindigkeit) anzeigen. In dem mit der Geschwindigkeit v bewegten System dagegen wird vom Blitz, wie aus Abb. 1.2b hervorgeht, vom ruhenden Beobachter aus gesehen, ein längerer Weg zurückgelegt, was bei gleicher Lichtgeschwindigkeit c zu einer größeren Meßzeit t bis zum Eintreffen des Lichtblitzes in der Photozelle führt. Vom Beobachter gesehen, treffen die Blitze im ruhenden und im bewegten System also nicht mehr gleichzeitig in den Photozellen ein.

Die bei der Relativbewegung zweier Systeme auftretende *Zeitdilatation (Zeitdehnung)* beträgt quantitativ

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \,. \tag{1-2b}$$

Sie besagt, daß dem ruhenden Beobachter die Intervalle gedehnt erscheinen, d. h. eine mit der Geschwindigkeit v bewegte Uhr geht, vom ruhenden Beobachter aus betrachtet, langsamer. Zu einer präzisen Zeitmessung gehört also die Angabe, in welchem System sie durchgeführt wurde.
Mit Hilfe der letzten Gleichung läßt sich z. B. zeigen, daß eine Rakete, die die Erde mit der Geschwindigkeit $v = 2 \cdot 10^4$ m s^{-1} verläßt, ungefähr 16 Jahre unterwegs sein muß, bis die Borduhren für den Beobachter auf der Erde gegenüber den Erduhren um 1 s nachgehen.

1.1.5 Winkelmaße

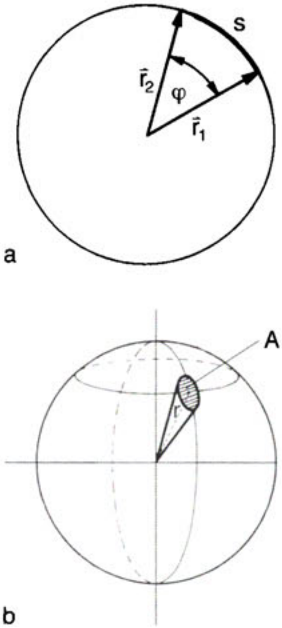
Ebene Winkel φ können im *Gradmaß* gemessen werden. 1 Grad (1°) ist 1/360 des zum *Vollkreis* gehörenden *ganzen Winkels*. Das Grad wird weiter unterteilt in Minuten (′) und Sekunden (″):

$$1° = 60' = 3600'' \,. \tag{1-3}$$

Als weiteres Maß für einen Winkel φ verwendet man das *Bogenmaß*, das als Verhältnis der durch zwei Radien r_1 und r_2 aus einem Kreis ausgeschnittenen Bogenlänge s zum Betrag r des Radius (Abb. 1.3 a) definiert ist:

$$\varphi = \frac{s}{r} \text{ , mit der SI-Einheit } \textit{Radiant} \text{ (rad)} \,. \tag{1-4}$$

Der *ganze Winkel* hat demnach im Bogenmaß die Größe 2π rad. Daraus ergibt sich als



a

b

Abb. 1.3 Zur Definition des ebenen Winkels (a) und Raumwinkels (b).

Umrechnungsfaktor zum Gradmaß:

$$\frac{\varphi \text{ (Bogenmaß)}}{\varphi \text{ (Gradmaß)}} = \frac{2\,\pi \text{ rad}}{360°} \,. \tag{1-5}$$

Hieraus folgt, daß einer Winkeleinheit im Bogenmaß 57,296 Winkeleinheiten im Gradmaß entsprechen:

1 rad $\cong$ 57,296°.

Analog zur Definition des Bogenmaßes auf einem Kreis wird der *Raumwinkel* Ω auf einer Kugel definiert (Abb. 1.3b). Ω ist gegeben durch das Verhältnis des durch einen Kegel ausgeschnittenen Kugelflächensegmentes A zum Quadrat des Kugelradius r:

$$\Omega = \frac{A}{r^2} \text{ mit der SI-Einheit } \textit{Steriadiant} \text{ (sterad.)} \tag{1-6}$$

Der gesamte Raumwinkel beträgt also 4π sterad, und der Öffnungswinkel des Kegels für die Raumwinkeleinheit 1 sterad ist 65,6°.

1.2 Bewegungen im Raum

1.2.1 Geschwindigkeit

Messungen von Länge und Zeit bilden die Grundlage für die physikalische Beschreibung von Bewegungen. Die Lehre von den Bewegungen der Körper im Raum bezeichnen wir als *Kinematik*. Der Bewegungsablauf läßt sich graphisch in einem *Weg-Zeit-Diagramm* (Abb. 1.4) darstellen. Als Beispiel tragen wir in ein rechtwinkliges Koordinatensystem die Weg- und Zeitkoordinaten s und t ein, die angeben, welche Wegstrecke Δs ein Radfahrer nach der Zeit Δt zurückgelegt hat.

Graphische Darstellungen Wir haben hier die Möglichkeit benutzt, eine Gesetzmäßigkeit quantitativ durch eine graphische Darstellung zu beschreiben. Dies ist besonders dann vorteilhaft, wenn man Meßfehler detailliert angeben will oder wenn die betreffende Gesetzmäßigkeit nicht durch eine einfache mathematische Formel angegeben werden kann. Eine geeignete graphische Darstellung kann mehr Informationen enthalten als seitenlange Zahlentabellen und anschaulicher sein als eine mathematische Funktion.

Der Abb. 1.4 entnehmen wir, daß die zwischen den Zeiten t_0 und t_1 von dem Radfahrer zwischen den Orten s_0 und s_1 zurückgelegte Wegstrecke $\Delta s = s_1 - s_0$ linear mit der Zeitspanne $\Delta t = t_1 - t_0$ zunimmt: Der Radfahrer hat sich *gleichförmig* bewegt. Wir sagen dann: Δs ist *proportional zu Δt* und verwenden hierzu die symbolische Schreibweise

$$\Delta s \sim \Delta t\,.$$

Die Proportionalitätsbeziehung läßt sich unter Verwendung einer Proportionalitätskonstanten in Form einer mathematischen Gleichung anschreiben, die den Zusammenhang zwischen Δs und Δt quantitativ beschreibt:

$$\Delta s = v\,\Delta t\,. \tag{1-7}$$

Die Proportionalitätskonstante v bezeichnen wir als *gleichförmige* oder *konstante Geschwindigkeit.*

Umrechnung von Maßeinheiten Wegen der Vielfalt von Maßeinheiten für ein und dieselbe physikalische Größe G ist häufig eine Umrechnung von einer Einheit E_1 in eine andere E_2, erforderlich: $E_1 = UE_2$.
Da die physikalische Größe G im Gegensatz zu ihrem Zahlenwert Z von der gewählten Einheit unabhängig ist, erhalten wir nach Gl. (1-1) mit dem Umrechnungsfaktor U:

$$G = Z_1E_1 = Z_1UE_2 = Z_2E_2\,. \tag{1-8}$$

Beispiel: Die Geschwindigkeit $v = 100$ km h^{-1} soll von der Einheit $E_1 = \mathrm{km\,h^{-1}}$ in die Einheit $E_2 = \mathrm{m\,s^{-1}}$ umgerechnet werden. 1 km/1 h = 1000 m/3600 s, und

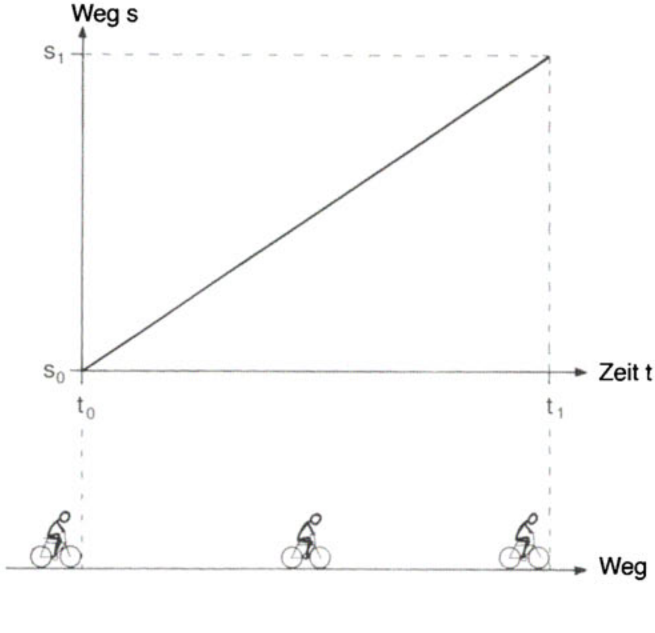


Abb. 1.4 Weg-Zeit-Diagramm.

deshalb ist $U = (1/3{,}6) = 0{,}278$. Aus Gl. (1-8) folgt für die Geschwindigkeit: $v = 100 \cdot 0{,}278\ \mathrm{m\,s^{-1}} = 27{,}8\ \mathrm{m\,s^{-1}}$.

Bis jetzt haben wir die Wegstrecke s und die Geschwindigkeit v durch Zahlenwert und Einheit dargestellt. Größen, für die dies ausreichend ist, nennt man *Skalare.* Weg und Geschwindigkeit jedoch sind durch Zahlenwert und Einheit noch nicht eindeutig festgelegt; dazu ist es notwendig, auch ihre Richtung anzugeben.

Eine Größe, die Zahlenwert, Einheit und Richtung angibt, nennen wir einen *Vektor.*

Vektoren kennzeichnen wir durch ein Pfeilsymbol, in unserem Fall $\vec{s}$ bzw. $\vec{v}$; häufig werden auch Fettdruck oder Frakturbuchstaben verwendet. Der Begriff des Vektors ist der Geometrie entlehnt; für Vektoren gelten die im Anhang zusammengefaßten allgemeinen Rechenregeln. Den Zahlenwert des Vektors mit der dazugehörigen Einheit nennen wir den *Betrag des Vektors* und kennzeichnen ihn durch senkrechte Striche, z. B. $|\vec{s}|$. Der Betrag ist ein Skalar, und wir können deshalb auch einfach s dafür schreiben. Zeichnerisch wird der Vektor durch einen Pfeil in einem Koordinatensystem dargestellt, dessen Koordinaten Dimension *und* Einheit des Vektors tragen. So ist eine Strecke im *Ortsraum,* eine Geschwindigkeit im *Geschwindigkeitsraum* zu zeichnen. Die Richtung ist dann die der physikalischen Größe, und die Pfeillänge ist ein Maß für den (dimensionsbehafteten) Betrag. Wollen wir den Vektor nach Betrag und Richtung getrennt darstellen, dann schreiben wir $\vec{s} = s\vec{e}$, wobei $\vec{e}$ *Einheitsvektor* genannt wird. Er ist dimensionslos, hat den Betrag 1 und weist in die Richtung von $\vec{s}$ (s. Anhang A.3).

Momentangeschwindigkeit Besteht, wie im Weg-Zeit-Diagramm der Abb. 1.5 angedeutet, kein linearer Zusammenhang zwischen zurückgelegter Wegstrecke und abgelaufener Zeit, so darf nicht wie zuvor in Gl. (1-7) die Geschwindigkeit als Proportionalitätskonstante eingeführt werden, weil sich nun $\vec{v}$ offenbar während des Bewegungsablaufes mit der Zeit t ändert:

$$\vec{v} = \vec{v}(t)\,.$$

Diese Änderung des Geschwindigkeitsvektors kann sowohl eine Änderung seiner Richtung als auch seines Betrages sein. Wir wollen uns zunächst auf eine Bewegung längs eines geraden Weges (geradlinige Bewegung) beschränken. Dann kommen als Änderungen der Geschwindigkeit nur solche ihres Betrages in Frage. Zur näherungsweisen Beschreibung dieses Bewegungsvorganges können wir eine *mittlere Geschwindigkeit* einführen. Darunter verstehen wir diejenige konstante Geschwindigkeit, die der Körper hätte haben müssen, um denselben Weg in der gleichen Zeit in gleichförmiger Bewegung zurückzulegen. Wir können den Betrag dieser mittleren Geschwindigkeit, v_{mittel}, einfach nach Gl. (1-7) berechnen:

$$v_{\mathrm{mittel}} = (s_{\mathrm{Ende}} - s_{\mathrm{Anfang}})/(t_{\mathrm{Ende}} - t_{\mathrm{Anfang}})\,. \tag{1-9}$$

Aus Abb. 1.5 ergibt sich: Zahlenwert von $v_{\mathrm{mittel}} = \tan\alpha_1$. Freilich ist damit nichts über den Wert der Geschwindigkeit zu irgend einer bestimmten Zeit t_i des Bewegungsvorganges gesagt. Um darüber eine nähere Auskunft zu erhalten, können wir eine mittlere Geschwindigkeit in einem kleinen Intervall Δt um t_i herum berechnen:

$$v_{\mathrm{mittel}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}\,. \tag{1-10}$$

Die Bedeutung von Δs geht aus Abb. 1.5 hervor. Die wahre Geschwindigkeit $v(t_i)$ zum Zeitpunkt t_i wird durch diese mittlere Geschwindigkeit um so besser angenähert, je kleiner die Intervalle Δt und Δs sind. Den genauen Wert von $v(t_i)$ finden wir, wenn wir Δt beliebig klein werden lassen. Wir gehen in der Sprache der Mathematik vom Differenzenquotienten der Gl. (1-10) zum Differentialquotienten über (der Quotient aus kleinen Größen braucht selbst nicht klein zu sein):

$$\lim_{\Delta t \to 0} v_{\mathrm{mittel}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v(t_i)\,. \tag{1-11}$$

Diese Geschwindigkeit v nennt man die *Momentangeschwindigkeit* zur Zeit t_i.
In Abb. 1.5 ergibt sich $v(t_i)$ als Steigung der Tangente im Punkt (s_i, t_i) an die Bewegungskurve: Zahlenwert von $v(t_i) = \tan\alpha_2$.
Wie aus der Differentialrechnung bekannt ist, sollen Δ und d hier keine algebraischen Größen darstellen, mit denen s bzw. t zu multiplizieren sind; vielmehr sind Δs und $\mathrm{d}s$ Abkürzungen für *kleine* bzw. *differentiell kleine* Intervalle von s.

Zur Addition von Geschwindigkeiten Bei Bewegungen entlang einer gemeinsamen Geraden addieren wir die Beträge der Geschwindigkeiten:

$$v = v_1 + v_2\,. \tag{1-12}$$

Allgemein haben wir Geschwindigkeiten jedoch vektoriell zu addieren (Anhang). Im Bereich kleiner Geschwindigkeiten ist die Beziehung $v = v_1 + v_2$ experimentell bestätigt worden. Aber es wäre voreilig, daraus zu schließen, dies gelte auch für beliebig große Geschwindigkeiten. Die *Relativitätstheorie* postuliert,

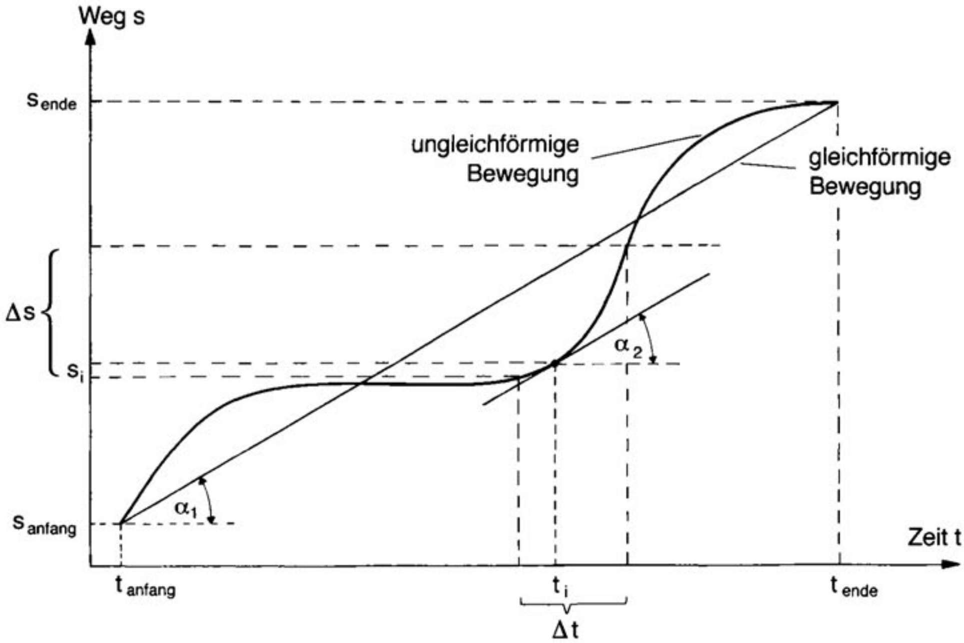


Abb. 1.5 Weg-Zeit-Diagramm bei ungleichförmiger Bewegung.

daß Körper keine beliebig hohe Geschwindigkeit annehmen können, daß vielmehr eine Grenzgeschwindigkeit existiert, die sich als die Ausbreitungsgeschwindigkeit von elektromagnetischen Wellen im Vakuum, c, ergibt. Da v also stets kleiner oder gleich c sein muß, ist Gl. (1-12) abzuändern, und aus der Relativitätstheorie folgt die Additionsbeziehung:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \,. \qquad (1\text{-}13)$$

Sind v_1 und v_2 gegenüber Lichtgeschwindigkeit c sehr klein (so daß $v_1 v_2/c^2$ gegenüber 1 vernachlässigt werden kann), dann geht Gl. (1-13) in die gewohnte Gl. (1-12) über. Nur unter dieser Voraussetzung darf also Gl. (1-12) benutzt werden. Daß die angegebene Additionsbeziehung dem Postulat der Grenzgeschwindigkeit c Rechnung trägt, erkennt man, wenn man eine der beiden Geschwindigkeiten oder aber beide gleich c setzt. Dann ergibt sich als resultierende Geschwindigkeit jeweils c.

1.2.2 Beschleunigung

Um Änderungen der Geschwindigkeit während des Bewegungsvorganges beschreiben zu können, führt man den Begriff der *Beschleunigung* ein.

Die Geschwindigkeit beschreibt die Änderung der zurückgelegten Wegstrecke mit der Zeit, und die Beschleunigung wird definiert als Änderung der Geschwindigkeit mit der Zeit.

Zunächst führen wir zur näherungsweisen Beschreibung der Beschleunigung die *mittlere Beschleunigung* a_{mittel} analog zur Definition der mittleren Geschwindigkeit von Gl. (1-10) ein. Wir bilden dazu das Verhältnis der Geschwindigkeit $\Delta v = v_2 - v_1$ zwischen zwei Orten s_2 und s_1 und dem zum Zurücklegen der Strecke $\Delta s = s_2 - s_1$ benötigten Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \,. \qquad (1\text{-}14)$$

Aus diesem Mittelwert über das *Zeitintervall* Δt erhalten wir die Beschleunigung $a(t_i)$ zum Zeit*punkt* t_i dadurch, daß wir Δt beliebig klein wählen und damit vom Differenzenquotienten der Gl. (1-14) zum Differentialquotienten

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = a(t_i) \qquad (1\text{-}15)$$

übergehen. Die SI-Einheit von a ist m s^{-2}.

Die Geschwindigkeit kann entweder zu- oder abnehmen, d. h. dv und damit auch a können positiv oder negativ sein. Entsprechend unterscheiden wir zwischen Beschleunigung und Abbremsung *(negative Beschleunigung)*.

Die Beschleunigung dv/dt läßt sich nach Gl. (1-11) auch schreiben

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}s/\mathrm{d}t)}{\mathrm{d}t}\,;$$

d. h. der Weg s wird zweifach nach der Zeit differenziert. Dafür verwenden wir auch die formale Schreibweise:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\,. \qquad (1\text{-}16)$$

In Gl. (1-14) und (1-15) haben wir die Skalare Δv und dv *benutzt,* und entsprechend hat sich für a in Gl. (1-16) ein Skalar ergeben. Diese Beschränkung auf Beträge ist nur bei der *geradlinigen* Bewegung zulässig. Im allgemeinen Fall der *krummlinigen* Bewegung müssen wir den Vektorcharakter der Geschwindigkeit berücksichtigen, und wir erhalten anstelle von Gl. (1-16)

$$\bar{a} = \frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}t}\,. \qquad (1\text{-}17)$$

Der Vektor $\bar{a}$ enthält jetzt sowohl die Änderung des Betrages als auch der Richtung von $\bar{v}$; er weist in Richtung von d$\bar{v}$, fällt also im allgemeinen nicht mit der Bahnrichtung zusammen. Eine krummlinige Bewegung ist demnach immer eine beschleunigte Bewegung.

Ist $\bar{a}$ während eines Bewegungsvorgangs konstant, ändern sich also weder die Richtung noch der Betrag der Beschleunigung, so sprechen wir von einer *geradlinig gleichförmig beschleunigten Bewegung.*

Ändert sich Betrag oder Richtung der Beschleunigung, so nennen wir die Bewegung *ungleichförmig beschleunigt.*

1.2.3 Kreisbewegung

Geschwindigkeit bei der Kreisbewegung Eine Bewegung, bei der sich die Richtung des Geschwindigkeitsvektors ändert, nennen wir *krummlinig.* Als Sonderfall behandeln wir den auf einer Kreisbahn umlaufenden Punkt P. Die Bewegung von P läßt sich besonders einfach beschreiben, wenn wir statt der kartesischen Koordinaten x und y die Polarkoordinaten r und φ verwenden (Abb. 1.6), wobei r der Betrag des Radiusvektors $\bar{r}$ und φ der von der x-Achse aus in der Einheit Radiant gemessene ebene Winkel sind. Da r bei der Kreisbewegung unverändert bleibt, können wir den Bewegungsablauf durch die Änderung von φ mit der Zeit t erfassen.

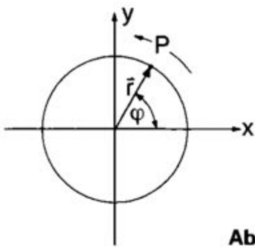


Abb. 1.6 Kreisbewegung.

Den Differentialquotienten dφ/dt definieren wir als Betrag der *Winkelgeschwindigkeit* ω *(Kreisfrequenz):*

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega, \text{ mit der SI-Einheit rad s}^{-1} \qquad (1\text{-}18\text{a})$$

Wollen wir neben der Kreisfrequenz ω noch Drehachse und Drehsinn angeben, so fassen wir diese drei Angaben in dem Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ zusammen. Der Vektor $\bar{\omega}$ ist so definiert, daß seine Länge ein Maß für die Kreisfrequenz ist und die Richtung die Stellung der Drehachse und den Drehsinn der Bewegung angibt (Abb. 1.7). Entsprechend kann auch der Winkel $\bar{\varphi}$ als Vektor definiert werden.

Anmerkung Vektoren von der Art von $\bar{\omega}$ und $\bar{\varphi}$ unterscheiden sich von den in Kap. 1.2.1 eingeführten Orts- oder Geschwindigkeitsvektoren dadurch, daß ihre Richtung die Richtung einer Drehachse und den Drehsinn angibt. Zur deutlichen Unterscheidung nennt man $\bar{\omega}$ und $\bar{\varphi}$ auch *axiale Vektoren.*

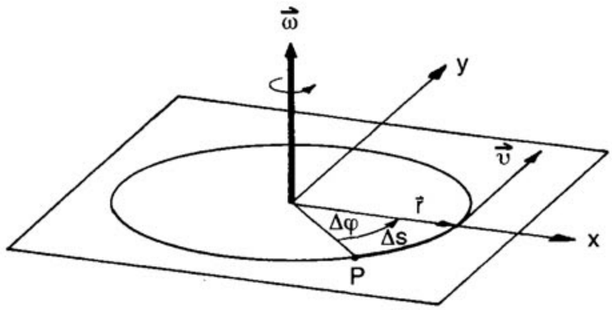


Abb. 1.7 Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und Bahngeschwindigkeit $\vec{v}$.

Die *Frequenz* ν erhalten wir aus ω, indem wir durch den Winkel des Vollkreises (2π) dividieren:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}\,. \tag{1-18b}$$

Wir wollen nun den Begriff der *Bahngeschwindigkeit* einführen. Aus der Geometrie des Kreises folgt mit Gl. (1-4) für die Länge des Kreisbogens Δs:

$$\Delta s = r\,\Delta\varphi$$

bzw. für infinitesimale Änderungen:

$$\mathrm{d}s = r\,\mathrm{d}\varphi\,. \tag{1-19}$$

Für die zeitliche Änderung von ds der Gl. (1-19) erhalten wir (da r konstant ist):

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = r\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\,. \tag{1-20}$$

Die linke Seite stellt nach Gl. (1-11) den Betrag der Momentangeschwindigkeit (die momentane Bahngeschwindigkeit) dar, und die rechte Seite enthält den in Gl. (1-18) definierten Betrag der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$. Damit folgt die Beziehung zwischen v und ω:

$$v = r\omega\,. \tag{1-21}$$

Gl. (1-21) stellt einen Zusammenhang zwischen den Beträgen von $\vec{v}$, $\vec{r}$ und $\vec{\omega}$ der Kreisbewegung dar. Die vollständige Beziehung dieser Vektoren untereinander aber ist durch das Vektorprodukt (siehe Anhang und Abb. 1.7)

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} \tag{1-22}$$

gegeben. Hieraus erhalten wir für die Beträge wieder Gl. (1-21), da bei der Kreisbewegung die Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{\omega}$ stets senkrecht aufeinander stehen.

Beschleunigung bei der Kreisbewegung Im vorigen Abschnitt wurde darauf hingewiesen, daß die Kreisbewegung krummlinig, also stets beschleunigt ist. Dies wird schon deutlich, wenn wir den Spezialfall der *gleichförmigen Kreisbewegung* ($\vec{\omega}$ = konst.) betrachten. Aus den Gl. (1-17) und (1-22) folgt dann für die Beschleunigung:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(\vec{\omega}\times\vec{r})\,, \tag{1-23a}$$

und falls $\vec{\omega}$ konstant ist

$$\vec{a} = \vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\,. \tag{1-23b}$$

Aus Abb. 1.8 erkennt man, daß die Änderung des Radiusvektors $d\vec{r}$ und des Kreisbogens $d\vec{s}$ identisch werden, wenn sie infinitesimal kleine Größen darstellen. Daher gilt

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \tag{1-24}$$

und aus Gl. (1-23b) folgt für den *Betrag* von $\vec{a}$, da $\vec{v}$ senkrecht auf $\vec{\omega}$ steht: $a = \omega v$; oder mit

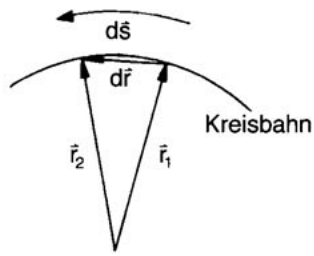


Abb. 1.8 Beschleunigung bei der Kreisbewegung.

Gl. (1-21):

$$a = \omega^2 r \quad \text{bzw.} \quad a = \frac{v^2}{r}\,. \tag{1-25}$$

Die *Richtung* von $\vec{a}$ ergibt sich aus Gl. (1-23). Nach den Rechenregeln zur Bildung des Vektorproduktes steht $\vec{a}$ senkrecht auf $d\vec{r}$ und $\vec{\omega}$ und weist zum Zentrum des Kreises (Anhang):

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}\,. \tag{1-26}$$

$\vec{a}$ wird als *Zentripetalbeschleunigung* bezeichnet.

Bei der *ungleichförmigen* Kreisbewegung ändert sich auch die Kreisfrequenz ω mit der Zeit. Diese Änderung beschreiben wir durch die *Winkelbeschleunigung*

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\omega}{dt^2}\,, \quad \text{mit der SI-Einheit rad s}^{-2}\,. \tag{1-27}$$

1.2.4 Berechnung des Weges aus Geschwindigkeit und Beschleunigung

Aus den vorigen Abschnitten ist bekannt, wie sich bei geradliniger bzw. kreisförmiger Bewegung die Beträge von Geschwindigkeit und Beschleunigung als zeitliche Ableitungen aus Weg bzw. Winkel ergeben.

In umgekehrter Reihenfolge lassen sich aber auch die Momentangeschwindigkeit $v(t)$ und der in einem Zeitintervall zurückgelegte Weg s berechnen, wenn die Beschleunigung $a(t)$ vorgegeben ist.

Wir wollen nun den gesamten in der Zeit $t = t_{\text{Ende}} - t_{\text{Anfang}}$ zurückgelegten Weg $s = s_{\text{Ende}} - s_{\text{Anfang}}$ für diesen Fall bestimmen. Da die Momentangeschwindigkeit v von der Zeitkoordinate t_i abhängt, $v = v(t_i)$, müssen wir die gesamte Zeit t in N gleich große Intervalle Δt zerlegen, und die zu diesen gehörende Strecken $\Delta s(t_i) = v(t_i)\ \Delta t$ aufsummieren; dabei sind die Zeitintervalle Δt so klein gewählt, daß die jeweilige Momentangeschwindigkeit $v(t_i)$ während Δt als konstant angesehen werden darf. Dann gilt:

$$s = \sum_{i=l}^{N} \Delta s(t_i) = \sum_{i=l}^{N} v(t_i)\,\Delta t\,.$$

Gehen wir zu infinitesimal kleinen Zeitintervallen über, so erfolgt der Schritt von der Summation zur Integration:

$$s = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{N} v(t_i)\,\Delta t = \int_{t_{\text{Anfang}}}^{t_{\text{Ende}}} v(t)\,dt\,. \tag{1-28a}$$

Um s berechnen zu können, müssen wir die Funktion $v(t)$ kennen. Der einfachste Fall ist die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit, $v =$ konstant. Dann ergibt sich:

$$s = \int_{t_{\text{Anfang}}}^{t_{\text{Ende}}} v\,dt = v \int_{t_{\text{Anfang}}}^{t_{\text{Ende}}} dt = v(t_{\text{Ende}} - t_{\text{Anfang}}) = vt\,. \tag{1-28b}$$

Völlig analog läßt sich durch Integration aus der vorgegebenen Beschleunigung $a(t)$ die Geschwindigkeit $v = v_{\text{Ende}} - v_{\text{Anfang}}$ ermitteln, die während des Zeitintervalls $t = t_{\text{Ende}} - t_{\text{Anfang}}$ zugelegt wird:

$$v = \int_{t_{\text{Anfang}}}^{t_{\text{Ende}}} a(t)\,dt\,. \tag{1-28c}$$

Auch hier wollen wir den einfachen Fall betrachten: Die Beschleunigung beginne zur Zeit $t_{\text{Anfang}} = 0$, dauere bis zur Zeit $t_{\text{Ende}} = t$ und sei während der ganzen Zeit konstant. Wenn wir die Abkürzungen $v_{\text{Anfang}} = v(0)$ und $v_{\text{Ende}} = v(t)$ verwenden, erhalten wir schließlich:

$$v(t) - v(0) = \int_0^t a\,dt = a(t-0) = at \quad \text{oder}$$

$$v(t) = at + v(0)\,. \tag{1-28d}$$

Wir können nun auch den während der konstanten Beschleunigung zurückgelegten Weg s ermitteln, indem wir Gl. (1-28d) in Gl. (1-28a) einsetzen, die Abkürzung $s_{\text{Anfang}} = s(0)$ und $s_{\text{Ende}} = s(t)$ verwenden und ein weiteres Mal integrieren:

$$\begin{aligned} s(t) - s(0) &= \int_0^t v(t)\,dt = \int_0^t (at + v(0))\,dt \\ &= \int_0^t at\,dt + \int_0^t v(0)\,dt = \frac{a}{2}t^2 \\ &\quad + v(0)\,t\,. \end{aligned}$$

Als Weg-Zeit-Gesetz für die geradlinige, gleichförmig beschleunigte Bewegung (a = konstant) erhalten wir damit:

$$s(t) = s(0) + v(0)\,t + \frac{a}{2}\,t^2 . \tag{1-29}$$

Gl. (1-29) beschreibt also die Bewegung eines Körpers, der sich mit einer konstanten Geschwindigkeit $v(0)$ bewegt, bis er zur Zeit $t = 0$ den Ort $s(0)$ passiert und von da an gleichmäßig beschleunigt wird (Abb. 1.9 a, b).

Ein Beispiel für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung werden wir in Kap. 2.2.2.1 mit dem *freien Fall* kennenlernen.

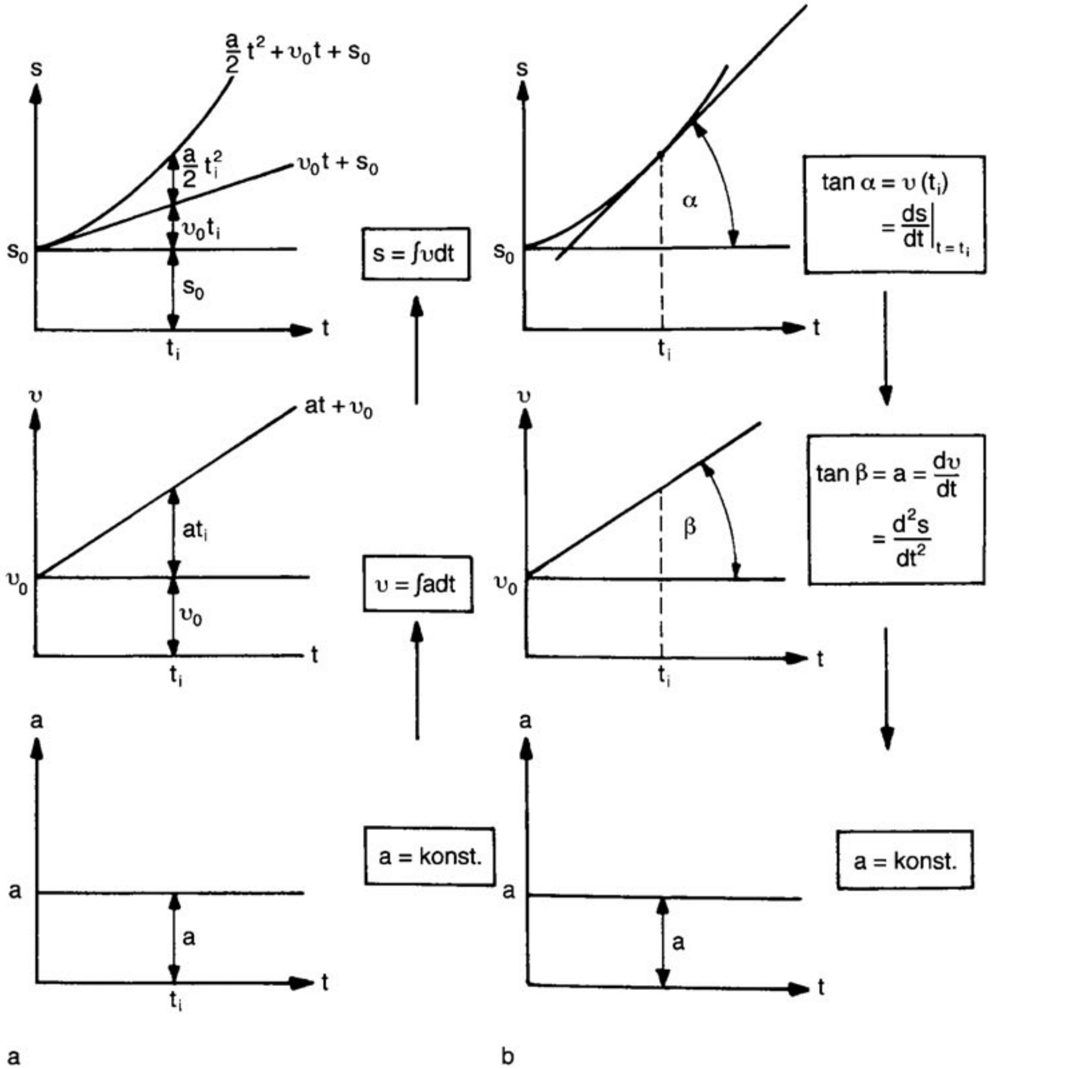


Abb. 1.9 (a) Weg-Zeit-Diagramm und Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm, wie sie durch Integration aus dem Beschleunigungs-Zeit-Diagramm folgen. (b) Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm und Beschleunigungs-Zeit-Diagramm, wie sie durch Differentation aus dem Weg-Zeit-Diagramm folgen.

2. Masse und Kraft

Bisher wurden Bewegungen betrachtet, nicht aber deren Ursachen.

Während Geschwindigkeiten und Beschleunigungen Thema der *Kinematik* sind, hat die *Dynamik* deren Ursachen, d. h. den Einfluß von Massen und Kräften auf Bewegungen von Körpern zum Inhalt.

Die klassische Mechanik ermöglicht die Formulierung von Gesetzen, durch die Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Körpers zu einem beliebigen Zeitpunkt vorhersagbar werden, wenn die einwirkenden Kräfte bekannt sind. Diese Determiniertheit des Naturgeschehens ist durch die Quantenmechanik eingeschränkt worden (Kap. 17.5); im Bereich des täglichen Lebens gelten jedoch die Gesetze der klassischen Mechanik in guter Näherung.

2.1 Die träge Masse

Die Masse ist im SI als Basisgröße eingeführt.

> Die Masse eines Körpers ist Ursache für sein Beharrungsvermögen gegenüber Versuchen, seinen Bewegungszustand zu ändern. Sie ist also Ausdruck für seine Trägheit; wir nennen sie auch *träge Masse.* Sie wird als quantitatives Maß für das Beharrungsvermögen verwendet.

Die Trägheit nimmt bei Körpern desselben Materials mit ihrem Volumen zu: Je größer z. B. eine Eisenkugel, um so mehr Mühe macht es, sie zu werfen. Entsprechend ist es wegen der größeren trägeren Masse bedeutend schwieriger, ein normales Kraftfahrzeug abzubremsen als ein Spielzeugauto.

Die Elementarteilchen, aus denen die Atome aufgebaut sind, stellen die kleinsten Massebausteine dar:

$$m_{\text{Proton}} = 1{,}6724 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}\,,$$

$$m_{\text{Neutron}} \approx m_{\text{Proton}}\,,$$

$$m_{\text{Elektron}} = \frac{1}{1836}\, m_{\text{Proton}}\,.$$

Die größten uns bekannten Massen sind die der Gestirne. Ein Beispiel:

$$m_{\text{Sonne}} \approx 2 \cdot 10^{30}\,\text{kg}\,.$$

Somit erstreckt sich der Bereich bekannter Massen über mehr als 60 Zehnerpotenzen (Tab. 2.1).

Das von der Relativitätstheorie aufgestellte Postulat, daß die Vakuumlichtgeschwindigkeit c Grenzgeschwindigkeit sei, und das daraus folgende Gesetz zur Addition von Geschwindigkeiten (Gl. (1-13) erfordern eine Erweiterung des in der klassischen Mechanik eingeführten Begriffs der Masse. Sie ist nicht mehr als eine unveränderliche Eigenschaft eines Körpers anzusehen, sondern ändert sich mit der Geschwindigkeit des Körpers:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Tab. 2.1 Massen

10^{-30}	Elementarteilchen (Elektron)
	Atome (10^{-26} – 10^{-25})
10^{-24}	
10^{-18}	Makromoleküle
10^{-12}	rotes Blutkörperchen
10^{-6}	
1	
	Auto
10^{6}	Lokomotive
10^{12}	
10^{18}	
	Mond ($7 \cdot 10^{22}$)
10^{24}	Erde ($6 \cdot 10^{24}$)
10^{30}	Sonne ($2 \cdot 10^{30}$)

Einheit: kg

Man bezeichnet m *als relativistische* Masse bezüglich des ruhenden Beobachters und m_0 als Ruhemasse des Körpers. Die relativistische Masse nimmt also, von der Ruhemasse m_0 aus, mit wachsender Geschwindigkeit des Körpers ständig zu.

Bei der Beschleunigung eines Körpers wird ein Teil der aufgewendeten Energie zur Erhöhung der Masse von m_0 auf m verbraucht, während der Rest der Energie der Erhöhung der Geschwindigkeit dient. Je näher die Geschwindigkeit des Körpers der Lichtgeschwindigkeit c kommt, um so größer wird die Massenzunahme und um so geringer die Geschwindigkeitszunahme. Man kann heute Elementarteilchen (z. B. Protonen) so weit beschleunigen, daß ihre Masse auf das 500fache der Ruhemasse anwächst. Die erreichte Geschwindigkeit beträgt dabei $v = 0\ 0{,}999998c$.

Dichte Bei homogenen Körpern (d. h. Körpern aus einheitlichem Stoff und einheitlicher Struktur; siehe Kap. 5.2.1) ist deren Masse proportional zu ihrem Volumen: $m = \varrho V$. Der Proportionalitätsfaktor heißt *Dichte des Stoffes:*

$$\varrho = \frac{m}{V}, \quad \text{mit der SI-Einheit kg m}^{-3}, \tag{2-1}$$

ϱ charakterisiert den Stoff, unabhängig von der Größe des untersuchten Körpers. Da das Volumen eines Körpers stark temperaturabhängig sein kann (siehe Kap. 13.1), wird sich auch ϱ mit der Temperatur ändern (Tab. 2.2).

Mit Geräten zur Bestimmung von Dichten, sog. *Pyknometern,* mißt man die Massen und Volumina der zu untersuchenden Stoffe und

Tab. 2.2 Dichte ϱ von Stoffen in kg m^{-3}

Luft	(20 °C)	1,29
Wasser	(4 °C)	1000,0
	(20 °C)	998,2
Öl	(20 °C)	915
Hg	(20 °C)	13550,0
Holz		400–800
Glas		2200–2500
Stahl		7900,0
Cu	(20 °C)	8930
Pt	(20 °C)	21000
Zum Vergleich:		
Materie im interstellaren Raum		10^{-21}
das beste auf der Erde erzeugbare Vakuum		10^{-16}
Kernmaterie		10^{17}

setzt diese nach Gl. (2-1) zueinander ins Verhältnis. Die Volumenbestimmung ist bei unregelmäßig geformten Körpern oft nur ungenau möglich. Moderne Präzisionspyknometer messen das unbekannte Volumen eines Festkörpers durch Vergleich zweier Gasvolumina V_1 und V_2 aus zwei gleichgroßen Küvetten, wobei sich der Festkörper in einer der beiden Küvetten befindet. Bei Probengrößen von ca. 10 ml werden Genauigkeiten von 0,001 ml erreicht. Verbunden mit einer genauen Wägung läßt sich dann auch die Dichte der Probe auf $\pm 0{,}001$ g ml^{-1} = 1 kg m^{-3} genau bestimmen. Die Dichtemessung von Flüssigkeiten mit Hilfe des *Aräometers* wird in Kap. 5.3.2.2 beschrieben.

2.2 Wirkung von Kräften

2.2.1 Newtonsche Axiome

Der Begriff der *Kraft* wird durch drei von Newton angegebene Axiome festgelegt. Die Kraft, die auf einen Körper wirkt, ist an ihrer Auswirkung erkennbar. Deshalb spricht man statt von Kräften oft auch von Wechselwirkungen. Die Kraft führt, falls der Körper beweglich ist, zur *Änderung seines Bewegungszustandes,* andernfalls zu seiner *Deformation.*

Das 1. Newtonsche Axiom (Trägheitsprinzip) Das 1. Newtonsche Axiom beschreibt, wie frei bewegliche Körper sich bewegen, wenn keine Kraft auf sie einwirkt: In diesem Fall verharren sie im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung.

Das 2. Newtonsche Axiom (Aktionsprinzip) Das 2. Newtonsche Axiom besagt, daß die Einwirkung einer Kraft auf einen beweglichen Körper eine Änderung seines Bewegungszustandes, d. h. seine Beschleunigung oder Verzögerung, hervorruft. Wenn wir uns auf Gegenstände beschränken, deren Massen sich nicht mit der Zeit ändern (wie dies z. B. wegen des Brennstoffverbrauches bei einer Rakete der Fall wäre), dann ist die Kraft F gegeben durch:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a} \qquad (2\text{-}2)$$

mit der SI-Einheit kg m s^{-2}. Dieser Einheit wurde der Name *Newton* (N) gegeben.

Weitere Einheiten der Kraft sind in Tab. 1.5 zusammengestellt.

Nach Gl. (2-2) ist das 1. Newtonsche Axiom nur als ein Spezialfall des 2. Axioms anzusehen. Falls $\vec{F} = 0$, dann gilt auch $\vec{a} = 0$.

Die Masse m ist ein Skalar, die Beschleunigung $\vec{a}$ eine vektorielle Größe. Gemäß Gl. (2-2) ist daher auch $\vec{F}$ ein Vektor. Er weist in Richtung des Vektors $\vec{a}$. Für die Kraft gelten daher die im Anhang angegebenen Rechen- und Konstruktionsregeln für Vektoren.

Kräfte können durch Gegenstände, etwa durch eine Sehne vom Muskel auf den Knochen, weitergeleitet werden, sie können aber auch, wie etwa die durch elektrische Ladungen bewirkte Coulomb-Kraft, ohne Mitwirkung von Materie über weite Entfernungen wirken.

Das 3. Newtonsche Axiom (Reaktionsprinzip) Wenn ein Körper 1 auf einen Körper 2 eine Kraft ausübt, die wir $\vec{F}_{(1\ \mathrm{auf}\ 2)}$ nennen wollen, dann zeigt die Erfahrung, daß der Körper 2 auf den Körper 1 mit einer Kraft $\vec{F}_{(2\ \mathrm{auf}\ 1)}$ wirkt, die von gleichem Betrage, aber entgegengerichtet ist, d. h.

$$\vec{F}_{(1\,\mathrm{auf}\,2)} = -\vec{F}_{(2\,\mathrm{auf}\,1)}\,.$$

Newton bezeichnete dieses Gesetz auch als das *Prinzip der Gleichheit von actio (Kraft) und reactio (Gegenkraft).*

2.2.2 Verschiedene Arten von Kräften

Die Vielfalt der uns bekannten Kräfte läßt sich im wesentlichen auf drei Arten zurückführen:

1. Die *Gravitationskraft* (die Massenanziehung oder Schwerkraft), die zwischen allen Körpern wirkt und stets anziehende Wirkung hat;

2. die *elektromagnetischen Kräfte,* die im Zusammenhang mit elektrischen und (oder) magnetischen Feldern auftreten und die zu Anziehung oder Abstoßung führen können. Zu ihnen gehören auch die Bindungskräfte zwischen Atomen, Molekülen usw.;

3. die *Kernkräfte.* Diese Kräfte wirken zwischen Elementarteilchen und bewirken unter anderem den Zusammenhalt der Atomkerne.

Von diesen drei Arten zu unterscheiden sind *Scheinkräfte* bzw. *Trägheitskräfte* (Kap. 2.2.2.2).

In dieser Aufzählung fehlen die aus dem Alltag bekannten Kräfte, wie etwa die durch Kontraktion eines Muskels, durch thermische Ausdehnung von Verbrennungsgasen im Kraftfahrzeugmotor oder durch Reibung bedingte Kraft. Diese lassen sich jedoch alle unter die bei 2. aufgeführten Kräfte eingliedern, da sie durch Kräfte zwischen Atomen und Molekülen verursacht werden.

2.2.2.1 Gravitation

Zwischen allen Massen wirken anziehende Kräfte (Massenanziehung oder Gravitation). Newton hat Größe und Eigenschaften dieser Kräfte im *Gravitationsgesetz* zusammengefaßt. Danach ist die Größe der Gravitationskraft zwischen zwei Körpern im Abstand r gegeben durch:

$$F = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,. \qquad (2\text{-}4)$$

Die Proportionalitätskonstante (auch *Gravitationskonstante* genannt) hat den Zahlenwert

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2\,kg^{-2}}\,.$$

Die Größen m_1 und m_2 sind ein Maß für die zwischen den Körpern wirkende Kraft. Masse ist also nicht nur Ursache des Beharrungsvermögens eines Körpers, sondern auch Quelle der Gravitationskraft, deshalb nennt man sie auch *schwere Masse.* Auch die Einheit der schweren Masse ist das Kilogramm (kg). Experimente haben gezeigt, daß die schwere Masse mindestens bis zum 10^{-10}ten Teil mit der in Kap. 2.1 definierten trägen Masse übereinstimmt. Die klassische Mechanik kann das nicht begründen; erst die *Allgemeine Relativitätstheorie* gibt Hinweise auf den Zusammenhang zwischen beiden. Im weiteren soll nicht mehr zwischen träger und schwerer Masse unterschieden werden; wir werden nur noch von *Masse* sprechen.

Die auf der Erdoberfläche auf einen Körper der Masse m wirkende Gravitationskraft nennt man die *Schwerkraft*, *Erdanziehung* oder auch die *Gewichtskraft* des Körpers. (Der Begriff *Gewicht* aus dem *Technischen Meßsystem* darf im Rahmen des SI-Systems nicht mehr für die *Gewichtskraft* verwendet werden).

Für Versuche nahe über oder auf der Erdoberfläche ist in Gl. (2-4) für r der Abstand zum Erdmittelpunkt zu setzen, d. h. die Erde verhält sich bezüglich der Erdanziehung, als sei all ihre Masse im Mittelpunkt, also in ihrem Schwerpunkt (Kap. 2.2.7.4) vereint. (Das gilt nicht innerhalb der Erde: Am Erdmittelpunkt ist die resultierende Kraft gleich Null). Setzen wir also in Gl. (2-4) für m_1 die Erdmasse und für r den Erdradius ein, so erhalten wir $F = m_2 G m_{\text{Erde}}/r^2_{\text{Erde}}$. Andererseits ist nach Gl. (2-2) $F = m_2 a$, so daß sich die Beziehung $a = G m_{\text{Erde}}/r^2_{\text{Erde}}$ ergibt. Mit den bekannten Zahlenwerten ($m_{\text{Erde}} = 6 \cdot 10^{24}$ kg; $r_{\text{Erde}} = 6{,}37 \cdot 10^6$ m) finden wir $a = 9{,}8$ m s^{-2}.

Üblicherweise wird $a = G m_{\text{Erde}}/r^2_{\text{Erde}}$ als *Erdbeschleunigung* (mit dem Formelzeichen g) bezeichnet. Da nicht alle Punkte der Erdoberfläche vom Erdmittelpunkt gleich weit entfernt sind (*Abplattung der Erde*), ist g keine universelle Konstante, sondern an den Polen größer und am Äquator kleiner als der Mittelwert 9,8 m s^{-2}. Die Zentrifugalkraft infolge der Erdrotation bewirkt ebenfalls, daß g am Äquator kleiner ist als an den Polen.

Verglichen etwa mit der elektrischen Kraft ist die Gravitation schwach. Die elektrische Kraft zwischen zwei Elektronen ist 10^{42} mal größer als ihre Gravitationskraft bei gleichem Abstand. Wesentliche Bedeutung hat die Gravitation daher nur bei großen Massen, wie denen der Planeten und Sterne. Sie bewirkt, daß der Mond um die Erde kreist, daß die Planeten sich um die Sonne bewegen, und daß sogar Photonen von Sternen abgelenkt werden.

Auf der Erdoberfläche kann man heute Schwankungen von einem Millionstel der Erdanziehung messen, wie sie z. B. durch unterschiedliche Dichten der Stoffe unter der Oberfläche verursacht werden. Durch solche *gravimetrische* Messungen gelingt es z. B. Erdöllagerstätten ausfindig zu machen.

Der freie Fall unter dem Einfluß der Gravitation Die Gewichtskraft bewirkt, daß jeder nahe der Erde befindliche, frei bewegliche Körper zum Erdmittelpunkt hin beschleunigt wird (*freier* Fall). Da wir nahe der Erdoberfläche die Erdbeschleunigung g als konstant annehmen dürfen, ist die Bewegung gleichmäßig geradlinig beschleunigt. Die Bewegungsgleichung für diesen Sonderfall haben wir in Gl. (1-29) beschrieben: $s = (g/2)\,t^2 + v_0 t + s_0$. Sind die Anfangswerte der Geschwindigkeit bzw. des Ortes beide Null ($v_0 = 0$ und $s_0 = 0$), dann ist $s = (g/2)\,t^2$ die in der Zeitspanne von 0 bis t durchfallene Strecke. Läßt man also von einem Turm einen Stein fallen und mißt mit einer Stoppuhr die Fallzeit (z. B. $t = 3{,}5$ s), dann läßt sich die Turmhöhe berechnen ($s = 9{,}8\,\text{m s}^{-2} \cdot 0{,}5 \cdot 3{,}5^2\,\text{s}^2 = 60$ m).

Die Bewegungsgleichung des freien Falles gilt, streng genommen, nur im Vakuum, da sonst die Bewegung durch Reibung gebremst wird. (Denken Sie an Blätter im Herbst).

Gravitationsfeld Bei der Beschreibung der Wechselwirkung von Massen haben wir bisher den umgebenden Raum als *leer,* d. h. frei von allen meßbaren Eigenschaften angesehen. Daß dies unzulässig ist, zeigt sich daran, daß die Gravitationskraft zwischen Körpern wirkt, auch wenn sich diese im Vakuum befinden und nicht direkt berühren. Die Kraftwirkung pflanzt sich also auch durch den materiefreien Raum fort, und bezüglich dieser Kraftwirkung muß man daher dem Raum folgende Eigenschaft zuschreiben:
Um jede Masse herum befindet sich im Raum ein *Gravitationsfeld (Kraftfeld)* mit der

Feldstärke $\vec{E} = \vec{F}/m$. Der Begriff des Feldes ist nicht auf die Gravitationskraft beschränkt; auch die Kraft zwischen z. B. elektrischen Ladungen (Coulombkraft) wird durch ein Feld, das *elektrische Feld* beschrieben (Kap. 14.7.1).

Allgemein spricht man von einem *Vektorfeld,* wenn jedem Punkt eines begrenzten oder unbegrenzten, leeren oder mit Materie gefüllten Raumes eine vektorielle Größe (wie etwa das Gravitationsfeld) zugeordnet ist.

Von einem *Skalarfeld* spricht man, wenn jedem Raumpunkt eine skalare Größe zugeordnet ist; Beispiele für ein Skalarfeld sind die Dichte in einem inhomogenen Körper oder die potentielle Energie.

2.2.2.2 Trägheitskraft

Schreibt man statt Gl. (2-2)

$$\vec{F} - m\vec{a} = 0\,, \tag{2-5}$$

so kann diese Beziehung folgendermaßen ausgelegt werden: Der von außen auf den Körper einwirkenden Kraft $\vec{F}$ wirkt stets eine Kraft $m\vec{a}$ mit gleichem Betrag entgegen, so daß sich beide aufheben.

Die Größe $-m\vec{a}$ bezeichnet man als *Trägheitskraft.* Die Summe aus äußerer Kraft und Trägheitskraft ist gleich Null *(dynamisches Gleichgewicht).*

Die Trägheitskraft ist Ausdruck für das Beharrungsvermögen von Körpern. Da die Trägheitskraft nicht von außen am beschleunigten Körper angreift, führt sie nicht zu einer zusätzlichen Beschleunigung des Körpers, wie dies bei der äußeren Kraft $\vec{F}$ der Fall ist. Aus diesem Grunde bezeichnen wir sie als *Scheinkraft* oder *fiktive Kraft.* Nur für den mitbeschleunigten Beobachter scheint es, als ob eine Kraft von außen angriffe; und nur im beschleunigten System läßt sie sich messen. Ein Autofahrer, der seinen Wagen scharf abbremst, merkt, wie ihn die Trägheitskraft nach vorne reißt.

2.2.2.3 Zentrifugal- und Zentripetalkraft

Wir wollen einen Körper der Masse m gleichförmig auf einem Kreis bewegen. Dazu ist nach Gl. (1-26) eine Zentripetalbeschleunigung in Richtung auf den Kreismittelpunkt, $\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$ erforderlich, $\vec{r}$ ist der Abstand seines Schwerpunktes zum Kreismittelpunkt.

Die Kraft $\vec{F}$ in Richtung auf das Zentrum des Kreises zu ist

$$\vec{F}_z = m\vec{a} = -m\omega^2\vec{r} \tag{2-6}$$

und wird als *Zentripetalkraft* bezeichnet.

Nach Gl. (2-6) gilt $\vec{F}_z + \omega^2\vec{r}m = 0$. Die Zentripetalkraft $\vec{F}_z$ können wir demnach als im Gleichgewicht mit einer Kraft

$$\vec{F}_T = \omega^2\vec{r}m \tag{2-7}$$

ansehen; sie weist in Richtung des Radiusvektors nach außen und wirkt nur auf Beobachter, die mitbewegt werden. Wir haben es also mit einer Scheinkraft, einer Trägheitskraft zu tun. Wir bezeichnen sie als *Fliehkraft* oder *Zentrifugalkraft.*

Der Gl. (2-7) entnehmen wir, daß durch Erhöhung der Winkelgeschwindigkeit ω, d. h. der Zahl der Umdrehungen pro Zeiteinheit (Drehzahl), die Zentrifugalkraft wächst. Sie greift beispielsweise an den Teilchen einer flüssigen Suspension an, wenn diese rotiert, und zwar um so stärker, je größer die Masse der Teilchen ist. Daher ist es möglich, Teilchen verschiedener Massen voneinander zu trennen, wenn man die Suspension rotieren läßt. Dies geschieht in der *Zentrifuge* (Abb. 2.1). Um besonders hohe Zentrifugalkräfte zu erzeugen, hat man *Ultrazentrifugen* entwickelt. Sie können Umdrehungszahlen von etwa 1000 je Sekunde erreichen. Ein Teilchen, das in einer solchen Zentrifuge auf einer

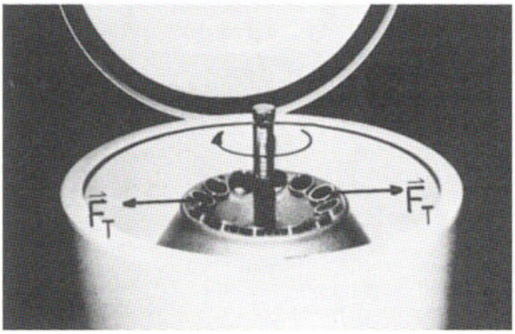


Abb. 2.1 Zentrifuge (zu sehen sind das Schutzmantelgefäß mit Deckel, der Rotor und die schräg eingesetzten Zentrifugenröhrchen, in die die Suspension eingefüllt wird).

Kreisbahn von 5 cm Radius umläuft, erfährt eine Beschleunigung, die das ungefähr 250000fache der Erdbeschleunigung erreicht. Damit kann man z. B. kolloidale Eiweißteilchen trennen und Einblick in die Größe hochmolekularer Stoffe gewinnen. Die mit der Sedimentation zusammenhängenden Vorgänge werden später, in Kap. 5.3.3.2.2 behandelt werden.

2.2.3 Statisches und dynamisches Gleichgewicht von Kräften

Wirken Kräfte auf einen beweglichen Körper, so wird sich dieser Körper im allgemeinen sowohl beschleunigt fortbewegen (Translationsbeschleunigung) als auch drehen (Rotationsbeschleunigung).

Greifen an einem Punkt eines Körpers mehrere Kräfte an, so muß man sie vektoriell addieren, um die resultierende Kraft, die *Resultierende,* zu erhalten (Abb. 2.2). Dabei können sich die verschiedenen Kräfte auch gegenseitig aufheben. Dann verhält sich der Körper genauso, als würden überhaupt keine Kräfte einwirken. Diesen Fall bezeichnet man als *Gleichgewicht* der Kräfte (die Bezeichnung gilt auch, wenn die Kräfte nichts mit Gewichtskräften zu tun haben).

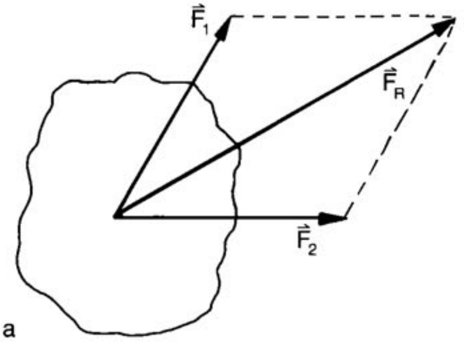
Gleichgewicht herrscht also, wenn die Resultierende gleich Null ist. Sind keine Scheinkräfte beteiligt, so nennen wir das Gleichgewicht *statisches Gleichgewicht,* andernfalls *dynamisches Gleichgewicht.*

Die Lehre der *Statik* umfaßt das Zusammenwirken von Kräften zur Ausbildung von statischen Gleichgewichten. Sie ist von besonderer praktischer Bedeutung, sei es zur Berechnung der Konstruktion von Bauwerken oder zur Berechnung der Belastung eines Knochens. Ein Beispiel für dynamisches Gleichgewicht liefert uns die gleichförmige Kreisbewegung, Gl. (2-6) und Gl. (2-7): $\vec{F}_z + \vec{F}_T = 0$.

Die Addition zweier am selben Punkt eines Körpers angreifenden Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ läßt sich über das Kräfteparallelogramm (Abb. 2.2) zeichnerisch durchführen oder durch Addition der Komponenten der beiden Vektoren berechnen (s. Anhang A.3).

2.2.4 Schwerelosigkeit

An einem Beispiel wollen wir diesen Begriff erläutern. Ein Fahrstuhl, dessen Seil gerissen sei und der dann nach unten saust, ist kräftefrei: Der Gravitationskraft



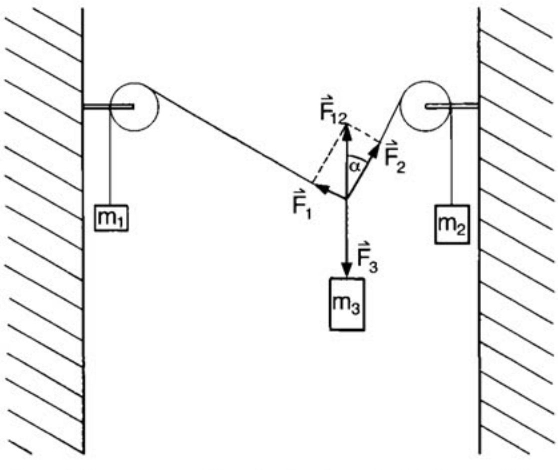


Abb. 2.2 (a) Addition von Kräften: Zwei an einem Körper angreifende Kräfte mit Kräfteparallelogramm und resultierender Kraft $\vec{F}_R$. (b) Beispiel mit drei Kräften: Die drei mit Fäden verbundenen Massen m_1, m_2 und m_3 können sich über die beiden Umlaufrollen bewegen. Die Gleichgewichtslage ist erreicht, wenn die resultierende Kraft $\vec{F}$ gleich Null ist: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$. Der Winkel α ist dann gerade so groß, daß $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_3$. Speziell bei Wahl des Masseverhältnisses $m_1 : m_2 : m_3 = 3 : 4 : 5$ stellt sich zwischen $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ ein rechter Winkel (90°) ein.

$m\vec{g}$ wirkt nämlich die Trägheitskraft $-m\vec{g}$ entgegen *(dynamisches Gleichgewicht)*. Ein mitfliegender Beobachter hat dann (für kurze Zeit) das Gefühl der Schwerelosigkeit.

Steht aber der Beobachter auf der Erdoberfläche, so gilt für ihn Kräftfreiheit in einem anderen Sinne: Der am Beobachter angreifenden Gravitationskraft wirkt eine Kraft $\vec{F}$ durch den Erdboden entgegen, die verhindert, daß er nach unten beschleunigt wird. Die Gegenkraft $\vec{F}$ ist keine Scheinkraft *(statisches Gleichgewicht)*; der Beobachter hat das Gefühl der Schwere.

2.2.5 Dynamometer (Kraft einer gespannten Feder)

Ein besonders einfaches Meßgerät für Kräfte ist das *Dynamometer*. Es besteht aus einer einseitig befestigten Schraubenfeder und einer Anzeigeskala. Greift eine Kraft F an der Feder an, so wird diese so lange gedehnt, bis ihre Reaktionskraft entgegengesetzt gleich F ist und damit Gleichgewicht herrscht. Man wählt Federn, deren Dehnung x proportional zum Betrag der angreifenden Kraft F ist: $F = Dx$ (vgl. Hookesches Gesetz, Gl. (5-3)).

D nennt man die *Federkonstante*. Ist sie bekannt, so genügt die Messung der Länge x, um die Kraft F zu bestimmen. Wird F in Newton und x in Metern gemessen, so hat die Federkonstante die Einheit N m^{-1}.

Das Dynamometer läßt sich ebenso zur Messung der schweren Masse verwenden und wird dann auch als *Federwaage* bezeichnet. Dazu muß das Dynamometer lediglich *umgeeicht* werden: $F = mg = Dx$ oder $m = Dx/g$. (Als weitere Methode zur Bestimmung von Massen wird in Kap. 2.2.7.5 die Hebelwaage beschrieben).

2.2.6 Druck (Kraft auf eine Fläche)

Die Schwerkraft greift an allen Masseelementen eines Körpers an. Daneben gibt es Kräfte, die nur auf seine Oberfläche wirken, so die Kräfte, die ein Gas oder eine Flüssigkeit auf die Wände eines Gefäßes ausübt.

Wirkt eine Kraft vom Betrag F in senkrechter Richtung gleichmäßig auf eine Fläche A, so nennen wir den Quotienten aus F und A den Druck p:

$$p = \frac{F}{A} \qquad (2\text{-}8)$$

mit der SI-Einheit N m^2 = Pascal (Pa).

(In Tabelle 1.5 sind weitere Druckeinheiten zusammengestellt).

Nach Gl. (2-8) ist es also auch über eine Druckmessung (mit Manometern, siehe Kap. 5.3.2.2) möglich, Kräfte zu bestimmen.

In Kap. 5.3 bzw. 9 werden wir auf den Druck zurückkommen und zeigen, daß er zur Beschreibung makroskopischer mechanischer Eigenschaften von Flüssigkeiten ebenso wichtig ist wie als Zustandsgröße in der Wärmelehre.

Mit der physikalischen Erscheinung des Drucks haben wir täglich zu tun sei es, indem uns im Wetterbericht der Luftdruck (in Hektopascal, hPa) mitgeteilt wird, indem wir den Reifendruck (in atü) unseres Autos nachprüfen, oder indem uns der Arzt über unseren Blutdruck (in mm Hg) aufklärt. Für den Mediziner ist als diagnostisches Hilfsmittel neben der Kenntnis des Blutdrucks (Kap. 5.3.2.2) u. U. auch der Druck im Schädel (von Neugeborenen), im Auge, im Verdauungssystem, in der Blase usw. von Bedeutung.

Beispiel Auge Durch einen geringen Überdruck von 20 bis 25 mm Hg behält das Auge seine Kugelform. Die in ihm ständig produzierte Flüssigkeit (hauptsächlich Wasser, und zwar ca. 5 ml pro Tag) wird durch ein Drainagesystem abgeführt, so daß der Druck im Auge und damit dessen Form konstant bleibt. Erhöht sich z. B. durch Verstopfen des Drainagesystems der Druck im Innern des Auges, so kommt es zu einer Formveränderung, wobei bereits 0,1 mm Änderung des Augendurchmessers die Abbildungseigenschaften des Auges beträchtlich beeinflußt. Gemessen wird der Druck im Auge mit dem *Tonometer*, indem z. B. über einen Stempel von ca. 3 mm Durchmesser eine Kraft auf die Vorderseite der Hornhaut übertragen wird. Die Kraft F, die benötigt wird, um die Hornhaut unter der Stempelfläche vollständig abzuflachen, beträgt beim gesunden Auge ca. 0,02 N. Daraus resultiert für den Druck:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{0{,}02\,\mathrm{N}}{(1{,}5 \cdot 10^{-3})^2\, m^2\, \pi} = 2829\,\mathrm{Pa} = 28{,}29\,\mathrm{mbar}$$

$$= 21{,}22\,\mathrm{Torr\,(mm\,Hg)}\,.$$

Bei dieser Messung wird infolge der geringfügigen Deformation des Aufapfels der Innendruck des Auges um ca. 0,5 Torr erhöht, was im Meßwert mitenthalten ist.

2.2.7 Drehmoment

In Kap. 1.2.3 wurden die Bewegungsgrößen der Drehbewegung eingeführt. Nun ist nachzutragen, wodurch Drehbewegungen zustande kommen. Aus Kap. 2.2.1 wissen wir bereits, daß die Ursache einer Translationsbeschleunigung die Kraft ist. Analog gilt:

Ursache einer Rotationsbeschleunigung ist das *Drehmoment*.

Am Ende einer als masselos angenommenen Stange (Abb. 2.3), die um die Achse 0 drehbar sei, befinde sich eine Masse m, an der eine Kraft $\vec{F}$ angreift. Den Abstand r zwischen Drehpunkt und Angriffspunkt der Kraft nennt man den *Hebelarm*.

Das Produkt aus r und der Komponente der Kraft senkrecht zur Richtung der Stange, $F_\perp = F \sin \varphi$, liefert den Betrag M des Drehmomentes:

$$M = rF \sin \varphi, \text{ mit der SI-Einheit N m}. \quad (2\text{-}9)$$

Die Kraft $F_\perp$ bewirkt eine Beschleunigung $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ der Masse längs eines Kreisbogens. Nach Gl. (1-21) ist $v = r\omega$, und daher erhalten wir:

$$M = rF_\perp = rm \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r^2 m \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}. \quad (2\text{-}10)$$

Zur vollständigen Beschreibung der Drehung reicht der Betrag M nicht aus; man muß auch die Richtung der Drehachse und den Drehsinn kennen. Man fügt daher den Betrag von Gl. (2-9) und die Richtung der Achse zu einer gerichteten Größe, dem *axialen Vektor* $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, zusammen. (In entsprechender Weise sind wir in Kap. 1.2.3 mit Drehwinkel, Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung verfahren). Der Drehsinn ist folgendermaßen festgelegt: Blickt man in Richtung des axialen Vektors, so erfolgt die Drehung im Uhrzeigersinn.

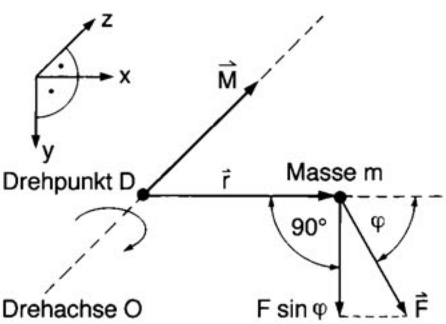


Abb. 2.3 Zur Definition des Drehmoments.

2.2.7.1 Trägheitsmoment

Wir wissen bereits, daß ein Körper sich der Translationsbeschleunigung infolge seiner trägen Masse widersetzt. Entsprechendes gilt für die Rotationsbeschleunigung. Dabei wird aber die Trägheitswirkung nicht nur durch die Masse, sondern zusätzlich durch den Abstand r der Masse von der Drehachse bestimmt: Je weiter ein Massenelement von der Achse entfernt ist, um so mehr trägt es zum Beharrungsvermögen bei. Man kann experimentell nachprüfen, daß der Beitrag eines Massenelements mit dem Quadrat des Abstandes zunimmt. Für unser Beispiel in Abb. 2.3 nennen wir die Größe mr^2 aus Gl. (2-10) das *Trägheitsmoment J*. Mit dieser Definition kommen wir zu einer Gleichung für $\vec{M}$, die der Gl. (2-2) bei der Translationsbewegung entspricht: $\vec{M} = J \dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$.

Einen ausgedehnten Körper können wir uns aus einer Viezahl von Massenpunkten dm in verschiedenen Abständen r von der Drehachse zusammengesetzt denken. Folglich läßt sich dessen Trägheitsmoment als Integral darstellen:

$$J = \int r^2 \, \mathrm{d}m. \quad (2\text{-}11)$$

Auf das Trägheitsmoment kommen wir im Zusammenhang mit den Rotationsfreiheitsgraden eines zweiatomigen Moleküls in Kap. 10.3 zurück.

2.2.7.2 Kräftepaar

Nicht nur Körper mit einer festen Drehachse können Rotationen ausführen, sondern auch frei bewegliche. Dann genügt jedoch nicht eine einzelne von außen angreifende Kraft, vielmehr ist dazu ein Kräftepaar erforderlich (Abb. 2.4). Darunter verstehen wir zwei einan-

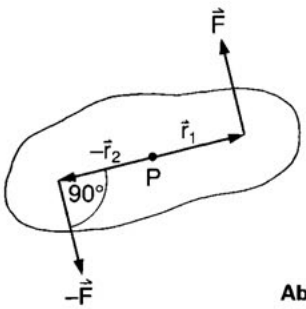


Abb. 2.4 Kräftepaar.

der entgegengerichtete Kräfte von gleichem Betrag, deren Angriffspunkte nicht zusammenfallen, so daß man keine resultierende Kraft bilden kann. Der Körper dreht sich dann um eine auf der Verbindungslinie zwischen beiden Angriffspunkten liegende (freie) Achse P. Nehmen wir der Einfachheit halber an, die Kräfte $\vec{F}$ und $-\vec{F}$ stünden senkrecht auf dieser Verbindungslinie (Abb. 2.4), so entstehen bezüglich P zwei Drehmomente und die Summe beider ergibt das resultierende Moment: $M = M_1 + M_2 = r_1 F + (-r_2)(-F) = (r_1 + r_2) F$.

2.2.7.3 Hebel

Eine um eine Achse drehbare Stange, an der zwei (oder mehrere) Kräfte angreifen, nennen wir einen *Hebel.* Liegt die Achse zwischen den Angriffspunkten der Kräfte, so heißt der Hebel *zweiarmig* (Abb. 2.5a), liegt sie außerhalb beider Angriffspunkte, so ist er *einarmig* (Abb. 2.5b). Die Balkenwaage, die Schere und die Zange sind Beispiele für den zweiarmigen Hebel; der menschliche Unterarm dagegen (Abb. 2.5c) ist ein einarmiger Hebel.

Am Hebel herrscht Gleichgewicht, wenn sich die angreifenden Drehmomente zu Null addieren, d. h. $\vec{M}_1 = \vec{M}_2 = 0$.
Hieraus folgt das *Hebelgesetz:*

$$|\vec{M}_1| = F_1 r_1 \sin\varphi_1 = |\vec{M}_2| = F_2 r_2 \sin\varphi_2 \,. \tag{2-12}$$

Beispiel zur Skelett-Mechanik Mit der Hebelwirkung des menschlichen Armes wollen wir ein Beispiel zur Skelettmechanik besprechen. Unterarm, Ellbogengelenk und Bizeps bilden einen einarmigen Hebel. Für diesen gilt das in Gl. (2-12) angegebene Hebelgesetz. Welche Kräfte und Gegenkräfte wirken nun, wenn dieser Hebel die Masse m in der Handfläche halten soll? Unterarm und Masse m wollen wir dabei gemeinsam als starren Körper ansehen, der sich unter dem Einfluß verschiedener Kräfte in waagerechter Stellung halten soll (Abb. 2.5c). Die Muskelkraft des Bizeps wird durch den Pfeil $\vec{F}$ symbolisiert, sie greift im Abstand a vom Ellbogengelenk an.

Der Winkel zwischen der Richtung der Muskelkraft und der des Unterarms sei α. Die resultierende Gewichtskraft von Unterarm und festgehaltener Masse m sei $\vec{F}_s$. Sie greift im Abstand b vom Ellbogengelenk am Schwerpunkt S an. Damit die Masse m festgehalten wird, ohne daß sich der Unterarm um das Ellbogengelenk dreht, müssen die von $\vec{F}_s$ und $\vec{F}$ erzeugten Drehmomente in bezug auf die Drehachse im Ellenbogengelenk dem Betrag nach gleich sein:

$$aF \sin\alpha = bF_s \,. \tag{2-13}$$

Aus Gl. (2-13) geht hervor, daß die näher beim Drehpunkt ansetzende Muskelkraft größer sein muß

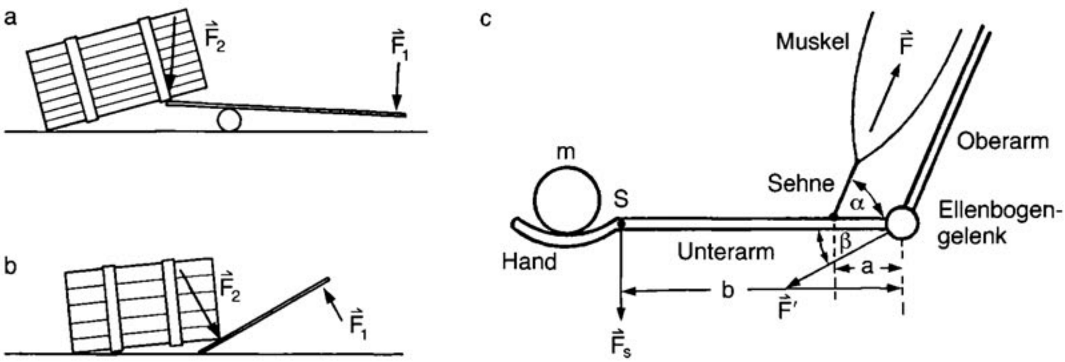


Abb. 2.5 Hebel: (a) zweiarmig, (b) einarmig, (c) einarmige Hebelwirkung des menschlichen Arms (S: Schwerpunkt des aus dem Unterarm und der Masse m bestehenden Systems).

als die weiter entfernt angreifende Gewichtskraft:

$$\frac{F \sin\alpha}{F_s} = \frac{b}{a} \,.$$

Da alle Gelenke einarmige Hebel darstellen, ist b stets größer als a, und so müssen von den Muskeln immer größere Kräfte als die von außen wirkenden Kräfte aufgebracht werden. Diese Tatsache führt neben der Belastung der Muskeln auch zu einer starken Beanspruchung der Sehnen, die diese Kräfte von den Muskeln auf die Knochen zu übertragen haben. Da die Muskelkraft unter dem Winkel α am Unterarm angreift, erzeugt der Muskel neben der Vertikalkomponente, die die Gewichtskraft F_s kompensieren muß, auch eine Horizontalkomponente $F \cos\alpha$. Damit sich nun der Arm durch diese Horizontalkomponente nicht verschiebt, wird durch eine Kraftkomponente F' der Schultermuskeln vom Schultergelenk aus über den Oberarmknochen auf das Ellbogengelenk die Horizontalkomponente der Bizepskraft kompensiert; aus Abb. 2.5c ergibt sich für diese Horizontalkompensation:

$$F \cos\alpha = F' \cos\beta \,. \tag{2-14}$$

Da aber F' nun noch die Komponente $F' \sin\beta$ parallel zur Schwerkraft F_s liefert, bedarf es zur Vertikalkompensation der Kräfte einer Muskelkraft F, die folgender zusätzlicher Bedingung genügen muß:

$$F \sin\alpha = F_s + F' \sin\beta \,. \tag{2-15}$$

Im Fall des Gleichgewichts, wenn also bei Belastung der Handfläche durch die Masse m diese sich nicht bewegt, müssen die zusammenwirkenden Kräfte $\vec{F}$, $\vec{F}_s$ und $\vec{F}'$ die drei in Gl. (2-13), (2-14) und (2-15) formulierten Gleichgewichtsbedingungen erfüllen; ein komplizierter Vorgang, der durch entsprechende Regelautomatik im Körper ohne weiteres erreicht, uns aber selten bewußt wird. (Schon dieses einfache Beispiel zeigt, daß es schwierig ist, die Bewegungen von Gliedmaßen mit Prothesen nachzuahmen.)

2.2.7.4 Schwerpunkt

An jedem Massenelement eines starren Körpers auf der Erde greift die Gewichtskraft an. Legen wir durch den Körper eine Achse, so trägt jedes Massenelement ein Drehmoment bei, und im allgemeinen wird sich dadurch der Körper drehen. Es existiert allerdings stets ein Punkt S derart, daß bezüglich jeder durch diesen Punkt verlaufenden Achse die Summe aller einzelnen Drehmomente Null wird, d. h. der Körper nicht gedreht wird. Diesen Punkt nennt man *Schwerpunkt* oder *Massenmittelpunkt* des starren Körpers.

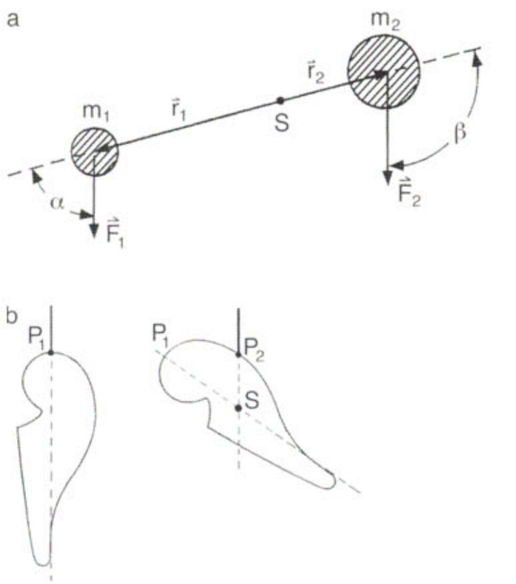


Abb. 2.6 (a) Zur Definition des Schwerpunkts. (b) Schwerpunktbestimmung.

Am Beispiel einer gewichtslosen Stange, an deren beiden Enden die Massen m_1 und m_2 befestigt sind (Abb. 2.6a), soll gezeigt werden, wie dieser Punkt bestimmt werden kann. Für die Drehmomente bezüglich einer durch S gehenden Achse muß nach dem Hebelgesetz der Gl. (2-12) gelten:

$$m_1 g r_1 \sin\alpha = m_2 g r_2 \sin\beta$$

und weil $\sin\alpha = \sin\beta$ ist, gilt:

$$r_1 : r_2 = m_2 : m_1 \,. \tag{2-16}$$

Der Schwerpunkt teilt also die Stange im umgekehrten Verhältnis der Massen. Der Schwerpunkt ist von besonderer Bedeutung, da bezüglich dieses Punktes die Newtonschen Axiome der Translationsbewegung auch für starre ausgedehnte Körper gelten.

Als experimentelles Verfahren zur Auffindung von S eines beliebigen starren Körpers bietet sich folgender Versuch an: Wir hängen den Körper nacheinander an zwei verschiedenen Punkten P_1 und P_2 frei auf (Abb. 2.6b). Die gestrichelte Verlängerung der Aufhängeschnüre geht jeweils durch den Schwerpunkt, also liegt S im Schnittpunkt beider Verlängerungen.

Der Schwerpunkt des Menschen liegt, verglichen mit dem von Tieren, sehr hoch (oberhalb der Körpermitte). Die aufrechte Haltung des Menschen mag zwar Ausdruck einer gewissen Überlegenheit gegenüber Vierbeinern sein, vom Standpunkt der Statik aus betrachtet scheint sie jedoch wenig effektiv, denn es bedarf einer komplizierten Regelautomatik, die eine Vielzahl von Muskelkräften miteinander koordiniert, um das Umkippen zu verhindern. Zum Ausruhen legt man sich hin, damit diese Gleichgewichtsautomatik abgeschaltet werden kann. Die Schlafhaltung der Vögel ist unter diesem Gesichtspunkt nur dadurch sinnvoll, daß ein im Schlaf überraschter Vogel schnell startklar sein muß.

2.2.7.5 Die Hebelwaage

Zur Präzisionsbestimmung von Massen dienen Drehmoment-Messer, d. h. *Waagen,* bei denen keine Kräfte (wie bei der Federwaage), sondern Drehmomente verglichen werden. Ihnen liegt das Hebelgesetz zugrunde.

An der *Balkenwaage* kann man das Meßprinzip am leichtesten erkennen. Sie besteht aus einem zweiarmigen, in der Mitte drehbar gelagerten Hebel; an jedem Ende hängt eine Waagschale (Abb. 2.7). Der Unterstützungspunkt U des Balkens liegt oberhalb des Schwerpunktes S des Systems, so daß sich die Waage im stabilen Gleichgewicht (Kap. 2.2.7.6) befindet. Belasten wir beide Schalen mit den Massen m_1 bzw. m_2, so kommen drei Drehmomente ins Spiel; und zwar das des rechten Balkenarms, $M_1 = r_1 m_1 g \cos\beta$, und das des linken Balkenarms, $M_2 = r_2 m_2 g \cos\beta$, und damit der Balken bei Abweichung vom Gleichgewicht nicht gleich ganz kippt, liegt der Schwerpunkt des Balkens unterhalb des Drehpunktes; er wird bei einer Drehung auf einer Kreisbahn angehoben und liefert schließlich als drittes Drehmoment: $M_3 = s m_B g \sin\beta$ (m_B ist die Gesamtmasse des Waagebalkens). Die Waage befindet sich im Gleichgewicht, wenn die Vektor-Summe aller

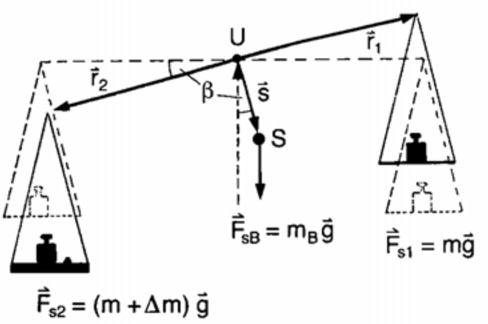


Abb. 2.7 Hebelwaage (Der Abstand s zwischen Unterstützungspunkt U und Schwerpunkt S ist hier übertrieben groß gezeichnet).

Drehmomente gleich Null ist: $\sum_i \vec{M}_i = 0$; oder, was im vorliegenden Fall gleichbedeutend ist:

$$gr(m_2 - m_1)\cos\beta = gsm_B \sin\beta\,. \tag{2-17}$$

Aus dieser Gleichgewichtsbedingung erhalten wir den Winkel β, um den zur Einstellung der Gleichgewichtslage bei ungleicher Belastung ($m_1 \neq m_2$) sich der Balken neigt:

$$\tan\beta = \frac{r(m_2 - m_1)}{sm_B}\,.$$

Heute kann man mit Präzisionswaagen Mikrogramme (µg) noch auf einige Prozent genau messen. Bei solch genauen Wägungen muß man allerdings den Einfluß des Auftriebs (Kap. 5.3.2.2) durch die Luft auf Wägegut und Gewichtssteine berücksichtigen.

Im Labor verwendet man die einfache Analysewaage, wie sie in Abb. 2.7 skizziert ist, nur mehr selten. An ihre Stelle sind Typen von Analysewaagen getreten, die weniger erschütterungsempfindlich, schneller und einfacher abzulesen sind und zudem den Vorteil haben, daß ihre Empfindlichkeit unabhängig von der Belastung ist. Sie alle beruhen jedoch auf den Hebelgesetzen und speziell dem Gleichgewicht von Drehmomenten.

Kleine Massen werden im Labor vornehmlich mit elektrischen Waagen gemessen (nicht zu verwechseln mit der Hebelwaage mit elektrisch-optischer Anzeige). Bei elektrischen Waagen erzeugt die zu messende Masse aufgrund ihrer Gewichtskraft über einen Hebelarm ein Drehmoment, das von dem Drehmoment einer stromdurchflossenen Spule, die in einem konstanten Magnetfeld hängt, kompensiert wird. Das Prinzip ist also dasselbe wie beim Drehspul-Meßwerk (Kap. 16.1.1): Ein mechanisches Drehmoment befindet sich im Gleichgewicht mit dem durch Lorentz-Kräfte erzeugten Drehmoment. Bei Änderung der aufgelegten Masse muß der Strom, der durch die Spule fließt, nachgeregelt werden, bis die Kompensation der Drehmomente wieder erreicht ist. An diesem Beispiel zeigt sich ein üblich gewordenes Verfahren der modernen Meßtechnik: Man wandelt jede physikalische Messung, sei es einer mechanischen, thermischen, akustischen, optischen oder kernphysikalischen Größe, in ein elektrisches Meßsignal um, d. h. in eine Spannung oder einen Strom, um dieses dann geeignet anzuzeigen.

2.2.7.6 Stabiles, indifferentes und labiles Gleichgewicht; Standfestigkeit

Ein ausgedehnter Körper ist in vollständigem Gleichgewicht, wenn nicht nur die Summe aller angreifenden Kräfte, sondern auch die Summe aller Drehmomente gleich Null ist.

Die Gleichgewichtsbedingung bezüglich Drehung wollen wir genauer betrachten. Dazu stellen wir uns vor, ein Körper sei drehbar gelagert. An jedem Massenelement greift die Gravitation an. Der Aufhänge- oder Unterstützungspunkt sei nun so gewählt, daß das daraus resultierende Drehmoment $\sum_i \vec{M}_i$ Null ist. Wir können drei Fälle unterscheiden:

(1) Wird der Körper aus seiner Ausgangslage geringfügig herausgedreht, und dreht sich dann von selbst wieder in diese zurück, so spricht man von *stabilem Gleichgewicht* in der Ausgangslage. Dann liegt der Unterstützungspunkt U über dem Schwerpunkt S.

(2) Bleibt der Körper von selbst in der neuen Lage, dann nennt man das *indifferentes Gleichgewicht*. In diesem Fall fallen U und S zusammen.

(3) Entfernt sich der Körper nach dem Loslassen weiter von der Anfangslage weg, dann ist das ein *labiles Gleichgewicht*. U liegt dann unter S. Die Bewegung kommt erst zur Ruhe, wenn das stabile Gleichgewicht erreicht ist, U also oberhalb S liegt.

Wird der Körper nicht in einem Punkt, sondern in einer Fläche, wie in Abb. 2.8 gezeigt, unterstützt, so ist für die *Standfestigkeit* des Körpers entscheidend, ob die senkrechte Projektion S' seines Schwerpunktes S auf die Unterstützungsfläche innerhalb der Standfläche A der Körpers liegt oder nicht. Liegt S' innerhalb A, so ist die Lage standfest (Abb. 2.8a), liegt S' aber außerhalb A, so wird der Körper unter dem Einfluß des Drehmomentes $\vec{z} \times \vec{F}_R$ umkippen (Abb. 2.8b).

2.2.8 Impuls und Drehimpuls

Das Integral der Kraft über die Zeit hat eine besondere physikalische Bedeutung; wir nennen diese Größe *Impuls* (Kraftstoß). Lassen wir im infinitesimalen Zeitintervall dt die Kraft F auf die Masse m wirken, dann erfährt sie den Impuls $d\vec{p}$:

$$d\vec{p} = \vec{F}(t)\; dt,$$

mit der SI-Einheit kg m s^{-1} oder N s. (2-18)

Wirkt die Kraft während eines längeren Zeitintervalles, von t_1 bis t_2, so erhalten wir als Impuls:

$$\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\; dt\,. \tag{2-19}$$

Der Betrag der Vektorgröße $\vec{p}$ ist gleich dem Flächeninhalt der schraffierten „Fläche" im Kraft-Zeit-Diagramm (Abb. 2.9). Aus dem Impuls ergibt sich umgekehrt durch Differentiation nach der Zeit wieder die Kraft; die Kraft stellt also die Änderung des Impulses mit der Zeit dar: $\vec{F} = d\vec{p}/dt$.

Setzen wir Gl. (2-2) in (2-19) ein, so ergibt sich $\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} m\vec{a}\, dt$ und schließlich unter Verwendung von Gl. (1-16):

$$\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} m\, \frac{d\vec{v}}{dt}\, dt \quad \text{oder}$$

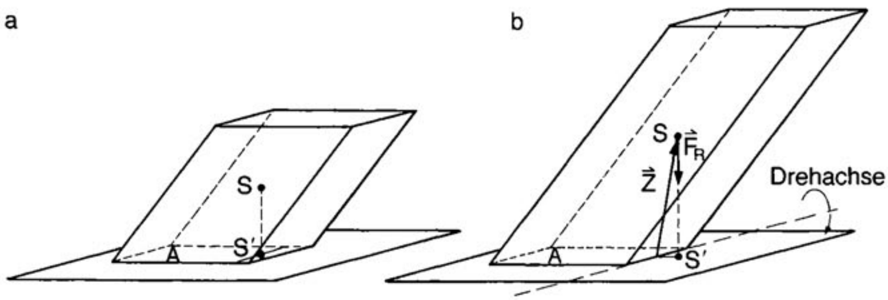


Abb. 2.8 Standfestigkeit: (a) standfest, (b) nicht standfest.

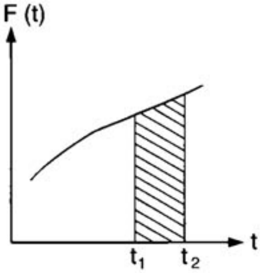


Abb. 2.9 Kraft-Zeit-Diagramm. Der Betrag des Impulses ist gleich dem Flächeninhalt der schraffierten Fläche.

$$p = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m \, \mathrm{d}\vec{v} = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \,. \qquad (2\text{-}20)$$

Durch diesen Kraftstoß wird also der Bewegungszustand der Masse m geändert. Besaß nämlich die Masse m vor dem Kraftstoß die Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_1$, dann werden infolge des Kraftstoßes i. a. sowohl Betrag als auch Richtung der Geschwindigkeit geändert, so daß die Endgeschwindigkeit $\vec{v}_2$ beträgt. Der Gesamtimpuls der Masse m hat sich dabei um $m\,(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$ geändert.

Die dem Impuls der geradlinigen Bewegung entsprechende Größe der Drehbewegung ist der *Drehimpuls* (Drall) $\vec{L}$.

Aus der in Tab. 2.3 gezeigten Analogie von Translations- und Rotationsbewegungen können wir diese Größe für den um eine Achse rotierenden, starren Körper direkt angeben. Anstelle von m, $\vec{v}$ und $\vec{F}$ treten J, $\vec{\omega}$ und $\vec{M}$, so daß sich für $\vec{L}$ ergibt:

$$\vec{L} = J\vec{\omega}, \text{ mit der SI-Einheit N m s}. \qquad (2\text{-}21)$$

Wie die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$, ist auch $\vec{L}$ ein axialer Vektor.

2.2.9 Reibung

Versuchen wir, das erste Newtonsche Axiom im Experiment zu prüfen, so werden wir es zumeist nicht bestätigt finden. Vielmehr wird der bewegte „kräftefreie" Körper mit der Zeit zur Ruhe kommen. Das liegt an der praktisch kaum völlig auszuschaltenden Reibung mit der Umgebung, wodurch die Bewegung gebremst wird. Das Newtonsche Axiom gilt nur für den idealisierten Fall einer Natur ohne Reibung, und das trifft ebenso für die meisten anderen Gesetze der Mechanik zu. Wenn wir im folgenden Reibung durch Reibungskräfte beschreiben, so soll das nur ausdrücken, daß dadurch (Relativ)-Bewegungen gehemmt werden; vergrößert werden können sie durch solche Kräfte nicht.

Tab. 2.3 Vergleich Translation – Rotation*

Geradlinige Bewegung (Translation)	Kreisbewegung (Rotation)
Weg $\vec{s}$ (m)	Winkel φ (rad)
Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$ (ms^{-1})	Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ (rad s^{-1})
Beschleunigung $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2}$ (ms^{-2})	Winkelbeschleunigung $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$ (rad s^{-2})
Masse m (kg)	Trägheitsmoment $J = \int r^2 \, dm$ (kg m^2)
Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ (N s)	Drehimpuls $\vec{L} = J\vec{\omega}$ (N m s)
Kraft $\vec{F} = ma = \frac{d\vec{p}}{dt}$	Drehmoment $\vec{M} = J\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ (N m)

* Um von den Gesetzen der fortschreitenden Bewegung zu denen der Drehbewegung zu gelangen, setzt man anstelle von Kraft $\vec{F}$, Masse m, Wegstrecke $\vec{s}$, Geschwindigkeit $\vec{v}$ und Beschleunigung $\vec{a}$ die Größen Drehmoment $\vec{M}$, Trägheitsmoment J, Winkel $\vec{\omega}$, Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ und Winkelbeschleunigung $\frac{d^2\vec{\omega}}{dt^2}$.

Die Reibung beruht einmal darauf, daß selbst glatt erscheinende Flächen Rauhigkeiten aufweisen, die sich beim Berühren verhaken können. Zum anderen wird sie durch die zwischen den Molekülen beider Flächen wirkenden Anziehungskräfte (Adhäsion, siehe Kap. 5.3.1) verursacht. Da diese nur auf kleine Entfernungen wirken, sind sie zwischen extrem glatten und ebenen, aufeinander liegenden Oberflächen besonders groß. (Daher haften z. B. zwei planpolierte Glasplatten fester aneinader als zwei aufgerauhte). Man unterscheidet üblicherweise folgende Fälle von Reibung:

1. Reibung zwischen ruhenden Körpern (Haftreibung).
2. Reibung zwischen bewegten Körpern.
   a) Gleitreibung auf fester Unterlage.
   b) Rollreibung auf fester Unterlage.
   c) Reibung in Flüssigkeiten und Gasen.

Haftreibung

Ein auf einer schiefen Ebene liegender Körper setzt sich erst dann in Bewegung, wenn die zur Ebene parallele Angriffskraft $\vec{F}$ die *Haftreibungskraft* $\vec{R}_0$ überwindet (Abb. 2.10). Experimente zeigen, daß $\vec{R}_0$ von der Größe derjenigen Kraft $\vec{N}$ abhängt, mit der der Körper senkrecht auf die Unterlage gepreßt wird. Der Betrag von $\vec{R}_0$ läßt sich darstellen als:

$$R_0 = \mu_0 N, \qquad (2\text{-}22)$$

wobei wir die dimensionslose Konstante μ_0 als *Haftreibungszahl* bezeichnen. $\vec{N}$ nennen wir die *Normalkraft*.

Kommen $\vec{N}$ und $\vec{F}$ wie in Abb. 2.10 durch die Schwerkraft $\vec{F}_s$ zustande, so ist $N = F_s \cos\varphi$ und $F = F_s \sin\varphi$. Für den Grenzfall, bei dem die Bewegung einsetzt, gilt:

$$\vec{R}_0 = -\vec{F}. \qquad (2\text{-}23)$$

Somit erhalten wir aus Gln. (2-22) und (2-23)

$$\mu_0 F_s \cos\varphi = F_s \sin\varphi,$$

und für den speziellen Winkel, bei dem der Körper zu gleiten beginnt, den *Haftreibungswinkel:*

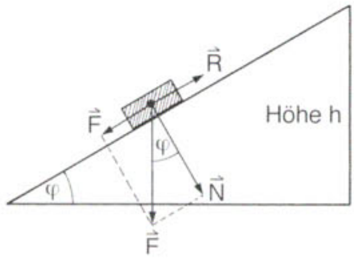


Abb. 2.10 Haftreibung auf der schiefen Ebene.

$$\mu_0 = \tan\varphi. \qquad (2\text{-}24)$$

So paradox dies auch zunächst erscheinen mag, ist $\vec{R}_0$ die Kraft, die uns beim Gehen vorwärts treibt. Beim Gehen drükken wir mit unseren Sohlen nämlich nach hinten gegen die Gehbahn, wodurch wir in der Berührungsfläche eine nach vorn gerichtete Haftreibungskraft hervorrufen, die uns fortbewegt. Wäre die Haftreibungskraft 0, die Bahn also glatt und rutschig, dann wäre $\vec{R}_0 = 0$, und wir könnten uns nicht vorwärts bewegen.
Auch das Auto wird durch Haftreibung, nämlich durch die der Reifen vorwärts getrieben. Wenn sie in Gleitreibung übergeht, ist das Fahrzeug nicht mehr zu steuern.

Gleitreibung

Ist die Haftreibung überwunden, so daß der Körper über die Auflagefläche gleiten kann, dann nimmt die Reibungskraft deutlich ab. Die *Gleitreibungskraft* R_G ist entgegengesetzt gleich der Kraft, die dann erforderlich ist, um den Körper auf konstanter Geschwindigkeit zu halten (Kräftegleichgewicht). Auch hier zeigen Experimente, daß die Reibungskraft von der Normalkraft N mitbestimmt wird:

$$R_G = \mu N, \qquad (2\text{-}25)$$

wobei μ die *Gleitreibungszahl* darstellt ($\mu < \mu_0$). Wie μ_0 ist auch μ eine dimensionslose Zahl. Durch Verwendung von Schmiermitteln lassen sich μ_0 und μ erheblich verringern.

Rollreibung Eine Kugel vermag leichter über die Unebenheiten einer Fläche hinwegzurollen als zu gleiten. Dabei haftet die momentane Auflagefläche infolge der Haftreibung fest an der Unterlage. Zur Beschreibung der Reibungseffekte beim Rollvorgang führt man die *Rollreibung* ein; sie ist kleiner als die Gleitreibung. Beim Kugellager, versetzt mit Schmierfett, ist die Rollreibung besonders gering. Die Vorgänge bei der Rollreibung werden dadurch kompliziert, daß eine Drehbewegung abläuft und Rolle und Unterlage wegen der kleinen Auflagefläche beim Abrollen verformt werden können.

Reibung in Flüssigkeiten und Gasen

Wird ein Körper in einer Flüssigkeit oder einem Gas bewegt, so greift an ihm eine gegen die Bewegung wirkende Reibungskraft an, die von der Relativgeschwindigkeit $\vec{v}$ des Körpers gegenüber der Umgebung abhängt. Bei kleinem $\vec{v}$ gilt das einfache Gesetz, daß die Reibungskraft $\vec{F}_R$ proportional zu $\vec{v}$ wächst:

$$\vec{F}_R = -r\,\vec{v}. \tag{2-26}$$

Der *Reibungskoeffizient* r hat die SI-Einheit kg s^{-1}. Er hängt von den Eigenschaften des umgebenden Mediums und auch von der Form des Körpers ab. Das negative Vorzeichen in Gl. (2-26) weist darauf hin, daß $\vec{F}_R$ der Bewegungsrichtung entgegengesetzt wirkt. Die Proportionalität zwischen Reibungskraft und Geschwindigkeit ist auch für die Beschreibung der Viskosität (Kap. 5.3.3.2.1) und der Sedimentation (Kap. 5.3.3.2.2) wichtig.

Bei hohen Geschwindigkeiten gilt Gl. (2-26) nicht mehr; dann wächst die Reibungskraft stärker als proportional zu $\vec{v}$.

3. Arbeit, Energie, Leistung

3.1 Ein Beispiel für den Begriff *Arbeit*

Wollen wir einen Körper entgegen der Schwerkraft $\vec{F}_s = m\vec{g}$ um die Strecke $d\vec{s}$ anheben, so müssen wir eine Gegenkraft $\vec{F}$ aufwenden, die den Einfluß der Schwerkraft aufhebt. $\vec{F}$ muß also $\vec{F}_s$ entgegengerichtet sein, und ihr Betrag muß mindestens gleich dem von $\vec{F}_s$ sein: $|\vec{F}| \geqq |\vec{F}_s|$.

Gilt $\vec{F} = -\vec{F}_s$, dann befindet sich der Körper im statischen Gleichgewichtszustand, und wir können ihn durch einen beliebig kleinen Anstoß nach oben verschieben. Zur Beschreibung dieses Vorganges definieren wir als neue physikalische Größe die *Arbeit* und sagen:

Durch die Kraft $\vec{F}$ wird gegen die Schwerkraft $\vec{F}_s$ längs eines Weges eine Arbeit *(Hubarbeit)* verrichtet. Handelt es sich um ein infinitesimal kleines Wegstück, so ist die Größe dieser Arbeit durch das Skalarprodukt aus der einwirkenden Kraft $\vec{F}$ und dem Weg $d\vec{s}$ gegeben:

$$dW = \vec{F}\,d\vec{s},$$
mit der SI-Einheit Joule (J) = kg m^2 s^{-2}. (3-1)

Wir haben für die Definition der Arbeit deshalb das Wegstück als beliebig klein angenommen, da wir dann die Kraft $\vec{F}$ als eine entlang des Wegstückes $d\vec{s}$ konstante Größe ansehen können, auch wenn sie sich längs eines größeren Weges $\vec{s}$ ändert: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{s})$. Die entlang eines endlichen Weges $\vec{s}$ verrichtete Arbeit ist dann allgemein gegeben durch:

$$W = \int \vec{F}(\vec{s})\,d\vec{s}. \tag{3-2}$$

Als Skalarprodukt zweier Vektoren stellt dW eine skalare Größe dar, und gemäß der Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren (Anhang) können wir auch schreiben

$$dW = |\vec{F}|\,|d\vec{s}|\cos(\vec{F}, d\vec{s}), \tag{3-3}$$

wobei $(\vec{F}, d\vec{s})$ den Winkel zwischen den Richtungen von Kraft und Weg bedeuten soll. Also ist die Arbeit gleich dem Produkt aus dem Betrag des Weges und der Komponente der Kraft in Richtung des Weges.

Wird zum Beispiel der Körper wie in Abb. 2.8 (ohne Reibung) vom Fußpunkt einer schiefen Ebene bis in die Höhe h, also längs der Wegstrecke $s = h/\sin\varphi$ verschoben, dann ist nach Gl. (3-2) die verrichtete Arbeit gegeben durch

$$W = \vec{F}\vec{s} = \frac{Fh}{\sin\varphi}, \tag{3-4}$$

wobei die Kraft $\vec{F}$ die entlang der schiefen Ebene wirkende Komponente $\vec{F}_s \sin\varphi$ der Schwerkraft $\vec{F}_s = m\vec{g}$ ist. Aus Gl. (3-4) ergibt sich somit: $W = F_s h = mgh$. Die Arbeit hängt also nur von der Schwerkraft des Körpers und der erreichten Höhe h ab und ist bei gleicher Höhe unabhängig von der Neigung φ der Ebene. Je steiler diese ist, um so größer ist zwar die erforderliche Kraft $\vec{F}$, aber um so kürzer ist der Weg $\vec{s}$.

Als Sonderfall erwähnen wir noch, daß beim Halten eines Gegenstandes *keine* Arbeit verrichtet wird. Die Kraft $\vec{F}$ einer eine Tasche haltenden Hand als Gegenkraft gegen die Schwerkraft (Gewichtskraft) der Tasche verursacht keine Verschiebung der Tasche, so daß $d\vec{s} = 0$ und damit $dW = 0$ gilt. Daß wir beim Halten eines schweren Gegenstandes tatsächlich ermüden, beruht darauf, daß der menschliche Körper kein starrer Körper im physikalischen Sinne ist, sondern es der Muskelanspannung bedarf, ihn aufrecht zu halten.

3.2 Energieformen

In einem Körper, an dem die Arbeit W verrichtet wurde, ist das Vermögen aufgespeichert, selbst wieder Arbeit zu verrichten. Dieses Vermögen nennen wir *Energie*. Sie kann in verschiedenen Formen gespeichert werden, je nachdem gegen welche Kraft die Arbeit ausgeführt wurde. Ihre Einheit ist identisch mit der Einheit der Arbeit (Joule).

1. Bei der *Hubarbeit* verrichten wir entlang der Wegstrecke $\vec{h}$ Arbeit gegen die Schwerkraft $m\vec{g}$ eines Körpers. Das Vermögen, wieder Arbeit zu verrichten, bezeichnen wir als die

potentielle Energie E_{pot} des Körpers; sie ist betragsmäßig gleich der verrichteten Hubarbeit:

$$E_{pot} = m\vec{g}\vec{h}. \tag{3-5}$$

Sie kann selbst wieder Anlaß zur Verrichtung von Hubarbeit geben, z. B. wenn der Körper an ein Seil gehängt wird, das über eine Umlenkrolle läuft und eine am anderen Seilende befestigte kleinere Masse in die Höhe zieht.

Wirkt eine Kraft auf ein Dynamometer (Kap. 2.2.5), so wird dessen Feder gestaucht oder gespannt, und dazu ist *Verformungs-* oder *Spannarbeit* nötig. Da für die Spannkraft $F = Dx$ gilt, erhalten wir aus Gl. (3-2) für die Spannarbeit zur Dehnung der Feder von der Länge x_0 auf die Länge x_1:

$$W = \int_{x_0}^{x_1} F\,dx = \int_{x_0}^{x_1} Dx\,dx = D\int_{x_0}^{x_1} x\,dx = D\,\frac{1}{2}\left(x_1^2 - x_0^2\right). \tag{3-6}$$

W führt also zur Erhöhung der potentiellen Energie der Feder, durch die sie bei Rückkehr in ihren unverformten, entspannten Zustand Arbeit verrichten kann (zum Beispiel wenn wir die gespannte Feder zum Anheben eines Gegenstandes verwenden).

Trägt man, in Analogie zum *Kraft-Zeit-Diagramm* (Abb. 2.9), die in Richtung des Weges wirkende Kraft auf der Ordinate und den Weg auf der Abszisse eines rechtwinkligen Koordinatensystems auf, so ergibt sich ein *Kraft-Weg-Diagramm* (Abb. 3.1). Für den Fall der Hubarbeit ist diese Kraft (die Schwerkraft $F_s = mg$)

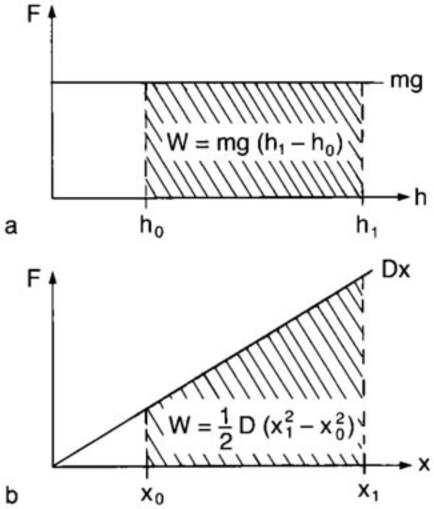


Abb. 3.1 Kraft-Weg-Diagramm. (a) Hubarbeit, (b) Spannarbeit einer Feder.

praktisch konstant, deshalb ist die Hubarbeit zum Anheben der Masse m von der Höhe h_0 auf die Höhe h_1 gleich dem Wert der Rechteckfläche, also $W = mg(h_1 - h_0)$ in Abb. 3.1a. Dagegen ist für den Fall der Spannarbeit diese Kraft (die Spannkraft der Feder F = Dx) proportional zur Auslenkung selbst, deshalb ist die Spannarbeit der Feder bei der Verformung von x_0 auf x_1 nicht durch eine Rechteckfläche im Kraft-Weg-Diagramm (wie bei der Hubarbeit) gegeben, sondern sie ist gleich dem Wert der schraffierten Fläche $W = (1/2)\,D(x_1^2 - x_0^2)$ in Abb. 3.1b.

2. Beschleunigen wir einen Körper durch die Kraft $\vec{F}$, so verrichten wir *Beschleunigungsarbeit* gegen die Trägheitskraft ($\vec{F}_T = -\vec{F}$) des Körpers. Nehmen wir $\vec{F}$ als konstant an, betrachten also einen geradlinig gleichförmig beschleunigten Körper, dann berechnen wir nach Gl. (3-2) die Beschleunigungsarbeit für die Beschleunigung längs der Strecke $\vec{s}$ zu:

$$W = m\vec{a}\vec{s}\,. \tag{3-7}$$

Nach Gl. (1-29) ergibt sich hierfür $W = m\vec{a}\,\frac{\vec{a}}{2}\,t^2$ oder mit Gl. (1-28b):

$$W = \frac{m}{2}\,v^2\,, \tag{3-8a}$$

wobei v die Endgeschwindigkeit ist.

Den durch seine Bewegung bedingten Zuwachs an Energie des Körpers bezeichnen wir als *kinetische Energie* E_{kin}; sie ist gegeben durch:

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2}\,v^2\,. \tag{3-8b}$$

Für einen auf einer Kreisbahn bewegten Körper läßt sich die kinetische Energie nach der in Tab. 2.3 angegebenen Analogie zwischen Bewegungsgrößen der Translation und Rotation darstellen durch:

$$E_{\text{kin}} = \frac{J}{2}\,\omega^2\,. \tag{3-9}$$

Die kinetische Energie eines Körpers A kann zum Beispiel dazu verwendet werden, daß Körper A durch Stoß mit einem Körper B zur Ruhe kommt und durch diesen Stoß Körper B beschleunigt oder zerstört (also Beschleunigungsarbeit oder Zerstörungsarbeit verrichtet).

3. Verrichten wir *Reibungsarbeit* gegen eine Reibungskraft, indem wir etwa zwei Körper aufeinander verschieben oder Flüssigkeit durch ein Rohr pressen, so wird dabei auftretende Energie in komplizierter Weise zur Verrichtung von Zerstörungsarbeit und (oder) zum Erwärmen (Erzeugung von Wärmeenergie) der Körper oder der Flüssigkeit verwendet.

Die Arbeit des Herzens dient zur Überwindung der Reibungskraft im Gefäßsystem. Die Größe dieser Arbeit, die zur Aufrechterhaltung des Blutflusses und damit zur Versorgung der Gewebe erforderlich ist, wird in Kap. 5.3.2.2 berechnet.

Der Begriff Energie ist nicht auf die bislang erwähnten mechanischen Energien beschränkt; zum Beispiel begegnen wir in der Wärme- und Elektrizitätslehre anderen Energieformen. Wenn man betonen will, daß eine Energie ihre Ursache in Wechselwirkungskräften hat, dann spricht man in der Physik auch von *Wechselwirkungsenergie*; die wichtigsten Beispiele hierzu sind in Tab. 3.1 zusammengestellt.

Äquivalenz von Masse und Energie Eine folgenreiche Konsequenz der speziellen Relativitätstheorie ist die, daß Masse und Energie einander äquivalent sind. Anders ausgedrückt: Eine bestimmte Energiemenge, sei es