

Oliver Haas, Ludwig Brabetz, Christian Koppe

Grundgebiete der Elektrotechnik

De Gruyter Studium

Weitere Titel der Autoren



Grundgebiete der Elektrotechnik

Ludwig Brabetz, Christian Koppe, Oliver Haas, 2022

Begründet von: Horst Clausert, Gunther Wiesemann

Band 2: Wechselströme, Drehstrom, Leitungen, Anwendungen der Fourier-, der Laplace- und der Z-Transformation

ISBN 978-3-11-063160-9, e-ISBN 978-3-11-063164-7



Arbeitsbuch Elektrotechnik

Band 1: Gleichstromnetze, Operationsverstärkerschaltungen, elektrische und magnetische Felder

Christian Spieker, Oliver Haas, 2022

ISBN 978-3-11-067248-0, e-ISBN 978-3-11-067251-0

Band 2: Wechselströme, Drehstrom, Leitungen, Anwendungen der Fourier-, der Laplace- und der Z-Transformation

Christian Spieker, Oliver Haas, Karsten Golde, Christian Gierl, Sujoy Paul, 2022

ISBN 978-3-11-067252-7, e-ISBN 978-3-11-067253-4



Jeweils auch als Set erhältlich:

Set Grundgebiete der Elektrotechnik 1, 13. Aufl.+Arbeitsbuch Elektrotechnik 1, 2. Aufl.

ISBN 978-3-11-067673-0

Set Grundgebiete der Elektrotechnik 2, 13. Aufl.+Arbeitsbuch Elektrotechnik 2, 2. Aufl.

ISBN 978-3-11-067674-7

Weitere empfehlenswerte Titel

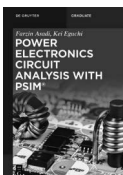


Elektronik für Informatiker

Von den Grundlagen bis zur Mikrocontroller-Applikation

Manfred Rost, Sandro Wefel, 2021

ISBN 978-3-11-060882-3, e-ISBN 978-3-11-040388-6



Power Electronics Circuit Analysis with PSIM®

Farzin Asadi, Kei Eguchi, 2021

ISBN 978-3-11-074063-9, e-ISBN 978-3-11-064357-2

Oliver Haas, Ludwig Brabetz, Christian Koppe

Grundgebiete der Elektrotechnik

Band 1 Gleichstromnetze,
Operationsverstärkerschaltungen, elektrische und
magnetische Felder

13. korrigierte Auflage

DE GRUYTER
OLDENBOURG

Autoren

Prof. Dr. Ludwig Brabetz
Universität Kassel
FB 16 Elektrotechnik und Informatik
Wilhelmshöher Allee 73
34121 Kassel
brabetz@uni-kassel.de

Dr.-Ing. Oliver Haas
Wilhelmshöher Allee 73
34121 Kassel
oliver.haas@uni-kassel.de

Christian Koppe
Rheinstahlring 48
34246 Vellmar
c-koppe@web.de

Begründet von
Horst Clausert
Gunther Wiesemann

ISBN 978-3-11-063154-8
e-ISBN (PDF) 978-3-11-063158-6
e-ISBN (EPUB) 978-3-11-063177-7

Library of Congress Control Number: 2022932559

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

© 2022 Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston
Coverabbildung: Girolamo Sferrazza Papa / iStock / Getty Images Plus
Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck

www.degruyter.com

Vorwort zur 13. Auflage

Die Grundlagen der Elektrotechnik gehören für die Studierenden der Elektrotechnik, Mechatronik, Maschinenbau und der Informatik zu der Grundausbildung ihres Studiums. Ein Grund für die neue Auflage des Bandes *Grundgebiete der Elektrotechnik 1* der Autoren Clausert und Wiesemann ist, dass das Einheitensystem im Jahr 2019 reformiert wurde. Weiterhin gab es bereits im Jahr 2018 neue Messwerte wichtiger physikalischer Konstanten, die ebenfalls einige Anpassungen erforderlich machten.

Die Neuauflage berücksichtigt konsequent alle Empfehlungen des wissenschaftlichen Formelsatzes; also die Festlegung, wie Indizes, Variablen und Funktionen sowie mathematische Konstanten gesetzt werden sollen.

In dieser Auflage wurden Fehler korrigiert, Tabellen, Grafiken und Beispiele erweitert, sodass die Inhalte für den Leser deutlicher werden. So wurde z. B. der Abschnitt zu den Maxwell'schen-Gleichungen ausführlich erweitert und mit einem Beispiel versehen, mit dem Ziel, dem Leser das Verständnis dieser fundamentalen Formeln der Elektrotechnik zu erleichtern.

Viele Änderungen waren notwendig, damit auch diese Auflage weiterhin den Anspruch erfüllen kann, den Studierenden ein aktuelles Standardwerk zu bieten.

Wir möchten uns selbstverständlich bei DE GRUYTER OLDENBOURG für die gute und freundliche Zusammenarbeit bedanken.

Kassel im Februar 2022

Ludwig Brabetz
Oliver Haas
Christian Koppe

Aus dem Vorwort zur ersten Auflage

In dem vorliegenden ersten Band behandeln wir die elektrischen Netze bei Gleichstrom und elektrische und magnetische Felder. Ein folgender zweiter Band wird der Wechselstromlehre und den Ausgleichsvorgängen gewidmet sein. Dem Lehrbuchcharakter entsprechend enthält jeder wichtige Abschnitt einige Beispiele. Diese sind fast alle als Aufgaben formuliert (mit den zugehörigen, oft recht ausführlichen Lösungen) und früheren Klausuren entnommen worden. Einige Beispiele stellen Ergänzungen des Vorlesungsstoffes dar und können beim ersten Durcharbeiten des Buches übersprungen werden.

Das Buch wendet sich in erster Linie an Studierende der Elektrotechnik, aber auch in der Praxis stehende Ingenieure werden aus dem Buch Nutzen ziehen – vielleicht gerade wegen der vielen Beispiele. Die Leser sollten mit den Grundbegriffen der Differenzial- und Integralrechnung vertraut sein. Die anspruchsvolleren Hilfsmittel der Feldtheorie dagegen werden nicht vorausgesetzt, sondern – soweit sie hier schon erforderlich sind – im Text erläutert.

Zum Schluss sprechen wir all denen unseren Dank aus, die zum Gelingen des Buches beigetragen haben. Der erstgenannte Verfasser dankt besonders Frau Bauks, die die Reinschrift seines Beitrags zu diesem Buch angefertigt hat, sowie Herrn cand. ing. Butscher für das Entwerfen und Zeichnen eines großen Teils der Bilder. Schließlich möchte er nicht versäumen, an dieser Stelle seines Lehrers Herbert Buchholz (1895–1971) zu gedenken, dessen Darmstädter Vorlesungen die Abschnitte über Felder in mancher Hinsicht beeinflusst haben. Der zweitgenannte Verfasser dankt seiner Frau für das sorgfältige Schreiben seines Manuskripts. Dem Verlag gebührt unser Dank für die gute Zusammenarbeit.

Wuppertal, Braunschweig
im Juli 1978

H. Clausert
G. Wiesemann

Inhalt

Vorwort zur 13. Auflage — V

Aus dem Vorwort zur ersten Auflage — VI

1 Einheiten, Gleichungen und grundlegende Begriffe — 1

- 1.1 Einheitensysteme — 1
 - 1.1.1 Maßsysteme — 1
 - 1.1.2 Die Grundgrößen des SI — 2
 - 1.1.3 Einige abgeleitete Einheiten — 3
- 1.2 Schreibweise von Gleichungen — 4
 - 1.2.1 Größengleichungen — 4
 - 1.2.2 Der Begriff Dimension — 5
- 1.3 Die elektrische Ladung — 5
- 1.4 Der elektrische Strom — 6
- 1.5 Die elektrische Spannung — 9
- 1.6 Der elektrische Widerstand — 11
- 1.7 Energie und Leistung — 13

2 Berechnung von Strömen und Spannungen in elektrischen Netzen — 15

- 2.1 Die Grundgesetze — 15
 - 2.1.1 Das Ohm'sche Gesetz — 15
 - 2.1.2 Die Knotengleichung (1. Kirchhoff'sche Gleichung) — 19
 - 2.1.3 Die Umlaufgleichung (2. Kirchhoff'sche Gleichung) — 21
- 2.2 Parallel- und Reihenschaltung — 23
 - 2.2.1 Reihenschaltung von Widerständen — 23
 - 2.2.2 Spannungsteiler — 24
 - 2.2.3 Parallelschaltung von Widerständen — 25
 - 2.2.4 Stromteiler — 27
 - 2.2.5 Gruppenschaltung von Widerständen — 27
 - 2.2.6 Brücken-Abgleich — 28
 - 2.2.7 Schaltungssymmetrie — 30
- 2.3 Strom- und Spannungsmessung — 31
 - 2.3.1 Anforderungen an Strom- und Spannungsmesser — 31
 - 2.3.2 Analoges Messinstrument — 32
 - 2.3.3 Klassengenauigkeit — 33
 - 2.3.4 Digitales Messinstrument — 34
 - 2.3.5 Messbereichserweiterung — 35
 - 2.3.6 Vielfachmessinstrument (Multimeter) — 40
 - 2.3.7 Messwertkorrektur — 41
- 2.4 Lineare Zweipole — 44

2.4.1	Erzeuger- und Verbraucher-Zählpfeilsystem —	45
2.4.2	Spannungsquellen —	46
2.4.3	Linearität —	49
2.4.4	Quellen-Ersatzzweipole —	51
2.4.5	Leistung an Zweipolen —	56
2.5	Nichtlineare Zweipole —	62
2.5.1	Kennlinien nichtlinearer Zweipole —	62
2.5.2	Grafische Bestimmung des Stromes in Netzen mit einem nichtlinearen Zweipol —	64
2.6	Der Überlagerungssatz (Superpositionsprinzip nach Helmholtz) —	70
2.7	Stern-Dreieck-Transformation —	73
2.7.1	Umwandlung eines Dreiecks in einen Stern —	74
2.7.2	Umwandlung eines Sterns in ein Dreieck —	75
2.7.3	Vor- und Nachteile der Netzumwandlung —	76
2.8	Umlauf- und Knotenanalyse linearer Netze —	78
2.8.1	Die Bestimmungsgleichungen für die Ströme und Spannungen in einem Netz; lineare Abhängigkeit —	78
2.8.2	Topologische Grundbegriffe beliebiger Netze —	83
2.8.3	Umlaufanalyse —	85
2.8.4	Knotenanalyse —	96
2.8.5	Vergleich zwischen Umlauf- und Knotenanalyse —	103
2.8.6	Gesteuerte Quellen —	106
2.9	Operationsverstärkerschaltungen —	113
2.9.1	Der ideale Operationsverstärker —	113
2.9.2	Komparatoren —	115
2.9.3	Rückkopplungsprinzipien —	116
2.9.4	Spannungsübertragungsfunktion $u_A = f(u_E)$ —	120
2.9.5	Kombination von invertierender mit nichtinvertierender Gegenkopplung —	133
2.9.6	Kombination von invertierender mit nichtinvertierender Mitkopplung —	137
2.9.7	Kombination von Gegenkopplung und Mitkopplung —	142
3	Elektrostatische Felder —	151
3.1	Skalare und vektorielle Feldgrößen —	151
3.2	Die elektrische Feldstärke und die Potenzialfunktion —	152
3.2.1	Das Coulomb'sche Gesetz —	152
3.2.2	Die elektrische Feldstärke —	153
3.2.3	Die Potenzialfunktion —	156
3.3	Die Erregung des elektrischen Feldes —	161
3.3.1	Die elektrische Flussdichte —	161
3.3.2	Der Gauß'sche Satz der Elektrostatik —	162

3.4	Die Potenzialfunktion spezieller Ladungsverteilungen —	165
3.4.1	Die Punktladung —	165
3.4.2	Der Dipol —	166
3.4.3	Die Linienladung —	167
3.5	Influenzwirkungen —	170
3.6	Die Kapazität —	171
3.6.1	Die Definition der Kapazität —	171
3.6.2	Parallel- und Reihenschaltung von Kapazitäten —	172
3.6.3	Die Kapazität spezieller Anordnungen —	173
3.7	Spezielle Methoden der Feldberechnung —	179
3.7.1	Das Prinzip der Materialisierung —	179
3.7.2	Die Kästchenmethode —	184
3.8	Energie und Kräfte —	185
3.8.1	Elektrische Energie und Energiedichte —	185
3.8.2	Kräfte im elektrostatischen Feld —	187
3.9	Bedingungen an Grenzflächen —	191
3.10	Kondensatorschaltungen —	194
3.10.1	Aufladung ungeladener Kondensatorschaltungen —	194
3.10.2	Ladungsausgleich zwischen Kondensatoren —	198
4	Stationäre elektrische Strömungsfelder —	203
4.1	Die Grundgesetze und ihre Entsprechungen im elektrostatischen Feld —	203
4.2	Methoden zur Berechnung von Widerständen —	206
4.3	Anwendung auf Erdungsprobleme —	209
4.4	Bedingungen an Grenzflächen —	212
5	Stationäre Magnetfelder —	214
5.1	Magnetismus —	214
5.2	Kräfte im magnetischen Feld und die magnetische Flussdichte —	215
5.2.1	Die Kraft zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern —	215
5.2.2	Die magnetische Flussdichte —	216
5.2.3	Die Kraft auf stromdurchflossene Leiter im Magnetfeld —	217
5.3	Die Erregung des Magnetfeldes —	220
5.3.1	Die magnetische Feldstärke —	220
5.3.2	Das Durchflutungsgesetz —	223
5.3.3	Das Gesetz von Biot-Savart —	226
5.4	Der magnetische Fluss —	228
5.5	Bedingungen an Grenzflächen —	230
5.6	Magnetische Kreise —	231
5.6.1	Grundlagen und Analogien —	231
5.6.2	Der magnetische Kreis ohne Verzweigung —	232

5.6.3	Der magnetische Kreis mit Verzweigung —	233
5.6.4	Nichtlineare magnetische Kreise —	234
6	Zeitlich veränderliche magnetische Felder —	240
6.1	Induktionswirkungen —	240
6.1.1	Das Induktionsgesetz in einfacher Form —	240
6.1.2	Die Lenzsche Regel —	241
6.1.3	Faraday-Maxwell'sches-Induktionsgesetz —	242
6.1.4	Weitere Formen des Induktionsgesetzes —	247
6.1.5	Eine Folgerung aus dem Induktionsgesetz —	247
6.2	Die magnetische Feldenergie —	249
6.2.1	Die zum Aufbau des Feldes erforderliche Energie —	249
6.2.2	Die Hystereseverluste —	251
6.3	Induktivitäten —	252
6.3.1	Die Selbstinduktivität —	252
6.3.2	Die Gegeninduktivität —	253
6.3.3	Die magnetische Energie eines Systems stromdurchflossener Leiterschleifen —	255
6.3.4	Methoden zur Berechnung von Selbst- und Gegeninduktivitäten —	258
6.4	Magnetische Feldkräfte —	261
6.4.1	Die Berechnung von Kräften über die Energie —	261
6.4.2	Kräfte bei Elektromagneten —	263
6.5	Ampère-Maxwell'sches-Durchflutungsgesetz —	264
6.6	Das System der Maxwell'schen Gleichungen —	266
	Weiterführende Literatur —	269
	Stichwortverzeichnis —	272

1 Einheiten, Gleichungen und grundlegende Begriffe

1.1 Einheitensysteme

1.1.1 Maßsysteme

Um eine physikalische Größe messen zu können, muss der Größe eine Einheit zugeordnet werden. Messen bedeutet dann, dass ein Zahlenwert bestimmt wird, welcher angibt, wie oft die zugeordnete Einheit in der zu messenden Größe enthalten ist.

Durch die physikalischen Gesetzmäßigkeiten, die einen Zusammenhang zwischen den physikalischen Größen herstellen, lässt sich die Anzahl der zugeordneten Einheiten auf wenige Grundeinheiten beschränken. Die Grundeinheiten sind Bestandteil des internationalen Einheitensystems **SI** (Système International). Durch den Beschluss der 26. Generalkonferenz für Maß und Gewicht erfolgte eine grundlegende Veränderung des SI, welche am 20. Mai 2019 in Kraft trat. Seitdem ist keine SI-Einheit mehr von veränderlichen Größen oder Objekten bestimmt. Jede Einheit lässt sich jetzt aus einer Kombination von sieben fest definierten Konstanten herleiten. Diese sieben physikalischen Konstanten sind seit der Messkampagne 2018 des **CODATA** (Committee on Data for Science and Technology) als exakt definiert. Ihre Werte sind mit den zugehörigen SI-Einheiten in der Tabelle 1.1 wiedergegeben.

Tab. 1.1: Die sieben physikalischen Konstanten des SI mit ihren seit der Messkampagne 2018 des CODATA als exakt definierten Werten, veröffentlicht am 20. Mai 2019, dem Tag des Messens.

Konstante	exakter Wert
$\Delta\nu_{\text{Cs}}$ Frequenz des Hyperfeinstrukturübergangs des Grundzustands im Cesium-133-Atom ^{133}Cs	$9\,192\,631\,770\,\text{s}^{-1}$
c Lichtgeschwindigkeit	$299\,792\,458\,\text{m s}^{-1}$
h Plancksches Wirkungsquantum	$6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\,\text{kg m}^2\,\text{s}^{-1}$
e Elementarladung	$1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\,\text{A s}$
k_{B} Boltzmann-Konstante	$1,380\,649 \cdot 10^{-23}\,\text{kg m}^2\,\text{s}^{-2}\,\text{K}^{-1}$
N_{A} Avogadro-Konstante	$6,022\,140\,76 \cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$
K_{cd} Photometrisches Strahlungsäquivalent für die monochromatische Strahlung der Frequenz 540 THz (grünes Licht)	$683\,\text{cd sr s}^3\,\text{kg}^{-1}\,\text{m}^{-2}$

In der Elektrotechnik hat sich das **MKSA-System** (**M**eter, **K**ilogramm, **S**ekunde, **A**mpere) weitgehend durchgesetzt, das von den Grundgrößen Länge, Masse, Zeit und Stromstärke ausgeht. Außerdem wird zur Beschreibung thermischer Vorgänge die Temperatur als fünfte Grundgröße benötigt. Das MKSA-System ist Teil des SI.

1.1.2 Die Grundgrößen des SI

Die für die Elektrotechnik fünf wichtigen Grundgrößen des SI sind wie folgt definiert:

1. **Die Zeit:** Die SI-Einheit für die Zeit ist die Sekunde mit dem Einheitenzeichen s. Die Sekunde ist das 9 192 631 770-fache der Periodendauer der Strahlung beim Übergang zwischen zwei bestimmten Energieniveaus des Atoms von Cäsium 133

$$1 \text{ s} = \frac{9\,192\,631\,770}{\Delta\nu_{\text{Cs}}}.$$

2. **Die Länge:** Die SI-Einheit für die Länge ist der Meter mit dem Einheitenzeichen m. Der Meter ist über den festen Zahlenwert der Lichtgeschwindigkeit definiert. Ein Meter ist die Strecke, die das Licht im Vakuum während $1/299\,792\,458$ s durchläuft. Dabei ist die Einheit der Sekunde mit Hilfe der Konstanten $\Delta\nu_{\text{Cs}}$ definiert

$$1 \text{ m} = 1 \frac{c}{299\,792\,458} \text{ s} = 1 \frac{9\,192\,631\,770}{299\,792\,458} \frac{c}{\Delta\nu_{\text{Cs}}}.$$

3. **Die Masse:** Die SI-Einheit für die Masse ist das Kilogramm mit dem Einheitenzeichen kg. Die Masse wird durch den festen Zahlenwert des Plank'schen Wirkungsquantums h bestimmt, wobei die Einheiten für den Meter und die Sekunde über die Konstanten c und $\Delta\nu_{\text{Cs}}$ definiert sind

$$\begin{aligned} 1 \text{ kg} &= 1 \frac{h}{6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34} \text{ m}^2} \frac{\text{s}}{\text{m}^2} \\ &= 1 \frac{(299\,792\,458)^2}{6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34} \cdot 9\,192\,631\,770} \frac{h \cdot \Delta\nu_{\text{Cs}}}{c^2}. \end{aligned}$$

Die bis 2019 gültige Definition nach der DIN 1301 lautet: 1 Kilogramm (= 1 kg) ist bestimmt durch die Masse des in Sèvres aufbewahrten »Urkilogramms«.

4. **Die elektrische Stromstärke:** Die SI-Einheit für die Stromstärke ist das Ampere mit dem Einheitenzeichen A. Die Stromstärke ist durch den festen Zahlenwert der Elementarladung e bestimmt, wobei hier die Einheit Sekunde durch die Konstante $\Delta\nu_{\text{Cs}}$ definiert ist

$$\begin{aligned} 1 \text{ A} &= 1 \frac{e}{1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ s}} \frac{1}{\text{s}} \\ &= 1 \frac{e \cdot \Delta\nu_{\text{Cs}}}{1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \cdot 9\,192\,631\,770}. \end{aligned}$$

Die bis 2019 gültige Definition nach der DIN 1301 lautet: 1 Ampere (= 1 A) ist definiert durch die Stärke eines zeitlich konstanten Stromes durch zwei geradlinige, parallele, unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinem Querschnitt, die einen Abstand von 1 m haben und zwischen denen die durch den Strom hervorgerufene Kraft im leeren Raum pro 1 m Leitungslänge $2 \cdot 10^{-7} \text{ kg m s}^{-2}$ beträgt.

5. **Die Temperatur:** Die SI-Einheit für die Temperatur ist das Kelvin mit dem Einheitenzeichen K. Das Kelvin wird durch den festen Zahlenwert der Boltzmann-Konstante k_{B} bestimmt. Wobei die Einheiten für das Kilogramm, den Meter und

die Sekunde jeweils über die Konstanten h , c und $\Delta\nu_{\text{Cs}}$ definiert werden

$$\begin{aligned} 1 \text{ K} &= 1 \frac{1,380\,649 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2}{k_{\text{B}} \text{ s}^2} \\ &= 1 \frac{1,380\,649 \cdot 10^{-23}}{6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34} \cdot 9\,192\,631\,770} \frac{\Delta\nu_{\text{Cs}} \cdot h}{k_{\text{B}}} . \end{aligned}$$

Die bis 2019 gültige Definition nach der DIN 1301 lautet: 1 Kelvin (= 1 K) ist der 273,15te Teil der Differenz zwischen der Temperatur des absoluten Nullpunkts und der Temperatur, bei der die drei Zustandsformen des Wassers gleichzeitig auftreten (Tripelpunkt).

Der Zusammenhang zwischen der Kelvintemperatur T und der Celsiusstemperatur ϑ ist gegeben durch

$$\vartheta = T - 273,15 \text{ K} .$$

1.1.3 Einige abgeleitete Einheiten

1. **Die Kraft:** Wegen des Zusammenhangs Kraft = Masse $\times$ Beschleunigung definiert man:

$$1 \text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \text{ Newton} = 1 \text{ N} .$$

Die Kraft 1 Newton erteilt also der Masse 1 kg die Beschleunigung von 1 m s^{-2} .

2. **Arbeit, Energie, Leistung:** Für die Einheit der Arbeit = Kraft $\times$ Weg schreibt man:

$$1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} = 1 \text{ Joule} = 1 \text{ J} .$$

Demnach muss eine Arbeit von 1 J aufgewendet werden, wenn ein Körper mit der Kraft 1 N um 1 m verschoben wird.

Die Leistung = Arbeit pro Zeit erhält die Einheit

$$\frac{1 \text{ Nm}}{1 \text{ s}} = \frac{1 \text{ J}}{1 \text{ s}} = 1 \text{ Watt} = 1 \text{ W} .$$

3. **Wärmemenge:** Da es sich bei der Wärmemenge um eine Energie handelt, braucht keine neue Einheit definiert zu werden. Häufig begegnet man noch der älteren Einheit Kalorie (cal). Mit einer Kalorie ist diejenige Energie gemeint, die man braucht, um 1 g Wasser von $14,5^\circ\text{C}$ auf $15,5^\circ\text{C}$ zu erwärmen. Experimentell ergibt sich der Zusammenhang

$$1 \text{ cal} \approx 4,186 \text{ Ws} .$$

In vielen praktischen Fällen sind die bis jetzt eingeführten Einheiten unhandlich. Sie können entweder zu groß oder zu klein sein. Dann kann vor die Einheit eines der in Tabelle 1.2 angegebenen Vorsatzzeichen gesetzt werden.

Tab. 1.2: Gebräuchliche Vorsatzzeichen und ihre Zehnerpotenzen.

Vorsatzzeichen	Zehnerpotenz	Vorsatzzeichen	Zehnerpotenz
Y	Yotta 10^{24}	d	Dezi 10^{-1}
Z	Zetta 10^{21}	c	Zenti 10^{-2}
E	Exa 10^{18}	m	Milli 10^{-3}
P	Peta 10^{15}	μ	Mikro 10^{-6}
T	Tera 10^{12}	n	Nano 10^{-9}
G	Giga 10^9	p	Piko 10^{-12}
M	Mega 10^6	f	Femto 10^{-15}
k	Kilo 10^3	a	Atto 10^{-18}
h	Hekto 10^2	z	Zepto 10^{-21}
da	Deka 10^1	y	Yocto 10^{-24}

1.2 Schreibweise von Gleichungen

1.2.1 Größengleichungen

Gleichungen werden in der Elektrotechnik im Allgemeinen als Größengleichungen geschrieben. Gleichungen dieser Form haben den Vorteil, dass sie für beliebige Einheiten richtig sind. Man hat dabei die physikalische Größe als Produkt aus Zahlenwert und Einheit in die Gleichung einzusetzen. Man schreibt z. B. für das Formelzeichen a :

$$a = \{a\} \cdot [a]$$

wobei $\{a\}$ den Zahlenwert der Größe a bedeutet und $[a]$ ihre Einheit. Zahlenwert und Einheit sind wie algebraische Größen zu behandeln.

Als Beispiel sei hier der Ausdruck für die Energie angegeben, die aufzuwenden ist, um einen Körper der Masse m und der spezifischen Wärmekapazität c um die Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta$ zu erwärmen:

$$W = c \cdot m \cdot \Delta\vartheta .$$

Die Anwendung dieser Gleichung führt immer zu richtigen Ergebnissen, wenn man nur jede der Größen W , c , m , $\Delta\vartheta$ als Produkt aus Zahlenwert und Einheit auffasst. Beim Zusammenfassen der Einheiten auf der rechten Seite der Gleichung muss sich eine Energieeinheit ergeben

$$[W] = [c] \cdot [m] \cdot [\Delta\vartheta] = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot \text{kg} \cdot \text{K} = \text{J} .$$

Das Rechnen mit Größengleichungen hat demnach auch den Vorteil, dass mögliche Fehler durch Einheitenkontrolle gefunden werden können. Diese einfache Methode zur Kontrolle von Gleichungen wird wärmstens empfohlen.

1.2.2 Der Begriff Dimension

Will man deutlich machen, in welcher Form die Grundgrößen in die abgeleiteten Größen eingehen, so verwendet man den Begriff Dimension ($\dim$) und schreibt z. B. für die Geschwindigkeit v als Quotient aus dem Weg l und der Zeit t :

$$\dim(v) = \frac{\dim(l)}{\dim(t)}.$$

Im SI heißen die Dimensionen wie ihre Grundgrößen, sie werden gekennzeichnet durch aufrechte, serifenlose Großbuchstaben, wie hier z. B. für das MKSA-System:

Länge: $\dim(l) = L$, Masse: $\dim(m) = M$, Zeit: $\dim(t) = T$, Stromstärke: $\dim(I) = I$.

Allgemein ergibt sich die Dimension einer aus diesen vier Grundgrößen abgeleiteten beliebigen Größe Q durch

$$\dim(Q) = L^\alpha \cdot M^\beta \cdot T^\gamma \cdot I^\delta \quad \text{mit} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$$

mit der abgeleiteten Einheit

$$[Q] = m^\alpha \cdot \text{kg}^\beta \cdot s^\gamma \cdot A^\delta.$$

Für die Geschwindigkeit v ergibt sich zum Beispiel

$$\dim(v) = L^1 \cdot M^0 \cdot T^{-1} \cdot I^0 \quad \text{und} \quad [v] = m^1 \cdot \text{kg}^0 \cdot s^{-1} \cdot A^0.$$

1.3 Die elektrische Ladung

Bestimmte elektrische Phänomene, die man mit einem geriebenen Bernsteinstab vorführen kann, sind schon seit dem Altertum bekannt. Das griechische Wort für Bernstein (= Elektron) hat der Elektrizität ihren Namen gegeben. Elektrizität kann nicht direkt begriffen werden. Sie ist nur durch ihre Erscheinungen erkennbar. Von einem geriebenen Bernsteinstab berührte Holundermarkkugeln stoßen sich untereinander ab. Werden sie anschließend in die Nähe eines geriebenen Glasstabes gebracht, so zieht er sie zunächst an, stößt sie nach der Berührung jedoch ab. Diese Beobachtungen lassen sich nicht mit den aus der Mechanik bekannten Gravitationskräften erklären. Vielmehr handelt es sich hier um die Wirkungen einer neuen Größe, die man die **elektrische Ladung** nennt. Da zwischen Ladungen anziehende und abstoßende Kräfte auftreten können, muss es zwei verschiedene Ladungsarten bzw. Ladungen mit unterschiedlichen Vorzeichen geben. Willkürlich ordnet man den Ladungen eines geriebenen Glasstabes das positive Vorzeichen zu, den Ladungen eines geriebenen Bernsteinstabes das negative Vorzeichen. Damit lässt sich die oben beschriebene Erfahrungstatsache so formulieren: Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab, ungleichnamige ziehen sich an.

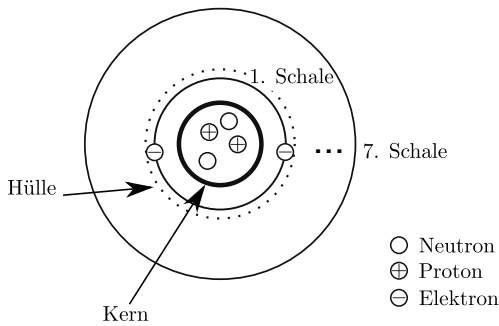


Abb. 1.1: Das Bohr'sche Atommodell.

Ladungen lassen sich nicht in beliebig kleine Teilladungen aufteilen. Es gibt vielmehr eine kleinste Ladungsmenge, die so genannte **Elementarladung** e . Eine beliebige Ladung ist immer ein ganzzahliges Vielfaches ($n = 1, 2, \dots \infty$) dieser Elementarladung:

$$Q = n \cdot e \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

Das Atom besteht aus einem Kern und einer Hülle. Den Kern bilden **Protonen**, die jeweils die Ladung $+e$ tragen, und **Neutronen**, die ungeladen sind. Die den Kern auf bis zu sieben Schalen umkreisenden **Elektronen**, die alle die Ladung $-e$ haben, stellen die Atomhülle dar. Die Ladungen von Kern und Hülle sind gleich groß, jedoch von entgegengesetztem Vorzeichen, so dass das Atom insgesamt elektrisch neutral ist. Als Träger der Masse des Atoms ist im Wesentlichen der Kern anzusehen, da die Elektronen eine etwa 1840-mal kleinere Masse als die Protonen und die Neutronen besitzen. Das hier skizzierte Atommodell in Bild 1.1 geht auf die Vorstellungen von Nils Bohr zurück und wird wegen der nahe liegenden Analogie als Bohr'sches Planetenmodell des Atoms bezeichnet. Die Elektronen eines Atoms sind umso stärker an den Kern »gebunden«, je geringer der Abstand zwischen Kern und Elektron ist. Bei manchen Stoffen lassen sich Elektronen der äußersten Schale wegen der geringeren Bindekräfte aus dem Atomverband herauslösen. Es entsteht ein positives **Ion** (= Kation). Nimmt dagegen die äußerste Schale Elektronen auf, so erhält man ein negatives Ion (= Anion).

1.4 Der elektrische Strom

Der Strom kann mit einer Flüssigkeitsmenge verglichen werden, die innerhalb einer bestimmten Zeit einen gegebenen Querschnitt durchströmt. Die Stärke der Strömung charakterisiert man durch den Quotienten aus Menge und Zeit und nennt ihn die Stromstärke oder einfach den Strom. Zusätzlich ist der Strom durch seine Richtung gekennzeichnet. Entsprechend definiert man den **elektrischen Strom**:

$$I_m = \frac{\Delta Q}{\Delta t}. \quad (1.2)$$

Dabei bedeuten ΔQ die innerhalb des Zeitraums Δt durch den betrachteten Querschnitt hindurchtretende Ladung und I_m die mittlere Stromstärke während des Zeitraums Δt . Wenn zu gleichen Zeitintervallen Δt unterschiedliche Ladungen gehören, gibt man den Augenblickswert des Stromes an:

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} . \quad (1.3)$$

Löst man die Gl. (1.2) nach der Ladung auf, erhält man die während des Zeitraums Δt transportierte Ladung:

$$\Delta Q = I_m \Delta t . \quad (1.4)$$

Ist die Stromstärke während des Zeitraums Δt konstant, so schreibt man an Stelle des Mittelwertes I_m einfach I :

$$\Delta Q = I \Delta t . \quad (1.5)$$

Bei beliebigem zeitlichen Verlauf des Stromes kann die Ladung, die zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 durch den betrachteten Querschnitt hindurchtritt, wegen Gl. (1.3) durch folgende Integration bestimmt werden:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt . \quad (1.6)$$

Zeitlich konstante Größen werden durch große Buchstaben gekennzeichnet (z. B. Strom I), zeitlich veränderliche Größen dagegen durch kleine Buchstaben (z. B. Strom i). Die durch die Gln. (1.2) bis (1.6) beschriebenen Zusammenhänge werden in Bild 1.2 veranschaulicht, und zwar einmal für einen zeitlich konstanten Strom, man spricht hier von einem **reinen Gleichstrom**. Im anderen Fall ist der Strom eine periodische Funktion mit der Periode T , wobei innerhalb dieser Periode genau so viel Ladung in der einen wie in der anderen Richtung, im Mittel also gar keine Ladung transportiert wird. Einen solchen Strom nennt man einen **reinen Wechselstrom**. Da die Ladung nach Gleichung (1.1) ein Vielfaches der Elementarladung e , bzw. nach Gleichung (1.6) die zeitliche Integration des Stromes ist, ist die Einheit Ladung gleich der Einheit der Elementarladung

$$[\Delta Q] = [n][e] = [I][\Delta t] = 1 \text{ A} \cdot 1 \text{ s} .$$

Damit ist die Einheit der Ladung 1 Amperesekunde. Da diese Einheit häufig vorkommt, hat sie einen speziellen Namen erhalten:

$$1 \text{ As} = 1 \text{ Coulomb} = 1 \text{ C} .$$

Dem elektrischen Strom ist willkürlich eine Richtung zugeordnet worden: Man betrachtet die Bewegungsrichtung positiver Ladungsträger als die positive Stromrichtung und spricht auch von der **konventionellen** oder **technischen Stromrichtung**. Die Bewegungsrichtung der negativen Elektronen wie z. B. in einer Elektronenröhre stimmt

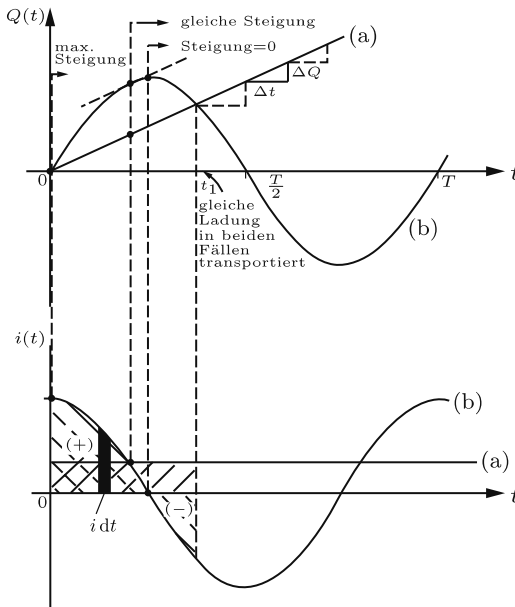


Abb. 1.2: Zusammenhang zwischen transportierter Ladung und Stromstärke. (a) reiner Gleichstrom (b) reiner Wechselstrom.

dann also nicht mit der konventionellen Stromrichtung überein (Bild 1.3). Man teilt die Stoffe nach ihrer Fähigkeit, den Strom zu leiten, in **Leiter**, **Nichtleiter** und **Halbleiter** ein. Zu den Leitern gehören die Metalle und die Elektrolyte (Säuren und Salzlösungen). Bei diesen Stoffen sind die Ladungsträger frei beweglich. Halbleiter unterscheiden sich in dieser Hinsicht nicht von den Leitern, nur ist die Dichte der frei beweglichen Ladungsträger um Zehnerpotenzen geringer. Beispiele für Halbleiter sind Silizium, Germanium, Selen. Nichtleiter besitzen dagegen keine frei beweglichen Ladungsträger. Hier sind nur geringe Ladungsverschiebungen oder Drehungen (bei Dipolen) möglich. Als Beispiele für Nichtleiter seien genannt: Porzellan, Gummi, Hartpapier.

Die frei beweglichen Ladungsträger in Metallen bewegen sich ungeordnet auf Zickzackbahnen (»Elektronengas«, »Elektronenwolke«). Ein Strom durch den Leiter kommt erst zustande, wenn sich dieser statistisch verteilten Bewegung eine Bewegung in einer Vorzugsrichtung überlagert (Driftbewegung).

Der elektrische Strom ist im Wesentlichen durch drei Wirkungen gekennzeichnet:

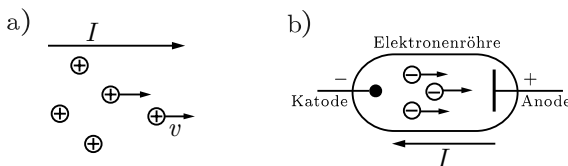


Abb. 1.3: a) Konventionelle Stromrichtung; b) Bewegungsrichtung der Elektronen in einer Elektronenröhre.

1. Jeder Strom ist von einem Magnetfeld begleitet (Bild 1.4). Seine Wirkung lässt sich z. B. zur Messung durch ein Drehspulinstrument auswerten.
2. Der Stromfluss ist vor allem bei den Elektrolyten mit einem Stofftransport verbunden. Früher wurde die Einheit der Stromstärke durch das sog. »Silberampere« definiert, d. h. durch die bei Stromfluss innerhalb einer gewissen Zeit aus einer Silbersalzlösung ausgeschiedene Menge Silber.
3. Ein von einem Strom durchflossener Leiter erwärmt sich. Diese Wirkung wird bei der Strommessung durch Hitzdrahtamperemeter ausgenutzt.

Beispiel 1.1: Geschwindigkeit freier Elektronen im Leiter.

Durch einen Kupferdraht mit dem Querschnitt $A = 50 \text{ mm}^2$ fließt der Strom $I = 200 \text{ A}$. Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit (Driftgeschwindigkeit) der freien Elektronen, wenn deren Dichte $N = 8,5 \cdot 10^{19} \text{ mm}^{-3}$ beträgt?

Lösung:

Der Weg Δx wird in der Zeit Δt zurückgelegt. Während dieser Zeit wird die Ladung

$$\Delta Q = I \Delta t \quad \text{mit} \quad \Delta Q = e N \Delta x A$$

transportiert (Bild 1.5). Damit folgt

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v = \frac{I}{e N A} \approx 0,3 \frac{\text{mm}}{\text{s}}.$$

1.5 Die elektrische Spannung

Im letzten Abschnitt wurde die Frage nach der Ursache für den elektrischen Strom offengelassen. Es liegt nahe, dass eine Kraft erforderlich ist, um die Ladungen im Leiter zu bewegen, und dass mit der Bewegung ein Energieumsatz verbunden ist. Das wird verdeutlicht an Hand von Bild 1.6, in dem zwei Ladungen Q und q dargestellt sind. Haben beide Ladungen gleiches Vorzeichen, so stoßen sie sich nach Abschnitt 1.3 ab. Bei einer Bewegung der Ladung q von A nach B nimmt die potentielle Energie dieser Ladung ab, etwa von W_A auf W_B . Die Energiedifferenz wird in kinetische Energie umgewandelt. Damit ist der Vorgang analog zur Bewegung einer Masse im Schwerfeld der Erde: Ein von A nach B fallender Stein gewinnt eine kinetische Energie, die gleich

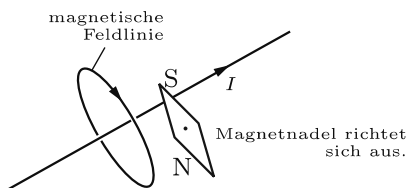


Abb. 1.4: Magnetische Wirkung des elektrischen Stromes.

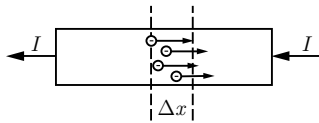
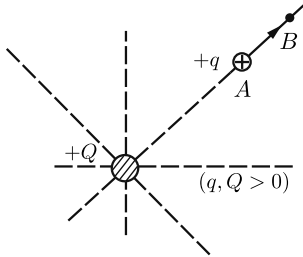


Abb. 1.5: Zur Berechnung der Driftgeschwindigkeit.

Abb. 1.6: Zur Änderung der potentiellen Energie beim Verschieben der Ladung q von A nach B.

der Abnahme seiner potentiellen Energie ist. So wie diese potentielle Energie der Masse proportional ist, so erweist sich die potentielle Energie des Ladungsträgers als der Ladung proportional:

$$W_A - W_B \sim q.$$

Man führt als Proportionalitätsfaktor auf der rechten Seite die **elektrische Spannung** ein, die mit U bezeichnet wird. Damit haben wir

$$\frac{W_A - W_B}{q} = \frac{W_{AB}}{q} = U_{AB}, \quad (1.7)$$

wobei der Index bei U ausdrückt, dass die Spannung zwischen den Punkten A und B gemeint ist.

Ganz allgemein nennt man eine Einrichtung, in der die bewegten Ladungen potentielle Energie abgeben, einen **Verbraucher** und den Quotienten nach Gl. (1.7) den **Spannungsabfall** U (oder einfach die Spannung U an dem Verbraucher). Einrichtungen, die die potentielle Energie der Ladungen erhöhen, bezeichnet man als **Erzeuger**, Spannungsquellen oder Generatoren und die gemäß Gl. (1.7) definierte Spannung als **Quellenspannung** U_q oder U .

Die Ausdrücke Verbraucher und Erzeuger haben sich eingebürgert, obwohl in ihnen Energie weder verbraucht noch erzeugt, sondern nur in andere Energieformen umgesetzt wird, z. B. elektrische Energie in Wärme im stromdurchflossenen Leiter oder mechanische in elektrische Energie in der Dynamomaschine.

Die Richtung der Spannung wählt man bei einem Verbraucher im Allgemeinen genauso wie die des Stromes. (Die möglichen Zuordnungen kommen in Abschnitt 2.4.1 zur Sprache.) Damit gibt der Spannungspfeil die Bewegungsrichtung der positiven Ladungsträger bei Abgabe potentieller Energie an. Bei Zunahme der potentiellen Energie – also bei Generatoren – ist konsequenterweise der Spannungspfeil entgegengesetzt zum Strompfeil einzutragen (Bild 1.7). Den Anschlussklemmen von Verbrauchern und Generatoren ordnet man Vorzeichen zu, und zwar so, dass außerhalb des Generators der Strom vom positiven zum negativen Pol oder Anschluss fließt, somit innerhalb des

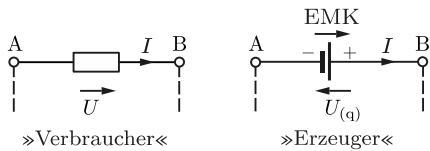


Abb. 1.7: Richtung von Strom und Spannung bei Verbrauchern und Erzeugern.

Generators vom negativen zum positiven Anschluss (Bild 1.7). Die Spannung ist bei Verbrauchern und Generatoren stets vom Pluspol zum Minuspol gerichtet. Aus Gl. (1.7) ergibt sich eine mögliche Einheit der Spannung zu

$$[U] = \frac{[W]}{[q]} = \frac{1 \text{ J}}{1 \text{ As}} = \frac{1 \text{ W}}{1 \text{ A}} ,$$

wofür man abkürzend schreibt:

$$\frac{1 \text{ W}}{1 \text{ A}} = 1 \text{ Volt} = 1 \text{ V} .$$

1.6 Der elektrische Widerstand

Um einen elektrischen Strom durch einen Leiter zu treiben, ist Energie erforderlich, da der Leiter der freien Bewegung der Ladungen einen Widerstand entgegensetzt. Je größer der Strom durch den Leiter (Bild 1.8) werden soll, desto größer muss im allgemeinen die Spannung zwischen den Leiterenden A und B sein. Man definiert als **Widerstand** R_{AB} des Leiters den Quotienten aus Spannung U_{AB} und Strom I :

$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} . \quad (1.8)$$

Dieser Quotient kann vom Strom abhängen, aber auch konstant sein (s. Abschnitt 2.1.1). In manchen Fällen, z. B. zur Charakterisierung nichtlinearer Zweipole (Abschnitt 2.5.1), ist es zweckmäßig, mit einem **differenziellen Widerstand** r_{AB} zu arbeiten, der so definiert ist:

$$r_{AB} = \frac{dU_{AB}}{dI} . \quad (1.9)$$

Eine Einheit des Widerstandes kann aus Gl. (1.8) hergeleitet werden:

$$[R] = \frac{[U]}{[I]} = \frac{1 \text{ V}}{1 \text{ A}} .$$

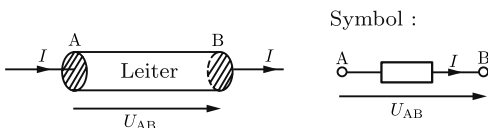


Abb. 1.8: Zur Definition des Widerstandes R_{AB} .

Für den Quotienten schreibt man abkürzend

$$1 \frac{\text{V}}{\text{A}} = 1 \text{ Ohm} = 1 \Omega .$$

Den Kehrwert des Widerstandes R nennt man den **Leitwert** G

$$G = \frac{1}{R} \quad (1.10)$$

mit der möglichen Einheit Ω^{-1} , die einen speziellen Namen erhalten hat:

$$\frac{1}{\Omega} = 1 \text{ Siemens} = 1 \text{ S} .$$

Bei einem homogenen Leiter von gleichbleibendem Querschnitt A und der Länge l ist der Widerstand erfahrungsgemäß der Länge proportional und dem Querschnitt umgekehrt proportional:

$$R \sim \frac{l}{A} .$$

Den Proportionalitätsfaktor auf der rechten Seite nennt man den **spezifischen Widerstand** ϱ des Leitermaterials, seinen Kehrwert bezeichnet man als die **elektrische Leitfähigkeit** γ . Damit hat man

$$R = \varrho \frac{l}{A} = \frac{l}{\gamma A} . \quad (1.11)$$

Für die Leitfähigkeit werden vielfach auch die Bezeichnungen σ und κ verwendet. Wir halten uns jedoch hier wie an anderen Stellen an die Empfehlungen von DIN 1304 und ziehen die Bezeichnung γ vor.

Als Einheiten für die Größen ϱ und γ lassen sich mit (1.11) herleiten:

$$\begin{aligned} [\varrho] &= \frac{[R][A]}{[l]} = \frac{\Omega \text{ m}^2}{\text{m}} = \Omega \text{ m} \\ [\gamma] &= \frac{[l]}{[R][A]} = \frac{\text{m}}{\Omega \text{ m}^2} = \frac{\text{S}}{\text{m}} . \end{aligned}$$

Beispiel 1.2: »Widerstandsnormal«.

Ein Quecksilberfaden von 1 mm^2 Querschnitt soll als »Widerstandsnormal« dienen und den Widerstand 1Ω haben. Wie lang muss der Faden sein, wenn der spezifische Widerstand von Quecksilber $0,958 \Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$ beträgt?

Lösung:

Gl. (1.11) wird nach l aufgelöst:

$$l = \frac{RA}{\varrho} = \frac{1 \Omega \cdot 1 \text{ mm}^2}{0,958 \Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}} \approx 1,04 \text{ m} .$$

1.7 Energie und Leistung

Wird eine elektrische Ladung von einem Punkt zu einem anderen bewegt und besteht zwischen diesen beiden Punkten die zeitlich konstante Spannung U , so ist diese Bewegung nach Gl. (1.7) mit einem Energieumsatz von

$$W = Q U \quad (1.12)$$

verbunden. Ist nun die Spannung nicht mehr zeitlich konstant, so dass während eines ersten Zeitintervalls Δt_1 die von der Ladung ΔQ_1 durchlaufene Spannung U_1 beträgt und im nächsten Zeitintervall Δt_2 dann zu der Ladung ΔQ_2 die Spannung U_2 gehört usw., so erhält man an Stelle von Gl. (1.12):

$$W = U_1 \Delta Q_1 + U_2 \Delta Q_2 + \dots \quad (1.13)$$

Durchläuft z. B. die Ladung ΔQ_1 die Spannung U_1 in der Zeit Δt_1 , so kann man für ΔQ_1 wegen Gl. (1.5) auch schreiben:

$$\Delta Q_1 = I_1 \Delta t_1 .$$

Entsprechendes gilt für die anderen Summanden in Gl. (1.13), so dass folgt:

$$W = U_1 I_1 \Delta t_1 + U_2 I_2 \Delta t_2 + \dots = \sum_k U_k I_k \Delta t_k .$$

Hierbei werden U_k und I_k während der Zeitintervalle Δt_k als konstant angesehen (daher große Buchstaben). Geht man zum Grenzwert der Summe ($\Delta t_k \rightarrow 0$) und damit zum Integral über, so erhält man die zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 umgesetzte elektrische Energie:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} u(t) i(t) dt . \quad (1.14)$$

Für den Sonderfall eines reinen Gleichstroms (u und i sind konstant) wird die im Zeitraum t umgesetzte Energie

$$W = U I t . \quad (1.15)$$

Eine mögliche Einheit der Energie ergibt sich wegen Gl. (1.15) zu

$$[W] = [U][I][t] = 1 \text{ V} \cdot 1 \text{ A} \cdot 1 \text{ s} = 1 \text{ Ws} = 1 \text{ J} ,$$

womit wir uns in Übereinstimmung mit Abschnitt 1.1.3 befinden. Für viele Zwecke, z. B. bei einem Energieversorger, ist die Maßeinheit Ws zu klein, dann verwendet man oft die Einheit Kilowattstunde:

$$1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Ws} .$$

Gelegentlich braucht man die folgenden Umrechnungen:

$$1 \text{ Ws} = 0,102 \text{ kp m} = 0,239 \text{ cal} ,$$

$$1 \text{ kWh} = 860 \text{ kcal} .$$

In Abschnitt 1.1.3 wurde die Leistung als Arbeit pro Zeit definiert, also

$$P = \frac{W}{t} ,$$

womit nach Gl. (1.15) für Gleichstrom herauskommt

$$P = U I . \quad (1.16)$$

Ist die Leistung eine zeitlich veränderliche Größe, so wird der zeitliche Mittelwert der im Zeitraum Δt umgesetzten Leistung

$$P_m = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

und der Augenblickswert

$$p(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} . \quad (1.17)$$

2 Berechnung von Strömen und Spannungen in elektrischen Netzen

2.1 Die Grundgesetze

2.1.1 Das Ohm'sche Gesetz

Wenn auf die Leitungselektronen des Widerstandes R eine Kraft wirkt (Bild 2.1), so fließt im Widerstand ein Strom I . Dieser Strom wächst, wenn U größer wird; der Strom wächst aber auch, wenn der Wert R des Widerstandes abnimmt. Speziell in einem metallischen Leiter von konstanter Form und Größe ist der Strom der Spannung **streng proportional** (Bild 2.2), solange auch die **Temperatur konstant** gehalten wird:

$$I \sim U. \quad (2.1)$$

Diese Proportionalität zwischen Spannung und Strom in metallischen Leitern nennt man **Ohm'sches Gesetz**. Normalerweise schreibt man statt der Proportionalität eine Gleichung mit dem Proportionalitätsfaktor R , dem sogenannten ohmschen Widerstand:

$$U = R I \quad (\text{mit } R = \text{konst}). \quad (2.2a)$$

Umgeformt ergibt dies

$$I = \frac{U}{R} \quad (2.2b)$$

oder

$$R = \frac{U}{I}. \quad (2.2c)$$

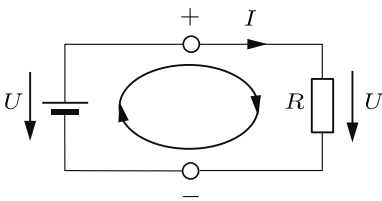


Abb. 2.1: Stromkreis aus Batterie und Widerstand.

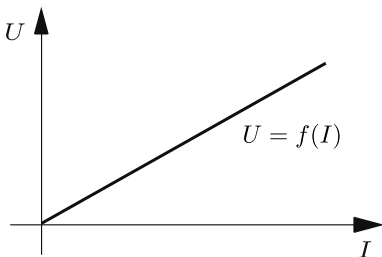


Abb. 2.2: Kennlinie $U = f(I)$ eines ohmschen Widerstandes.

Das Bild 2.2 stellt dar, dass der Zusammenhang zwischen U und I eine Gerade ist. Man spricht deshalb auch davon, dass U und I **linear** zusammenhängen (Linearität der Strom-Spannungs-Kennlinie $U = f(I)$). Den Kehrwert des Widerstandes R nennt man **Leitwert**

$$G = \frac{1}{R} . \quad (2.3)$$

Damit wird aus den Gln. (2.2)

$$U = \frac{I}{G} ; \quad I = GU ; \quad G = \frac{I}{U} . \quad (2.4a, b, c)$$

Bemerkenswert ist, dass in der deutschen Sprache zwischen dem Bauelement »Widerstand« und seinem Widerstandswert nicht unterschieden wird. (Im Englischen heißt das Bauelement **resistor** und sein Widerstandswert **resistance** .)

Anmerkung *Temperaturabhängigkeit von Widerständen: In einem metallischen Leiter gilt das Ohm'sche Gesetz $I \sim U$ nur, solange die Temperatur konstant ist. Der Widerstand solcher Leiter ist also stromunabhängig, aber temperaturabhängig; er nimmt im Allgemeinen mit der Temperatur zu. Bei reinen Metallen (außer den ferromagnetischen) ist der spezifische Widerstand ϱ oberhalb einer bestimmten Temperatur eine nahezu lineare Funktion der Temperatur ϑ (Bild 2.3).*

Völlig anders als reine Metalle verhalten sich bestimmte Legierungen, bei denen der spezifische Widerstand innerhalb eines größeren Temperatur-Bereiches sogar abnimmt, wenn die Temperatur zunimmt. So nimmt beispielsweise der spezifische Widerstand von Manganin (86 % Cu, 12 % Mn, 2 % Ni) im Bereich von 35 °C bis 200 °C mit steigender Temperatur geringfügig ab (Bild 2.3).

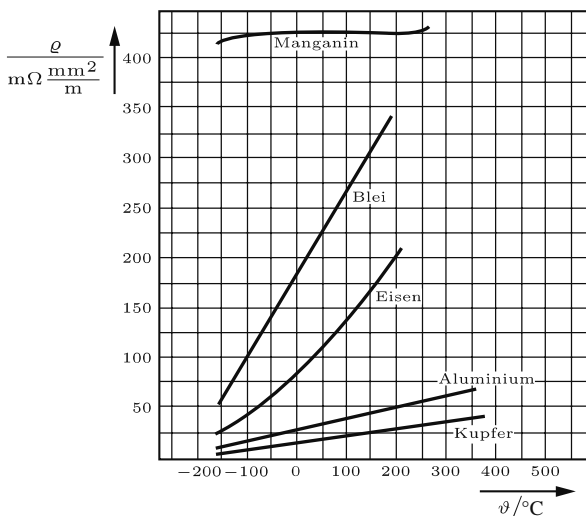


Abb. 2.3: Temperaturabhängigkeit spezifischer Widerstände.

Bei Temperaturen um $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ beschreibt man das Verhalten von Widerstands-Materialien gern durch folgende Annäherung der Funktion $R = f(\vartheta)$ an eine Geraden-Gleichung:

$$R \approx R_{20} \left[1 + \alpha_{20} \left(\frac{\vartheta}{^\circ\text{C}} - 20 \right) \text{K} \right] .$$

Hierbei ist R_{20} der Wert, den ein ohmscher Widerstand bei 20°C hat. α_{20} ist der material-spezifische **Temperaturbeiwert** (Temperatur-Koeffizient); er ist ein Maß für die relative Zunahme des Widerstandswertes bei Erhöhung der Temperatur um 1 K. Je weniger linear die Funktion $R = f(\vartheta)$ in Wirklichkeit ist, desto kleiner ist der Temperaturbereich, in dem die Annäherung durch eine Gerade brauchbar ist. Eine genauere Beschreibung der Temperatur-Abhängigkeit erreicht man folgendermaßen :

$$R = R_{20} \left[1 + \alpha_{20} \left(\frac{\vartheta}{^\circ\text{C}} - 20 \right) \text{K} + \beta_{20} \left(\frac{\vartheta}{^\circ\text{C}} - 20 \right)^2 \text{K}^2 + \dots \right] .$$

Hierbei treten zum linearen Term mit dem Koeffizienten α der quadratische Term mit dem Koeffizienten β und eventuell noch mehr Terme hinzu.

In den folgenden Tabellen sind die spezifischen Widerstände ϱ , die spezifischen Leitwerte $\gamma = 1/\varrho$ und die Temperaturbeiwerte α und β für einige wichtige Stoffe zusammengestellt (alle Werte gelten für $\vartheta = 20^\circ\text{C}$).

In diesen Tabellen gibt ϱ_{20} den spezifischen Widerstand bei 20°C an. Da ϱ_{20} in $\Omega\text{mm}^2/\text{m}$ angegeben wird, geben die Zahlenwerte in der ersten Spalte der Tabellen unmittelbar an, wie viel Ohm ein Widerstand (Draht) von 1 m Länge und 1mm^2 Querschnitt hat. So ist z. B. der Widerstandswert eines Konstantandrahtes von 1 m Länge und 1mm^2 Querschnitt: $R = 0,5\ \Omega$.

Tab. 2.1: Spezifischer Widerstand, Leitwert und Temperaturbeiwerte von Reinetallen.

Material	$\frac{\varrho_{20}}{\Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}}$	$\frac{\gamma_{20}}{\text{S} \frac{\text{m}}{\text{mm}^2}}$	$\frac{\alpha_{20}}{1/\text{K}}$	$\frac{\beta}{1/\text{K}^2}$
Aluminium	0,027	37	$4,3 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$
Blei	0,21	4,75	$3,9 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{-6}$
Eisen	0,1	10	$6,5 \cdot 10^{-3}$	$6,0 \cdot 10^{-6}$
Gold	0,022	45,2	$3,8 \cdot 10^{-3}$	$0,5 \cdot 10^{-6}$
Kupfer	0,017	58	$4,3 \cdot 10^{-3}$	$0,6 \cdot 10^{-6}$
Nickel	0,07	14,3	$6,0 \cdot 10^{-3}$	$9,0 \cdot 10^{-6}$
Platin	0,098	10,5	$3,5 \cdot 10^{-3}$	$0,6 \cdot 10^{-6}$
Quecksilber	0,96	1,04	$0,8 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$
Silber	0,016	62,5	$3,6 \cdot 10^{-3}$	$0,7 \cdot 10^{-6}$
Zinn	0,12	8,33	$4,3 \cdot 10^{-3}$	$6,0 \cdot 10^{-6}$

Tab. 2.2: Spezifischer Widerstand, Leitwert und Temperaturbeiwert von Legierungen.

Material	$\frac{\varrho_{20}}{\Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}}$	$\frac{\gamma_{20}}{\text{S} \frac{\text{m}}{\text{mm}^2}}$	$\frac{\alpha_{20}}{1/\text{K}}$
Konstantan (55 % Cu, 44 % Ni, 1 % Mn)	0,5	2	$-4,0 \cdot 10^{-5}$
Manganin (86 % Cu, 2 % Ni, 12 % Mn)	0,43	2,27	$\pm 10^{-5}$
Messing	0,066	15	$1,5 \cdot 10^{-3}$

Tab. 2.3: Spezifischer Widerstand, Leitwert und Temperaturbeiwert von Kohle und Halbleitern.

Material	$\frac{\varrho_{20}}{\Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}}$	$\frac{\gamma_{20}}{\text{S} \frac{\text{m}}{\text{mm}^2}}$	$\frac{\alpha_{20}}{1/\text{K}}$
Germanium (rein)	$4,6 \cdot 10^5$	$2,2 \cdot 10^{-6}$	
Graphit	8,7	0,115	
Kohle (Bürstenkohle)	40 ... 100	0,01 ... 0,025	$-2 \cdot 10^{-4} \dots -8 \cdot 10^{-4}$
Silizium (rein)	$2,3 \cdot 10^9$	$0,43 \cdot 10^{-9}$	

Tab. 2.4: Spezifischer Widerstand und Leitwert von Elektrolyten.

Material	$\frac{\varrho_{20}}{\Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}}$	$\frac{\gamma_{20}}{\text{S} \frac{\text{m}}{\text{mm}^2}}$
Kochsalzlösung (10 %)	$79 \cdot 10^3$	$12,7 \cdot 10^{-6}$
Schwefelsäure (10 %)	$25 \cdot 10^3$	$40,0 \cdot 10^{-6}$
Kupfersulfatlösung (10 %)	$300 \cdot 10^3$	$3,3 \cdot 10^{-6}$
Wasser (rein)	$2,5 \cdot 10^{11}$	$4,0 \cdot 10^{-10}$
Wasser (destilliert)	$4 \cdot 10^{10}$	$2,5 \cdot 10^{-9}$
Meerwasser	$300 \cdot 10^3$	$3,3 \cdot 10^{-6}$

Tab. 2.5: Spezifischer Widerstand von Isolierstoffen.

Material	$\frac{\varrho_{20}}{\Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}}$
Bernstein	10^{22}
Glas	$10^{17} \dots 10^{18}$
Glimmer	$10^{19} \dots 10^{21}$
Holz (trocken)	$10^{15} \dots 10^{19}$
Papier	$10^{21} \dots 10^{22}$
Porzellan	bis $5 \cdot 10^{18}$
Transformator-Öl	$10^{16} \dots 10^{19}$

Beispiel 2.1: Temperaturabhängigkeit eines Widerstandes.

Eine Spule aus Kupferdraht hat bei 15 °C den Widerstandswert 20 Ω und betriebswarm den Wert 28 Ω. Welche Temperatur hat die betriebswarme Spule?

Lösung:

Zwischen dem Wert $R_k = 20\ \Omega$ des Spulenwiderstandes bei $\vartheta_k = 15\ ^\circ\text{C}$ und dem Wert R_{20} (Widerstand bei 20 °C) gilt die Beziehung

$$R_k = R_{20} \left[1 + \alpha_{20} \left(\frac{\vartheta_k}{^\circ\text{C}} - 20 \right) \text{K} \right],$$

und für $R_w = 28\ \Omega$ gilt

$$R_w = R_{20} \left[1 + \alpha_{20} \left(\frac{\vartheta_w}{^\circ\text{C}} - 20 \right) \text{K} \right].$$

In diesen beiden Gleichungen sind R_{20} und ϑ_w unbekannt. R_{20} kann sofort eliminiert werden:

$$\frac{R_k}{R_w} = \frac{1 + \alpha_{20} \left(\frac{\vartheta_k}{^\circ\text{C}} - 20 \right) \text{K}}{1 + \alpha_{20} \left(\frac{\vartheta_w}{^\circ\text{C}} - 20 \right) \text{K}}.$$

Daraus folgt mit $\alpha_{20} \approx 4 \cdot 10^{-3} / \text{K}$

$$\begin{aligned} \vartheta_w &= 20\ ^\circ\text{C} + \frac{R_w}{R_k} \left[\frac{^\circ\text{C}/\text{K}}{\alpha_{20}} + \vartheta_k - 20\ ^\circ\text{C} \right] - \frac{^\circ\text{C}/\text{K}}{\alpha_{20}} \\ \vartheta_w &= 20\ ^\circ\text{C} + 1,4 \left[\frac{10^3}{4} \ ^\circ\text{C} - 5\ ^\circ\text{C} \right] - \frac{10^3}{4} \ ^\circ\text{C} = \underline{\underline{113\ ^\circ\text{C}}}. \end{aligned}$$

2.1.2 Die Knotengleichung (1. Kirchhoff'sche Gleichung)

Wenn mehrere Leitungen (Zweige) in einem Knoten leitend miteinander verbunden sind (Bild 2.4a), ist die Summe der zufließenden Ströme (I_1, I_2, I_3) gleich der Summe der abfließenden Ströme (I_4, I_5):

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_4 + I_5.$$

Allgemein gilt

$$\sum I_{\text{zu}} = \sum I_{\text{ab}}.$$

In einem Knoten können keine Ladungen und damit auch keine Ströme verschwinden oder entstehen (ähnlich wie beim Zusammenfließen mehrerer Ströme einer inkompressiblen Flüssigkeit).

Wenn man für jeden Strom den Zählpfeil vom Knoten weg orientiert, also alle Ströme als abfließend definiert, so muss die Summe aller dieser Ströme Null werden; es ist daher (Bild 2.4b):

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 0.$$