

Eugene Hecht
Optik
De Gruyter Studium

Weitere empfehlenswerte Titel



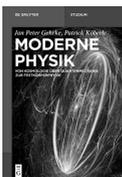
Experimentalphysik

Band 4: Optik, Strahlung

Wolfgang Pfeiler 2016

ISBN 978-3-11-044558-9, e-ISBN (PDF) 978-3-11-044570-1,

e-ISBN (EPUB) 978-3-11-044602-9



Moderne Physik

Von Kosmologie über Quantenmechanik zur Festkörperphysik

Jan Peter Gehrke, Patrick Köberle, 2017

ISBN 978-3-11-052622-6, e-ISBN (PDF) 978-3-11-052623-3,

e-ISBN (EPUB) 978-3-11-052633-2



Festkörperphysik

Siegfried Hunklinger, 2017

ISBN 978-3-11-056774-8, e-ISBN (PDF) 978-3-11-056775-5,

e-ISBN (EPUB) 978-3-11-056827-1



Moderne Thermodynamik

Band 1: Physikalische Systeme und ihre Beschreibung

Christoph Strunk, 2017

ISBN 978-3-11-056018-3, e-ISBN (PDF) 978-3-11-056022-0,

e-ISBN (EPUB) 978-3-11-056034-3



Moderne Thermodynamik

Band 2: Quantenstatistik aus experimenteller Sicht

Christoph Strunk, 2017

ISBN 978-3-11-056050-3, e-ISBN (PDF) 978-3-11-056032-9,

e-ISBN (EPUB) 978-3-11-056035-0

Eugene Hecht

Optik



7. Auflage

Übersetzt von Karen Lippert

DE GRUYTER

Autor

Prof. Dr. Eugene Hecht
hecht@adelphi.edu

Übersetzer

Dr. Karen Lippert
karen.lippert@arcor.de

Die amerikanische Originalausgabe erschien 2016 unter dem Titel „Optics – 5th Edition“ bei Pearson Education, Inc., USA.

Copyright 2016 Pearson Education, Inc., USA
Published by arrangement with Pearson Education, Inc., USA – All rights reserved

ISBN 978-3-11-052664-6
e-ISBN (PDF) 978-3-11-052665-3
e-ISBN (EPUB) 978-3-11-052670-7

Library of Congress Cataloging-in-Publication Data

A CIP catalog record for this book has been applied for at the Library of Congress.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

© 2018 Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston
Coverabbildung: Parker, David/Science Photo Library
Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck
© Gedruckt auf säurefreiem Papier
Printed in Germany

www.degruyter.com

Vorwort

Mit der Erstellung der vorliegenden fünften Auflage wurden drei übergreifende Ziele verfolgt: die Verbesserung didaktischer Details, die Modernisierung der Darstellungsweise (zum Beispiel gibt es nun etwas mehr über Photonen, Zeiger und Fourieroptik) und die Aktualisierung des Inhalts, vor allem im Hinblick auf neue Technologien (zum Beispiel gibt es nun einen Abschnitt zu Atominterferometern und einen über Metamaterialien). Die Optik ist ein sich schnell entwickelndes Gebiet, und die vorliegende Auflage soll dem Leser einen aktuellen Einstieg ermöglichen, wobei der Fokus auf der Didaktik liegt.

Dabei gab es mehrere Zielsetzungen: (1) Die zentrale Rolle der atomaren Streuprozesse bei fast allen Aspekten der Optik sollte klar herausgearbeitet werden. (2) Die grundlegend quantenmechanische Natur des Lichts (tatsächlich von allen Quantenteilchen) sollte von Beginn an eingeführt werden, auch wenn das Buch methodisch eher traditionell angelegt ist. Daher wird der Leser neben den vertrauten Photonenbildern auch Elektronen- und Neutronenbeugungsmuster finden. (3) Die Fouriertheorie als ein sehr mächtiges Werkzeug, das in der modernen Analyse so weit verbreitet ist, sollte bereits sehr früh eingeführt werden. Aus diesem Grund werden die Konzepte der Raumfrequenz und der räumlichen Periode bereits in Kapitel 2 vorgestellt und grafisch veranschaulicht.

Auf Wunsch von Studierenden habe ich über den gesamten Text mehr als einhundert vollständig ausgearbeitete Beispiele eingestreut, in denen die im jeweiligen Abschnitt behandelten Prinzipien angewendet werden. Außerdem sind zweihundert neue Aufgaben (ohne Lösungen) in den entsprechenden Übungsabschnitten am Ende der Kapitel hinzugekommen. Lehrende können auf Anfrage eine vollständige Zusammenstellung sämtlicher Aufgabenlösungen erhalten. Nach dem Motto „Ein Bild sagt mehr als tausend Worte“ wurde der Text durch zahlreiche neue Diagramme und Fotos ergänzt. Die didaktische Stärke des Buches liegt darin, dass der behandelte Stoff tatsächlich erklärt wird. Diesem Ansatz bleibt auch die vorliegende Auflage treu.

Seit Veröffentlichung der vierten Auflage habe ich jedes Jahr Optik unterrichtet, und dabei sind mir einige Stellen im Buch aufgefallen, die zum Vorteil der Studierenden noch klarer formuliert werden könnten. Aus diesem Grund werden in der vorliegenden Überarbeitung Dutzende kleine Fallstricke angesprochen und bei den Herleitungen

viele Zwischenschritte mit angegeben. Alle Zeichnungen wurden eingehend auf Korrektheit geprüft. Einige wurden geändert, um die Verständlichkeit zu verbessern.

Substanzielle Erweiterungen wurden an folgenden Stellen vorgenommen: In Kapitel 2 (*Die Wellenbewegung*) wurde ein Abschnitt über *verdrilltes Licht* hinzugefügt. In Kapitel 3 (*Theorie des Elektromagnetismus, Photonen und Licht*) gibt es nun eine elementare Behandlung der Differentialoperatoren Divergenz und Rotation, eine zusätzliche Diskussion über Photonen sowie Unterabschnitte zu *gequetschtem Licht* und zur *negativer Brechung*. Kapitel 4 (*Die Ausbreitung des Lichts*) wurde ergänzt um Kommentare zur optischen Dichte und zu elektromagnetischen Randbedingungen, desweiteren um eine ausführlichere Darstellung abklingender Wellen sowie um Unterabschnitte zur *Brechung von Licht an Punktquellen*, zur *negativen Brechung*, zur *Strahlkonstruktion nach Huygens* und zur *Goos-Hänchen-Verschiebung*. Kapitel 5 (*Geometrische Optik*) enthält zahlreiche neue Zeichnungen, die das Verhalten von Linsen und Spiegeln illustrieren, außerdem zusätzliche Anmerkungen zur Faseroptik sowie Unterabschnitte zu *virtuellen Objekten*, zur *Strahlverfolgung in der Brennebene* und zu *mikrostrukturierten Fasern*. In Kapitel 6, in dem die Behandlung der geometrischen Optik weitergeführt wird, gibt es eine neue Darstellung der einfachen Strahlverfolgung durch eine dicke Linse. Kapitel 7 (*Überlagerung von Wellen*) bietet einen neuen Abschnitt über *negative Phasengeschwindigkeiten*, eine deutlich erweiterte Behandlung der Fourieranalyse mit vielen Diagrammen, die – ohne Rechnung – zeigen, wie die Methode funktioniert, und eine Diskussion des optischen Frequenzkamms (dessen Erfinder 2005 mit dem Nobelpreis ausgezeichnet wurden). In Kapitel 8 (*Polarisation*) wird dargelegt, wie die mächtige Zeigermethode angewendet werden kann, um polarisiertes Licht zu analysieren. Außerdem gibt es hier eine neue Diskussion über das Transmissionsverhalten von Polarisatoren und einen Unterabschnitt über *Wellenfronten und Strahlen in einachsigen Kristallen*. Kapitel 9 (*Interferenz*) beginnt mit einer kurzen Diskussion über Beugung und Kohärenz im Zusammenhang mit dem Experiment von Young. Es gibt mehrere neue Unterabschnitte, darunter *Nahfeld / Fernfeld*, *Interferenz von Teilchen* und *Messung der Kohärenzlänge*. Kapitel 10 (*Beugung*) enthält einen neuen Unterabschnitt *Zeiger und die Amplitude des elektrischen Feldes*. Dutzende von neu hinzugekommenen Diagrammen und Fotos illustrieren eine Vielzahl von Beugungsphänomenen, Kapitel 11 (*Fourieroptik*) umfasst nun einen Unterabschnitt *Zweidimensionale Bilder*, in dem durch eine bemerkenswerte Serie von Illustrationen gezeigt wird, wie durch Kombination von räumlichen Frequenzkomponenten Bilder erzeugt werden. Kapitel 12 (*Grundlagen der Kohärenztheorie*) enthält mehrere neue Unterabschnitte von einführendem Charakter, darunter *Muster und Kohärenz* sowie *Beugung und verschwindende Streifen*. Dazu gibt es eine Reihe von zusätzlichen, sehr instruktiven Abbildungen. In Kapitel 13 (*Moderne Optik*) wurde die Behandlung von Lasern erweitert und aktualisiert; es wurden Tabellen und Abbildungen ergänzt, ebenso einige neue Unterabschnitte, darunter *Optoelektronische Bildrekonstruktion*.

Die vorliegende fünfte Auflage bietet in erheblichem Umfang neues Material, das besonders für Lehrende auf dem Gebiet der Optik von Interesse sein dürfte. Beispielsweise können wir nun, zusätzlich zu ebenen, sphärischen und zylindrischen Wellen, auch schraubenförmige Wellen erzeugen, für die die Fläche konstanter Phase während der Propagation durch den Raum eine Wendelfläche bildet (Abschnitt 2.11).

Abgesehen von der Mathematik bereitet es Studierenden oft Schwierigkeiten zu verstehen, was die Operatoren *Divergenz* und *Rotation* physikalisch bedeuten. Diesem Problem wurde in der vorliegenden Überarbeitung Rechnung getragen, indem in sehr einfacher Weise erläutert wird, was die Operatoren eigentlich machen (Abschnitt 3.1.5).

Das Phänomen der *negativen Brechung* ist Gegenstand aktueller Forschung. Eine kurze Einführung in die physikalischen Grundlagen, die dabei eine Rolle spielen, ist nun in Kapitel 4 zu finden.

Huygens entwarf eine Methode zur Konstruktion gebrochener Strahlen, die schon für sich genommen ihren Reiz hat, doch sie bietet zudem einen bequemen Zugang, um die Brechung in anisotropen Kristallen zu verstehen.

Wenn man die Wechselwirkung von elektromagnetischen Wellen mit Materie untersucht (beispielsweise bei der Herleitung der fresnelschen Gleichungen), dann macht man Gebrauch von den *Randbedingungen*. Da manche der Studierenden vielleicht noch nicht sehr vertraut mit der Theorie des Elektromagnetismus sind, enthält die fünfte Auflage eine kurze Diskussion der physikalischen Ursprünge dieser Bedingungen (Abschnitt 4.6.1).

Das Buch bietet nun auch eine kurze Einführung der *Goos-Hänchen-Verschiebung*, die bei der Totalreflexion auftritt (Abschnitt 4.7.1). Dies ist ein sehr interessantes Stück Physik, das in einführenden Abhandlungen häufig übergangen wird.

Die *Strahlverfolgung in der Brennebene* ist eine unkomplizierte Methode, um den Strahlenverlauf in komplizierten Linsensystemen zu konstruieren. Die Behandlung dieser einfachen, aber mächtigen Methoden wurde ebenfalls neu in die vorliegende Auflage aufgenommen; sie funktioniert gut im Seminarraum und ist ein paar Minuten der Vorlesungszeit wert.

Durch mehrere neue Diagramme wird nun klarer, was es mit virtuellen Bildern und *virtuellen Objekten* auf sich hat, die von Linsensystemen erzeugt werden.

Der weit verbreitete Einsatz von Glasfasern hat eine aktualisierte Darstellung bestimmter Aspekte dieses Themas notwendig gemacht. Zu dem neu aufgenommenen Stoff gehören unter anderem ein Abschnitt zu *mikrostrukturierten Fasern* sowie allgemeinere Ausführungen zu *photonischen Kristallen*.

Ergänzend zu der normalerweise etwas formellastigen und leider „trockenen“ mathematischen Behandlung der Fouriertheorie enthält das Buch nun eine faszinierende

grafische Analyse, durch die deutlich wird, was die verschiedenen Integrale bewirken. Dieser Stoff eignet sich hervorragend für den Grundkurs.

Um die Addition von harmonischen Wellen für die Studierenden zu visualisieren, wird ausgiebig von Zeigern Gebrauch gemacht. Die Methode ist sehr nützlich bei der Behandlung von orthogonalen Feldkomponenten, welche die verschiedenen Polarisationszustände konstituieren. Darüber hinaus liefert die Methode ein hübsches Werkzeug, mit dem man das Verhalten von Wellenplatten analysieren kann.

Das Experiment von Young und allgemein die Doppelstrahlinterferenz spielen sowohl in der klassischen Optik als auch in der Quantenoptik eine zentrale Rolle. Allerdings ist die übliche Einführung in diese Thematik allzu vereinfachend, da sie über die Limitierungen durch die Phänomene Beugung und Kohärenz hinweg geht. Bei der Analyse wird nun bereits frühzeitig auf diese Komplikationen eingegangen (Abschnitt 9.1.1).

Die traditionelle Behandlung der Interferenz wird erweitert durch die Verwendung von Zeigern, die die Amplitude des elektrischen Feldes grafisch repräsentieren. Damit haben die Studierenden eine alternative Möglichkeit zu visualisieren, was passiert (Abschnitt 9.3.1).

Auch die Beugung lässt sich bequem mittels Zeigern beschreiben. Dieses Verfahren führt auf natürliche Weise zu der klassischen *Vibrationskurve*, die an Feynmans Zugang zur Quantenmechanik über Wahrscheinlichkeitsamplituden erinnert. Auf jeden Fall bietet sie den Studierenden eine alternative Möglichkeit, das Phänomen der Beugung zu verstehen, und zwar eine, die nahezu ohne Rechnung auskommt.

Leser, die sich für Fourieroptik interessieren, finden nun eine wunderbare Serie von Abbildungen, die zeigt, wie aus sinusförmigen räumlichen Frequenzbeiträgen ein erkennbares zweidimensionales Bild generiert werden kann – in unserem Fall ein Porträt des jungen Einstein. Diese außergewöhnliche Sequenz von Bildern sollte unbedingt diskutiert werden, sogar in einem Einführungskurs, in dem der Stoff aus Kapitel 11 ansonsten wahrscheinlich noch zu schwierig ist.

Um die weiterführende Behandlung der Kohärenz in Abbildung 12 für eine breitere Leserschaft zugänglicher zu machen, enthält die vorliegende Auflage eine Einführung, die fast ohne Mathematik auskommt und die die Grundlage für die traditionelle Darstellung schafft.

Schließlich wurde der Stoff über Laser erweitert (wenngleich er auch jetzt nur einführenden Charakter hat) und stärker mit dem aktuellen Stand der Laserphysik in Einklang gebracht.

In den seit der vierten Auflage vergangenen Jahren haben mir Dutzende Kollegen überall auf der Welt Kommentare, Hinweise, Vorschläge, Artikel und Fotos für diese neue Auflage zukommen lassen – ihnen allen gilt mein aufrichtiger Dank. Besonders hervorheben möchte ich Professor Chris Mack (University of Texas, Austin) und Dr. Andreas Karpf von der Adelphi University. Zu großem Dank verpflichtet bin ich auch meinen vielen Studenten, an denen ich die neuen Texte ausgetestet habe. Sie

haben zudem die neuen Aufgaben durchgearbeitet (nicht selten in Klausuren) und mir bei der Aufnahme von einigen der neuen Fotos geholfen. In Bezug auf Letzteres danke ich besonders Tanya Spellman, George Harrison und Irina Ostrazhnyuk für die Stunden, die sie mit der Kamera in der Hand verbracht haben.

Die Unterstützung durch das Team von Addison Wesley weiß ich in höchstem Maße zu schätzen. Mein besonderer Dank gilt der Programmleiterin Katie Conley, die den Entstehungsprozess der vorliegenden fünften Auflage mit viel Geschick und Aufmerksamkeit von Anfang bis Ende geleitet hat. Das Lektorat besorgte gewissenhaft und geduldig Joanne Boehme – sie hat einen großartigen Job gemacht. Jim Atherton von Atherton Customs zeichnete Hunderte von komplexen Diagrammen. Die Ergebnisse sind wirklich außergewöhnlich und sprechen für sich. Die vorliegende Auflage wurde unter der stets präsenten Führung von John Orr von Orr Book Services entwickelt. Sein ausdauernder Einsatz für die Herstellung eines korrekten und schönen Buches verdient besonderes Lob. In einer Zeit, in der das traditionelle Verlagswesen einen radikalen Wandel durchlebt, hielt er kompromisslos an den höchsten Standards fest, wofür ich sehr dankbar bin. Es war wirklich ein Vergnügen und ein Privileg mit einem so hochprofessionellen Fachmann zusammenzuarbeiten.

Schließlich danke ich meiner lieben Freundin, außergewöhnlichen Korrekturleserin und Ehefrau Carolyn Eisen Hecht, die geduldig die Mühen einer weiteren Auflage eines weiteren Buches ertrug. Ihr Humor, ihre Nachsichtigkeit, ihre emotionale Großzügigkeit und ihr guter Rat waren sehr wichtig.

Wer mir Kommentare und Hinweise zur vorliegenden Auflage oder auch Vorschläge für eine künftige Auflage zukommen lassen möchte, erreicht mich an der Adelphi University, Physics Department, Garden City, NY, 11530 oder besser noch unter genehecht@aol.com.

Inhalt

Vorwort	V
1 Ein kurzer Ausflug in die Geschichte	1
1.1 Vorbemerkung	1
1.2 Die Ursprünge	1
1.3 Vom siebzehnten Jahrhundert an	4
1.4 Das neunzehnte Jahrhundert	8
1.5 Das zwanzigste Jahrhundert	13
2 Die Wellenbewegung	19
2.1 Eindimensionale Wellen	20
2.1.1 Die Differenzialgleichung einer Welle	24
2.2 Harmonische Wellen	28
2.3 Phase und Phasengeschwindigkeit	35
2.4 Das Superpositionsprinzip	40
2.5 Die komplexe Darstellung	43
2.6 Zeiger und die Addition von Wellen	46
2.7 Ebene Wellen	49
2.8 Die dreidimensionale Wellengleichung	57
2.9 Kugelwellen	59
2.10 Zylinderwellen	63
2.11 Verdrilltes Licht	65
3 Theorie des Elektromagnetismus, Photonen und Licht	77
3.1 Die Grundgleichungen der Theorie des Elektromagnetismus	78
3.1.1 Das faradaysche Induktionsgesetz	79
3.1.2 Der gaußsche Satz für das elektrische Feld	84
3.1.3 Der gaußsche Satz für das magnetische Feld	87
3.1.4 Das ampèresche Verkettungsgesetz	87
3.1.5 Die maxwellschen Gleichungen	92
3.2 Elektromagnetische Wellen	97
3.2.1 Transversalwellen	100
3.3 Energie und Impuls	104
3.3.1 Der Poynting-Vektor	104

3.3.2	Die Bestrahlungsstärke	109
3.3.3	Photonen	113
3.3.4	Strahlungsdruck und Impuls	124
3.4	Strahlung	128
3.4.1	Linear beschleunigte Ladungen	130
3.4.2	Synchrotronstrahlung	132
3.4.3	Elektrische Dipolstrahlung	135
3.4.4	Die Emission von Licht durch Atome	138
3.5	Licht in Materie	142
3.5.1	Dispersion	146
3.6	Das elektromagnetische Spektrum	158
3.6.1	Radiowellen	158
3.6.2	Mikrowellen	160
3.6.3	Infrarotstrahlung	162
3.6.4	Sichtbares Licht	164
3.6.5	Ultraviolettes Licht	167
3.6.6	Röntgenstrahlung	168
3.6.7	Gammastrahlung	170
3.7	Quantenfeldtheorie	170
4	Die Ausbreitung des Lichts	183
4.1	Einführung	183
4.2	Rayleigh-Streuung	184
4.2.1	Streuung und Interferenz	187
4.2.2	Die Fortpflanzung des Lichts in dichten Medien	189
4.2.3	Transmission und Brechungsindex	194
4.3	Reflexion	199
4.3.1	Das Reflexionsgesetz	201
4.4	Brechung	206
4.4.1	Das Brechungsgesetz	207
4.4.2	Das huygenssche Prinzip	219
4.4.3	Lichtstrahlen und Normalkongruenz	222
4.5	Das fermatsche Prinzip	224
4.6	Der elektromagnetische Ansatz	233
4.6.1	Wellen an einer Grenzfläche	233
4.6.2	Die fresnelschen Gleichungen	236
4.6.3	Interpretation der fresnelschen Gleichungen	241
4.7	Innere Totalreflexion	255
4.7.1	Die abklingende Welle	258
4.8	Optische Eigenschaften von Metallen	265
4.9	Alltägliche Aspekte der Wechselwirkung zwischen Licht und Materie	271
4.10	Die stokesche Behandlung der Reflexion und Brechung	281

4.11	Photonen, Wellen und Wahrscheinlichkeit	283
4.11.1	Quantenelektrodynamik	286
4.11.2	Photonen und die Gesetze der Reflexion und Brechung	289
5	Geometrische Optik	305
5.1	Einführung	305
5.2	Linsen	307
5.2.1	Asphärische Flächen	308
5.2.2	Brechung an Kugelflächen	312
5.2.3	Dünne Linsen	318
5.3	Blenden	351
5.3.1	Apertur- und Feldblenden	351
5.3.2	Eintritts- und Austrittspupillen	352
5.3.3	Das Öffnungsverhältnis und die Blendenzahl	358
5.4	Spiegel	361
5.4.1	Ebene Spiegel	362
5.4.2	Asphärische Spiegel	367
5.4.3	Sphärische Spiegel	369
5.5	Prismen	378
5.5.1	Dispersionsprismen	379
5.5.2	Reflexionsprismen	383
5.6	Faseroptik	387
5.6.1	Technologie der Glasfaserübertragung	394
5.7	Optische Systeme	409
5.7.1	Das Auge	409
5.7.2	Die Brille	415
5.7.3	Die Lupe	425
5.7.4	Okulare	429
5.7.5	Das Mikroskop	431
5.7.6	Die Kamera	434
5.7.7	Das Fernrohr	438
5.8	Wellenfrontumformung	453
5.8.1	Adaptive Optik	454
5.8.2	Phasenkonjugation	459
5.9	Gravitationslinsen	462
6	Geometrische Optik: Weiterführende Themen	483
6.1	Dicke Linsen und Linsensysteme	483
6.2	Strahlenverlaufsberechnung	490
6.2.1	Matrizenmethoden	492
6.3	Aberrationen	507
6.3.1	Monochromatische Aberrationen	508
6.3.2	Chromatische Aberrationen	530

6.4	Gradient-Index-Systeme	540
6.5	Abschließende Bemerkungen	545
7	Überlagerung von Wellen	551
7.1	Die Addition von Wellen gleicher Frequenz	552
7.1.1	Die algebraische Methode	552
7.1.2	Die komplexe Methode	559
7.1.3	Zeigeraddition	560
7.1.4	Stehende Wellen	563
7.2	Die Addition von Wellen verschiedener Frequenz	572
7.2.1	Schwebungen	573
7.2.2	Gruppengeschwindigkeit	576
7.3	Anharmonische periodische Wellen	586
7.3.1	Fourierreihen	586
7.4	Nichtperiodische Wellen	605
7.4.1	Fourier-Integrale	608
7.4.2	Impulse und Wellenpakete	612
7.4.3	Die Kohärenzlänge	617
7.4.4	Diskrete Fourier-Transformation	622
8	Polarisation	645
8.1	Die Natur des polarisierten Lichts	645
8.1.1	Lineare Polarisation	646
8.1.2	Zirkulare Polarisation	650
8.1.3	Elliptische Polarisation	653
8.1.4	Natürliches Licht	656
8.1.5	Der Drehimpuls und das Photonenbild	657
8.2	Polarisatoren	659
8.2.1	Das malussche Gesetz	660
8.3	Dichroismus	662
8.3.1	Der Drahtgitterpolarisator	662
8.3.2	Dichroitische Kristalle	664
8.3.3	Das Polaroidfilter	665
8.4	Doppelbrechung	670
8.4.1	Kalkspat	672
8.4.2	Doppelbrechende Kristalle	679
8.4.3	Doppelbrechende Polarisatoren	685
8.5	Streuung und Polarisation	688
8.5.1	Polarisation durch Streuung	689
8.6	Polarisation durch Reflexion	691
8.6.1	Eine Anwendung der fresnelschen Gleichungen	695
8.7	Verzögerungsplättchen	698

8.7.1	Phasenplättchen und Rhomboeder	699
8.7.2	Kompensatoren	710
8.8	Zirkularpolarisatoren	711
8.9	Polarisation von polychromatischem Licht	713
8.9.1	Bandbreite und Kohärenzzeit einer polychromatischen Welle	713
8.9.2	Interferenzfarben	715
8.10	Optische Aktivität	716
8.10.1	Ein Modell	721
8.10.2	Optisch aktive Biomoleküle	723
8.11	Erzwungene optische Effekte – Optische Modulatoren	724
8.11.1	Photoelastizität	724
8.11.2	Der Faraday-Effekt	726
8.11.3	Der Kerr-Effekt und der Pockels-Effekt	729
8.12	Flüssigkristalle	733
8.13	Eine mathematische Beschreibung der Polarisation	737
8.13.1	Die stokeschen Parameter	738
8.13.2	Die jonesschen Vektoren	741
8.13.3	Die jonesschen und die Mueller-Matrizen	744
9	Interferenz	761
9.1	Allgemeine Betrachtungen	762
9.1.1	Nahfeld / Fernfeld	768
9.2	Interferenzbedingungen	769
9.2.1	Zeitliche und räumliche Kohärenz	770
9.2.2	Die Fresnel-Arago-Gesetze	773
9.3	Interferometer mit Wellenfrontaufspaltung	774
9.3.1	Das youngsche Doppelspaltexperiment	775
9.4	Interferometer mit Amplitudenaufspaltung	796
9.4.1	Dielektrische Schichten – Zweistrahlerinterferenz	796
9.4.2	Spiegel-Interferometer	813
9.5	Typen und Lokalisierung von Interferenzmustern	825
9.6	Mehrstrahlerinterferenz	828
9.6.1	Das Fabry-Perot-Interferometer	836
9.7	Anwendungen von Ein- und Mehrschichtfilmen	844
9.7.1	Mathematische Behandlung	845
9.7.2	Reflexmindernde Schichten	849
9.7.3	Periodische Mehrschichtsysteme	851
9.8	Anwendungen der Interferometrie	854
9.8.1	Streulichtinterferenz	854
9.8.2	Das Twyman-Green-Interferometer	858
9.8.3	Das rotierende Sagnac-Interferometer	859
9.8.4	Radarinterferometrie	861

10	Beugung	875
10.1	Einleitende Betrachtungen	875
10.1.1	Undurchsichtige Hindernisse	879
10.1.2	Fraunhofer- und Fresnelbeugung	882
10.1.3	Mehrere kohärente Oszillatoren	884
10.2	Fraunhoferbeugung	889
10.2.1	Beugung am Einzelspalt	889
10.2.2	Beugung am Doppelspalt	905
10.2.3	Beugung an vielen Spalten	911
10.2.4	Beugung an einer rechteckigen Öffnung	926
10.2.5	Beugung an einer kreisrunden Öffnung	931
10.2.6	Das Auflösungsvermögen abbildender Systeme	939
10.2.7	Der Besselstrahl nullter Ordnung	944
10.2.8	Das Beugungsgitter	947
10.3	Fresnelbeugung	962
10.3.1	Die freie Ausbreitung einer Kugelwelle	962
10.3.2	Die Vibrationskurve	968
10.3.3	Kreisförmige Öffnungen	970
10.3.4	Kreisförmige Hindernisse	980
10.3.5	Die fresnelsche Zonenplatte	983
10.3.6	Die fresnelschen Integrale und die Beugung am rechteckigen Loch	988
10.3.7	Die Cornu-Spirale	993
10.3.8	Fresnelbeugung am Spalt	999
10.3.9	Beugung am halbumendlichen, undurchsichtigen Schirm	1004
10.3.10	Beugung an einem schmalen Hindernis	1007
10.3.11	Das Prinzip von Babinet	1009
10.4	Die skalare Beugungstheorie von Kirchhoff	1011
10.5	Beugungswellen	1016
11	Fourier-Optik	1031
11.1	Einleitung	1031
11.2	Fourier-Transformierte	1032
11.2.1	Eindimensionale Transformierte	1032
11.2.2	Zweidimensionale Transformierte	1037
11.2.3	Die diracsche Delta-Funktion	1043
11.3	Optische Anwendungen	1051
11.3.1	Zweidimensionale Bilder	1051
11.3.2	Lineare Systeme	1057
11.3.3	Das Faltungsintegral	1062
11.3.4	Fourier-Methoden in der Beugungstheorie	1079
11.3.5	Spektren und Korrelation	1087
11.3.6	Übertragungsfunktionen	1101

12	Grundlagen der Kohärenztheorie	1119
12.1	Einführung	1119
12.2	Muster und Kohärenz	1123
12.2.1	Beugung und verschwindende Streifen	1129
12.3	Die Sichtbarkeit	1131
12.4	Die wechselseitige Kohärenzfunktion und der Kohärenzgrad	1140
12.4.1	Zeitliche und räumliche Kohärenz	1145
12.5	Kohärenz und Stellarinterferometrie	1148
12.5.1	Das Michelson-Stellarinterferometer	1148
12.5.2	Korrelationsinterferometrie	1153
13	Moderne Optik	1165
13.1	Laser und Laserstrahlung	1165
13.1.1	Strahlungsenergie und Materie im Gleichgewicht	1166
13.1.2	Induzierte Emission	1174
13.1.3	Der Laser	1182
13.1.4	Das Wunder Laserlicht	1208
13.2	Das Bild als räumliche Verteilung optischer Information	1216
13.2.1	Raumfrequenzen	1216
13.2.2	Die abbesche Bildentstehungstheorie	1221
13.2.3	Räumliche Filterung	1224
13.2.4	Phasenkontrast	1231
13.2.5	Die Dunkelfeld- und die Schlierenmethode	1237
13.3	Holografie	1240
13.3.1	Verfahren	1240
13.3.2	Entwicklungen und Anwendungen	1255
13.4	Nichtlineare Optik	1264
13.4.1	Optische Gleichrichtung	1266
13.4.2	Erzeugung von Harmonischen	1266
13.4.3	Frequenzmischung	1270
13.4.4	Selbstfokussierung von Licht	1271
	Anhang 1: Theorie des Elektromagnetismus	1283
	Anhang 2: Kirchhoffsche Beugungstheorie	1289
	Lösungen ausgewählter Aufgaben	1291
	Literatur	1337
	Sachverzeichnis	1345

1 Ein kurzer Ausflug in die Geschichte

1.1 Vorbemerkung

Thema dieses Buches ist eine formale Behandlung eines Großteils der Optik, wobei der Schwerpunkt auf modernen Aspekten liegen wird. Dieses umfangreiche Wissen hat sich im Laufe von dreitausend Jahren Menschheitsgeschichte angesammelt. Bevor wir uns damit auseinandersetzen wollen, was man heutzutage unter Optik versteht, wollen wir kurz den Weg verfolgen, der uns bis hierher gebracht hat – zumindest, um dieses Wissensgebiet einmal im Kontext zu sehen.

1.2 Die Ursprünge

Die optische Technologie lässt sich bis in die Antike zurückverfolgen. In *Exodus* 38.8 (ca. 1200 v. Chr.) lesen wir, wie Bezaleel bei der Vorbereitung von Lade und Tempel die „Spiegel der Frauen“ zu einem bronzenen Gefäß (einem Zeremonienbecken) umgoss. Die frühen Spiegel bestanden aus poliertem Kupfer und Bronze, später aus Spiegelmetall, einer zinnreichen Kupferlegierung. Einzelne Stücke aus dem alten Ägypten sind erhalten geblieben, unter anderem ein Spiegel in hervorragendem Zustand, den man zusammen mit anderen Geräten im Bereich der Arbeiterlager nahe der Pyramide von Sesostris dem Zweiten (ca. 1900 v. Chr.) im Niltal ausgrub. Die griechischen Philosophen Pythagoras, Demokrit, Empedokles, Plato, Aristoteles und andere entwickelten mehrere Theorien der Natur des Lichts; die Vorstellungen des Aristoteles finden sich in ähnlicher Weise in der Äther-Theorie des neunzehnten Jahrhunderts wieder. Dass Licht sich geradlinig ausbreitet, war ebenso bekannt wie das Reflexionsgesetz, das Euklid 300 v. Chr. in seinem Buch *Katoptrik* beschrieb. Hero von Alexandria versuchte, beide Phänomene damit zu erklären, dass Licht stets den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten nimmt. Eine Anspielung auf das Brennglas – eine Sammellinse, mit der man Feuer entzündete – findet sich in der Komödie *Die Wolken* von Aristophanes (424 v. Chr.). In Platons *Staat* wird erwähnt, dass Gegenstände, die man in Wasser taucht, an der Wasseroberfläche scheinbar abknicken. Kleomedes und später Claudius Ptolemäus (50 bzw. 130 n. Chr.) aus Alexandria untersuchten die Brechung; von Letzterem sind uns Tabellen mit ziemlich genauen Messwerten für Einfallswinkel- und

Brechungswinkel in verschiedenen Medien überliefert. Aus den Aufzeichnungen des Geschichtsschreibers Plinius (23 bis 79 n. Chr.) weiß man, dass auch die Römer das Brennglas kannten. In römischen Ruinen fand man Glas- und Kristallkugeln, in Pompeji eine plankonvexe Linse. Der römische Philosoph Seneca (3 v. Chr. bis 65 n. Chr.) berichtete, dass man eine wassergefüllte Glaskugel zur Vergrößerung benutzen kann. Wahrscheinlich haben römische Künstler solche Vergrößerungsgläser verwendet, um sich die Ausführung filigraner Arbeiten zu erleichtern.

Nach dem Niedergang des Weströmischen Reiches (475 n. Chr.), der ungefähr dem Beginn des frühen Mittelalters entspricht, waren in Europa für längere Zeit kaum wissenschaftliche Erfolge zu verzeichnen. Die von griechisch-römisch-christlicher Kultur dominierten Mittelmeerländer fielen rasch unter die Herrschaft Allahs. So verschob sich das Zentrum der Gelehrsamkeit in die arabische Welt.

Die Brechung wurde von Abu Sad al-Ala Ibn Sahl (940–1000) untersucht, der zur Zeit des Abbasidenkalifats in Bagdad wirkte und 984 die Schrift *Über Brennspiegel und -gläser* verfasste. Diese Schrift enthält eine akkurate Darstellung der Brechung – die erste überhaupt. Ibn Sahl beschrieb sowohl parabolische als auch elliptische Brennspiegel und analysierte hyperbolische plankonvexe sowie hyperbolische bikonvexe Linsen. Der Gelehrte Abu Ali al Hasan ibn Haytham (965–1039), in der westlichen Welt auch unter dem Namen Alhazen bekannt, war ein äußerst produktiver Autor, der Werke zu einer Vielzahl von Themen verfasste, darunter 14 Bücher allein zur Optik. Er arbeitete am Reflexionsgesetz, indem er den Einfallswinkel und den Reflexionswinkel in eine gemeinsame Ebene senkrecht zur Grenzfläche legte; er beschäftigte sich mit Kugel- und Parabolspiegeln und beschrieb das menschliche Auge sehr ausführlich. Fermat vorwegnehmend schlug Alhazen vor, dass sich Licht in einem Medium entlang des schnellsten Weges ausbreitet.

Gegen Ende des dreizehnten Jahrhunderts begann Europa langsam, aus seiner intellektuellen Erstarrung zu erwachen. Alhazens Werk wurde ins Lateinische übersetzt und hatte einen bedeutenden Einfluss auf die Schriften von Robert Grosseteste, Bischof von Lincoln (1175–1253), sowie auf die Arbeiten des polnischen Mathematikers Vitello (Witelo). Diese beiden Gelehrten erweckten die Optik als Wissenschaft wieder zum Leben. Ihre Arbeiten waren auch dem Franziskaner Roger Bacon (1215–1294) bekannt, der vielfach als der erste Wissenschaftler nach heutigem Verständnis betrachtet wird. Bacon kam wahrscheinlich als Erster auf die Idee, Linsen zur Korrektur des Sehvermögens zu verwenden, und deutete sogar die Möglichkeit an, mehrere Linsen zu einem Teleskop zu kombinieren. Er hatte auch eine Vorstellung davon, wie Lichtstrahlen eine Linse durchqueren. Nach Bacons Tod schief die Optik wieder ein. Bereits im vierzehnten Jahrhundert findet man auf Gemälden europäischer Künstler allerdings Mönche mit Augengläsern. Inzwischen hatten Alchimisten auch ein flüssiges Zinnamalgam (eine Legierung aus Zinn und Quecksilber) entdeckt, das sich auf die Rückseite von Glasplatten streichen ließ: Der moderne Spiegel war geboren.



Frühe Darstellung einer Marktszene in Europa. Der Mann links verkauft Brillen. (INTERFOTO/Alamy)

Leonardo da Vinci (1452–1519) beschrieb die „Camera obscura“, die durch die Arbeiten von Giovanni Battista Della Porta (1535–1615) auch der Allgemeinheit zugänglich gemacht wurde. Della Porta erläuterte 1589 in seiner Schrift *Magia naturalis* Mehrfachspiegel und Kombinationen von Sammell- und Zerstreuungslinsen. In diese erste Periode der Optik fallen, wie man sieht, nur relativ wenige wichtige Ereignisse. Der Anfang war gemacht – der Fortschritt allerdings ließ auf sich warten. Erst später, im siebzehnten Jahrhundert, sollte ein Sturm von technischen Umsetzungen und neuen aufregenden Entdeckungen über die Optik hereinbrechen.



Giovanni Battista Della Porta (1535–1615). (US National Library of Medicine)

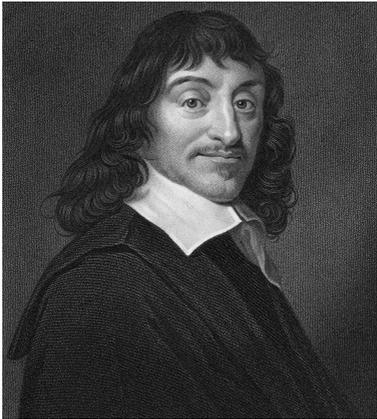
1.3 Vom siebzehnten Jahrhundert an

Wer das Linsenfernrohr tatsächlich erfand, wissen wir nicht. Sicher ist lediglich, dass Hans Lippershey (1587–1619), ein holländischer Brillenhersteller, am 2. Oktober 1608 ein solches Gerät zum Patent anmeldete, wie man in Aufzeichnungen des Haager Archivs nachlesen kann. Galileo Galilei (1564–1642) hörte in Padua von dieser Erfindung und baute das Instrument innerhalb weniger Monate mit selbst geschliffenen Linsen nach. Fast genau zur selben Zeit wurde das Mikroskop erfunden, möglicherweise von dem Holländer Zacharias Janssen (1588–1632). Francisco Fontana (1580–1656) aus Neapel ersetzte das konkave Okular des Mikroskops durch eine konvexe Linse. In ähnlicher Weise wandelte Johannes Kepler (1571–1630) das Teleskop ab. 1611 veröffentlichte Kepler seine *Dioptrik*. Er hatte die innere Totalreflexion entdeckt und kam damit zu einer für kleine Winkel gültigen Näherung des Brechungsgesetzes: In diesem Fall sind Einfallswinkel und Brechungswinkel einander proportional. Kepler entwickelte die Optik erster Ordnung für Systeme mit dünnen Linsen und beschrieb in seinem Buch die genaue Funktionsweise sowohl des Keplerschen (mit einer Sammellinse als Okular) als auch des Galileischen (mit einer Zerstreuungslinse als Okular) Fernrohrs. Willebrord Snell (1591–1626), Professor in Leyden, fand 1621 empirisch das lange gesuchte *Brechungsgesetz* – dies war zweifellos eine der Sternstunden der Optik. Mit der Erkenntnis, wie Lichtstrahlen umgelenkt werden, wenn sie die Grenze zwischen zwei Medien durchqueren, öffnete Snell mit einem Schlag die Tür zur modernen angewandten Optik. René Descartes (1596–1650) formulierte das Brechungsgesetz erstmals in der uns heute vertrauten Form mit Sinustermen. Bei der Ableitung des Gesetzes betrachtete Descartes das Licht als einen Druck, der sich in einem elastischen Medium fortpflanzt. In *La Dioptrique* (1637) schrieb er:

...erinnere man sich an die Natur, die ich dem Licht zuschrieb, als ich sagte, dass Licht nichts anderes sei als eine bestimmte Bewegung oder Wirkung in einer sehr feinen Substanz, die die Poren aller anderen Gegenstände ausfüllt...



Johannes Kepler (1571–1630). (Nickolae/Fotolia)



René Descartes (1596–1650); Gemälde von Frans Hals. (Georgios Kollidas/Shutterstock)

Descartes betrachtete das Universum demnach als gefüllten Raum. Pierre de Fermat (1601–1665) bezweifelte dies und leitete, ausgehend von seinem eigenen *Prinzip der kürzesten Zeit* (1657), das Brechungsgesetz neu her.

Das Phänomen der Beugung, also der Ablenkung des Lichts von der geradlinigen Ausbreitung beim Passieren eines Hindernisses, wurde erstmals von Professor Francesco Maria Grimaldi (1618–1663) am Jesuitenkolleg in Bologna beschrieben. Grimaldi beobachtete Lichtstreifen innerhalb des Schattens eines Stabes, welcher von einer kleinen Lichtquelle angestrahlt wurde. Robert Hooke (1635–1703), Verwalter der Experimente bei der Royal Society, bemerkte später ebenfalls Beugungseffekte. Hooke untersuchte als Erster die farbigen Interferenzmuster, die durch dünne Schichten erzeugt werden (*Micrographia*, 1665). Er schlug vor, Licht als schnelle, sich mit großer Geschwindigkeit fortbewegende Schwingung des Mediums aufzufassen. Seine These, dass „jeder Stoß oder jede Schwingung des Leuchtkörpers eine Sphäre“ erzeuge, bildet den Beginn der Wellentheorie des Lichts. Im Todesjahr von Galilei wurde Isaac Newton geboren. Newtons Credo war, sich stets auf direkte Beobachtungen zu stützen und



Sir Isaac Newton (1642–1727). (Georgios Kollidas/Fotolia)

spekulative Hypothesen zu vermeiden. Den unterschiedlichen Auffassungen von der Natur des Lichts stand er daher lange Zeit unentschieden gegenüber: War Licht, wie manche behaupteten, korpuskular – also ein Strom von Teilchen? Oder war es eine Welle in einem alles durchdringenden Medium, dem Äther? Im Alter von 23 Jahren begann Newton mit seinen heute berühmten Dispersionsversuchen.

Ich besorgte mir ein dreieckiges Glasprisma, um damit die berühmten Farbphänomene zu untersuchen.

Newton schloss, dass weißes Licht als Mischung einer ganzen Reihe voneinander unabhängiger Farben zu betrachten sei. Er behauptete, die verschieden gefärbten Lichtpartikel regten den Äther zu charakteristischen Schwingungen an. Seine Theorie bediente demnach sowohl die Wellen- als auch die Teilchenhypothese, allerdings neigte er mit zunehmendem Alter der Letzteren mehr zu. Die Wellentheorie in ihrer damaligen Form lehnte er im Wesentlichen deshalb ab, weil sich die geradlinige Fortpflanzung des Lichts in seinen Augen nicht mithilfe von Wellen erklären ließ, die sich in alle Richtungen ausbreiten.

Nach mehreren unzulänglichen Experimenten gab Newton den Versuch auf, Farbfehler von Linsenfernrohren zu beseitigen. Seine falsche Schlussfolgerung, dass dieses Problem generell nicht zu lösen sei, führte ihn zur Konstruktion von Spiegelfernrohren. Das erste derartige Instrument stellte er 1668 fertig. Es war nur rund 15 Zentimeter lang, und sein Durchmesser betrug nur rund vier Zentimeter, aber es lieferte bereits eine mehr als dreißigfache Vergrößerung.

Zur selben Zeit, als Newton in England die Teilchenhypothese vertrat, erweiterte Christiaan Huygens (1629–1695) auf dem Kontinent die Wellentheorie in beträchtlichem Maße. Im Gegensatz zu Descartes, Hooke und Newton folgerte Huygens richtig, dass sich das Licht beim Eintritt in dichtere Medien verlangsamt. Mithilfe seiner Wellentheorie konnte er das Reflexions- und das Brechungsgesetz herleiten und sogar die



Christiaan Huygens (1629–1695). (Porträt von Christiaan Huygens (ca. 1680), Abraham Bloteling. Stich. Rijksmuseum [Objektnummer RP-P-1896-A-19320])

Doppelbrechung am Calcitkristall (Kalkspat) erklären. Im Zuge seiner Untersuchungen am Kalkspat entdeckte er auch die *Polarisation*.

Da es zwei verschiedene Arten der Brechung gibt, nehme ich an, dass auch zwei verschiedene Arten von Lichtwellen existieren...

Licht war also entweder als Teilchenstrom oder als rasche Wellenbewegung ätherischer Materie zu verstehen. Einigkeit bestand über seine extrem hohe Fortpflanzungsgeschwindigkeit. In der Tat glaubten viele, das Licht bewege sich unendlich schnell – eine Vorstellung, die mindestens bis auf Aristoteles zurückgeht. Dass die Lichtgeschwindigkeit endlich ist, fand der Däne Ole Christensen Römer (1644–1710) heraus. Die Umlaufbahn von Io, dem nächsten Mond des Jupiter, liegt nahezu in der Ebene der Umlaufbahn des Planeten selbst um die Sonne. Römer untersuchte sorgfältig die Finsternisse von Io während der Wanderung des Mondes durch den Schatten hinter Jupiter. 1676 sagte er voraus, dass Io am 9. November mehr als 10 Minuten später aus dem Schatten treten werde, als man es auf der Grundlage seiner jährlich gemittelten Bewegung erwartete. Io verhielt sich exakt Römers Zeitplan entsprechend – ein Phänomen, das der Forscher korrekt mit der endlichen Geschwindigkeit des Lichts erklärte. Römer konnte berechnen, dass das Licht ungefähr 22 Minuten brauchte, um die Sonnenumlaufbahn der Erde zu durchlaufen (rund 300 Millionen Kilometer). Die Arbeiten überzeugten unter anderem Huygens und Newton, die unabhängig voneinander den Durchmesser der genannten Umlaufbahn berechneten und so zu einer Lichtgeschwindigkeit von $c = 2,3 \times 10^8$ bzw. $2,4 \times 10^8$ m/s gelangten.¹

Das Gewicht Newtons drohte die Anhänger der Wellentheorie im achtzehnten Jahrhundert fast zu erdrücken. Trotzdem bekannte sich der prominente Mathematiker Leonhard Euler (1707–1783), wenn auch unbeachtet, zu dieser Hypothese. Euler meinte, die von Linsen erzeugten unerwünschten Farbeffekte träten im Auge deshalb nicht auf, weil die unterschiedlichen vorhandenen Medien die Dispersion unterdrücken (was eine irriige Annahme ist). Er schlug vor, diesen Effekt zur Konstruktion achromatischer Linsen auszunutzen. Samuel Klingentjerna (1698–1765), Professor in Uppsala, vollzog Newtons Experimente zum Achromatismus nach und stellte fest, dass sie fehlerhaft waren. Klingentjerna stand mit dem Londoner Optiker John Dollond (1706–1761) im Kontakt, der zu ähnlichen Ergebnissen gelangte. Dollond setzte 1758 schließlich ein Element aus Kronglas und ein zweites aus Flintglas zu einer achromatischen Linse zusammen – eine Erfindung, die nebenbei bemerkt von dem Amateurforscher Chester Moor Hall (1703–1771) aus Essex bereits vorweggenommen worden war.

¹ A. Wróblewski, *Am. J. Phys.* **53** (7), Juli 1985, S. 620.

1.4 Das neunzehnte Jahrhundert

Dr. Thomas Young (1773–1829), einer der wahrhaft großen Geister seiner Zeit, erweckte die Wellentheorie des Lichts zu neuem Leben. 1801, 1802 und 1803 vertrat er diese Hypothese vor der Royal Society und erweiterte sie um ein neues grundlegendes Konzept, das so genannte *Interferenzprinzip*:

Wenn zwei Wellenbewegungen verschiedenen Ursprungs dieselbe oder fast dieselbe Richtung aufweisen, so ergibt sich die gemeinsame Wirkung als Summe der Bewegungen jeder einzelnen Welle.

Young konnte die Farbstreifen dünner Schichten erklären und die Wellenlängen verschiedener Farben aus Newtons Messwerten berechnen. Obwohl er mehrfach darauf hinwies, dass Newtons Erkenntnisse die eigentliche Grundlage seiner Arbeit bildeten, wurde Young heftig angegriffen. Eine wahrscheinlich von Lord Brougham verfasste Artikelreihe im *Edinburgh Review* sprach Youngs Schriften jeglichen Wert ab.



Thomas Young (1773–1829). (Smithsonian Institution)

Eine überzeugende Wiederbelebung der Wellentheorie verdanken wir Augustin Jean Fresnel (1788–1827) aus Broglie in der Normandie, der von den rund 13 Jahre zurückliegenden Bemühungen Youngs keine Kenntnis hatte. Fresnel vereinigte die Ideen von Huygens mit dem Interferenzprinzip. Er beschrieb die Fortpflanzung einer Primärwelle als Folge der Überlagerung und Interferenz sekundärer Kugelwellen, wodurch sich die Primärwelle jeden Augenblick neu bildet. In Fresnels Worten:

Die Schwingungen einer Lichtwelle in allen ihren Punkten sind als Summe der Elementarbewegungen aufzufassen, die in demselben Moment durch die Wirkung aller einzelnen Teile der ungehinderten Welle in den jeweils vorhergehenden Positionen zu ihr übertragen werden.



Augustin Jean Fresnel (1788–1827). (US National Library of Medicine)

Man stellte sich die Lichtwellen, analog zu den Schallwellen in der Luft, longitudinal vor. Fresnel konnte die Beugungsmuster an verschiedenen Hindernissen und Öffnungen berechnen und die geradlinige Ausbreitung des Lichts in homogenen, isotropen Medien zufrieden stellend erklären. Damit entkräftete er Newtons wichtigsten Einwand gegen die Wellentheorie. Als Fresnel schließlich erfuhr, dass Young das Interferenzprinzip vor ihm gefunden hatte, war er zwar etwas enttäuscht, schrieb dem Kollegen aber trotzdem, dass ihn dessen gute Gesellschaft tröste. Die beiden großen Männer wurden zu Verbündeten.

Huygens kannte, wie auch Newton, das Phänomen der Polarisation in Kalkspat-Kristallen. Letzterer schrieb in seinem Werk *Opticks*:

Jeder Lichtstrahl hat daher zwei entgegengesetzte Seiten...

Erst 1808 entdeckte Étienne Louis Malus (1775–1812), dass diese „Zweiseitigkeit“ des Lichts nicht durch eine besondere Eigenschaft kristalliner Medien hervorgerufen wird, sondern auch bei der Reflexion in Erscheinung tritt. Fresnel und Dominique François Arago (1786–1853) wollten mit einer Versuchsreihe den Einfluss der Polarisation auf die Interferenz aufklären, scheiterten aber an ihrem longitudinalen Wellenbild – ein herber Rückschlag für die Wellentheorie. Über etliche Jahre hinweg kämpften Young, Arago und Fresnel mit diesem Problem, bis Young schließlich auf die Idee kam, die Schwingungen des Äthers als *transversal*, wie die Welle auf einer Saite, anzusehen. Die Zweiseitigkeit des Lichts ließ sich dann einfach als Ausdruck zweier zueinander orthogonaler, zur Ausbreitungsrichtung des Strahls transversaler Schwingungen des Äthers erklären. Fresnel entwickelte diesen Ansatz zu einer mechanistischen Beschreibung der Ätherschwingungen weiter, die ihn zu den heute bekannten Formeln für die Amplituden des reflektierten und des transmittierten Licht-

strahls führte. 1825 waren der Teilchentheorie des Lichts nur noch wenige beharrliche Anhänger geblieben.

Die erste erdgebundene Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit wurde 1849 von Armand Hippolyte Fizeau (1819–1896) vorgenommen. Fizeau stellte seine Vorrichtung, bestehend aus einem rotierenden Zahnrad und einem 8633 m davon entfernten Spiegel, im Vorstadtgebiet von Paris (zwischen Suresnes und Montmartre) auf. Ein Lichtpuls, der durch eine Öffnung des Zahnkranzes gelangte, wurde von dem Spiegel zurückgeworfen. Durch Abstimmung der Drehgeschwindigkeit des Rades erreicht Fizeau, dass der zurückkehrende Impuls entweder durch eine Lücke des Zahnrades sichtbar war oder durch einen Zahn verdeckt wurde. Aus den Ergebnissen berechnete Fizeau die Lichtgeschwindigkeit zu 315 300 km/s. Ein Mitarbeiter bei der Berechnung der Lichtgeschwindigkeit war Fizeaus Kollege Jean Bernard Léon Foucault (1819–1868). 1834 hatte Charles Wheatstone (1802–1875) eine Anordnung mit rotierendem Spiegel konstruiert, um die Dauer eines elektrischen Funkens zu messen. Arago schlug vor, damit auch die Lichtgeschwindigkeit in dichten Medien zu bestimmen; er konnte das Experiment jedoch nie ausführen. Foucault setzte diese Arbeiten fort, die ihm später auch das Material zu seiner Dissertation lieferten. Am 6. Mai 1850 berichtete er der Akademie der Wissenschaften, dass die Lichtgeschwindigkeit in Wasser *geringer* sei als in Luft. Dieses Ergebnis stand in direktem Widerspruch zur Newtonschen Formulierung der Teilchentheorie und war ein harter Brocken für deren wenige verbliebene Anhänger.

Parallel zu diesen Entwicklungen auf dem Gebiet der Optik machte auch die Untersuchung von Elektrizität und Magnetismus Fortschritte. 1845 stellte Michael Faraday (1791–1867), der Meister der Experimentalphysik, die Verbindung zwischen Licht und Elektromagnetismus fest. Er folgerte dies aus dem experimentellen Befund, dass sich die Polarisation eines Lichtstrahls durch ein dem Medium anliegendes starkes Magnetfeld ändern lässt. James Clerk Maxwell (1831–1879) fasste das empirische Wissen auf diesem Gebiet brillant zu einem einzigen Satz mathematischer Gleichungen zusammen und erweiterte es sogar. Ausgehend von dieser knappen, wunderbar symmetrischen Synthese konnte er auf ausschließlich theoretischem Weg zeigen, dass sich ein elektromagnetisches Feld als Transversalwelle im Äther fortpflanzen kann.

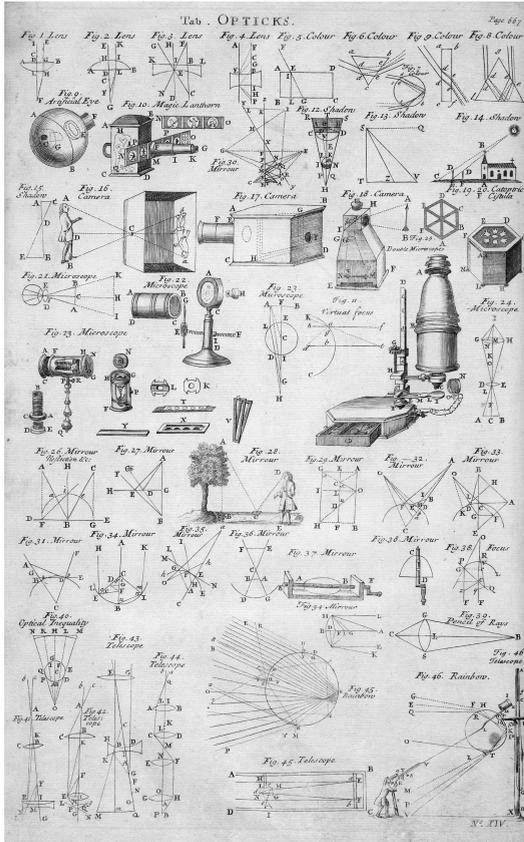
Aus seinen Gleichungen leitete Maxwell einen Ausdruck für die Lichtgeschwindigkeit ab, in den die elektrischen und magnetischen Eigenschaften des Mediums eingehen: $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Durch Einsetzen der empirisch bestimmten Werte für diese Größen erhielt Maxwell einen Zahlenwert für die Lichtgeschwindigkeit, der dem gemessenen Wert entsprach! Die Schlussfolgerung war nun zwingend: *Licht war als „elektromagnetische Störung in Form von Wellen“, die sich durch den Äther bewegen, aufzufassen.* Im Alter von 48 Jahren starb Maxwell – acht Jahre zu früh, um die experimentelle Bestätigung seiner Ideen zu erleben, und viel zu früh für die Physik. Heinrich Rudolf Hertz (1857–1894) belegte die Existenz langer elektromagnetischer Wellen, indem er sie in einer ausführlichen Versuchsreihe erzeugte und nachwies. Seine Resultate veröffentlichte er 1888.



James Clerk Maxwell (1831–1879). (E. H.)

Die Akzeptanz der Wellentheorie schien zu diesem Zeitpunkt die Annahme der Existenz eines alles durchdringenden Mediums, des Lichtäthers, zu bedingen: Wo Wellen waren, musste selbstverständlich auch ein Trägermedium sein! So verwundert es nicht, dass große Anstrengungen unternommen wurden, die physikalische Natur dieses Äthers aufzuklären. Ein solcher Äther hätte jedoch einige recht seltsame Eigenschaften aufweisen müssen: Er hätte so dünn sein müssen, dass sich die Himmelskörper ungehindert darin bewegen können. Gleichzeitig hätte er die extrem hochfrequenten (rund 10^{15} Hz) Schwingungen des Lichts, das sich mit 300 000 km/s fortbewegt, tragen müssen. Dies wäre nur bei ungewöhnlich starken Rückstellkräften einer Äthersubstanz denkbar gewesen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Welle in einem Medium hängt von den Eigenschaften des gestörten Substrats ab, nicht von der Bewegung des Wellenerregers. Grundlegend anders verhält sich ein Teilchenstrom, dessen entscheidender Parameter seine Geschwindigkeit in Bezug auf die Quelle ist.

Bei der Untersuchung der Optik bewegter Körper stören manche Aspekte des Äthers. Davon ausgehend entwickelte sich in aller Stille ein eigener Forschungszweig, der schließlich zum nächsten großen Wendepunkt führte. James Bradley (1693–1792), damals Professor für Astronomie in Oxford, versuchte 1725, die Entfernung eines Sterns durch Beobachtung seiner Orientierung zu zwei verschiedenen Zeitpunkten im Jahr zu bestimmen. Die Position der Erde verändert sich beim Umlauf um die Sonne, wodurch eine lange Grundlinie für die Triangulation des Sterns entsteht. Bradley stellte zu seiner Überraschung fest, dass sich die „Fixsterne“ scheinbar systematisch in Abhängigkeit von der Umlaufrichtung der Erde bewegen und dass ihre Position nicht, wie man angenommen hatte, mit der Stellung der Erde im Raum zusammenhängt. Man nennt diesen Effekt *stellare Aberration*; er ist analog zur bekannten Situation eines fallenden Regentropfens: Ein Tropfen, der bezüglich eines ruhenden Beobachters senkrecht zur Erde fällt, scheint den Einfallswinkel zu ändern, wenn der Beobachter sich bewegt. Das Teilchenmodell des Lichts liefert also eine natürliche Erklärung der stellaren Aberration. Auch die Wellentheorie kann das Phänomen zufriedenstellend erklären, allerdings unter der Annahme, dass der Äther durch den Durchlauf der Erde nicht gestört wird.



Illustrationen zur Optik. Aus *Cyclopaedia or An Universal Dictionary of Arts and Sciences*, ed. Ephraim Chambers, erschienen bei James and John Knapton, London, 1728. (University of Wisconsin Digital Collections)

Nun wurde spekuliert, die Bewegung der Erde durch den Äther führe zu einem beobachtbaren Unterschied zwischen terrestrischen und extraterrestrischen Lichtquellen. Arago reagierte darauf mit einer Versuchsreihe, die keinerlei Hinweise auf Differenzen lieferte: Das Licht verhielt sich so, als ob die Erde bezüglich des Äthers ruhe. Um diesen Befund zu erklären, stellte Fresnel die Hypothese auf, das Licht werde bei der Durchquerung eines transparenten, sich bewegenden Mediums teilweise „mitgenommen“. Experimente von Fizeau, der Lichtstrahlen durch sich bewegende Wassersäulen laufen ließ, und von Sir George Biddell Airy (1801–1892), der die stellare Aberration 1871 mit einem wassergefüllten Fernrohr untersuchte, schienen Fresnels Hypothese zu stützen. Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928) entwickelte unter Voraussetzung eines Äthers im *absoluten Ruhezustand* eine Theorie, die Fresnels Ideen einschloss.

1879 schlug Maxwell in einem Brief an D. P. Todd vom U.S. Nautical Almanac Office eine Anordnung zur Messung der Geschwindigkeit vor, mit der sich das Sonnensystem relativ zum Lichtäther bewegt. Diese Idee wurde von Albert Abraham Michelson (1852–1931), damals Dozent an der Marineakademie, aufgegriffen. Im

bescheidenen Alter von 26 Jahren genoss Michelson bereits einen hervorragenden Ruf durch seine extrem präzise Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit. Einige Jahre später nahm er ein Experiment in Angriff, um den Effekt der Bewegung der Erde durch den Äther zu messen: Da die Lichtgeschwindigkeit im Äther konstant ist und die Erde sich bezüglich des Äthers bewegt (mit einer Bahngeschwindigkeit von 29,8 km/s), sollte die relativ zur Erde gemessene Lichtgeschwindigkeit von der Bewegung des Planeten beeinflusst sein. 1881 veröffentlichte Michelson seine Resultate; er hatte keine Bewegung der Erde bezüglich des Äthers feststellen können, der Äther war stationär. Die Bedeutung dieses überraschenden Ergebnisses wurde etwas geschmälert, als Lorentz auf einen Fehler in der Rechnung hinwies. Einige Jahre später tat sich Michelson, inzwischen Professor für Physik an der Case School of Applied Science in Cleveland (Ohio), mit dem bekannten Chemieprofessor Edward Williams Morley (1838–1923) vom Western Reserve zusammen, um die Experimente mit wesentlich größerer Genauigkeit zu wiederholen. Erstaunlicherweise waren ihre 1887 veröffentlichten Ergebnisse wiederum negativ:

Alles in allem lässt sich mit ziemlicher Sicherheit folgern, dass die Relativbewegung zwischen Erde und Lichtäther, wenn es sie denn gibt, sehr langsam sein muss – langsam genug, um Fresnels Erklärung der Aberration zu widerlegen.

Eine Erklärung der stellaren Aberration innerhalb des Kontextes der Wellentheorie erfordert zwingend die Existenz einer Relativbewegung zwischen Erde und Äther, die durch das Michelson-Morley-Experiment jedoch ausgeschlossen werden konnte. Außerdem verlangen die Resultate von Fizeau und Airy die Annahme einer teilweisen Mitführung von Lichtteilchen durch die Bewegung des Mediums.

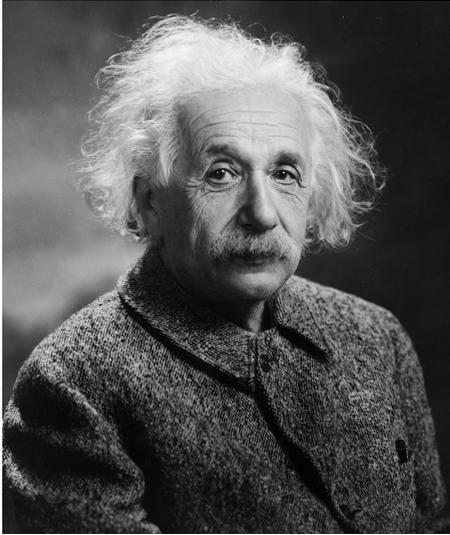
1.5 Das zwanzigste Jahrhundert

Jules Henri Poincaré begriff als Erster die Bedeutung der Tatsache, dass man experimentell keinerlei Effekte einer Bewegung relativ zum Äther fand. 1899 begann er, mit seinen Ansichten an die Öffentlichkeit zu treten, und 1900 sagte er:

Unser Äther – gibt es ihn wirklich? Ich glaube nicht, dass genauere Beobachtungen jemals etwas anderes als *relative* Verschiebungen beweisen können.

1905 stellte Albert Einstein (1879–1955) seine *Spezielle Relativitätstheorie* vor, in der die Ätherhypothese ebenfalls, aber ganz unabhängig von Poincaré, ablehnte.

Die Einführung eines „Lichtäthers“ wird sich als überflüssig erweisen, da die hier entwickelte Theorie keinen „absolut stationären Raum“ erfordert.



Albert Einstein (1879–1955). (Orren Jack Turner, Library of Congress Prints and Photographs Division [LC-USZ62-60242])

Weiter postulierte Einstein:

Im leeren Raum breitet sich Licht stets mit einer bestimmten Geschwindigkeit c aus, die nicht vom Bewegungszustand des strahlenden Körpers abhängt.

Die Experimente von Fizeau, Airy und Michelson/Morley ließen sich nun innerhalb der einsteinschen relativistischen Mechanik² auf ganz natürliche Weise erklären. Die Physiker mussten sich lediglich von der Idee des Äthers verabschieden und zur Kenntnis nehmen, dass sich elektromagnetische Wellen im leeren Raum ausbreiten können – eine Alternative gab es nicht. Man stellte sich das Licht nun als eine sich selbst erhaltende Welle vor, wobei sich der Schwerpunkt des Konzepts vom Äther zum Feld verlagerte. Die elektromagnetische Welle wurde zum eigenständigen Wesen.

Am 19. Oktober 1900 hielt Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858–1947) vor der Deutschen Physikalischen Gesellschaft einen Vortrag, der den Beginn einer anderen bedeutenden Revolution des wissenschaftlichen Denkens einläutete – der *Quantenmechanik*, einer Theorie, die submikroskopische Phänomene erfasst. Aufbauend auf diesen Gedanken brachte Einstein 1905 eine neue Form der Teilchentheorie ins Gespräch, die Licht als einen Strom von Energie„partikeln“ auffasste. Jedem dieser Strahlungsenergie-Quanten oder, wie man sie später benannte, *Photonen*³, schrieb er eine Energie zu, die der Frequenz proportional ist: $E = h\nu$ mit h als planckscher Konstante (Abb. 1.8).

² Siehe z. B. *Special Relativity* von French, Kapitel 5.

³ Der Begriff „Photon“ wurde von G. N. Lewis geprägt: *Nature*, 18. Dezember 1926.

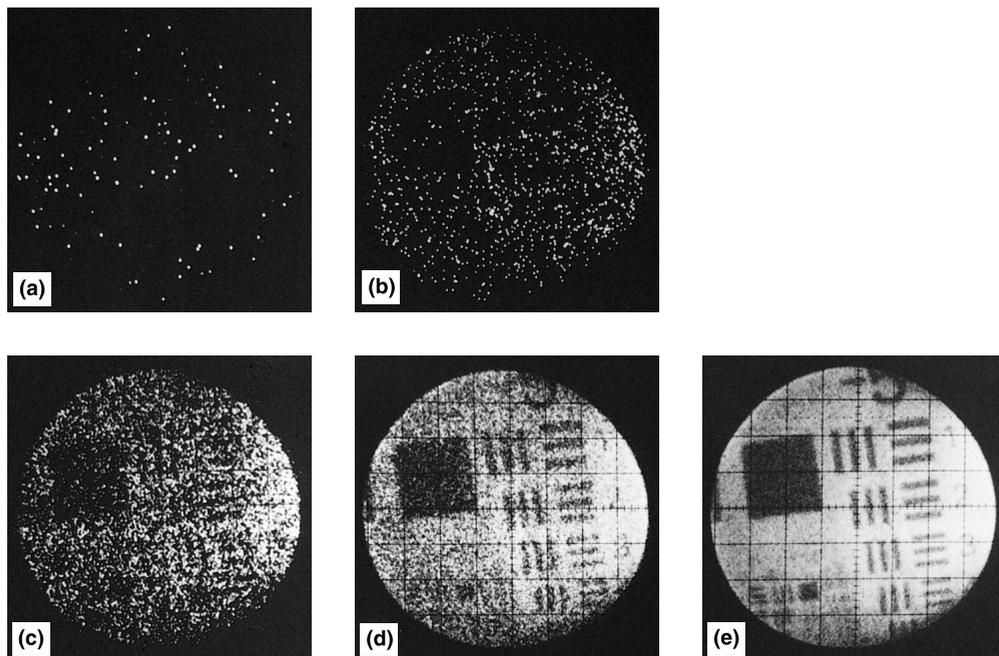


Bild 1.1: Einen überzeugenden Beweis für die Teilchennatur des Lichts liefert diese Bildserie, die mit einem positionsempfindlichen Fotovervielfacher aufgenommen wurde. Das Objekt ist ein Testbild aus hellen und dunklen Streifen; es wurden $8,5 \times 10^3$ Photonen pro Sekunde gezählt. Die Bilder sind nach der Belichtungszeit geordnet: (a) 8 ms, (b) 125 ms, (c) 1 s, (d) 10 s und (e) 100 s. Jeder Punkt steht für ein einzelnes empfangenes Photon. (Mit frdl. Erlaubnis der ITT Corporation, Electro-Optical Products Division, Tube and Sensor Laboratories, Fort Wayne, Indiana, USA.)

Bis zum Ende der 1920er-Jahre hatten Forscher wie Bohr, Born, Heisenberg, Schrödinger, de Broglie, Pauli, Dirac und andere die Quantenmechanik zu einer strukturierten, gut verifizierten Theorie erweitert. Nach und nach wurde klar, dass die Konzepte von Welle und Teilchen, die einander in der makroskopischen Welt so offensichtlich ausschließen, im submikroskopischen Bereich miteinander verschmelzen. Sich atomare Teilchen wie Neutronen und Elektronen wie winzige lokalisierbare Materieklümpchen vorzustellen, reichte künftig nicht mehr aus: Man hatte festgestellt, dass solche Teilchen Interferenz- und Beugungsmuster erzeugen, die denen des Lichts vergleichbar sind. Photonen, Protonen, Elektronen, Neutronen und die ganze Schar der übrigen Elementarteilchen vereinigen daher Eigenschaften von Teilchen und Wellen. Doch herrschte zu diesem Zeitpunkt noch keinesfalls endgültige Klarheit: „Jeder Physiker meint, er wisse, was ein Photon ist“, schrieb Einstein. „Ich habe mein ganzes Leben damit zugebracht, dies herauszufinden, und weiß es doch immer noch nicht.“

Das Konzept der Relativität befreite das Licht vom Äther und zeigte die enge Beziehung zwischen Masse und Energie: $E = mc^2$. Zwei bisher fast als gegensätzlich angesehenen Größen wurden austauschbar. Die Quantenmechanik wies dann nach, dass

einem Partikel⁴ mit dem Impuls p eine Wellenlänge λ zukommt mit $p = h/\lambda$. Das Neutrino, ein neutrales Teilchen mit einer Ruhemasse von vielleicht sogar null, wurde aus theoretischen Erwägungen 1930 von Wolfgang Pauli (1900–1958) postuliert und in den 1950er-Jahren experimentell nachgewiesen.⁵ Das einfache Bild des subatomaren Materieklümpchens wurde unhaltbar, die strikte Gegensätzlichkeit der Begriffe Welle und Teilchen erwies sich als Gleichberechtigung (Dualität).

Die Quantenmechanik beschreibt auch die Art und Weise, in der Licht von Atomen absorbiert und emittiert wird. Denken wir uns dazu ein Gas, das durch Erhitzen oder eine elektrische Entladung zum Leuchten gebracht wird. Das ausgesendete Licht hängt dann von der Struktur der Atome des Gases ab. Die Spektroskopie – der Zweig der Optik, der sich mit der Analyse von Spektren befasst – entwickelte sich aus den Arbeiten Newtons. William Hyde Wollaston (1766–1828) beobachtete 1802 als Erster dunkle Linien im Sonnenspektrum. Da die Öffnungen von Spektroskopen üblicherweise schlitzförmig sind, sah man enge farbige Lichtstreifen, so genannte *Spektrallinien*. Unabhängig von Wollaston beschäftigte sich Joseph Fraunhofer (1787–1826) mit der Spektroskopie; nachdem er zufällig die Doppellinie des Natriums entdeckt hatte, untersuchte er ebenfalls das Sonnenspektrum. Er war der Erste, der Wellenlängen mithilfe von Beugungsgittern bestimmte. Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887) und Robert Wilhelm Bunsen (1811–1899), die gemeinsam in Heidelberg arbeiteten, zeigten, dass jede Atomart eigene, charakteristische Spektrallinien aussendet. 1913 veröffentlichte Niels Henrik David Bohr (1885–1962) eine vorläufige quantentheoretische Beschreibung des Wasserstoffatoms, mithilfe derer sich auch die Wellenlängen des Emissionsspektrums vorhersagen ließen. Das Licht wird, wie man nun wusste, von den äußeren Elektronen des Atoms emittiert – wie dieser Prozess abläuft, erklärt die Quantentheorie bis ins kleinste Detail mit unglaublicher Genauigkeit und Eleganz.

In der zweiten Hälfte des zwanzigsten Jahrhunderts brach auch eine neue Blütezeit der angewandten Optik als eigenständiges Gebiet an. Seit den 1950er-Jahren ließen Forscher mathematische Methoden und Erkenntnisse der Kommunikationstheorie in die Optik einfließen. Wie der Begriff des Impulses der Mechanik eine andere Dimension verleiht, eröffnet das Konzept der Raumfrequenz einen neuen Weg zum Verständnis einer Vielzahl optischer Phänomene. Die Auswirkungen dieser modernen, durch das mathematische Formelgebäude der Fourier-Analyse strukturierten Sichtweise der Optik waren weit reichend. Hervorzuheben sind dabei die Theorien der Bilderzeugung und Bildverarbeitung, die *Übertragungsfunktionen* und die Idee der *räumlichen Filterung*.

Mit dem Aufkommen digitaler Hochgeschwindigkeitsrechner verbesserten sich die Voraussetzungen zur Konstruktion komplexer optischer Systeme ganz erheblich.

⁴ Statt von Welle und Partikel zu sprechen, wäre es vielleicht hilfreich, beides „Welltikel“ zu nennen.

⁵ Inzwischen kennt man drei verschiedene Neutrinos, von denen mindestens zwei eine sehr kleine, von null verschiedene Masse besitzen. – Hier gemeint ist das beim β -Zerfall auftretende Elektron-neutrino. (Anm. d. Übers.)

Asphärische Linsen bekamen eine neue praktische Bedeutung, und das beugungsbegrenzte Linsensystem mit einem bemerkenswert großen Bildfeld wurde in die Praxis umgesetzt. In die Herstellung optischer Bauelemente hielt die Technik des Polierens durch Ionenbeschuss Einzug, mit deren Hilfe einzelne Atome von Oberflächen abgespalten werden können. Ein- und Mehrfachdünnschichtbeläge (etwa von Spiegeln und reflexmindernden Oberflächen) wurden verbreitet eingesetzt, die Faseroptik entwickelte sich zum praktischen Kommunikationshilfsmittel, Dünnschicht-Lichtleiter wurden erforscht. Der infrarote Spektralbereich fand Anwendungen beispielsweise in Überwachungssystemen und Raketensteuerungen; dies wiederum bewirkte eine verstärkte Entwicklung von IR-Materialien. Zunehmend wurden auch Kunststoffe eingesetzt (für Linsen, asphärische Linsen, Fasern, kopierte Gitter usw.). Eine neue Klasse teilweise vitrifizierter Glaskeramiken mit äußerst geringem Ausdehnungskoeffizienten wurde entwickelt. Seit Ende der 1960er-Jahre widmete man sich verstärkt dem Bau von sowohl erdgebundenen als auch im Weltraum stationierten Observatorien, die das gesamte Spektrum erfassen. Diese Projekte werden im 21. Jahrhundert weiter energisch vorangetrieben.

In den 1960er-Jahren schlug die Geburtsstunde des Lasers. Innerhalb des folgenden Jahrzehnts baute man Laser, die den Spektralbereich vom Ultravioletten bis zum Infraroten abdecken. Damit standen starke Quellen kohärenten Lichts zur Verfügung, mit deren Hilfe man einer ganzen Reihe optischer Effekte auf die Spur kam, so der Erzeugung von Oberschwingungen (Harmonischen) und der Frequenzmischung. Die Entwicklung neuer Geräte, die diese Effekte ausnutzen, folgte unmittelbar. Schnell entwickelte sich auch die Technologie zur Herstellung eines brauchbaren optischen Kommunikationssystems. Wichtige Forschungsfelder der modernen Kristalloptik waren und sind beispielsweise elektrooptische und akustooptische Modulatoren sowie die Erzeugung zweiter Harmonischer. Eine als *Holographie* bekannt gewordene Technik zur Wellenfrontrekonstruktion liefert nicht nur wundervolle dreidimensionale Bilder, sondern fand auch eine Reihe weiterer Einsatzgebiete (u. a. zerstörungsfreie Werkstoffprüfverfahren und Methoden zur Datenspeicherung).

Schon seit den 1960er-Jahren verfolgt die Forschung auf dem Gebiet der Optik nicht zuletzt militärische Ziele – ein Trend, der sich zu den 80er- und 90er-Jahren hin weiter verstärkte. Entwickelt wurden „intelligente“ Bomben, Spionagesatelliten und Infrarot-Nachtsichtgeräte bis hin zu „Todesstrahlen“. Durch ökonomische Erwägungen und die Forderung der Verbraucher nach einer Erhöhung der Lebensqualität gelangen optische Produkte jedoch zunehmend auf den „zivilen“ Markt. Lasern beispielsweise begegnen wir heute im täglichen Leben in vielfältiger Weise: Sie tasten die CD in der heimischen Musikanlage ab, lesen Strichcodes an der Kasse des Supermarkts, schneiden Stahl und sind bei Operationen in Krankenhäusern behilflich. Optische Displays blinken an Millionen von Uhren, Taschenrechnern und Computern auf der ganzen Welt. Wurden Informationen im vergangenen Jahrhundert fast ausschließlich mithilfe elektrischer Signale übertragen, setzen sich gegenwärtig mehr und mehr die

effizienteren optischen Verfahren durch. In aller Stille vollzieht sich eine Revolution der Methoden der Informationsverarbeitung und -übermittlung, die unser Leben auch in den kommenden Jahren stark beeinflussen wird.

Wichtige Erkenntnisse brauchen ihre Zeit. Wie vergleichsweise mager ist das Erbe, das uns die vergangenen drei Jahrtausende Forschung auf dem Gebiet der Optik hinterlassen haben, doch die Geschwindigkeit, mit der die Wissenschaft neue Ergebnisse liefert, nimmt laufend zu. Und ist es nicht hochinteressant zu beobachten, wie sich die Antwort auf die ewig gleiche Frage im Laufe der Zeit langsam ändert: *Was ist Licht?*⁶

⁶ Weitere Informationen zur Geschichte der Optik finden sich beispielsweise in *A History of Physics* von F. Cajori, *The Nature of Light* von V. Ronchi und *Auge und Licht im Mittelalter* von D. C. Lindberg. Auszüge aus verschiedenen Originalarbeiten sind in *A Source Book of Physics* von W. F. Magie und *Great Experiments in Physics* von M. H. Shamos zu finden.

2 Die Wellenbewegung

Was ist Licht? Diese für die Optik als Wissenschaft zentrale Frage wird uns im Verlauf dieses Buches immer wieder beschäftigen. Ist Licht ein Wellen- oder ein Teilchenphänomen? Diese Frage schlüssig zu beantworten ist bei weitem komplizierter, als es zunächst scheinen mag. Das wesentliche Merkmal eines Teilchens ist seine Lokalisierbarkeit: Es existiert in einem definierten, eng begrenzten Gebiet des Raumes. Wenn wir versuchen, uns ein solches Teilchen vorzustellen, denken wir gewöhnlich an einen uns vertrauten makroskopischen Gegenstand – etwa einen Ball oder einen Kieselstein –, den wir im Geiste immer weiter schrumpfen lassen, bis er winzig klein wird. Aber ein Ball tritt mit seiner Umgebung in Wechselwirkung; sein Gravitationsfeld wird von jenem der Erde, der Sonne, des Mondes usw. beeinflusst und umgekehrt. Dieses Feld, das sich im Raum ausbreitet – was auch immer es *genau* ist –, lässt sich von dem Ball nicht trennen; es ist ein fester Bestandteil des Balls ebenso wie jedes beliebigen anderen Teilchens. Reale Teilchen wechselwirken über Felder. In gewisser Hinsicht ist das Feld das Teilchen, und das Teilchen ist das Feld. Dieser auf den ersten Blick etwas merkwürdig anmutende Zusammenhang ist Gegenstand der Quantenfeldtheorie, über die wir noch sprechen werden. Im Augenblick soll uns folgende Feststellung ausreichen: Falls Licht als Strom submikroskopischer Teilchen (Photonen) beschrieben werden kann, handelt es sich bei diesen Partikeln keinesfalls um gewöhnliche klassische Teilchen etwa in Form winziger Kugeln.

Das wesentliche Merkmal einer Welle dagegen ist, dass sie sich *nicht* lokalisieren lässt: *Eine klassische fortschreitende Welle entspricht einer sich selbst erhaltenden Störung des Trägermediums, die sich durch den Raum bewegt und dabei Energie und Impuls transportiert.* Man neigt dazu, sich eine ideale Welle als eine kontinuierliche Einheit vorzustellen, die sich über den Raum erstreckt. Sieht man sich reale Wellen dagegen genauer an (beispielsweise Wellen auf eine Saite), so stellt man fest, dass es sich in Wirklichkeit um ein zusammengesetztes Phänomen handelt, das von einer großen Zahl sich koordiniert bewegender Teilchen gebildet wird. Die Trägermedien dieser Wellen sind atomar (sie bestehen also aus Teilchen), sodass man das Phänomen nicht als etwas Kontinuierliches ansehen kann. Allerdings gibt es vielleicht eine Ausnahme: die klassische elektromagnetische Welle, die konzeptionell als kontinuierliche Einheit aufgefasst wird und in unserem Zusammenhang als Inbegriff der Welle im Gegensatz zum Teilchen gilt. Doch weiß man seit dem zwanzigsten Jahrhundert, dass die Energie einer elektromagnetischen Welle keineswegs kontinuierlich verteilt ist.

Die klassische Formulierung der elektromagnetischen Theorie des Lichts, so schön sie auf makroskopischem Niveau auch sein mag, ist auf mikroskopischem Niveau zutiefst problematisch. Einstein schlug als Erster vor, die makroskopische elektromagnetische Welle als statistische Manifestation eines grundlegenden teilchenartigen mikroskopischen Phänomens aufzufassen. Im subatomaren Bereich bricht die klassische Vorstellung von einer physikalischen Welle zusammen. Doch in dem Maßstab, mit dem wir es normalerweise praktisch zu tun haben, führt die Anwendung der klassischen Theorie zu hervorragenden Ergebnissen.

Sowohl die klassische als auch die quantenmechanische Behandlung des Lichts stützt sich auf eine mathematische Beschreibung der Wellenbewegung. Daher besprechen wir im folgenden Kapitel die Grundlagen beider Formalismen. Die angegebenen Konzepte lassen sich auf alle Arten physikalischer Wellen anwenden – von den kleinen Oberflächenwellen in einer Tasse Tee bis zum Lichtblitz, der von einer weit entfernten Galaxie zur Erde gelangt.

2.1 Eindimensionale Wellen

Ein grundlegendes Merkmal einer fortschreitenden Welle ist, dass es sich um eine sich selbst erhaltende Störung des Trägermediums handelt. Am vertrautesten für uns und am besten zu veranschaulichen sind die mechanischen Wellen (Abb. 2.1). Dazu gehören Seilwellen und Wellen an der Oberfläche von Flüssigkeiten, Schallwellen in der Luft und Druckwellen in Festkörpern und fluiden Medien. Schallwellen sind **longitudinal**: Die Verschiebung des Mediums hat dieselbe Richtung wie die Bewegung der Welle. Seilwellen (und elektromagnetische Wellen) sind **transversal** – das Medium wird in einer Richtung ausgelenkt, die senkrecht auf der Ausbreitungs-

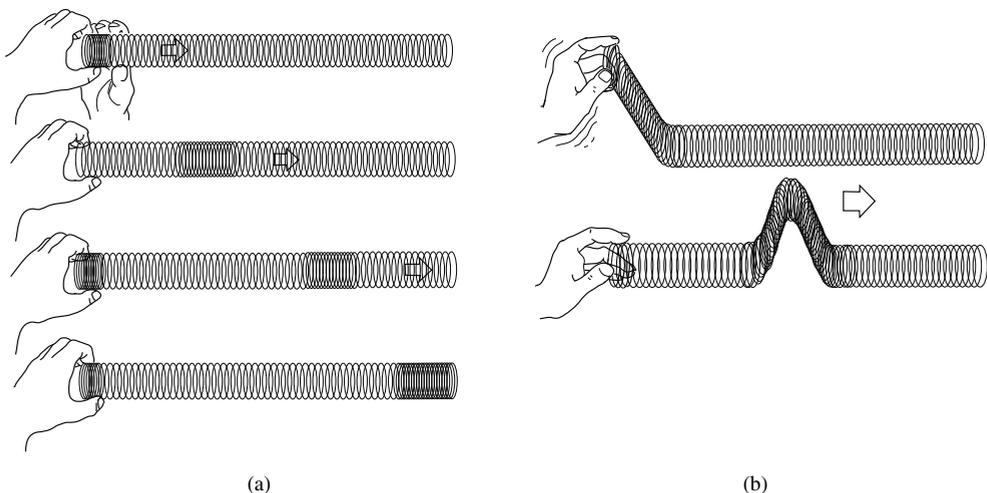


Bild 2.1: Longitudinale (a) und transversale (b) Welle in einer Feder.

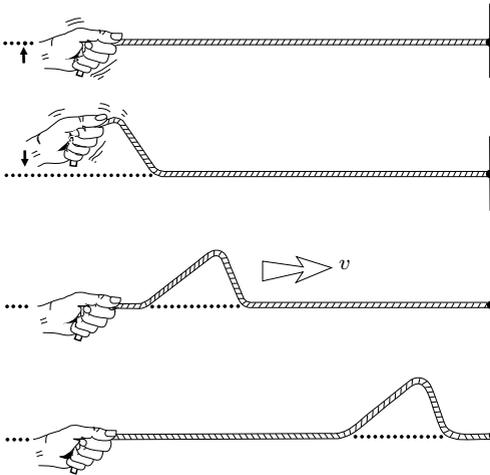


Bild 2.2: Seilwelle.

richtung der Welle steht. In allen Fällen wandert zwar die energietragende Störung durch das Material, die einzelnen beteiligten Atome entfernen sich jedoch nur minimal von ihren Gleichgewichtspositionen: *Die Störung pflanzt sich fort, das Trägermedium bleibt unbeweglich*. Dies ist eine der Schlüsseigenschaften, die eine Welle von einem Partikelstrom unterscheiden, und die Ursache dafür, dass sich Wellen mit äußerst hoher Geschwindigkeit ausbreiten können. Wind, der über ein Kornfeld bläst, erzeugt scheinbar vorüberziehende Wellen, obwohl jede einzelne Ähre lediglich schwankt. Der Erste, der erkannt hat, dass eine Welle ihr Trägermedium nicht fortbewegt, war wohl Leonardo da Vinci.

Wir wollen nun herausfinden, welche Form die Wellengleichung haben muss. Dazu betrachten wir eine Störung ψ , die sich in positiver x -Richtung mit der konstanten Geschwindigkeit v bewegt. Die genaue Art der Störung ist momentan unwichtig. Es könnte sich ebenso um die vertikale Auslenkung eines Seils (Abb. 2.2) handeln wie um die Auslenkung der elektrischen oder magnetischen Feldstärke einer elektromagnetischen Welle (oder sogar der quantenmechanischen Wahrscheinlichkeitsamplitude einer Materiewelle).

Da sich die Störung bewegt, muss sie sowohl vom Ort als auch von der Zeit abhängen:

$$\psi(x, t) = f(x, t) \quad (2.1)$$

mit $f(x, t)$ als einer speziellen Funktion oder Wellenform. Dargestellt ist dies in Abbildung 2.3 a: Hier bewegt sich ein Wellenpuls mit der Geschwindigkeit v im stationären Koordinatensystem S . Die Form der Störung zu einem beliebigen Zeitpunkt, beispielsweise bei $t = 0$, findet man, indem man die Zeit bei diesem Wert konstant hält. Durch

$$\psi(x, t)_{t=0} = f(x, 0) = f(x) \quad (2.2)$$

ist dann die Form oder das **Profil** der Welle zu diesem Zeitpunkt gegeben. Ist beispielsweise $f(x) = e^{-ax^2}$ mit a als Konstante, so findet man ein glockenförmiges

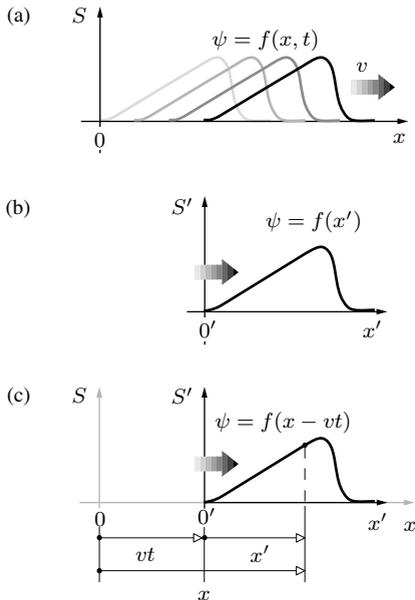


Bild 2.3: Bewegtes Bezugssystem.

Profil, das einer **Gaußfunktion** entspricht. (Die Funktion ist symmetrisch bezüglich der Achse mit $x = 0$, weil x quadratisch eingeht.) Setzt man $t = 0$, so fertigt man sozusagen eine „Momentaufnahme“ des vorbeilaufenden Pulses an.

Wir beschränken uns vorerst auf Wellen, die *ihre Form bei der Fortpflanzung durch den Raum nicht ändern*. Nach einer Zeit t hat sich der Puls um die Strecke vt in Richtung der x -Achse bewegt, ist ansonsten aber unverändert geblieben. Wir führen nun ein Koordinatensystem S' ein, das sich gemeinsam mit dem Puls mit der Geschwindigkeit v bewegt (Abb. 2.3 b). In diesem System hängt ψ nicht mehr von der Zeit ab; wenn wir uns mit S' bewegen, sehen wir ein unbewegliches, konstantes Profil, das durch Gleichung (2.2) gegeben ist. Die Koordinate ist hier nicht x , sondern x' , sodass gilt

$$\psi = f(x') . \quad (2.3)$$

Die Störung sieht in S' zu jedem Zeitpunkt t genauso aus wie zum Zeitpunkt $t = 0$ (als die Ursprünge von S und S' übereinander lagen) in S (Abb. 2.3 c).

Wir schreiben nun Gleichung (2.3) als Funktion von x , um die Welle in der Form zu erhalten, die ein in S ruhender Beobachter sehen würde. Aus Abbildung 2.3 c folgt

$$x' = x - vt \quad (2.4)$$

und Einsetzen in Gleichung (2.3) liefert

$$\psi(x, t) = f(x - vt) , \quad (2.5)$$

die allgemeinste Form der eindimensionalen **Wellenfunktion**. Um eine spezielle Form zu gewinnen, muss nun lediglich ein bestimmtes Profil (Gl. 2.2) ausgewählt

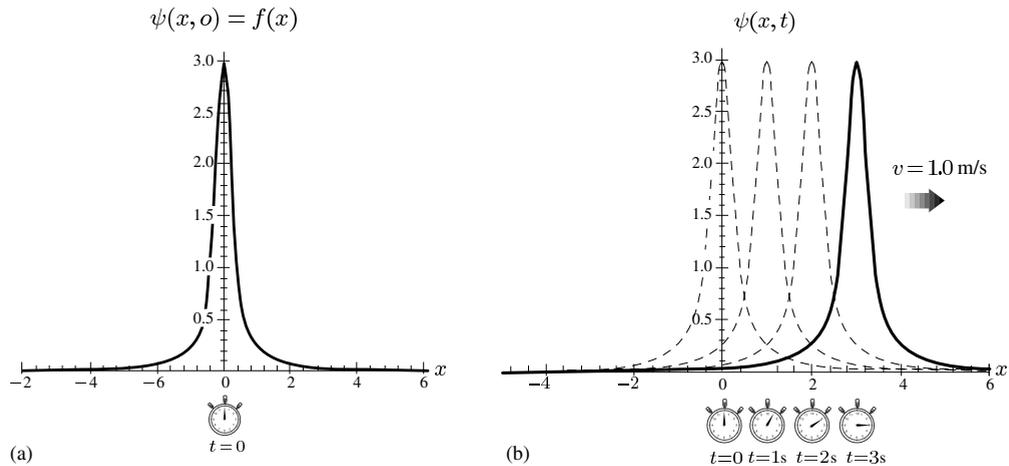


Bild 2.4: (a) Profil eines Pulses, gegeben durch die Funktion $f(x) = 3/(10x^2 + 1)$. (b) Das in (a) gezeigte Profil bewegt sich nun als Welle in positiver x -Richtung (nach rechts): $\psi(x, t) = 3/[10(x - vt)^2 + 1]$. Die Geschwindigkeit der Welle beträgt 1 m/s.

und $(x - vt)$ für x in $f(x)$ eingesetzt werden. Der Ausdruck beschreibt dann eine Welle mit dem gewünschten Profil, die sich mit der Geschwindigkeit v in positiver x -Richtung bewegt. So entspricht beispielsweise $\psi(x, t) = e^{-a(x-vt)^2}$ einer glockenförmigen Welle.

Um diesen Sachverhalt genauer zu veranschaulichen, wählen wir einen bestimmten Puls aus – sagen wir, $\psi(x) = 3/[10x^2 + 1] = f(x)$. Das zugehörige Profil ist in Abbildung 2.4 a zu sehen; handelte es sich dabei um eine Seilwelle. Dabei entspräche ψ der vertikalen Auslenkung, wofür wir auch y schreiben könnten. Damit ist das Profil der Störung festgelegt, gleichgültig, ob es sich dabei um eine örtliche Verschiebung, einen Druck oder ein elektrisches Feld handelt. Um von $f(x)$ zu $\psi(x)$ zu gelangen, also die Beschreibung einer Welle zu erhalten, die sich mit der Geschwindigkeit v in positiver x -Richtung fortpflanzt, müssen wir x in $f(x)$ durch $(x - vt)$ ersetzen. Diese Substitution führt auf $\psi(x, t) = 3/[10(x - vt)^2 + 1]$. Legen wir v nun willkürlich auf beispielsweise 1 m/s fest und zeichnen wir den Funktionswert nacheinander bei $t = 0$, $t = 1$ s, $t = 2$ s und $t = 3$ s, so gelangen wir zu Abbildung 2.4 b, die wie erwartet zeigt, dass sich der Puls mit 1 m/s nach rechts fortpflanzt. Hätten wir dagegen für x in der Profildfunktion $(x + vt)$ eingesetzt, würden wir feststellen, dass sich der Puls nach links bewegt.

Betrachten wir das Profil der Welle ψ (in Gl. 2.5) nach Ablauf einer Zeit Δt , was einer Änderung von x um $v\Delta t$ entspricht, so finden wir

$$f[(x + v\Delta t) - v(t + \Delta t)] = f(x - vt) .$$

Das Profil hat sich nicht verändert.

Analog wird Gleichung 2.5, wenn sich die Welle in negativer x -Richtung fortpflanzt, zu

$$\psi = f(x + vt) \quad \text{mit } v > 0. \quad (2.6)$$

Daraus können wir Folgendes schließen: Ungeachtet der Form der Störung müssen die Variablen x und t in der Funktion zu einer Einheit verbunden sein, das heißt, es muss eine einzelne Variable ($x \pm vt$) auftreten. Gleichung (2.5) schreibt man oft auch als Funktion von ($t - x/v$), weil

$$f(x - vt) = F\left(-\frac{x - vt}{v}\right) = F(t - x/v) \quad (2.7)$$

gilt.

Den Puls in Abbildung 2.2 und die durch Gleichung (2.5) beschriebene Störung bezeichnet man als *eindimensional*, weil die Wellen über Punkte streichen, die in einer Linie liegen, und daher nur eine Ortsvariable benötigt wird. Dass eine Seilwelle in einer zweiten Dimension sichtbar wird, sollte dabei nicht verwirren. Echte zweidimensionale Wellen breiten sich im Gegensatz dazu über eine Fläche aus (wie die Kräuselwellen auf einer Wasseroberfläche), und man benötigt zwei Ortsvariablen, um sie zu beschreiben.

2.1.1 Die Differenzialgleichung einer Welle

1747 führte Jean Le Rond d'Alembert partielle Differenzialgleichungen in die mathematische Behandlung physikalischer Zusammenhänge ein. Im gleichen Jahr veröffentlichte er eine Arbeit über die Bewegung schwingender Saiten, in der die so genannte *Wellengleichung* zum ersten Mal auftaucht. Physikalische Wellen aller Art in verlustfreien Medien lassen sich mithilfe dieser linearen, homogenen, partiellen Differenzialgleichung zweiter Ordnung definieren. Es gibt sehr viele verschiedene Arten von Wellen; jede wird durch ihre eigene Wellenfunktion $\psi(x)$ beschrieben. Man kann diese Wellenfunktionen abhängig vom Druck oder von der Verschiebung formulieren oder sich auf elektromagnetische Felder beziehen – das ändert nichts an der Tatsache, dass bemerkenswerterweise alle diese Wellenfunktionen Lösungen derselben differenziellen Wellengleichung sind. Es handelt sich dabei um eine *partielle* Differenzialgleichung, weil die Welle eine Funktion mehrerer voneinander unabhängiger Variabler (Ort und Zeit) ist. *Linear* ist eine Differenzialgleichung, die aus einem oder mehreren Termen besteht, die ihrerseits jeweils ein Produkt aus einer Konstante und der Funktion $\psi(x)$ oder einer von deren Ableitungen sind. Wichtig ist dabei, dass jeder Term nur in der ersten Potenz auftreten darf; auch Produkte aus $\psi(x)$ und einer ihrer Ableitungen oder aus zwei Ableitungen sind nicht erlaubt. Als *Ordnung* einer Differenzialgleichung bezeichnet man bekanntlich die Ordnung der höchsten enthaltenen Ableitung. Die Lösung einer Differenzialgleichung der Ordnung N hat N unbestimmte Variablen.

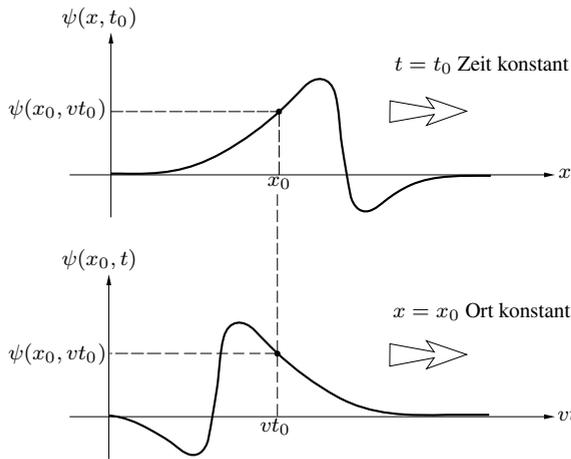


Bild 2.5: ψ in Abhängigkeit von x (oben) und von t .

Wir wollen nun die eindimensionale Form der Wellengleichung herleiten. Dabei stützen wir uns auf die Erkenntnis (siehe Abb. 2.5), dass zur Festlegung der einfachsten, sich mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegenden Welle zwei Konstanten (Amplitude und Frequenz oder Wellenlänge) erforderlich sind, was auf zweite Ableitungen hindeutet. Da die Gleichung zwei unabhängige Variable enthält (hier x und t), können wir $\psi(x, t)$ entweder nach x oder nach t differenzieren. Dazu bilden wir einfach die Ableitung nach einer der beiden Variablen und behandeln die jeweils andere als Konstante. Es gelten die üblichen Regeln der Differenziation; um den Unterschied zur „normalen“ Ableitung deutlich zu machen, kennzeichnet man partielle Ableitungen mit einem runden ∂ (also $\partial/\partial x$).

Wir wollen nun die Orts- und die Zeitabhängigkeit von $\psi(x, t)$ zueinander in Beziehung setzen. Dazu bilden wir die partielle Ableitung von $\psi(x, t) = f(x')$ nach x bei konstantem t . Wir verwenden $x' = x \mp vt$, und mit

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

erhalten wir

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} \quad (2.8)$$

wegen

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial(x \mp vt)}{\partial x} = 1.$$

Bei konstant gehaltenem x ergibt sich als partielle Ableitung nach der Zeit

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x'} (\mp v) = \mp v \frac{\partial f}{\partial x'}. \quad (2.9)$$

Durch Zusammenfassen der Gleichungen (2.8) und (2.9) erhalten wir

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \pm v \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Die Änderungsraten von ψ mit t und x sind also bis auf einen konstanten Faktor gleich, wie in Abbildung 2.5 gezeigt ist. Die zweiten partiellen Ableitungen der Gleichungen (2.8) und (2.9) sind

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \quad (2.10)$$

und

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\pm v \frac{\partial f}{\partial x'} \right) = \pm v \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right).$$

Wegen

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

und

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \mp v \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)$$

folgt unter Verwendung von Gleichung (2.9)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}.$$

Diese Gleichungen verbinden wir mit Gleichung (2.10) zu

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (2.11)$$

der gesuchten eindimensionalen **Wellengleichung**.

Beispiel 2.1

Die in Abbildung 2.4 gezeigte Welle ist gegeben durch

$$\psi(x, t) = \frac{3}{[10(x - vt)^2 + 1]}.$$

Zeigen Sie, dass es sich hierbei um eine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung handelt.

Lösung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Ableiten nach x ergibt:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{3}{10(x - vt)^2 + 1} \right]$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = (-1) 3 [10(x - vt)^2 + 1]^{-2} 20(x - vt)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = (-1) 60 [10(x - vt)^2 + 1]^{-2} (x - vt)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{-60(-2)20(x - vt)(x - vt)}{[10(x - vt)^2 + 1]^3} - \frac{60}{[10(x - vt)^2 + 1]^2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{2400(x - vt)^2}{[10(x - vt)^2 + 1]^3} - \frac{60}{[10(x - vt)^2 + 1]^2}$$

Ableiten nach t ergibt:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{3}{10(x - vt)^2 + 1} \right]$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = (-1) 3 [10(x - vt)^2 + 1]^{-2} 20(-v)(x - vt)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = 60v(x - vt) [10(x - vt)^2 + 1]^{-2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{60v(x - vt)(-2)20(x - vt)(-v)}{[10(x - vt)^2 + 1]^3} + \frac{-60v^2}{[10(x - vt)^2 + 1]^2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{2400v^2(x - vt)^2}{[10(x - vt)^2 + 1]^3} - \frac{60v^2}{[10(x - vt)^2 + 1]^2}$$

Damit haben wir gezeigt, dass

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

Beachten Sie, dass Gleichung 2.11 eine *homogene* Differenzialgleichung ist – das bedeutet, in der Gleichung tritt kein Term auf, der ausschließlich unabhängige Variable enthält (etwa eine „Kraft“ oder eine „Quelle“). Mit anderen Worten: ψ steht in jedem Term der Gleichung, und damit gilt: Ist ψ eine Lösung, so sind auch alle Vielfachen von ψ Lösungen der Differenzialgleichung. Gleichung (2.11) ist die **Wellengleichung für ungedämpfte Systeme**, die im betrachteten Gebiet keine Quellen aufweisen. Die

Effekte der Dämpfung erfasst man durch Addition eines Terms $\partial\psi/\partial t$. So entsteht eine allgemeinere Wellengleichung; wir werden später darauf zurückkommen (S. 153).

Kontinuierliche Systeme werden stets durch partielle Differenzialgleichungen beschrieben. Die Kontinuität der zeitlichen Entwicklung unseres Prozesses kommt dadurch zum Ausdruck, dass die Zeit eine der unabhängigen Variablen ist. Feldtheorien erfassen ganz allgemein kontinuierliche Verteilungen einzelner Größen in Raum und Zeit, sie lassen sich also sämtlich als partielle Differenzialgleichungen formulieren. Die maxwellsche Formulierung des Elektromagnetismus – ebenfalls eine Feldtheorie – liefert eine Abwandlung von Gleichung (2.11), aus der sich das Konzept der elektromagnetischen Welle unmittelbar ergibt (Abschn. 3.2).

Zu Beginn dieser Diskussion beschäftigten wir uns mit Wellen, die ihr Profil im Laufe der Fortpflanzung nicht ändern. Ein solches Verhalten ist zwar nicht die Regel; unsere Vereinfachung führte uns aber zu einer allgemeinen Formulierung der Wellengleichung. Ist eine Funktion, die eine Welle repräsentiert, Lösung dieser Gleichung, so handelt es sich stets um eine Funktion von $(x \mp vt)$ – insbesondere eine, die zweimal (nichttrivial) sowohl nach x als auch nach t abgeleitet werden kann.

Beispiel 2.2

Gegeben ist die Funktion $\psi(x, t) = \exp \left[-4ax^2 - bt^2 + 4\sqrt{ab}xt \right]$, wobei a und b Konstanten sind. Beschreibt diese Funktion eine Welle? Wenn ja, geben Sie die Geschwindigkeit und die Richtung ihrer Propagation an.

Lösung Wir faktorisieren den Ausdruck in der Klammer:

$$\psi(x, t) = \exp \left[-4a \left(x - \sqrt{b/4a} t \right)^2 \right].$$

Dies ist eine zweimal differenzierbare Funktion von $(x - vt)$ und somit eine Lösung von Gl. (2.11), d. h., sie beschreibt eine Welle. Für sie gilt $v = \frac{1}{2} \sqrt{b/a}$, und sie propagiert in die positive x -Richtung.

2.2 Harmonische Wellen

Wir wollen nun die (in mathematischer Hinsicht) einfachste Welle untersuchen. Ihr Profil wird durch eine Sinus- oder Kosinusfunktion beschrieben, und man nennt sie Sinuswelle, einfache harmonische Welle oder schlicht **harmonische Welle**. In Kapitel 7 werden wir sehen, dass man jede beliebige Wellenform durch eine Superposition (Überlagerung) harmonischer Wellen erhalten kann. Daraus erklärt sich die besondere Bedeutung dieses Wellentyps.

$$\psi(x) = A \sin kx = A \sin 2\pi x/\lambda = A \sin \varphi$$

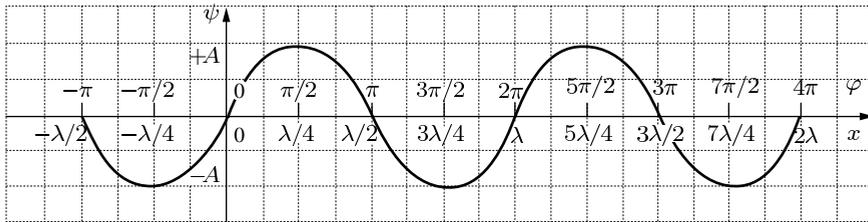


Bild 2.6: Eine harmonische Funktion als Profil einer harmonischen Welle. Eine Wellenlänge entspricht einer Änderung der Phase φ um 2π rad.

Als Profil wählen wir die einfache Funktion

$$\psi(x, t)|_{t=0} = \psi(x) = A \sin kx = f(x); \quad (2.12)$$

k ist eine positive Konstante, die **Wellenzahl**. Diese Konstante müssen wir einführen, da sich der Sinus von einer einheitenbehafteten physikalischen Größe nicht bilden lässt: Der Sinus ist definiert als Verhältnis zweier Längen und somit dimensionslos. Folgerichtig erhält kx die Einheit Radiant, also keine „echte“ physikalische Einheit. Der Sinus läuft von -1 bis $+1$; der Maximalwert von $\psi(x)$ ist demnach A . Man nennt diese maximale Störung auch **Amplitude** der Welle (Abb. 2.6). Um Gleichung (2.12) zu einer *fortschreitenden Welle* umzuformen, die sich mit der Geschwindigkeit v in positiver x -Richtung bewegt, müssen wir lediglich x durch $(x - vt)$ ersetzen, sodass sich ergibt

$$\psi(x, t) = A \sin k(x - vt) = f(x - vt). \quad (2.13)$$

Dies ist offensichtlich eine Lösung der Wellengleichung (siehe Aufgabe 2.24). Hält man entweder x oder t konstant, so erhält man eine sinusförmige Störung. Die Welle ist sowohl räumlich als auch zeitlich periodisch. Dabei bezeichnet man die **räumliche Periode** als **Wellenlänge** λ : Die Wellenlänge ist gleich der Anzahl der Längeneinheiten je Welle. Die in der Praxis bequemste Maßeinheit von λ ist das Nanometer ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$); man findet auch das Mikrometer oder Mikron ($1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$) sowie, besonders in der älteren Literatur, das Ångström ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$). Eine Zunahme von x um λ sollte keine Änderung von ψ bewirken, das bedeutet

$$\psi(x, t) = \psi(x \pm \lambda, t). \quad (2.14)$$

Im Falle einer harmonischen Welle ist dies einer Änderung des Arguments der Sinusfunktion um $\pm 2\pi$ gleichwertig, sodass wir schreiben können

$$\sin k(x - vt) = \sin k[(x \pm \lambda) - vt] = \sin [k(x - vt) \pm 2\pi]$$

und somit

$$|k\lambda| = 2\pi$$

oder, weil sowohl k als auch π nur positive Werte annehmen kann,

$$k = 2\pi/\lambda. \quad (2.15)$$

Abbildung 2.6 zeigt das durch Gleichung (2.12) gegebene Profil, aufgetragen als Funktion von λ . φ ist das Argument der Sinusfunktion, auch **Phase** genannt. Beachten Sie, dass an allen Stellen mit $\sin \varphi = 0$ (also bei $\varphi = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$ usw.) $\psi(x) = 0$ wird; dies gilt ebenso für $x = 0, \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2$ usw.

In analoger Weise können wir nun auch die **zeitliche Periode** τ untersuchen. Sie entspricht der Zeit, die eine Welle benötigt, um vollständig an einem ruhenden Beobachter vorbeizulaufen. In diesem Fall interessiert uns das zeitlich periodische Verhalten der Welle:

$$\psi(x, t) = \psi(x, t \pm \tau) \quad (2.16)$$

und

$$\begin{aligned} \sin k(x - vt) &= \sin k[x - v(t \pm \tau)] \\ \sin k(x - vt) &= \sin [k(x - vt) \pm 2\pi]. \end{aligned}$$

Dies führt zu

$$|kv\tau| = 2\pi.$$

Auch alle diese Größen können nur positive Werte annehmen, also

$$kv\tau = 2\pi \quad (2.17)$$

oder

$$\frac{2\pi}{\lambda}v\tau = 2\pi,$$

woraus folgt

$$\tau = \lambda/v. \quad (2.18)$$

Die Periode τ ist gleich der Anzahl der Zeiteinheiten je Welle (Abb. 2.7); ihr Kehrwert ist die **Frequenz** ν , die Anzahl der Wellen je Zeiteinheit (in diesem Fall pro Sekunde). So haben wir

$$\nu \equiv 1/\tau$$

mit der Frequenz ν , angegeben in Wellen pro Sekunde (Hertz, Hz). Gleichung (2.18) wird damit zu

$$v = \nu\lambda. \quad (2.19)$$

Stellen Sie sich vor, an Ihnen als ruhendem Beobachter zögen Wellen in einem Seil vorbei. Die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde entspräche dann ν , die Länge jeder Welle wäre λ . Die Gesamtlänge der Störung, die in einer Sekunde an Ihnen vorbeilief, wäre gleich $\nu\lambda$. Wäre beispielsweise jede Welle 2 m lang und erfolgten 5 Schwingungen pro Sekunde, so könnten Sie innerhalb von einer Sekunde 10 m Wellen vorbeiziehen sehen. Genau diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Welle (gemessen in m/s) meinen wir mit v . Anders ausgedrückt: Da eine Wellenlänge λ innerhalb einer Zeitspanne τ vorbeizieht, muss die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle $\lambda/\tau = \nu\lambda$ sein. Nebenbei bemerkt wurde diese Beziehung von Newton im Kapitel „Wie man die Geschwindigkeit von Wellen berechnet“ in den *Principia* (1687) abgeleitet.

Zur Charakterisierung von Wellenbewegungen werden in der Literatur oft noch zwei andere Größen verwendet. Dies ist zum einen die **Winkelgeschwindigkeit**

$$\omega \equiv 2\pi/\tau = 2\pi\nu \quad (2.20)$$

(angegeben in rad/s) und zum anderen die für die Spektroskopie wichtige **Raumfrequenz** oder **Wellenzahl**

$$\kappa \equiv 1/\lambda \quad (2.21)$$

(angegeben in m^{-1} oder häufig auch in cm^{-1} , „reziproken Zentimetern“). Mit anderen Worten ist κ die Anzahl der Wellen je Längeneinheit (Meter). Alle genannten Größen lassen sich auch auf Wellen anwenden, die nicht harmonisch sind, vorausgesetzt, sie bestehen aus einem einzigen sich wiederholenden **Profilelement** (Abb. 2.8).

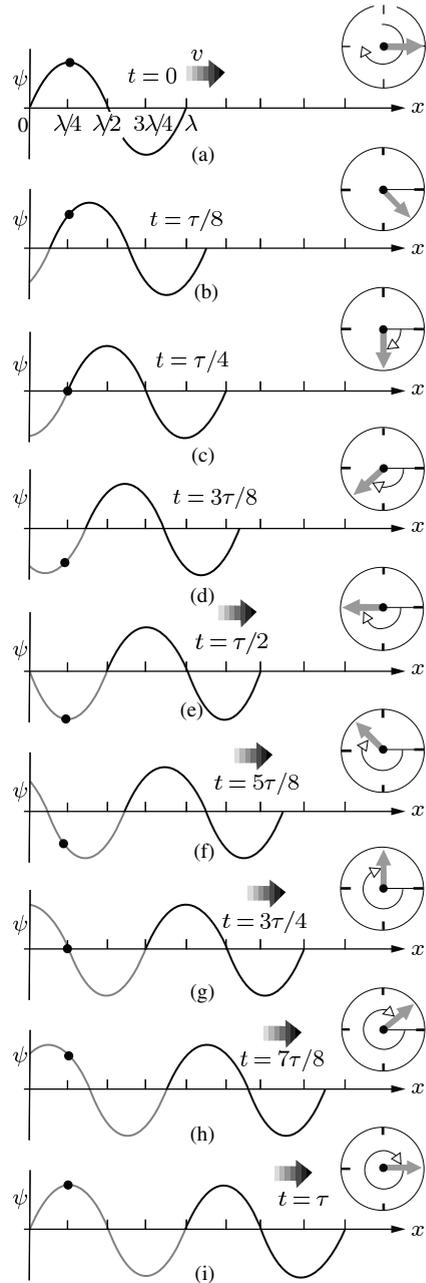


Bild 2.7: Eine harmonische Welle, die sich entlang der x -Achse bewegt. Betrachtet man die dargestellte Störung als Seilwelle, so ist zu beachten, dass sich jeder Punkt des Seils nur in vertikaler Richtung verschiebt. Die Bedeutung des rotierenden Pfeils wird in Abschn. 2.6 erläutert.

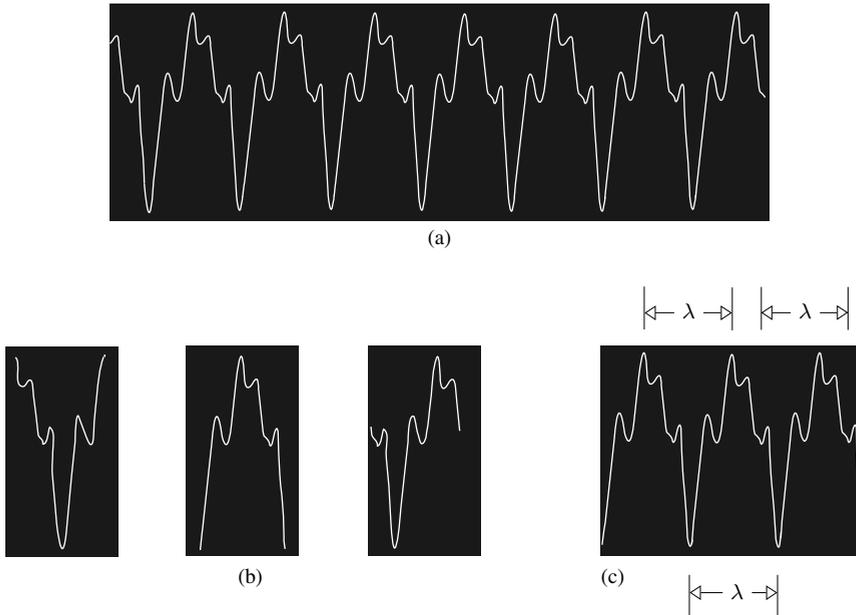


Bild 2.8: (a) Form der von einem Saxophon erzeugten Schwingung. Sie setzt sich aus Mustern (b) zusammen, durch deren Wiederholung die Welle entsteht (c). Die Länge des Abschnitts, nach dem sich die Welle wiederholt, ist die Wellenlänge λ .

Beispiel 2.3

Ein Nd:YAG-Laser emittiert im Vakuum einen Strahl von $1,06 \mu\text{m}$ Wellenlänge. Bestimmen Sie (a) die zeitliche Frequenz des Strahls, (b) die zeitliche Periode und (c) die Raumfrequenz.

Lösung (a) Aus $v = \nu\lambda$ erhalten wir

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{2,99 \times 10^8 \text{ m/s}}{1,06 \times 10^{-6} \text{ m}} = 2,82 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

oder $\nu = 282 \text{ THz}$.

(b) Die zeitliche Periode ist $\tau = 1/\nu = 1/2,82 \times 10^{14} \text{ Hz} = 3,55 \times 10^{-15} \text{ s}$ oder $3,55 \text{ fs}$.

(c) Die Raumfrequenz ist $\kappa = 1/\lambda = 1/1,06 \times 10^{-6} \text{ m} = 943 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$, also $943\,000$ Wellen pro Meter.

Mithilfe der oben gegebenen Definitionen kann man eine Reihe einander äquivalenter Ausdrücke für die sich fortplanzende harmonische Welle aufschreiben:

$$\psi = A \sin k(x \mp vt) \quad [2.13]$$

$$\psi = A \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} \mp \frac{t}{\tau} \right) \quad (2.22)$$

$$\psi = A \sin 2\pi (\kappa x \mp \nu t) \quad (2.23)$$

$$\psi = A \sin (kx \mp \omega t) \quad (2.24)$$

$$\psi = A \sin 2\pi \nu \left(\frac{x}{v} \mp t \right) \quad (2.25)$$

Am häufigsten werden die Gleichungen (2.13) und (2.24) verwendet. Beachten Sie, dass es sich in jedem Fall um idealisierte Wellen unendlicher Ausdehnung handelt. Das bedeutet, dass x für jeden Wert von t zwischen $-\infty$ und $+\infty$ schwankt. Jeder solchen Welle ist eine einzelne, konstante Frequenz zuzuordnen; die Welle heißt **monochromatisch** oder (besser) **monoenergetisch**. Reale Wellen sind nie monochromatisch. Selbst ein perfekter Sinusgenerator kann nicht seit unendlich langer Zeit in Betrieb sein und liefert daher Frequenzen in einem (allerdings kleinen) Bereich. Ist dieses Frequenzband sehr schmal, spricht man von einer **quasimonochromatischen** Welle.

Bevor wir weitergehen, wollen wir Gleichung (2.13) durch ein Zahlenbeispiel anschaulicher machen. Es sei $v = 1 \text{ m/s}$ und $\lambda = 2 \text{ m}$. Aus der Wellenfunktion

$$\psi = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt)$$

wird unter Verwendung von SI-Einheiten

$$\psi = A \sin \pi (x - t) .$$

Abb. 2.9 zeigt, wie sich die Welle mit einer Geschwindigkeit von 1 m/s nach rechts bewegt, während die Zeit von $t = 0$ [$\psi = A \sin \pi x$] über $t = 1 \text{ s}$ [$\psi = A \sin \pi (x-1)$] bis $t = 2 \text{ s}$ [$\psi = A \sin \pi (x-2)$] fortschreitet.

Beispiel 2.4

Gegeben ist die Funktion

$$\psi(x, t) = (0,040) \sin 2\pi \left(\frac{y}{6,0 \times 10^{-7}} + \frac{t}{2,0 \times 10^{-15}} \right) ,$$

wobei wir annehmen wollen, dass alle Größen in geeigneten SI-Einheiten eingehen. (a) Hat dieser Ausdruck die Form einer Welle? Erläutern Sie Ihre Antwort und bestimmen Sie (b) die Frequenz, (c) die Wellenlänge, (d) die Amplitude, (e) die Ausbreitungsrichtung und (f) die Geschwindigkeit der Welle.

Lösung (a) Wenn wir den Faktor $1/6,0 \times 10^{-7}$ vor die Klammer ziehen, dann wird klar, dass $\psi(y, t)$ eine zweimal differenzierbare Funktion von $(y \pm vt)$ ist – der Ausdruck beschreibt also eine harmonische Welle. (b) Wir können auch einfach Gleichung (2.22) verwenden, d. h.

$$\psi = A \sin 2\pi (x/\lambda + t/\tau) ,$$

woraus wir für die Periode $\tau = 2,0 \times 10^{-15}$ s erhalten. Folglich ist $\nu = 1/\tau = 5,0 \times 10^{14}$ Hz. (c) Die Wellenlänge ist $\lambda = 6,0 \times 10^{-7}$ m. (d) Die Amplitude ist $A = 0,040$. (e) Die Welle pflanzt sich in die negative y -Richtung fort. (f) Die Geschwindigkeit ist $v = \nu\lambda = (5,0 \times 10^{14} \text{ Hz})(6,0 \times 10^{-7} \text{ m}) = 3,0 \times 10^8$ m/s. Alternativ können wir den Faktor $1/6,0 \times 10^{-7}$ vor die Klammer ziehen. So erhalten wir für die Geschwindigkeit $1/6,0 \times 10^{-7} / 2,0 \times 10^{-15} = 3,0 \times 10^8$ m/s.

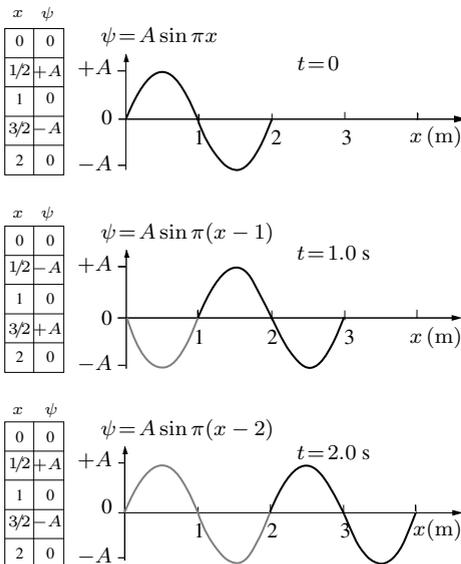


Bild 2.9: Eine fortschreitende Welle der Form $\psi(x, t) = A \sin k(x - vt)$, die sich mit einer Geschwindigkeit von 1 m/s nach rechts ausbreitet.

Raumfrequenz

Periodische Wellen sind Strukturen, die sich durch Raum und Zeit bewegen, wobei sie durch die Wellenlänge, die zeitliche Periode und die zeitliche Frequenz charakterisiert sind. Die moderne Optik ist auch an stationären periodischen Verteilungen von Information interessiert, die konzeptionell an Momentaufnahmen von Wellen erinnern. Tatsächlich werden wir in den Kapiteln 7 und 11 sehen, dass gewöhnliche Bilder von Gebäuden, Menschen oder Zäunen mithilfe von räumlich periodischen Funktionen und einer als Fourier-Analyse bekannten Methode erzeugt werden können.

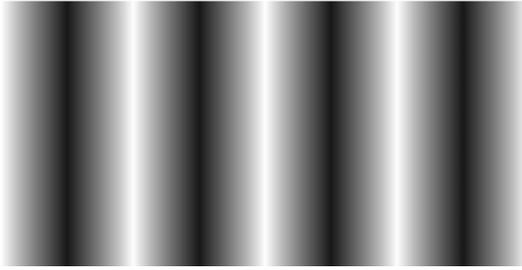


Bild 2.10: Sinusförmige Helligkeitsverteilung mit relativ kleiner Raumfrequenz.

Was wir hierbei im Hinterkopf behalten müssen, ist, dass optische Informationen in der gleichen Weise wie ein Wellenprofil periodisch im Raum verteilt sein können. Um dies zu veranschaulichen, konvertieren wir die Sinuskurve aus Abbildung 2.6 in ein Muster aus Streifen von gleichmäßig variierender Helligkeit, wie es in Abbildung 2.10 zu sehen ist. Diese sinusförmige Variation der Helligkeit hat eine *räumliche Periode* von einigen Millimetern (gemessen als Abstand zwischen zwei Helligkeitsmaxima). Hier entspricht ein Paar aus einem schwarzen und einem weißen Band einer „Wellenlänge“, das heißt, so viele Millimeter (oder Zentimeter) liegen innerhalb eines Bandpaares. Das Inverse hiervon – also eins geteilt durch eine räumliche Periode – ist die *Raumfrequenz*, die Anzahl der Bandpaare pro Millimeter (oder Zentimeter). Abbildung 2.11 zeigt ein ähnliches Muster mit einer kleineren räumlichen Periode und einer höheren Raumfrequenz. Dies sind einfache räumliche Frequenzverteilungen, die mit monochromatischen Profilen in der zeitlichen Dimension verwandt sind. Wir werden später sehen, wie aus individuellen räumlichen Frequenzverteilungen wie jenen in den Abbildungen 2.10 und 2.11 Bilder durch Superposition aufgebaut werden können.

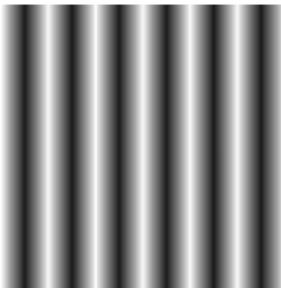


Bild 2.11: Sinusförmige Helligkeitsverteilung mit relativ hoher Raumfrequenz.

2.3 Phase und Phasengeschwindigkeit

Betrachten wir die Wellenfunktion einer beliebigen harmonischen Welle, zum Beispiel

$$\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t) . \quad (2.26)$$

Der Ausdruck, von dem der Sinus gebildet wird, ist der **Phasenwinkel** φ der Welle (auch **Phase** genannt):

$$\varphi = (kx - \omega t) . \quad (2.27)$$

Bei $t = x = 0$ gilt

$$\psi(x, t) |_{t=0, x=0} = \psi(0, 0) = 0$$

was offensichtlich ein Spezialfall ist.

Allgemeiner gilt

$$\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \varepsilon) \quad (2.28)$$

mit ε als **Anfangsphase**, Anfangsphasenwinkel oder Phasenkonstante. Um die physikalische Bedeutung von ε zu veranschaulichen, stellen wir uns vor, wir wollten eine fortschreitende harmonische Welle auf einem gespannten Seil erzeugen (Abb. 2.12). Dazu müssten wir die Hand, die das Seil hält, in einer Weise bewegen, dass ihre vertikale Verschiebung y dem Negativen ihrer Beschleunigung proportional wäre; dies entspräche einer einfachen harmonischen Bewegung (siehe Aufgabe 2.27). Bei $t = 0$ und $x = 0$ müsste sich die Hand aber nicht genau auf der x -Achse befinden, und sie müsste auch nicht mit einer Bewegung nach unten beginnen, wie es in Abbildung 2.12 der Fall ist. Sie könnte ebenso gut zuerst nach oben schwingen wie in Abbildung 2.13; dann wäre $\varepsilon = \pi$ und wir hätten

$$\psi(x, t) = y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \pi)$$

oder, anders geschrieben,

$$\psi(x, t) = A \sin(\omega t - kx) \quad (2.29)$$

oder

$$\psi(x, t) = A \cos\left(\omega t - kx - \frac{\pi}{2}\right) .$$

Die Phasenkonstante ist der konstante Beitrag zum Phasenwinkel, der am Erreger entsteht und nicht davon abhängt, wie weit oder wie lange die Welle bereits unterwegs ist.

Der Phasenwinkel in Gleichung (2.26) ist $(kx - \omega t)$, in Gleichung (2.29) entspricht er $(\omega t - kx)$. Beide Gleichungen beschreiben Wellen, die sich in positiver x -Richtung bewegen und bis auf den relativen Phasenunterschied von π identisch sind. Wenn in einer gegebenen Situation die Anfangsphase nicht von Bedeutung ist, kann man die Welle wahlweise mit Gleichung (2.26) oder (2.29) oder auch mit einer Kosinusfunktion beschreiben. Aus praktischen Gründen gibt man gelegentlich einer der Formen den Vorzug; in der Literatur treten alle beide häufig auf, und auch wir werden beide Formen verwenden.

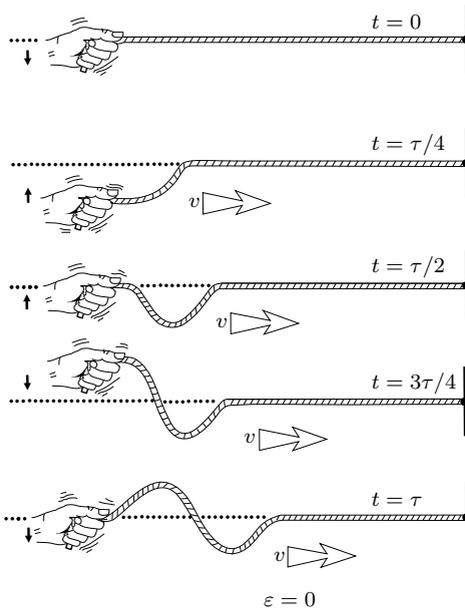


Bild 2.12: Mit $\varepsilon = 0$ gilt bei $x = 0$ und $t = \tau/4 = \pi/2\omega$: $y = A \sin(-\pi/2) = -A$.

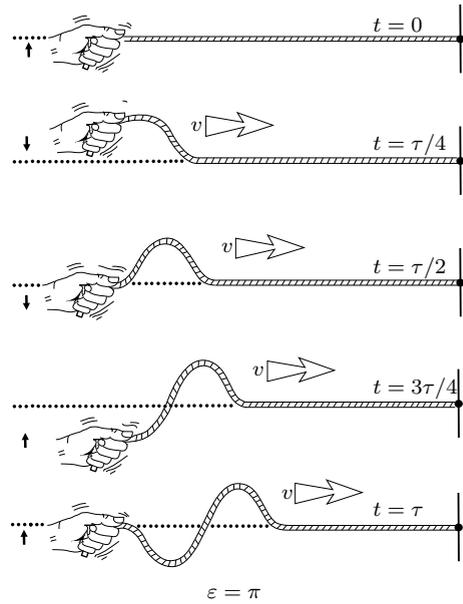


Bild 2.13: Mit $\varepsilon = \pi$ gilt bei $x = 0$ und $t = \tau/4 = \pi/2\omega$: $y = A \sin(\pi/2) = A$.

Der Phasenwinkel einer Störung, beispielsweise $\psi(x, t)$ in Gleichung (2.28), beträgt

$$\varphi(x, t) = (kx - \omega t + \varepsilon)$$

und ist offensichtlich eine Funktion von x und t . Die partielle Ableitung von φ nach t bei konstantem x ist die *Änderungsrate des Phasenwinkels mit der Zeit*,

$$\left| \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_x \right| = \omega. \quad (2.30)$$

Die Änderungsrate des Phasenwinkels in einem beliebigen festen Punkt entspricht der Winkelgeschwindigkeit der Welle, der Geschwindigkeit, mit der ein Punkt auf dem Seil in Abbildung 2.12 auf- und niederschwingt. Dieser Punkt muss dieselbe Anzahl von Zyklen pro Sekunde absolvieren wie die Welle; bei jedem Zyklus nimmt φ um 2π zu. Die Größe ω ist der Winkel, den die Phase pro Sekunde überstreicht. Die Größe k ist der Winkel, den die Phase pro Meter überstreicht

In ähnlicher Weise können wir die *Änderungsrate des Phasenwinkels mit dem Abstand* bei konstantem t aufschreiben:

$$\left| \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_t \right| = k. \quad (2.31)$$

Diese beiden Ausdrücke erinnern an eine Gleichung aus der Theorie der partiellen Ableitungen, die in der Thermodynamik häufig angewendet wird:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\varphi} = \frac{-(\partial\varphi/\partial t)_x}{(\partial\varphi/\partial x)_t}. \quad (2.32)$$

Der Term auf der linken Seite entspricht der Ausbreitungsgeschwindigkeit unter der Bedingung eines konstanten Phasenwinkels. Stellen wir uns eine harmonische Welle vor; wir wählen einen beliebigen Punkt auf ihrem Profil, beispielsweise ein Maximum. Während sich die Welle durch den Raum bewegt, bleibt die y -Verschiebung des gewählten Punktes konstant. Da der Phasenwinkel die einzige Variable der harmonischen Wellenfunktion ist, bleibt auch er für unseren Punkt konstant – und zwar bei einem Wert, der das y liefert, das dem gewählten Punkt entspricht. Der Punkt bewegt sich mit der Geschwindigkeit v gemeinsam mit dem Profil und der Bedingung des konstanten Phasenwinkels fort.

Bilden wir nun die geeigneten partiellen Ableitungen von φ , wie sie beispielsweise durch Gleichung (2.29) gegeben sind, und setzen sie in Gleichung (2.32) ein, so erhalten wir

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\varphi} = \pm \frac{\omega}{k} = \pm v. \quad (2.33)$$

Die Einheit von ω ist rad/s und die Einheit von k ist rad/m. Mit dieser Geschwindigkeit bewegt sich das Wellenprofil fort; man nennt sie die **Phasengeschwindigkeit** der Welle. Die Phasengeschwindigkeit trägt ein positives Vorzeichen, wenn x in der Bewegungsrichtung der Welle zunimmt; ansonsten ist das Vorzeichen negativ. Diese Festlegung ist konsistent mit unserer Herleitung der Wellengeschwindigkeit v : $v > 0$.

Betrachten wir nun den Prozess der Fortbewegung eines konstanten Phasenwinkels und seine Beziehung zu einer beliebigen harmonischen Wellengleichung, beispielsweise

$$\psi = A \sin k(x \pm vt)$$

mit

$$\varphi = k(x - vt) = \text{konstant} .$$

Mit zunehmendem t muss auch x wachsen; das gilt auch für $x < 0$ und damit $\varphi < 0$. Die Bedingung des konstanten Phasenwinkels bewegt sich dann in Richtung zunehmenden x . Solange die beiden Terme in der Klammer voneinander subtrahiert werden, bewegt sich die Welle in positiver x -Richtung. Andererseits muss bei

$$\varphi = k(x + vt) = \text{konstant}$$

x mit zunehmendem t abnehmen; die Bedingung des konstanten Phasenwinkels bewegt sich dann in Richtung abnehmenden x .

Beispiel 2.5

Eine fortschreitende Welle kann zur Zeit $t = 0$ in SI-Einheiten in der Form $\psi(y, 0) = (0,030 \text{ m}) \cos(\pi y/2,0)$ geschrieben werden. Die Störung pflanzt sich mit einer Phasengeschwindigkeit von $2,0 \text{ m/s}$ in der negativen y -Richtung fort. Schreiben Sie einen Ausdruck auf, der die Welle zur Zeit $t = 6,0 \text{ s}$ beschreibt.

Lösung Wir schreiben die Welle in der Form

$$\psi(y, t) = A \cos 2\pi \left(\frac{y}{\lambda} \pm \frac{t}{\tau} \right).$$

Hier ist $A = 0,030 \text{ m}$ und

$$\psi(y, 0) = (0,030 \text{ m}) \cos 2\pi \left(\frac{y}{4,0} \right).$$

Wir brauchen die Periode, und wegen $v = \nu\lambda = \lambda/\tau$ erhalten wir für $\lambda = 4,0 \text{ m}$ $\tau = \lambda/v = (4,0 \text{ m})/(2,0 \text{ m/s}) = 2,0 \text{ s}$. Folglich gilt

$$\psi(y, t) = (0,030 \text{ m}) \cos 2\pi \left(\frac{y}{4,0} + \frac{t}{2,0} \right).$$

Das positive Vorzeichen in der Phase bedeutet, dass die Bewegung in die negative y -Richtung erfolgt. Bei $t = 6,0 \text{ s}$ haben wir

$$\psi(y, 6,0) = (0,030 \text{ m}) \cos 2\pi \left(\frac{y}{4,0} + 3,0 \right).$$

Jeder Punkt einer harmonischen Welle mit gleich bleibender Stärke bewegt sich so, dass $\varphi(x, t)$ zeitlich konstant ist – in anderen Worten, dass gilt $d\varphi(x, t)/dt = 0$ oder $d\psi(x, t)/dt = 0$. Dies trifft für alle Wellen zu, auch für nicht periodische; es führt uns (siehe Aufgabe 2.34) zu dem Ausdruck

$$\pm v = - \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_x / \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_t. \quad (2.34)$$

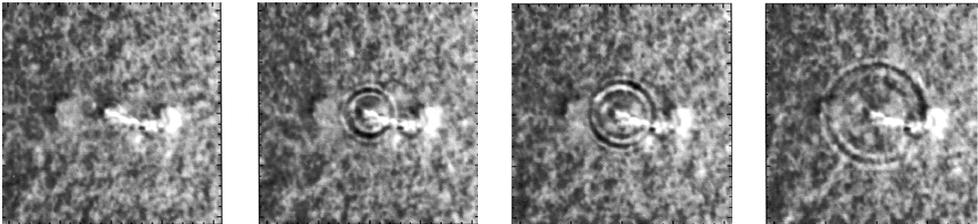
Daraus lässt sich bei bekanntem $\psi(x, t)$ bequem v bestimmen. Beachten Sie, dass v immer positiv ist; ergibt der Bruch auf der rechten Seite eine negative Zahl, so bedeutet dies, dass die Bewegung in negativer x -Richtung verläuft.

Abbildung 2.14 zeigt zweidimensionale Wellen auf der Oberfläche einer Flüssigkeit. In der Zeichnung kommt die sinusförmige Natur der Störung beim Auf und Ab des Mediums zum Ausdruck. Zur Veranschaulichung des Vorgangs bietet sich noch eine andere Sichtweise an: *Die Kurven, die jeweils alle diejenigen Punkte miteinander verbinden, zu denen derselbe Phasenwinkel gehört, sind Kreise.* Wenn nun A bei jedem

bestimmten Abstand von der Quelle in jeder Richtung konstant ist und φ in einem bestimmten Kreis ebenfalls, so muss auch ψ über diesem Kreis konstant sein. Mit anderen Worten: Alle korrespondierenden Wellenberge und -täler fallen auf Kreise – daher bezeichnen wir das Phänomen als Kreiswellen, die sich mit der Geschwindigkeit v von der Quelle aus nach außen ausbreiten.



Bild 2.14: Idealisierte Kreiswellen. (Foto E. H.)



Eine Sonneneruption verursacht seismische Wellen, die sich über die Oberfläche ausbreiten.

2.4 Das Superpositionsprinzip

Aus der Form der Wellengleichung in Differenzialschreibweise (2.11) wird eine interessante Eigenschaft der Wellen ersichtlich, die man bei einem klassischen Teilchenstrom nicht findet. Es seien die Wellenfunktionen ψ_1 und ψ_2 zwei separate Lösungen der Wellengleichung; dann ist auch $(\psi_1 + \psi_2)$ eine Lösung. Dieses so genannte **Superpositionsprinzip** lässt sich leicht beweisen. Es muss gelten

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2}.$$

Durch Addition beider Ausdrücke gelangen wir zu

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2}$$

und daraus zu

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\psi_1 + \psi_2) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\psi_1 + \psi_2) ;$$

man sieht sofort, dass $(\psi_1 + \psi_2)$ tatsächlich ebenfalls eine Lösung ist. Physikalisch bedeutet das Prinzip Folgendes: Gelangen zwei einzelne Wellen zum selben Ort im Raum und überlagern sich dort, so kommt es einfach zu einer Addition beider Wellen (bzw. zu einer Subtraktion der einen Welle von der anderen) und die beiden ursprünglichen Wellen werden dauerhaft zerstört. *Die resultierende Störung in jedem Punkt des Überlappungsgebietes ist gleich der algebraischen Summe der einzelnen Komponenten in diesem Punkt* (siehe Abb. 2.15). Wenn die Wellen das Überlappungsgebiet passiert haben, bewegen sie sich voneinander unbeeinflusst weiter.

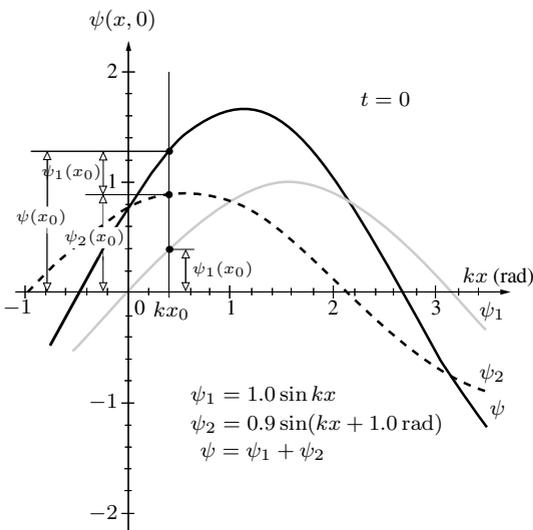


Bild 2.15: Superposition zweier Sinuswellen ψ_1 und ψ_2 gleicher Wellenlänge. Die Resultierende ist wieder eine Sinuswelle mit der gleichen Wellenlänge, die sich in jedem Punkt als algebraische Summe der Komponenten ergibt. Bei $x = x_0$ ist also $\psi(x_0) = \psi_1(x_0) + \psi_2(x_0)$; die Auslenkungen addieren sich. Die Amplitude von ψ ist A . Sie kann auf verschiedene Weisen berechnet werden; siehe Abbildung 2.19

Beachten Sie, dass wir hier über eine *lineare* Superposition von Wellen sprechen, die man in der Praxis in der Regel antrifft. Sind die Amplituden der Wellen jedoch sehr groß, wird das Medium in nichtlinearer Weise bewegt (was in Abschn. 13.4 behandelt wird). Im Moment wollen wir uns auf die lineare Wellengleichung konzentrieren, aus der sich ein lineares Superpositionsprinzip ergibt.

Die Superposition von Wellen spielt auf die eine oder andere Weise in vielen Bereichen der Optik eine Rolle. Selbst die grundlegenden Prozesse von Reflexion und Brechung sind Ergebnisse der Streuung des Lichts an unzähligen einzelnen Atomen und somit nur mithilfe der Überlappung von Wellen zu erklären. Daher ist es immens wichtig, möglichst frühzeitig zumindest ein qualitatives Verständnis des Phänomens zu erarbeiten. Dazu wollen wir uns die beiden Wellen in Abbildung 2.15 besonders gründlich ansehen: In jedem Punkt (also bei jedem Wert von kx) addieren wir einfach ψ_1 und ψ_2 , die beide sowohl positiv als auch negativ sein können. Um dies schnell

zu überprüfen, suchen wir uns einen Punkt, wo eine der beiden Wellen null wird: Bei $\psi_1 = 0$ ist $\psi = \psi_2$, sodass sich die zu ψ und ψ_2 gehörenden Kurven in diesem Punkt schneiden (zum Beispiel bei $kx = 0$ und $kx = +3,14$ rad). In den Punkten, wo sich die Amplituden der beiden ursprünglichen Wellen zu null addieren (unterschiedliches Vorzeichen, gleicher Zahlenwert), wird $\psi = 0$ (bei $kx = +2,67$ rad). Beachten Sie auch, wie ψ_2 durch eine positive relative Phasendifferenz von 1 rad bezüglich ψ_1 nach links verschoben wird.

Wenn wir unsere Überlegungen anhand von Abbildung 2.16 fortsetzen, sehen wir, wie die Resultierende der Superposition zweier Wellen mit nahezu gleicher Amplitude von

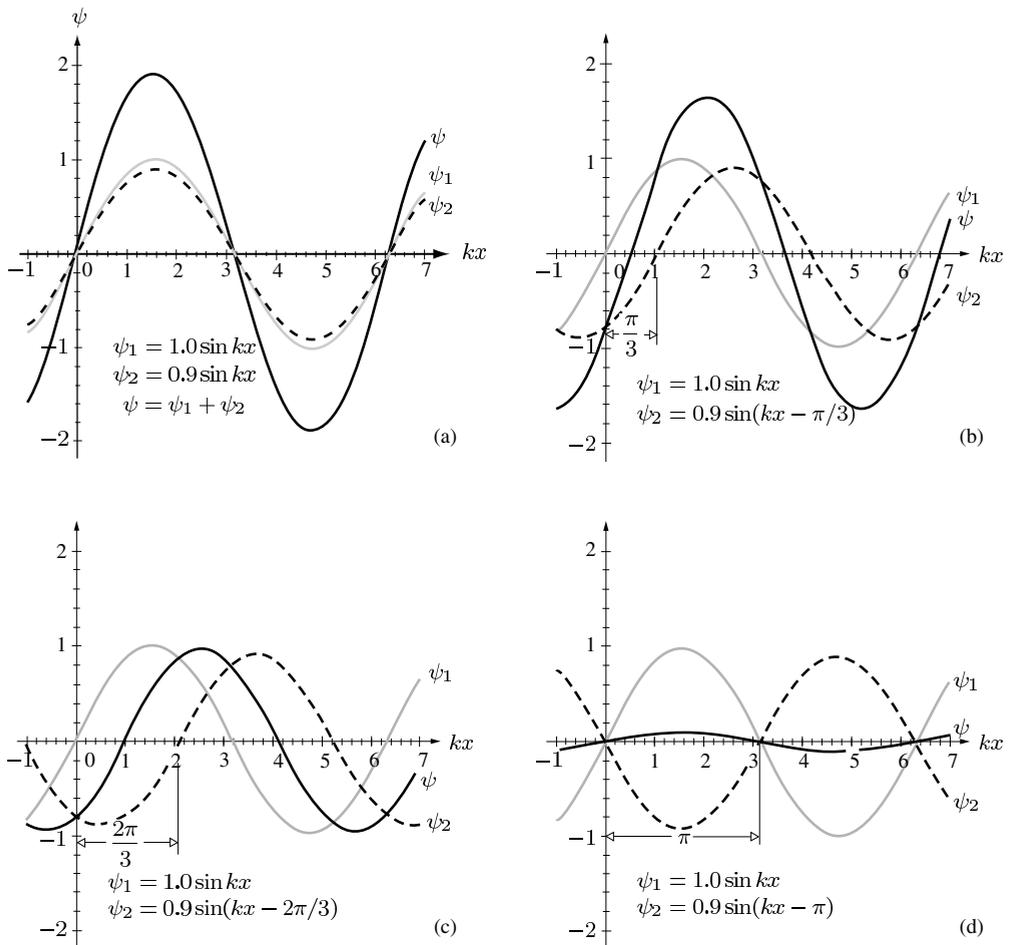


Bild 2.16: Die Superposition zweier sinusförmiger Wellen mit den Amplituden 1,0 und 0,9. Die Wellen sind in (a) phasengleich, in (b) eilt ψ_1 um $\pi/3$ voraus, in (c) eilt ψ_1 um $2\pi/3$ voraus; in (d) sind die beiden Wellen außer Phase (die Phasenverschiebung beträgt π), sodass sie einander nahezu auslöschen. Die Ermittlung der Amplituden wird in Abbildung 2.20 erläutert.

der *Phasendifferenz* zwischen den beiden Wellen abhängt. In Abbildung 2.16 *a* ist die Phasendifferenz zwischen beiden Wellen gleich null; die Wellen sind **in Phase**, sie heben und senken sich gleichzeitig und verstärken einander dabei. Die resultierende Welle hat dann zwar eine größere Amplitude als jede der Ausgangswellen, aber ihr Profil (sinusförmig), ihre Frequenz und ihre Wellenlänge stimmen mit denen der Komponenten überein. Sehen wir uns die Bilder 2.14 *a–d* nacheinander an, so fällt auf, dass die resultierende Amplitude mit wachsender Phasendifferenz kleiner wird und schließlich nahezu ganz verschwindet, wenn der Phasenunterschied gleich π ist. Die Wellen sind dann um 180° **außer Phase**. Wellen, die außer Phase sind, schwächen einander ab. Dem hier beschriebenen Phänomen gab man den Namen **Interferenz**.



Überlappende und interferierende Wasserwellen.

2.5 Die komplexe Darstellung

Im Laufe der weiteren Analyse der Wellenphänomene wird sich herausstellen, dass die Verwendung von Sinus- und Kosinusfunktionen zur Beschreibung harmonischer Wellen umständliche Rechenwege nach sich zieht. Die Formulierungen werden ziemlich kompliziert, und die zur Lösung der Gleichungen erforderlichen trigonometrischen Manipulationen sind nicht sehr übersichtlich. Eine alternative, mathematisch einfacher zu verarbeitende Beschreibung erhält man bei der Verwendung komplexer Zahlen. Komplexe Exponentialformen werden sowohl in der klassischen Mechanik als auch in der Quantenmechanik und ebenfalls in der Optik häufig benutzt.

Die komplexe Zahl z hat die Form

$$z = x + iy \tag{2.35}$$

mit $i = \sqrt{-1}$; x und y , der Real- bzw. der Imaginärteil von z , sind reelle Zahlen. Abbildung 2.17 *a* enthält die graphische Veranschaulichung dieses Sachverhalts in einem Argand-Diagramm. Mit den Polarkoordinaten r und θ erhalten wir

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \quad \text{und} \quad y = r \sin \theta, \\ z &= x + iy = r (\cos \theta + i \sin \theta). \end{aligned}$$

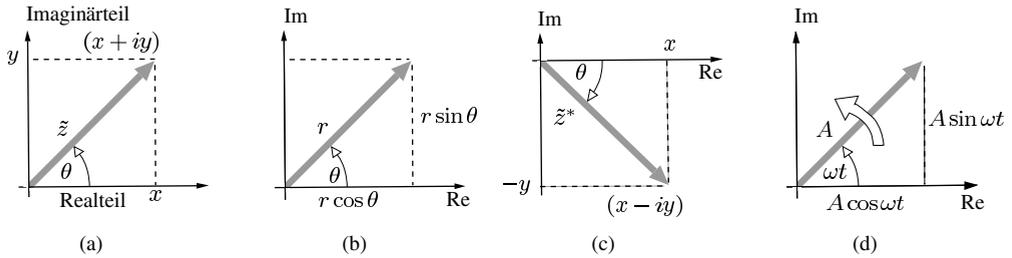


Bild 2.17: Das Argand-Diagramm dient zur Darstellung des Real- und des Imaginärteils einer komplexen Zahl. Als Koordinaten verwendet man entweder (a) x und y oder (b) r und θ . Ändert sich θ außerdem gleichförmig mit der Zeit, so rotiert der Pfeil mit der Geschwindigkeit ω (d).

Mithilfe der *eulerschen Gleichung*¹

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

gelangen wir zu

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{und} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Außerdem können wir formulieren (Abb. 2.17 b)

$$z = r e^{i\theta} = r \cos \theta + i r \sin \theta.$$

Hier ist r der Betrag von z , θ ist der Phasenwinkel von z in rad. Der Betrag der komplexen Zahl, bezeichnet als *Modulus* oder *absoluter Betrag*, wird oft mit $|z|$ angegeben. Das *konjugiert Komplexe* zu z (Abb. 2.17 c), gekennzeichnet mit einem Stern, bildet man durch einen Vorzeichenwechsel aller i :

$$z^* = (x + iy)^* = (x - iy),$$

$$z^* = r (\cos \theta - i \sin \theta),$$

$$z^* = r e^{-i\theta}.$$

Die Addition und die Subtraktion komplexer Zahlen sind wie folgt erklärt:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2)$$

und somit

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i (y_1 \pm y_2).$$

Dieser Rechenschritt ist der komponentenweisen Addition von Vektoren sehr ähnlich.

Multiplikation und Addition schreibt man am einfachsten in der polaren Form

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

¹ Falls Sie an der Gleichheit zweifeln, bilden Sie das Differenzial von $z = \cos \theta + i \sin \theta$ mit $r = 1$. Sie erhalten $dz = iz d\theta$; die Integration liefert $z = \exp(i\theta)$.

beziehungsweise

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

An dieser Stelle wollen wir einige Regeln einführen, die für die folgenden Berechnungen verwendet werden. Aus den trigonometrischen Additionsformeln (Aufgabe 2.44) folgt direkt

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

und, mit $z_1 = x$ und $z_2 = iy$,

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}.$$

Der absolute Betrag einer komplexen Zahl ist gegeben durch

$$r = |z| \equiv \sqrt{zz^*}$$

und

$$|e^z| = e^x.$$

Wegen $\cos 2\pi = 1$ und $\sin 2\pi = 0$ gilt

$$e^{i2\pi} = 1.$$

In gleicher Weise kann man schreiben

$$e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1 \quad \text{und} \quad e^{\pm i\pi/2} = \pm i.$$

Die Funktion e^z ist periodisch, sie wiederholt sich alle $i2\pi$:

$$e^{z+i2\pi} = e^z e^{i2\pi} = e^z.$$

Jede komplexe Zahl kann man als Summe aus Realteil $\operatorname{Re}(z)$ und Imaginärteil $\operatorname{Im}(z)$ schreiben:

$$z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z).$$

Damit ist

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + z^*) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*).$$

Beide Ausdrücke folgen unmittelbar aus dem Argand-Diagramm (Abb. 2.17 *a* und *c*). So ist beispielsweise $z + z^* = 2x$, weil die Imaginärteile einander aufheben und $\operatorname{Re}(z) = x$ ist.

In der Polarkoordinaten-Schreibweise mit

$$\operatorname{Re}(z) = r \cos \theta \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(z) = r \sin \theta$$

eignet sich jeder der beiden Anteile zur Beschreibung einer harmonischen Welle. Bequemer ist es, mit dem Realteil zu arbeiten; die harmonische Welle wird dann formuliert als

$$\psi(x, t) = \operatorname{Re} \left[A e^{i(\omega t - kx + \varepsilon)} \right], \quad (2.36)$$

was natürlich äquivalent ist zu

$$\psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varepsilon).$$

Wo immer es zweckmäßig ist, werden wir daher die Wellenfunktion wie folgt aufschreiben und in unseren Berechnungen verwenden:

$$\psi(x, t) = A e^{i(\omega t - kx + \varepsilon)} = A e^{i\varphi}. \quad (2.37)$$

So nutzen wir die Einfachheit der Handhabung komplexer Exponentialfunktionen aus. Erst wenn wir das endgültige Resultat erhalten haben und eine reale Welle darstellen wollen, werden wir zum Realteil übergehen. Die Schreibweise von $\psi(x, t)$ wie in Gleichung (2.37) ist verbreitet üblich, wobei man dem Realteil selbstverständlich die reale Welle zuordnet.

Die komplexe Darstellung gehört zum Handwerkszeug der modernen Physik, doch sollte man sich darüber im Klaren sein, dass sie mit Bedacht angewendet werden muss: *Nachdem man eine Welle als komplexe Funktion geschrieben und dann auf diese Funktion irgendwelche Operationen angewendet hat, kann der Realteil nur dann rekonstruiert werden, wenn es sich bei diesen Operationen um Additionen, Subtraktionen, Multiplikation mit bzw. Division durch eine reelle Größe oder um eine Differenziation bzw. Integration bzgl. einer reellen Variable handelt.* Multiplikative Operationen (einschließlich Skalarprodukt und Vektorprodukt) dürfen nur mit reellen Größen durchgeführt werden. Es kann zu falschen Ergebnissen führen, wenn man komplexe Größen multipliziert und dann den Realteil nimmt (siehe Aufgabe 2.47).

2.6 Zeiger und die Addition von Wellen

Den Pfeil im Argand-Diagramm (Abb. 2.17 d) lässt man mit der Frequenz ω rotieren; der Winkel wird gleich ωt gesetzt. So gelangt man zu einem Schema für die Darstellung (und später auch für die Addition) von Wellen, das wir an dieser Stelle qualitativ einführen und weiter hinten (Abschn. 7.1.3) quantitativ ableiten wollen. Abbildung 2.18 zeigt eine harmonische Welle mit der Amplitude A , die sich nach links bewegt. Der eingezeichnete Pfeil hat die Länge A und läuft mit konstanter Geschwindigkeit um, wobei er mit der x -Achse, unserer Referenzachse, den Winkel ωt einschließt. Der rotierende Pfeil bildet gemeinsam mit dem zugehörigen Phasenwinkel einen **Zeiger** oder **Phasor**, der alle Informationen über die damit verknüpfte harmonische Welle enthält. Für einen Zeiger werden in der Regel die Amplitude A und die Phase φ angegeben: $A \angle \varphi$ oder $A(\varphi)$.

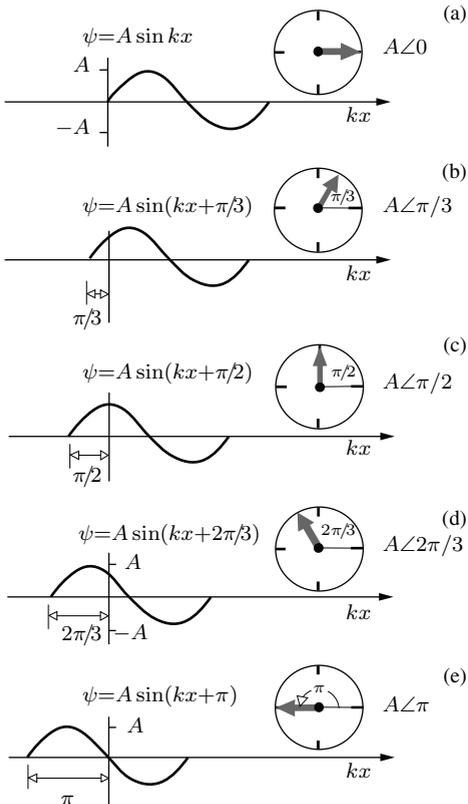


Bild 2.18: Dargestellt sind die Graphen der Funktion $\psi = A \sin(kx + \omega t)$ für verschiedene Werte von ωt (nämlich $0, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3$ und π) und die zugehörigen Zeigerdiagramme. Wieder ist die Projektion des rotierenden Pfeils auf die vertikale Achse gleich dem Wert von ψ auf der Achse $kx = 0$.

Wir wollen uns dies anhand von Abbildung 2.18 schrittweise veranschaulichen. Der Zeiger in Abbildung 2.18 *a* hat einen Phasenwinkel von null; das bedeutet, er liegt auf der Bezugsachse. Als Referenz lässt sich auch die zugehörige Sinusfunktion verwenden. In Abbildung 2.18 *b* beträgt der Phasenwinkel $+\pi/3$ rad; die Sinusfunktion ist um diesen Betrag nach links verschoben. Auf diese Weise liegt das erste Maximum der Sinuskurve bei einem kleineren Wert von kx als im Fall von Bild *a*; die Kurve ist der Referenz um $\pi/3$ rad voraus. Die Phasenwinkel in den Bildern *c*, *d* und *e* betragen $+\pi/2$ rad, $+2\pi/3$ rad und $+\pi$ rad. Die Kurvenfolge in ihrer Gesamtheit entspricht einer Welle $\psi = A \sin(kx + \omega t)$, die sich nach links fortbewegt. Der Zeiger, der entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn in einer Weise rotiert, dass der Phasenwinkel zu jedem Zeitpunkt gleich ωt ist, kann als gleichwertige Darstellung dieser Welle gelten. Abbildung 2.7 zeigt eine ähnliche Situation; allerdings rotiert der Zeiger hier im Uhrzeigersinn, und die zugehörige Welle bewegt sich nach rechts fort.

Bei der Kombination mehrerer Wellenfunktionen sind in der Regel die resultierende Phase und die Amplitude von Interesse. Unter diesem Gesichtspunkt betrachten wir noch einmal die Addition der Wellen in Abbildung 2.16: Offensichtlich ergibt sich die Amplitude der resultierenden Welle, A , als Summe der Amplituden der Komponenten, wenn die zugehörigen Störungen in Phase sind: $A = A_1 + A_2 = 1,0 + 0,9 = 1,9$

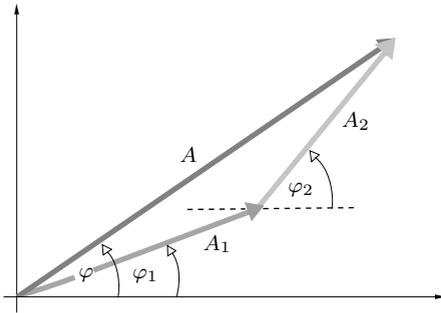


Bild 2.19: Die Summe zweier Zeiger $A_1 \angle \varphi_1$ und $A_2 \angle \varphi_2$ ist gleich $A \angle \varphi$.

(Abb. 2.16 a). Dies entspricht der Addition zweier kollinear Vektoren, die in dieselbe Richtung weisen. Sind dagegen die beiden Komponenten um 180° außer Phase (Abb. 2.16 d), entsteht eine Situation wie bei der Addition zweier entgegengesetzt gerichteter kollinear Vektoren und $A = A_1 - A_2 = 1,0 - 0,9 = 0,1$. Zwar sind Zeiger keine Vektoren, aber die Summationsregeln sind ähnlich. Später werden wir beweisen, dass man die Addition zweier Zeiger $A_1 \angle \varphi_1$ und $A_2 \angle \varphi_2$ zum resultierenden Zeiger $A \angle \varphi$ in Form von Pfeilen ausführen kann (Abb. 2.19), wie wir es von Vektoren gewohnt sind. Da die Zeiger mit einer gemeinsamen Geschwindigkeit ω rotieren, können wir sie einfach bei $t = 0$ einfrieren, ohne uns weitere Gedanken über ihre Zeitabhängigkeit zu machen; dies vereinfacht die bildliche Darstellung beträchtlich.

Die vier Zeigerdiagramme in Abbildung 2.20 entsprechen den vier Wellenüberlagerungen, die in Abbildung 2.16 gezeigt sind. Befinden sich beide Wellen in Phase (wie in Abb. 2.16 a), so setzen wir ihre Phasenwinkel jeweils gleich null (Abb. 2.20 a) und zeichnen die Zeiger entlang der Referenzachse $\varphi = 0$ hintereinander ein. Unterscheiden sich die beiden Phasenwinkel um $\pi/3$ (wie in Abb. 2.16 b), so beträgt auch der relative Phasenwinkel der Zeiger $\pi/3$ (Abb. 2.20 b). Der Phasenwinkel der Resultierenden liegt dann zwischen 0 und $\pi/3$, wie man in Abb. 2.16 b und 2.20 b sieht, und die Amplitude der Welle ist entsprechend geringer. Wenn sich die Phasenwinkel um

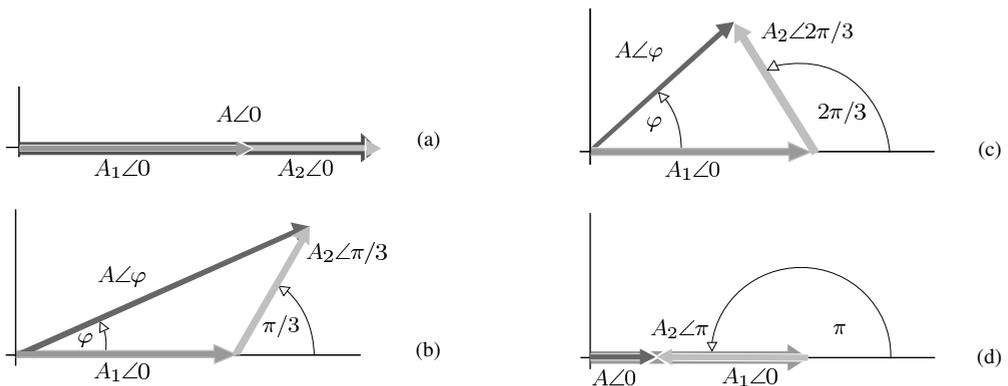


Bild 2.20: Addition von Zeigern.

$2\pi/3$ unterscheiden (wie in Abb. 2.16 c), bilden die zugehörigen Zeiger ein nahezu gleichseitiges Dreieck (abgesehen davon, dass $A_1 > A_2$ ist); A liegt dann zwischen A_1 und A_2 . Ist schließlich der Unterschied der Phasenwinkel der beiden Wellen (bzw. Zeiger) gleich π (also 180°), löschen die Wellen einander fast aus, und die Amplitude der Resultierenden wird minimal. Beachten Sie (Abb. 2.20 d), dass der resultierende Zeiger in Richtung der Bezugsachse weist und damit denselben Phasenwinkel (null) hat wie $A_1 \angle \varphi_1$. Er ist damit bezüglich A_2 um 180° außer Phase, was analog auf die zugehörigen Wellen in Abbildung 2.16 d zutrifft.

Dies war nur eine knappe Einführung des Konzepts der Zeiger und der Zeigeraddition. Wir kommen darauf in Abschnitt 7.1 zurück, wo die Methode ausgiebig genutzt wird.

2.7 Ebene Wellen

Eine Lichtwelle kann zu einem gegebenen Zeitpunkt im Raum durch ihre Frequenz, ihre Amplitude, die Richtung ihrer Propagation usw. beschrieben werden, doch das sagt nicht viel aus über die optischen Störungen, die in einem ausgedehnten räumlichen Gebiet herrschen. Um darüber etwas herauszufinden, führen wir das Konzept der **Wellenfront** ein. Licht ist ein Schwingungsphänomen, es korrespondiert mit harmonischen Oszillationen eines bestimmten Typs, und die eindimensionale Sinuswelle ist ein wichtiges Element, um eine erste Vorstellung von dem Phänomen zu gewinnen. Abbildung 2.14 zeigt, wie Sinuswellen, die sich radial in zwei Dimensionen ausbreiten, eine gemeinsame, expandierende Störung bilden, eine *Kreiswelle*. Jeder Scheitel, resultierend aus einer eindimensionalen, nach außen fortschreitenden kleinen Welle, liegt auf einem Kreis, und das gleiche gilt für die Wellentäler – tatsächlich gilt es für jeden vorgegebenen Wert der Welle. Für jede gegebene Phase (beispielsweise $5\pi/2$) haben die Sinuskomponenten einen bestimmten Wert (beispielsweise 1,0) und alle Punkte mit diesem Wert liegen auf einem Kreis. Oder anders ausgedrückt, die Orte aller Punkte, an denen die Phasen aller eindimensionalen kleinen Wellen gleich sind, bilden ein Muster aus konzentrischen Kreisen, wobei jeder Kreis einer bestimmten Phase entspricht (für die Scheitel beispielsweise $\pi/2, 5\pi/2, 9\pi/2$ usw.)

Ganz allgemein ist eine dreidimensionale Wellenfront in jedem Augenblick eine Fläche konstanter Phase, die auch als Phasenfront bezeichnet wird. Reale Wellenfronten haben gewöhnlich extrem komplizierte Konfigurationen. Die von einem Baum oder einem Gesicht reflektierte Lichtwelle ist eine ausgedehnte, irreguläre, gekrümmte Fläche voller Beulen und Dellen, die sich nach außen bewegt und verschwindet. Im Rest dieses Kapitels werden wir die mathematische Darstellung einiger außerordentlich nützlicher idealisierter Wellenfronten untersuchen, und zwar solcher, die unkompliziert genug sind, um sie durch einfache Ausdrücke beschreiben zu können.

Das einfachste Beispiel für eine dreidimensionale Welle ist wohl eine ebene Welle. Sie existiert genau dann, wenn alle Flächen mit gleichem Phasenwinkel einen Satz von Ebenen bilden, welche gewöhnlich senkrecht auf der Fortpflanzungsrichtung

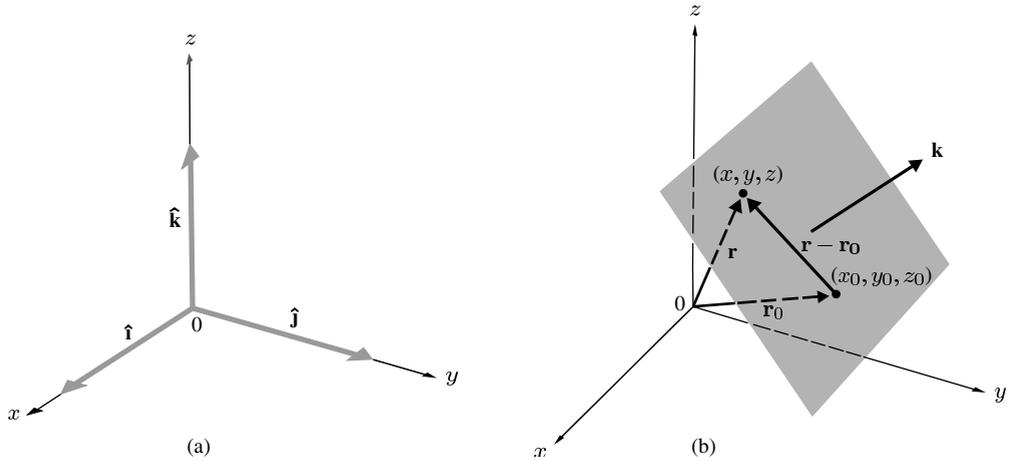


Bild 2.21: (a) Kartesische Einheits-Basisvektoren. (b) Eine ebene Welle, die in \mathbf{k} -Richtung propagiert.

stehen. Dass wir uns dieser Art von Wellen näher zuwenden, hat praktische Gründe; beispielsweise lässt sich unter Verwendung optischer Geräte ohne weiteres Licht herstellen, das die Form ebener Wellen hat.

Den mathematischen Ausdruck für eine Ebene, die senkrecht zu einem gegebenen Vektor \mathbf{k} ist und durch einen Punkt (x_0, y_0, z_0) verläuft, kann man leicht herleiten (Abb. 2.21). Wir schreiben den Ortsvektor zunächst als Kombination aus den Einheitsvektoren des kartesischen Koordinatensystems (Abb. 2.21 a),

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}.$$

Der Vektor beginnt in einem beliebigen Ursprung O und endet im Punkt (x, y, z) , der sich zunächst irgendwo im Raum befinden kann. Ähnlich gilt

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = (x - x_0)\hat{\mathbf{i}} + (y - y_0)\hat{\mathbf{j}} + (z - z_0)\hat{\mathbf{k}}.$$

Wir setzen

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{k} = 0 \tag{2.38}$$

und zwingen damit den Vektor $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, eine Ebene senkrecht zu \mathbf{k} zu überstreichen, während sein Endpunkt (x, y, z) nacheinander alle erlaubten Werte annimmt. Mit

$$\mathbf{k} = k_x\hat{\mathbf{i}} + k_y\hat{\mathbf{j}} + k_z\hat{\mathbf{k}} \tag{2.39}$$

kann man Gleichung (2.38) in der Form

$$k_x(x - x_0) + k_y(y - y_0) + k_z(z - z_0) = 0 \tag{2.40}$$

oder

$$k_x x + k_y y + k_z z = a \tag{2.41}$$

aufschreiben mit

$$a = k_x x_0 + k_y y_0 + k_z z_0 = \text{konstant} . \quad (2.42)$$

Die kürzeste Form der Gleichung einer zu \mathbf{k} senkrechten Ebene ist dann gerade

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{konstant} = a . \quad (2.43)$$

Auf der Ebene liegen alle Punkte mit gleicher Projektion auf die \mathbf{k} -Richtung. Wir können nun einen Satz von Ebenen konstruieren, über die $\psi(\mathbf{r})$ im Raum sinusförmig variiert:

$$\psi(\mathbf{r}) = A \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) , \quad (2.44)$$

$$\psi(\mathbf{r}) = A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (2.45)$$

oder

$$\psi(\mathbf{r}) = A e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} . \quad (2.46)$$

Für jeden dieser Ausdrücke ist $\psi(\mathbf{r})$ konstant über jeder Ebene, die durch $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{konstant}$ festgelegt wird. Wir beschäftigen uns hier mit harmonischen Funktionen, die sich nach einer Verschiebung um λ in der Richtung von \mathbf{k} im Raum wiederholen sollten. Abbildung 2.22 ist eine vereinfachte Darstellung eines solchen Ausdrucks. Nur einige wenige der unendlich vielen Ebenen sind eingezeichnet; jeder von ihnen entspricht ein anderes $\psi(\mathbf{r})$. Da wir \mathbf{r} in keiner Weise beschränkt haben, sind die Ebenen in Wirklichkeit auch räumlich unendlich weit ausgedehnt. Die Störung füllt den gesamten Raum.

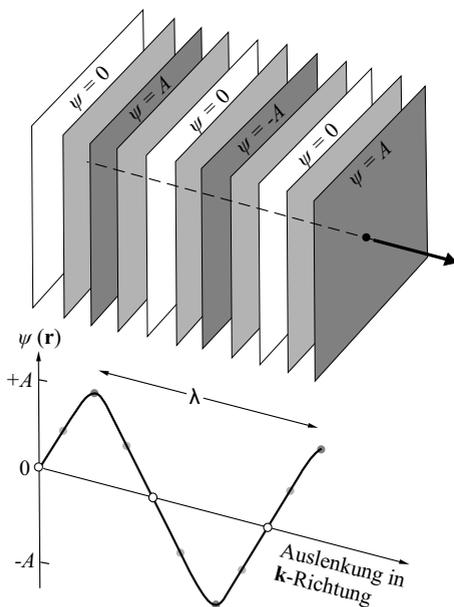


Bild 2.22: Wellenfronten einer ebenen, harmonischen Welle.

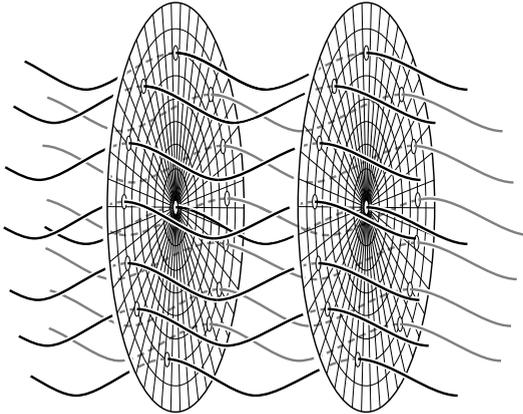


Bild 2.23: Ein Strahl besteht aus harmonischen Elementarwellen gleicher Frequenz und Wellenlänge. Die Elementarwellen sind alle in Phase, d. h., sie haben überall auf den ebenen Flächen der beiden transversalen Schnitte die gleiche Phase. Der Strahl ist daher aus ebenen Wellen zusammengesetzt.

Ein anderer Ansatz zur Visualisierung harmonischer ebener Wellen ist in Abbildung 2.23 gezeigt, in der zwei Schnitte durch einen idealen zylindrischen Strahl zu sehen sind. Das Licht stellen wir uns vor als Überlagerung unendlich vieler sinusförmiger Elementarwellen, die sich alle mit der gleichen Frequenz im Gleichschritt entlang paralleler Wege fortbewegen. Die beiden Schnitte sind exakt eine Wellenlänge voneinander entfernt, sodass auf beiden die eingezeichneten Sinuskurven alle gerade ein Maximum haben. Die beiden Flächen konstanter Phase sind flache Scheiben und man sagt, dass der Strahl aus „ebenen Wellen“ besteht. Würde einer der beiden Schnitte ein wenig entlang des Strahls verschoben, wäre die Auslenkung der Welle auf dieser neuen Wellenfront ein anderer, doch wir würden noch immer eine ebene Fläche erhalten. Würden wir die Position des Schnitts festhalten, während der Strahl durch ihn hindurchtritt, dann würde die Auslenkung der Welle an dieser Stelle sinusförmig variieren. Beachten Sie, dass alle eingezeichneten Elementarwellen die gleiche Amplitude (maximale Auslenkung) haben. Mit anderen Worten, die zusammengesetzte Welle hat überall die gleiche „Stärke“. Wir bezeichnen sie daher als *homogene* Welle.

Die räumlich periodische Natur dieser harmonischen Funktionen lässt sich wie folgt ausdrücken:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi\left(\mathbf{r} + \frac{\lambda \mathbf{k}}{k}\right). \quad (2.47)$$

Hier ist k der Betrag von \mathbf{k} und \mathbf{k}/k ein Einheitsvektor parallel dazu (Abb. 2.24). In Exponentialschreibweise lautet die entsprechende Formulierung

$$Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = Ae^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{k}/k)} = Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{i\lambda k}.$$

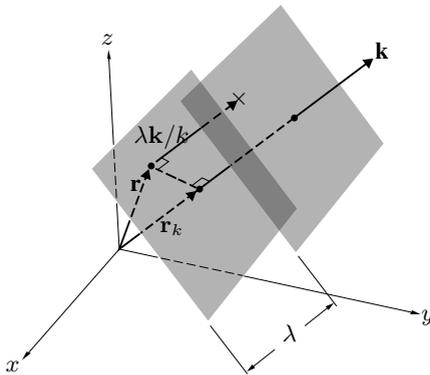


Bild 2.24: Ebene Wellen.

Damit dies stimmt, muss

$$e^{i\lambda k} = 1 = e^{i2\pi}$$

sein. Deshalb gilt

$$\lambda k = 2\pi$$

bzw.

$$k = 2\pi/\lambda.$$

Der Vektor \mathbf{k} , dessen Betrag die bereits eingeführte *Wellenzahl* k ist, heißt **Wellenvektor**.

In jedem festen Punkt im Raum, wo \mathbf{r} konstant ist, sind auch der Phasenwinkel und $\psi(\mathbf{r})$ konstant – kurz gesagt, die Ebenen sind feststehend. Wenn sie sich bewegen sollen, muss sich $\psi(\mathbf{r})$ mit der Zeit ändern. Dies können wir erreichen, wenn wir eine Zeitabhängigkeit einführen, analog zum Vorgehen im Fall der eindimensionalen Welle. Es ist dann

$$\psi(r, t) = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\mp\omega t)}, \quad (2.48)$$

wobei A , ω und k konstant sind. Der Störung, die sich in Richtung \mathbf{k} fortbewegt, können wir in jedem Raum- und Zeitpunkt eine Phase zuordnen. Flächen, die zu einem bestimmten Zeitpunkt alle Punkte gleicher Phase miteinander verbinden, heißen **Wellenfronten**. Beachten Sie, dass der Wert der Wellenfunktion auf der Wellenfront nur dann konstant ist, wenn die Amplitude A in jedem Punkt der Wellenfront einen festen Wert annimmt. Allgemein ist A eine Funktion von \mathbf{r} und nicht notwendigerweise im gesamten Raum, nicht einmal auf einer Wellenfront, konstant. Im letzteren Fall nennt man die Welle *inhomogen*. Erst später, wenn wir Laserstrahlen und innere Totalreflexion behandeln, werden wir derartigen Wellen wieder begegnen.

Die Phasengeschwindigkeit der durch Gleichung (2.48) gegebenen ebenen Welle ist gleich der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellenfront. In Abbildung 2.24 ist r_k die skalare Komponente von \mathbf{r} in Richtung von \mathbf{k} . Die Auslenkung ist auf einer

Wellenfront konstant; nach einer Zeit dt , wenn sich die Front in Richtung \mathbf{k} um dr_k fortbewegt hat, ist dann

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(r_k + dr_k, t + dt) = \psi(r_k, t) \quad (2.49)$$

oder in exponentieller Schreibweise

$$Ae^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \mp \omega t)} = Ae^{i(kr_k + kdr_k \mp \omega t \mp \omega dt)} = Ae^{i(kr_k \mp \omega t)},$$

weshalb auch gelten muss

$$k dr_k = \pm \omega dt.$$

Der Betrag der Geschwindigkeit der Welle, dr_k/dt , ist

$$\frac{dr_k}{dt} = \pm \frac{\omega}{k} = \pm v. \quad (2.50)$$

Dieses Ergebnis hätten wir ebenso erhalten, wenn wir das Koordinatensystem in Abbildung 2.24 so weit gedreht hätten, dass \mathbf{k} parallel zur x -Achse ist. Für diese Orientierung gilt

$$\psi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i(kx \mp \omega t)}$$

wegen $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr_k = kx$. Die Welle wäre damit auf eine eindimensionale Störung zurückgeführt worden, wie sie bereits diskutiert wurde.

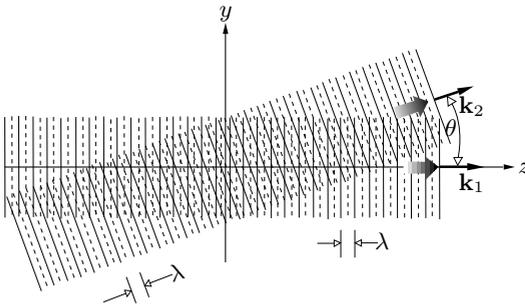


Bild 2.25: Überlagerung zweier Wellen gleicher Wellenlänge, die sich in unterschiedlichen Richtungen fortpflanzen.

Betrachten wir nun die beiden Wellen in Abbildung 2.25. Sie haben dieselbe Wellenlänge λ , sodass gilt $k_1 = k_2 = k = 2\pi/\lambda$. Welle 1, die sich entlang der z -Achse fortbewegt, kann man schreiben als

$$\psi_1 = A_1 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} z - \omega t \right).$$

Da \mathbf{k}_1 und \mathbf{r} parallel sind, ist $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} = kz = (2\pi/\lambda)z$. Ähnlich ist für Welle 2 $\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} = k_z z + k_y y = (k \cos \theta)z + (k \sin \theta)y$ und

$$\psi_2 = A_2 \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (z \cos \theta + y \sin \theta) - \omega t \right].$$

Auf diese Ausdrücke werden wir bei der ausführlichen Behandlung der Interferenz noch einmal zurückkommen, insbesondere im Hinblick auf die Situation im Überlappungsgebiet.

Die ebene harmonische Welle wird häufig in kartesischen Koordinaten geschrieben:

$$\psi(x, y, z, t) = Ae^{i(k_x x + k_y y + k_z z \mp \omega t)} \quad (2.51)$$

oder

$$\psi(x, y, z, t) = Ae^{i[k(\alpha x + \beta y + \gamma z) \mp \omega t]} \quad (2.52)$$

mit α , β und γ als Richtungskosinustermen von \mathbf{k} (siehe Aufgabe 2.48). Der Betrag des Wellenvektors ist durch die Komponenten gegeben:

$$|\mathbf{k}| = k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad (2.53)$$

und natürlich

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \quad (2.54)$$

Beispiel 2.6

Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, kann das \mathbf{E} -Feld einer ebenen elektromagnetischen Welle durch den folgenden Ausdruck angegeben werden:

$$\mathbf{E} = (100 \text{ V/m}) \hat{\mathbf{j}} e^{i(kz + \omega t)}.$$

(a) Wie groß ist die Amplitude dieser Welle im elektrischen Feld? (b) In welche Richtung pflanzt sich die Welle fort? (c) Welche Richtung hat \mathbf{E} ? (d) Nehmen Sie an, die Geschwindigkeit der Welle ist $2,998 \times 10^8 \text{ m/s}$ und die Wellenlänge 500 nm . Bestimmen Sie hieraus die Frequenz.

Lösung (a) Die Amplitude kann einfach abgelesen werden: 100 V/m . (b) Hier ist $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kz$, d. h., die ebene Wellenfront ist senkrecht zur z -Achse. Oder anders formuliert, k_x und k_y sind null und $k = k_z$. Die Phase $(kz + \omega t)$ enthält ein positives Vorzeichen, was bedeutet, dass die Welle in die negative z -Richtung propagiert. (c) Der Vektor \mathbf{E} liegt in Richtung von $\hat{\mathbf{j}}$, aber weil die Welle harmonisch ist, ist die Richtung von \mathbf{E} zeitabhängig und oszilliert. Wir sollten also besser sagen $\pm \hat{\mathbf{j}}$. (d)

$$v = \nu \lambda,$$

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{2,998 \times 10^8 \text{ m/s}}{500 \times 10^{-9} \text{ m}},$$

$$\nu = 6,00 \times 10^{14} \text{ Hz}.$$

Wir haben nun die ebenen Wellen unter besonderer Berücksichtigung harmonischer Funktionen untersucht. Diese Wellen sind in zweifacher Hinsicht von Bedeutung: erstens in physikalischer, denn Sinuswellen können mithilfe eines harmonischen Oszillators leicht erzeugt werden, und zweitens in formaler, denn jede dreidimensionale Welle lässt sich als Überlagerung ebener Wellen mit verschiedenen, definierten Amplituden und Ausbreitungsrichtungen formulieren.



Ein einzelner kollimierter Laserpuls, der über die Oberfläche eines Lineals streicht. Der ultrakurze Lichtblitz entspricht einem Abschnitt einer ebenen Welle, der nur 300×10^{-15} s andauerte und lediglich einen Bruchteil eines Millimeters lang war. (Mit frdl. Genehmigung von J. Valdmánis und N. H. Abramson.)

Es fällt nicht schwer, sich eine Reihe ebener Wellen (wie in Abb. 2.22) vorzustellen, deren Auslenkungen sich nicht harmonisch verhalten (siehe Foto). Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, dass eine harmonische ebene Welle tatsächlich ein Spezialfall allgemeinerer ebener Wellen ist.

Mathematisch erstreckt sich eine ebene Welle in alle Richtungen bis nach unendlich, was physikalisch natürlich nicht sein kann. Eine reale „ebene Welle“ ist etwas Endliches, das – egal wie groß es ist – einer mathematischen Ebene nur ähnelt. Da Linsen, Spiegel und Laserstrahlen allesamt endlich sind, ist diese Ähnlichkeit gewöhnlich gut genug.

Beispiel 2.7

Eine ebene elektromagnetische Welle wird durch ihr elektrisches Feld E beschrieben. Sie hat die Amplitude E_0 , die Kreisfrequenz ω , die Wellenlänge λ und bewegt sich mit der Geschwindigkeit c nach außen in Richtung des Einheits-Propagationsvektors

$$\hat{\mathbf{k}} = (4\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}})/\sqrt{20}$$

(nicht zu verwechseln mit dem Einheits-Basisvektor $\hat{\mathbf{k}}$). Schreiben Sie einen Ausdruck für E , den Betrag des elektrischen Feldes, auf.

Lösung Wir suchen eine Gleichung der Form

$$E(x, y, z, t) = E_0 e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\omega t)} .$$

Hierbei ist $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = 2\pi/\lambda \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$, und wenn wir den gegebenen Wellenvektor einsetzen, erhalten wir

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \frac{2\pi}{\lambda\sqrt{20}} (4\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}) \cdot (x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}) = \frac{\pi}{\lambda\sqrt{5}} (4x + 2y).$$

Folglich ist

$$E = E_0 e^{i\left[\frac{\pi}{\lambda\sqrt{5}}(4x+2y) - \omega t\right]}.$$

2.8 Die dreidimensionale Wellengleichung

Die ebene Welle – ob harmonisch oder nicht – ist die einzige dreidimensionale Welle, die sich im Raum fortpflanzt, ohne ihr Profil zu ändern. Wellen *generell* als Störung mit *unverändertem* Profil aufzufassen, ist daher offensichtlich nicht ganz korrekt. Alternativ kann man eine Welle als eine Lösung einer Wellengleichung definieren. Was wir nun brauchen, ist eine solche Gleichung in dreidimensionaler Ausdehnung. Diese zu finden, sollte nicht schwer sein – wir müssen lediglich die bereits bekannte eindimensionale Form, Gleichung (2.11), verallgemeinern. In der dreidimensionalen Gleichung (in kartesischen Koordinaten) sollten die Ortsvariablen x , y und z symmetrisch erscheinen²; dies wollen wir bei der folgenden Herleitung im Auge behalten. Die durch Gleichung (2.52) gegebene Wellenfunktion $\psi(x, y, z, t)$ ist eine spezielle Lösung der gesuchten Differenzialgleichung. In Analogie zur Herleitung von Gleichung (2.11) berechnen wir die folgenden partiellen Ableitungen von Gleichung (2.52):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\alpha^2 k^2 \psi \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\beta^2 k^2 \psi \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\gamma^2 k^2 \psi \quad (2.57)$$

und

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi. \quad (2.58)$$

² In kartesischen Koordinaten wird keine der drei Achsen bevorzugt. Wir können daher in der Wellengleichung x gegen z , y gegen x und z gegen y austauschen (die Rechtshändigkeit des Systems soll erhalten bleiben), ohne dass sich die Aussage der Gleichung ändert.

Durch Addition der drei Ableitungen nach den Ortsvariablen und unter Verwendung der Beziehung $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ erhalten wir

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -k^2 \psi. \quad (2.59)$$

Wir verbinden dies mit der Ableitung nach der Zeit, Gleichung (2.58), und gelangen unter Beachtung von $v = \omega/k$ zur *dreidimensionalen Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (2.60)$$

Sie sehen, dass x , y und z symmetrisch auftreten; die erhaltene Gleichung sieht exakt so aus, wie man es von einer Verallgemeinerung von Gleichung (2.11) erwarten konnte.

Gleichung (2.60) schreibt man häufig verkürzt unter Verwendung des Laplace-Operators ∇^2 ,

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (2.61)$$

womit sie einfach zu

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.62)$$

wird. Nachdem wir nun diese wichtige Gleichung hergeleitet haben, wollen wir kurz überprüfen, wie sich die ebene Welle in dieses Schema einfügt. Eine Funktion der Form

$$\psi(x, y, z, t) = A e^{ik(\alpha x + \beta y + \gamma z \mp vt)} \quad (2.63)$$

ist äquivalent zu Gleichung (2.52) und damit eine Lösung von Gleichung (2.62). Man kann außerdem zeigen (Aufgabe 2.49), dass sowohl

$$\psi(x, y, z, t) = f(\alpha x + \beta y + \gamma z - vt) \quad (2.64)$$

als auch

$$\psi(x, y, z, t) = g(\alpha x + \beta y + \gamma z + vt) \quad (2.65)$$

ebene Wellen als Lösungen der Wellendifferenzialgleichung sind. Die Funktionen f und g sind zweimal differenzierbar, ansonsten aber beliebig, und sie müssen mit Sicherheit nicht harmonisch sein. Eine Linearkombination der beiden Lösungen ergibt wieder eine Lösung, die wir in etwas anderer Form aufschreiben können:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = C_1 f(\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}/k - vt) + C_2 g(\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}/k + vt). \quad (2.66)$$

C_1 und C_2 sind Konstanten.

Zur Beschreibung ebener Wellen sind kartesische Koordinaten besonders gut geeignet. Bei der Lösung physikalischer Probleme kann man die Symmetrie des Systems jedoch häufig besser ausnutzen, wenn man andere Koordinatensysteme wählt.

2.9 Kugelwellen

Wenn Sie einen Stein in ein wassergefülltes Becken werfen, so breiten sich die Oberflächenwellen vom Auftreffpunkt aus kreisförmig in zwei Dimensionen aus. Um dieses Bild auf drei Dimensionen zu erweitern, denken wir an eine kleine pulsierende Kugel, die von einer Flüssigkeit umgeben ist. Beim Ausdehnen und Zusammenziehen erzeugt die Quelle Druckveränderungen, die sich als kugelförmige Wellen nach außen fortpflanzen.

Betrachten wir nun eine idealisierte punktförmige Lichtquelle. Sie sendet die Strahlung radial, in alle Richtungen gleichmäßig, aus. Eine solche Quelle nennt man *isotrop*; die entstehenden Wellenfronten haben auch hier die Form konzentrischer Kugeln, deren Durchmesser bei der Ausbreitung in den umgebenden Raum zunimmt. Die offensichtliche Kugelsymmetrie der Wellenfronten legt nahe, sie mithilfe von Polarkoordinaten zu beschreiben (Abb. 2.26). In dieser Darstellung ist der Laplace-Operator

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad (2.67)$$

wobei r , θ und ϕ definiert sind durch

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta.$$

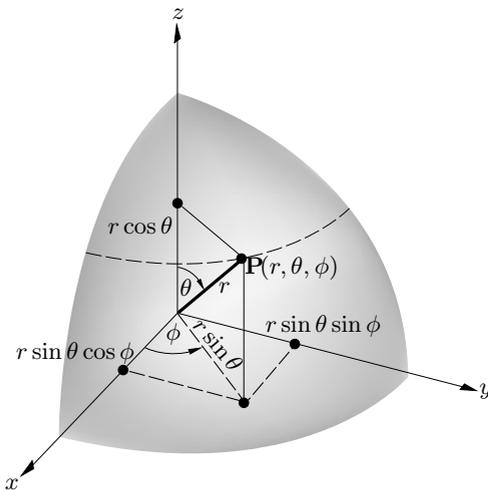


Bild 2.26: Kugelkoordinaten.

Wir erinnern uns, dass wir Kugelwellen beschreiben wollen. Dies sind sphärisch symmetrische Gebilde, die nicht von θ und ϕ abhängen, sodass gilt

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi(r, \theta, \phi) = \psi(r).$$

Die Anwendung des Laplace-Operators auf $\psi(r)$ liefert dann einfach

$$\nabla^2 \psi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right). \quad (2.68)$$

Dieses Ergebnis können wir auch erhalten, ohne Gleichung (2.67) zu kennen. Wir beginnen mit der kartesischen Form des Laplace-Operators, Gleichung (2.61), lassen diesen auf die kugelsymmetrische Wellenfunktion $\psi(r)$ wirken und formen dann jeden Term in Polarkoordinaten um. Wenn wir nur die Abhängigkeit von x berücksichtigen, erhalten wir

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}$$

und

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$

wegen

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi(r).$$

Mit

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

kommen wir zu

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} (x) + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right)$$

und

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Nach $\partial^2 \psi / \partial x^2$ bilden wir nun $\partial^2 \psi / \partial y^2$ und $\partial^2 \psi / \partial z^2$; die Addition der Resultate führt dann zu

$$\nabla^2 \psi(r) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

was gerade Gleichung (2.68) entspricht. In etwas anderer Form ausgedrückt lautet das Ergebnis

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi). \quad (2.69)$$

Die Wellengleichung können wir dann wie folgt formulieren:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (2.70)$$

Die Multiplikation beider Seiten mit r liefert

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r\psi). \quad (2.71)$$

Man erkennt leicht, dass es sich dabei gerade um die eindimensionale Wellengleichung (2.11) handelt, wobei r die Ortsvariable ist und das Produkt $(r\psi)$ die Wellenfunktion. Die Lösung von Gleichung (2.71) ist dann einfach

$$r\psi(r, t) = f(r - vt)$$

oder

$$\psi(r, t) = \frac{f(r - vt)}{r}. \quad (2.72)$$

Hierbei handelt es sich um eine Kugelwelle, die sich von der Quelle aus mit der konstanten Geschwindigkeit v radial nach außen hin fortpflanzt und deren Form, beschrieben durch die Funktion f , beliebig ist. Eine andere Lösung ist gegeben durch

$$\psi(r, t) = \frac{g(r + vt)}{r}.$$

In diesem Fall zieht sich die Welle zum Ursprung hin zusammen.³ Dass dieser Ausdruck für $r = 0$ unendlich wird, ist von geringer praktischer Bedeutung.

Ein Spezialfall der allgemeinen Lösung

$$\psi(r, t) = C_1 \frac{f(r - vt)}{r} + C_2 \frac{g(r + vt)}{r} \quad (2.73)$$

ist die *harmonische Kugelwelle*

$$\psi(r, t) = \left(\frac{\mathcal{A}}{r} \right) \cos k(r \mp vt) \quad (2.74)$$

oder

$$\psi(r, t) = \frac{\mathcal{A}}{r} e^{ik(r \mp vt)} \quad (2.75)$$

³ Wenn die Welle nicht kugelsymmetrisch ist, sind die Lösungen komplizierter; siehe dazu C. A. Coulson, *Wellen*, Kapitel 1.

mit der Konstante \mathcal{A} als so genannter *Quellstärke*. Dieser Ausdruck steht zu einem beliebigen festen Zeitpunkt für einen Satz konzentrischer Kugeln, die den gesamten Raum erfüllen. Jede Wellenfront oder Fläche konstanter Phase ist durch

$$kr = \text{konstant}$$

gegeben. Die Amplitude jeder Kugelwelle ist eine Funktion von r , wobei r^{-1} die Dämpfung beschreibt. Im Gegensatz zur ebenen Welle verändert die Kugelwelle bei der Ausbreitung und Entfernung vom Ursprung ihr Profil, weil ihre Amplitude abnimmt.⁴ Abbildung 2.27 veranschaulicht diese Zusammenhänge graphisch: Dargestellt ist eine „Mehrfachaufnahme“ eines kugelförmigen Pulses zu vier verschiedenen Zeitpunkten. Der Puls hat dieselbe räumliche Ausdehnung in jedem Punkt entlang jedes Radius r ; das bedeutet, die Impulsbreite entlang der r -Achse ist konstant. In Abbildung 2.28 wurde versucht, die dem Diagramm in der vorhergehenden Abbildung entsprechende Kugelwelle in ihrer tatsächlichen Form zu zeigen. Man sieht die Hälfte des kugelförmigen Pulses zu zwei verschiedenen Zeitpunkten während der Ausbreitung der Welle nach außen. Diese Resultate hängen, wie wir wissen, nicht von der Richtung von r ab, da die Welle kugelsymmetrisch ist. Anstelle eines Pulses wie in den Abbildungen 2.27 und 2.28 hätten wir auch eine harmonische Welle zeichnen können. Die sinusförmige Auslenkung wäre in diesem Fall durch die Kurven

$$\psi = \mathcal{A}/r \quad \text{und} \quad \psi = -\mathcal{A}/r$$

begrenzt.

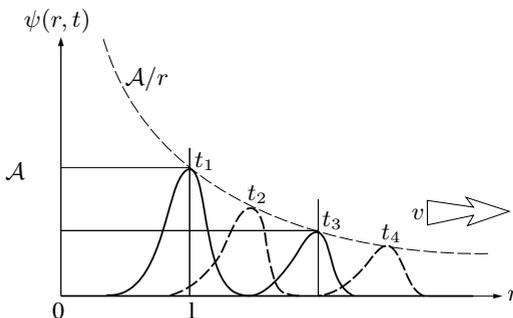


Bild 2.27: „Vierfach belichtetes Foto“ eines kugelförmigen Pulses.

Die auslaufende Kugelwelle, die von einer punktförmigen Quelle ausgeht, und die einlaufende Welle, die sich in einem Punkt zusammenzieht, sind natürlich Idealisierungen. In der Realität sind Lichtwellen nur annähernd sphärisch und ebenso nur annähernd eben.

Der Radius einer Kugelwellenfront, die sich nach außen ausbreitet, nimmt zu. In genügend großer Entfernung von der Quelle lässt sich ein kleiner Ausschnitt aus der Wellenfront näherungsweise wie ein Teil einer ebenen Welle behandeln (Abb. 2.29).

⁴ Dieser Dämpfungsfaktor folgt direkt aus der Energieerhaltung. In Kapitel 3 werden wir eine Anwendung dieser Zusammenhänge speziell auf die elektromagnetische Strahlung kennen lernen.

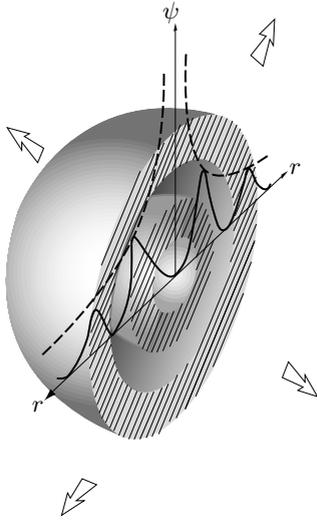


Bild 2.28: Fronten einer Kugelwelle.

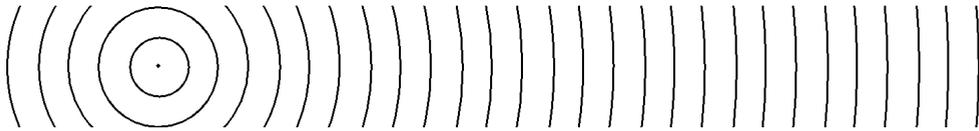


Bild 2.29: Die Fronten einer Kugelwelle werden mit zunehmender Entfernung von der Quelle flacher.

2.10 Zylinderwellen

Wir wollen nun kurz eine andere idealisierte Wellenart untersuchen – den unendlichen Kreiszyylinder. Die exakte mathematische Behandlung dieses Falls ist zu kompliziert, um sie hier im Einzelnen wiederzugeben. Das Vorgehen soll deshalb nur umrissen werden. Die Anwendung des Laplace-Operators auf ψ in Zylinderkoordinaten (Abb. 2.30) liefert

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (2.76)$$

mit

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad \text{und} \quad z = z.$$

Der einfache Fall der zylindrischen Symmetrie verlangt

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi(r, \theta, z) = \psi(r).$$

Die Unabhängigkeit von θ bedeutet, dass eine senkrecht auf der z -Achse stehende Ebene die Wellenfront in einem Kreis durchschneidet, dessen r bei verschiedenen Werten von z variieren darf. Durch die Unabhängigkeit von z wird die Wellenfront

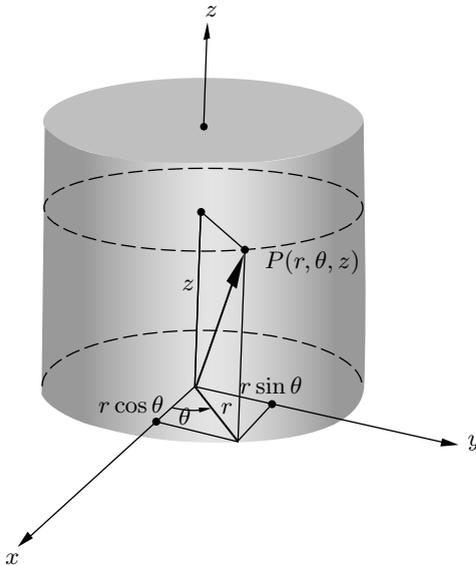


Bild 2.30: Zylinderkoordinaten.

zusätzlich beschränkt, und zwar auf einen Kreiszyylinder, dessen Zentrum auf der z -Achse liegt und dessen Länge unendlich ist. Die Wellengleichung wird damit zu

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (2.77)$$

Nach etlichen Umformungen, durch die man die Zeitabhängigkeit separiert, wird Gleichung (2.77) zur so genannten Bessel-Gleichung. Deren Lösungen nähern sich für große Werte von r asymptotisch den einfachen trigonometrischen Formen an. Ist r hinreichend groß, so wird

$$\psi(r, t) \approx \frac{\mathcal{A}}{\sqrt{r}} e^{ik(r \mp vt)}$$

und

$$\psi(r, t) \approx \frac{\mathcal{A}}{\sqrt{r}} \cos k(r \mp vt). \quad (2.78)$$

Dies entspricht einer Schar koaxialer Zylinder, die den gesamten Raum erfüllen und von einer unbegrenzten Linienquelle ausgehen oder auf eine solche hinlaufen. Lösungen, die beliebige Funktionen enthalten, wie sie sowohl bei Kugelwellen (Gl. 2.73) als auch bei ebenen Wellen (Gl. 2.66) existieren, gibt es hier nicht.

Wenn eine ebene Welle auf die Rückseite eines planen, undurchsichtigen Schirms trifft, der einen langen, dünnen Spalt aufweist, wird auf der Vorderseite des Schirms eine Zylinderwelle emittiert (Abb. 2.31). Diesen Effekt machte man sich verbreitet zur Erzeugung zylindrischer Lichtwellen zunutze (siehe Abschn. 9.3, Abb. 9.11).

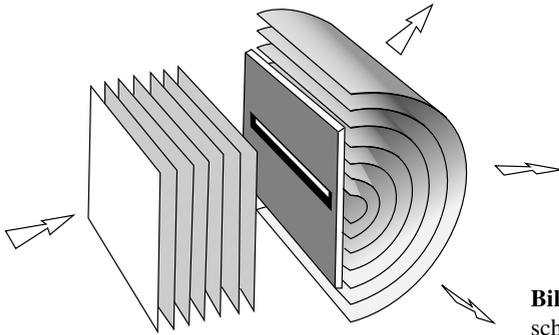


Bild 2.31: Zylinderwellen, die an einem langen, schmalen Spalt erzeugt werden.

2.11 Verdrilltes Licht

Seit den frühen 1990er-Jahren ist es möglich, beeindruckende spiralförmige Lichtstrahlen zu erzeugen. Die mathematischen Ausdrücke für solche Wellen sind zu kompliziert, um sie hier auszuarbeiten. Jedenfalls haben sie, wenn sie wie in Gleichung 2.52 in komplexer Form aufgeschrieben werden, einen Phasenterm $\exp(-i\ell\phi)$. Die Größe ℓ ist eine ganze Zahl, und je größer ihr Wert ist, umso komplexer ist die Welle. Wir stellen uns wieder einen zylindrischen Strahl als einen Strom von sinusförmigen Elementarwellen vor, ähnlich wie in Abb. 2.23. Anstatt eine Ebene zu bilden, windet sich die Fläche konstanter Phase nun aber wie ein Korkenzieher. Im einfachsten Fall ($\phi = \pm 1$) folgt die Wellenfront einer einzelnen stetigen Spirale, die sich entweder rechtshändig oder linkshändig um die zentrale Propagationsachse windet.

Diese Strahlen haben das, was man eine *azimutale Phasenabhängigkeit* nennt. Wenn wir entlang der zentralen Achse zum Ursprung blicken, ändert sich die Phase mit dem Winkel, ähnlich wie sich auf dem Ziffernblatt einer Uhr der Winkel zwischen der 12-6-Linie und dem Minutenzeiger ändert. Wenn eine Elementarwelle ein Maximum bei 12 hat wie in Abbildung 2.32, kann weiter unten auf der Achse bei 6 ein Minimum auftreten. Wenn wir uns das Bild genau anschauen und von 12 nach 1, von dort nach 2, 3 usw. gehen, dann sehen wir, dass die Elementarwellen voranschreiten.

Die sinusförmigen Elementarwellen (die alle die Wellenlänge λ haben) sind weiterhin korreliert und alle ihre Maxima liegen auf einer spiralförmigen Linie. Wir nehmen nun an, dass die Durchstoßpunkte der Elementarwellen durch die Scheibe nicht mehr auf einem Kreis liegen, sondern die Scheibe ausfüllen; die Spirallinie konstanter Phase fährt eine gewundene Fläche ab, die wie eine lang gezogene flache Sprungfeder aussieht (eine Form, die zum Beispiel bei der archimedischen Schraube oder auch bei Spielzeugspiralen vorkommt). Diese Fläche konstanter Phase ist eine Wellenfront.

Erweitern wir nun in Gedanken Abbildung 2.32 zu einem Strahl, wobei wir übersehen wollen, dass ein realer Strahl sich bei seinem Voranschreiten verbreitern würde. Abbildung 2.33 zeigt eine Reihe von Elementarwellen, die räumlich gegeneinander so versetzt sind, dass ihre Maxima jeweils auf der Wellenfront liegen. Diese Wel-

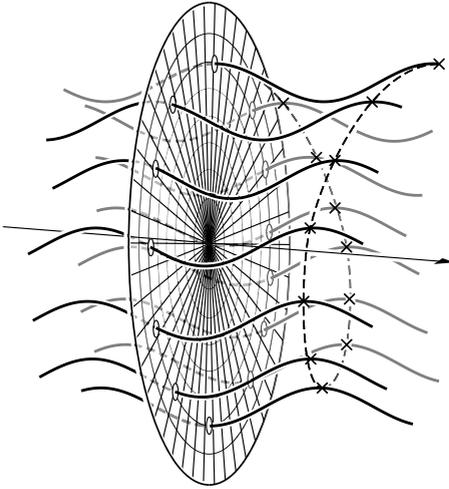


Bild 2.32: Eine Gruppe von Elementarwellen ist exakt so angeordnet, dass ihre Phasen spiralförmig um die Strahlachse verlaufen. Die Bedingung der Phasenkonstanz ist auf einer Familie von Helices erfüllt, von denen eine als gestrichelte Linie eingezeichnet ist.

lenfront bildet eine voranschreitende Wendelfläche oder *Helikoide*, die sich auf der Länge λ einmal um die Achse windet, während sie sich mit Lichtgeschwindigkeit vorwärts bewegt. Diese spezielle helikoidale Wellenfront entspricht gerade einem Maximum (Peaks der Elementarwellen); sie könnte aber auch jeden beliebigen anderen Wert haben. Da der Strahl monochromatisch ist, gibt es eine verschachtelte, sich umschlingende Abfolge von Wellenfronten, von denen jede eine etwas andere Phase und Auslenkung hat, die sich von einer zur nächsten sinusförmigen Elementarwelle ändert.

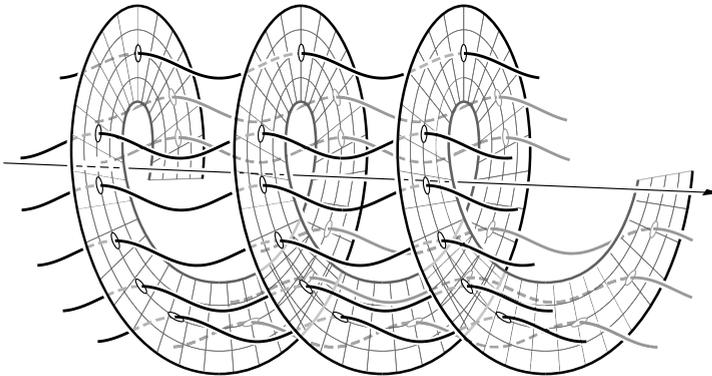


Bild 2.33: Verdrilltes Licht. Der leere Bereich in der Mitte der Helikoide bildet einen Schaft, der frei von Licht ist. Er entspricht einer Phasensingularität, um die herum eine Rotationsbewegung erfolgt. Die Struktur wird auch optischer Vortex genannt.

Betrachten wir noch einmal Abbildung 2.32 und stellen wir uns vor, dass alle Elementarwellen radial in Richtung Zentrum gerutscht sind, ohne dass sie sich sonst irgendwie verändert hätten. Entlang der zentralen Achse gäbe es dann ein Durcheinander an

Wellen mit allen möglichen Phasen, die sich gegenseitig überlappen, mit dem Effekt, dass die Phase der zusammengesetzten Störung unbestimmt wäre. Die zentrale Achse entspricht also einer *Phasensingularität*. An jedem axialen Punkt gibt es zu jeder Elementarwelle, die einen positiven Beitrag leistet, eine andere Elementarwelle mit einem gleich großen negativen Beitrag. In jedem Fall muss das optische Feld entlang der zentralen Achse null sein, was bedeutet, dass die zentrale Achse und ihre unmittelbare Umgebung einem Bereich mit Intensität null entspricht (d. h., es gibt dort kein Licht). In der Mitte der Helikoide liegt also ein schwarzer Kern, der auch *optischer Vortex* genannt wird und um den sich das „**verdrillte Licht**“ wie ein Tornado windet. Auf einem Schirm erzeugt der Strahl einen hellen Ring, der von einem dunklen kreisförmigen Vortex umgeben ist.

In Kapitel 8 werden wir zirkular polarisiertes Licht untersuchen, und obwohl dieses dem hier besprochenen verdrillten Licht zu ähneln scheint, handelt es sich um zwei völlig unterschiedliche Phänomene. Zum einen ist polarisiertes Licht mit dem Spin verbunden, während verdrilltes Licht ein Bahndrehmoment hat. Davon abgesehen muss verdrilltes Licht nicht einmal polarisiert sein. Wir werden auf diesen Punkt noch einmal zurückkommen, wenn wir uns mit dem Photonenspin befassen.

Aufgaben

*Lösungen zu den Aufgaben ohne * finden Sie am Ende des Buches.*

2.1* Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\psi(z, t) = (z + vt)^2$$

eine nichttriviale Lösung der Wellengleichung ist. In welche Richtung propagiert die Welle?

2.2* Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\psi(y, t) = (y - 4t)^2$$

eine Lösung der Wellengleichung ist. In welche Richtung propagiert die Welle?

2.3* Gegeben ist die Funktion

$$\psi(z, t) = \frac{A}{(z - vt)^2 + 1},$$

wobei A eine Konstante ist. Zeigen Sie, dass dies eine Lösung der Wellengleichung ist. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Welle sowie die Richtung ihrer Propagation.

2.4* Ein Argonionenlaser erzeugt typischerweise Strahlen hoher Leistung im grünen oder blauen Bereich des sichtbaren Spektrums. Bestimmen Sie die Frequenz eines solchen 514,5-nm-Strahls.

2.5* Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\psi(y, t) = A e^{-a(by-ct)^2}$$

- mit den Konstanten A, a, b und c eine Lösung der Wellengleichung ist. Die betrachtete Funktion wird Gauß-Funktion oder auch Glockenkurve genannt. Wie groß ist ihre Geschwindigkeit und in welche Richtung propagiert sie?
- 2.6 Wie viele „gelbe“ Lichtwellenlängen ($\lambda = 580 \text{ nm}$) passen in einen Raum, dessen Breite der Dicke eines Blattes Papier ($0,008 \text{ cm}$) entspricht? Welche Breite beansprucht dieselbe Anzahl von Mikrowellen ($\nu = 10^{10} \text{ Hz} = 10 \text{ GHz}$, $v = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$)?
- 2.7* Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum beträgt rund $3 \times 10^8 \text{ m/s}$. Wie groß ist die Wellenlänge von rotem Licht mit einer Frequenz von $5 \times 10^{14} \text{ Hz}$? Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Wellenlänge einer elektromagnetischen Welle von 60 Hz .
- 2.8* In Kristallen kann man Ultraschallwellen mit Wellenlängen erzeugen, die denen des Lichts vergleichbar sind ($5 \times 10^{-5} \text{ cm}$), deren Frequenzen jedoch niedriger sind ($6 \times 10^8 \text{ Hz}$). Wie groß ist die Geschwindigkeit einer solchen Welle?
- 2.9* Ein Junge in einem Boot beobachtet Wellen auf der Wasseroberfläche. Sie erscheinen ihm wie eine endlose Folge von Wellbergen, die in einem Abstand von jeweils einer halben Sekunde an seinem Boot vorüberziehen. Ein Wellenberg benötigt $1,5 \text{ s}$, um das $4,5 \text{ m}$ lange Boot zu passieren. Berechnen Sie Frequenz, Schwingungsdauer und Wellenlänge der Welle.
- 2.10* Ein vibrierender Hammer trifft auf das Ende eines Stabes. Dabei entsteht eine periodische Druckwelle, die den $4,3 \text{ m}$ langen Stab mit einer Geschwindigkeit von $3,5 \text{ km/s}$ entlangläuft. Mit welcher Frequenz vibriert der Hammer?
- 2.11 Bei der Hochzeit von zwei Sporttauchern wird eine Violine im Swimmingpool versenkt. Gegeben ist die Geschwindigkeit von Druckwellen in reinem Wasser (1498 m/s). Wie groß ist die Wellenlänge, die auf dieser Violine dem Kammerton A (440 Hz) entspricht?
- 2.12* Ein Wellenpuls bewegt sich auf einer Saite in 2 s um 10 m fort. Welche Frequenz hat eine Störung mit einer Wellenlänge von $0,5 \text{ m}$, die auf dieser Saite erzeugt wird?
- 2.13* Zeigen Sie, dass für eine periodische Welle gilt $\omega = (2\pi/\lambda)v$.
- 2.14* Fertigen Sie eine Tabelle an, deren Spalten mit Werten von θ zwischen $-\pi/2$ bis 2π in Intervallen von $\pi/4$ überschrieben sind. Tragen Sie in jede Spalte den zugehörigen Wert von $\sin \theta$ ein, darunter den Wert von $\cos \theta$, darunter nacheinander die Werte von $\sin(\theta - \pi/4)$, $\sin(\theta - \pi/2)$, $\sin(\theta - 3\pi/4)$ und $\sin(\theta + \pi/2)$. Zeichnen Sie alle diese Funktionen in ein Diagramm und führen Sie sich den Effekt der Phasenverschiebung vor Augen. Die Funktion $\cos \theta$ eilt der Funktion $\sin \theta$ voraus; können Sie einen solchen Zusammenhang auch für die Funktionen $\sin \theta$ und $\sin(\theta - \pi/2)$ feststellen?
- 2.15* Fertigen Sie eine Tabelle an, deren Spalten mit Werten von kx zwischen $x = -\lambda/2$ und $x = +\lambda$ in Intervallen von $\lambda/4$ überschrieben sind (natürlich ist $k = 2\pi/\lambda$). Tragen Sie in jede Spalte nacheinander die zugehörigen Werte von $\cos(kx - \pi/4)$ und $\cos(kx + 3\pi/4)$ ein. Zeichnen Sie dann Diagramme der Funktionen $15 \cos(kx - \pi/4)$ und $25 \cos(kx + 3\pi/4)$.
- 2.16* Fertigen Sie eine Tabelle an, deren Spalten mit Werten von ωt zwischen $t = -\tau/2$ und $t = +\tau$ in Intervallen von $\tau/4$ überschrieben sind (natürlich ist $\omega = 2\pi/\tau$). Tragen Sie in jede Spalte die entsprechenden Werte von $\sin(\omega t + \pi/4)$ und $\sin(\pi/4 - \omega t)$ ein und zeichnen Sie beide Funktionen.

2.17* Das Profil einer harmonischen Transversalwelle, die sich mit einer Geschwindigkeit von 1,2 m/s auf einem Seil fortbewegt, ist gegeben durch

$$y = (0,02 \text{ m}) \sin(157 \text{ m}^{-1}) x .$$

Bestimmen Sie Amplitude, Wellenlänge, Frequenz und Schwingungsdauer.

2.18* In Abbildung A.2.18 sehen Sie das Profil ($t = 0$) einer transversalen Seilwelle, die sich mit einer Geschwindigkeit von 20 m/s in positiver x -Richtung bewegt. (a) Berechnen Sie die Wellenlänge der Welle. (b) Berechnen Sie die Frequenz. (c) Schreiben Sie die Wellenfunktion für die Störung auf. (d) In jedem festen Punkt der x -Achse schwingt das Seil beim Vorbeilaufen der Welle als Funktion der Zeit. Zeichnen Sie einen Graphen von ψ als Funktion von t , der diese Oszillation im Punkt $x = 0$ zeigt.

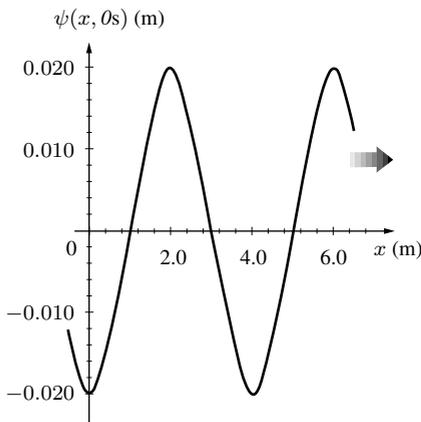


Bild A.2.18

2.19* Abbildung A.2.19 zeigt das Profil ($t = 0$) einer transversalen Seilwelle, die sich mit einer Geschwindigkeit von 100 m/s in positiver z -Richtung bewegt. (a) Wie groß ist die Wellenlänge dieser Welle? (b) Betrachten Sie die zeitabhängige Schwingung eines festen Punktes auf der z -Achse beim Vorbeilaufen der Welle. Zeichnen Sie einen Graphen von ψ als Funktion von t , der diese Oszillation bei $x = 0$ zeigt. (c) Geben Sie die Frequenz der Welle an.

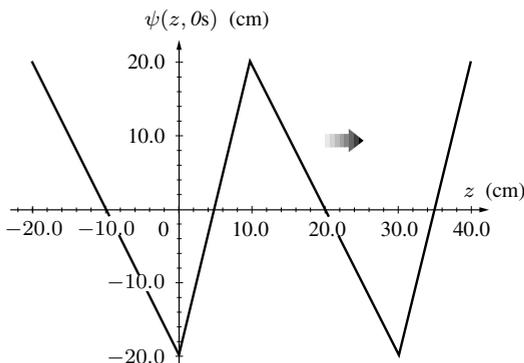


Bild A.2.19

- 2.20* Eine Transversalwelle auf einem Seil pflanzt sich mit einer Geschwindigkeit von 40,0 cm/s in negativer y -Richtung fort. In Abbildung A.2.20 sehen Sie den Graphen von ψ als Funktion von t , der die Oszillation des Seils im Punkt $y = 0$ beschreibt. (a) Geben Sie die Periode der Welle an. (b) Wie groß ist die Frequenz der Welle? (c) Wie groß ist die Wellenlänge? (d) Skizzieren Sie das Profil der Welle (ψ als Funktion von y).

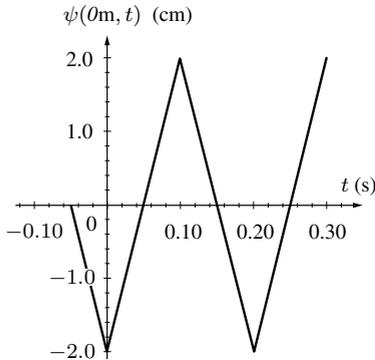


Bild A.2.20

- 2.21 Gegeben sind die Wellenfunktionen

$$\psi_1 = 4 \sin 2\pi (0,2x - 3t)$$

und

$$\psi_2 = \frac{\sin(7x + 3,5t)}{2,5}$$

(Zeit in Sekunden, x in Metern). Bestimmen Sie jeweils (a) die Frequenz, (b) die Wellenlänge, (c) die Schwingungsdauer, (d) die Amplitude, (e) die Phasengeschwindigkeit und (f) die Bewegungsrichtung.

- 2.22* Die Wellenfunktion einer Transversalwelle auf einem Seil sei gegeben durch

$$\psi(x, t) = (30,0 \text{ cm}) \cos [(6,28 \text{ rad/m}) x - (20,0 \text{ rad/s}) t] .$$

Berechnen Sie (a) die Frequenz, (b) die Wellenlänge, (c) die Periode, (d) die Amplitude, (e) die Phasengeschwindigkeit und (f) die Ausbreitungsrichtung dieser Welle.

- 2.23* Eine propagierende Welle ist in SI-Einheiten durch den Ausdruck

$$\psi(y, t) = 10 \sin 2\pi(5,0 \times 10^{14}) \left(\frac{y}{3,0 \times 10^8} + t \right)$$

gegeben. Bestimmen Sie für diese Welle (a) die Amplitude, (b) die Frequenz, (c) die Wellenlänge, (d) die Geschwindigkeit, (e) die Periode und (f) die Richtung der Propagation.

- 2.24* Zeigen Sie, dass

$$\psi(x, t) = A \sin k(x - vt) \quad [2.13]$$

eine Lösung der Wellengleichung ist.

2.25* Zeigen Sie, dass

$$\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

eine Lösung der Wellengleichung ist.

2.26* Beweisen Sie:

$$\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t - \pi/2)$$

ist äquivalent zu

$$\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t).$$

2.27 Zeigen Sie: Wenn die Auslenkung des Seils in Abbildung 2.12 gegeben ist durch

$$y(x, t) = A \sin[kx - \omega t + \varepsilon],$$

so muss sich die Hand bei der Erzeugung dieser Welle vertikal in einfacher harmonischer Bewegung befinden.

2.28 Schreiben Sie den Ausdruck für eine harmonische Welle mit einer Amplitude von 10^3 V/m, einer Schwingungsdauer von $2,2 \times 10^{-15}$ s und einer Geschwindigkeit von 3×10^8 m/s auf. Die Welle breitet sich in negativer x -Richtung aus; $t = 0$ und $x = 0$ entspricht ein Wert von 10^3 V/m.

2.29 Ein Puls sei beschrieben durch seine Auslenkung bei $t = 0$ von

$$y(x, t)|_{t=0} = \frac{C}{2 + x^2}.$$

C ist eine Konstante. Zeichnen Sie das Profil der Welle! Schreiben Sie einen Ausdruck für die Welle als Funktion der Zeit t auf; die Geschwindigkeit soll v (in negativer x -Richtung) sein. Skizzieren Sie das Profil bei $t = 2$ s für $v = 1$ m/s.

2.30* Bestimmen Sie den Betrag der Wellenfunktion $\psi(z, t) = A \cos[k(z + vt) + \pi]$ im Punkt $z = 0$ für $t = \tau/2$ und für $t = 3\tau/4$.

2.31 Stellt die folgende Funktion eine Welle dar?

$$\psi(y, t) = (y - vt) A$$

(A ist eine Konstante). Begründen Sie Ihre Entscheidung.

2.32* Berechnen Sie mithilfe von Gleichung (2.33) die Geschwindigkeit einer Welle, die (in SI-Einheiten) gegeben ist durch

$$\psi(y, t) = A \cos \pi (3 \times 10^6 y + 9 \times 10^{14} t).$$

2.33* Die Auslenkung einer Welle auf einem Seil ist gegeben durch

$$\psi(z, t) = (0,020 \text{ m}) \sin 2\pi \left(\frac{z}{\lambda} + \frac{t}{\tau} \right).$$

Die Welle bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 2,00 m/s und hat eine Periode von $1/4$ s. Bestimmen Sie die Auslenkung des Seils in 1,50 m Entfernung vom Ursprung zur Zeit $t = 2,2$ s.

- 2.34 Leiten Sie, ausgehend von dem folgenden Theorem, Gleichung (2.34) ab: Wenn $z = f(x, y)$ und $x = g(t)$, $y = h(t)$, so ist

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

- 2.35 Zeigen Sie unter Verwendung des Ergebnisses der vorherigen Aufgabe, dass man die Geschwindigkeit einer harmonischen Welle mit einer Phase $\varphi(x, t) = k(x - vt)$ bestimmen kann, indem man $d\varphi/dt = 0$ setzt. Wenden Sie diese Methode auf Aufgabe 2.32 an, um die Geschwindigkeit der dort angegebenen Welle zu bestimmen.
- 2.36* Eine gaußsche Welle hat das Profil $\psi(x, t) = Ae^{-a(bx+ct)^2}$. Berechnen Sie die Geschwindigkeit dieser Welle unter Verwendung der Angabe $\psi(x, t) = f(x \mp vt)$. Überprüfen Sie Ihre Antwort mithilfe von Gleichung (2.34).
- 2.37 Suchen Sie einen Ausdruck für das Profil einer harmonischen Welle, die sich in z -Richtung fortbewegt; der Betrag der Welle ist bei $z = -\lambda/12$ gleich 0,866, bei $z = +\lambda/6$ gleich 0,5 und bei $z = \lambda/4$ gleich 0.
- 2.38 Welche der folgenden Gleichungen beschreiben wandernde Wellen? Wie ist die jeweilige Geschwindigkeit der Welle? a , b und c sind positive Konstanten.

- (a) $\psi(z, t) = (az - bt)^2$
 (b) $\psi(x, t) = (ax + bt + c)^2$
 (c) $\psi(x, t) = 1/(ax^2 + b)$

- 2.39* Welche der folgenden Gleichungen beschreiben wandernde Wellen? Zeichnen Sie in diesen Fällen das Profil und bestimmen Sie die Geschwindigkeit sowie die Bewegungsrichtung.

- (a) $\psi(y, t) = e^{-(a^2y^2 + b^2t^2 - 2abty)}$
 (b) $\psi(z, t) = A \sin(az^2 - bt^2)$
 (c) $\psi(x, t) = A \sin 2\pi\left(\frac{x}{a} + \frac{t}{b}\right)^2$
 (d) $\psi(x, t) = A \cos^2 2\pi(t - x)$

- 2.40 Gegeben sei die fortschreitende Welle

$$\psi(x, t) = 5,0 \exp\left(-ax^2 - bt^2 - 2\sqrt{ab}xt\right).$$

Bestimmen Sie die Richtung der Ausbreitung der Welle! Berechnen Sie einige Werte von ψ und skizzieren Sie die Welle bei $t = 0$ mit $a = 25 \text{ m}^{-2}$ und $b = 9,0 \text{ s}^{-2}$. Wie groß ist die Geschwindigkeit dieser Welle?

- 2.41* Eine Schallwelle mit einer Frequenz von 1,1 kHz bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 330 m/s fort. Berechnen Sie die Phasendifferenz (in rad) zwischen zwei beliebigen, 10 cm voneinander entfernten Punkten dieser Welle.
- 2.42 Eine Lichtwelle habe eine Phasengeschwindigkeit von $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ und eine Frequenz von $6 \times 10^{14} \text{ Hz}$. Wie groß ist der kürzeste Abstand zwischen zwei Punkten längs dieser Welle, deren Phasendifferenz 30° beträgt? Welche Phasenverschiebung entsteht in einem bestimmten Punkt während einer Zeitspanne von 10^{-6} s , und wie viele Wellenberge sind in dieser Zeit vorübergegangen?

2.43 Schreiben Sie einen Ausdruck für die Welle in Abbildung A.2.43 auf. Bestimmen Sie Wellenlänge, Geschwindigkeit, Frequenz und Periode.

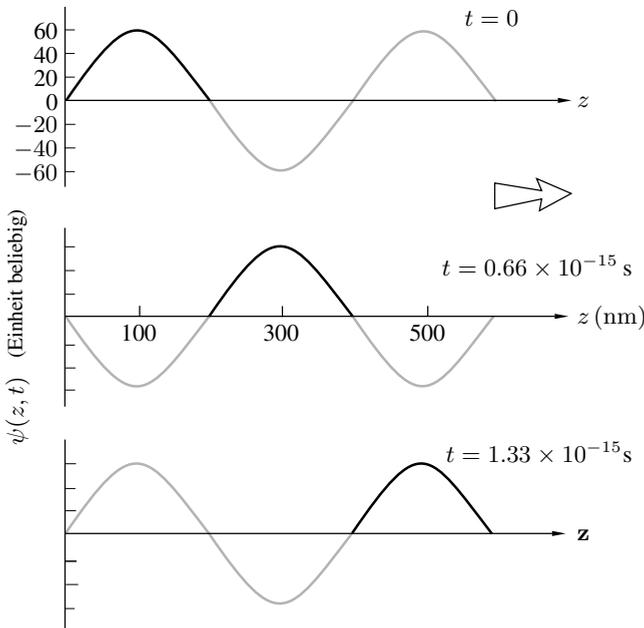


Bild A.2.43 Harmonische Welle.

2.44* Zeigen Sie, dass der Betrag von $\psi = Ae^{i\omega t}$ gleich A ist; arbeiten Sie mit exponentiellen Termen. Leiten Sie dasselbe Ergebnis mithilfe der eulerschen Formel ab. Beweisen Sie, dass $e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$ ist.

2.45* Zeigen Sie, dass der Imaginärteil einer komplexen Zahl z durch $(z - z^*)/2i$ gegeben ist.

2.46* Betrachten Sie die komplexen Größen $z_1 = (x + iy_1)$ und $z_2 = (x + iy_2)$ und zeigen Sie, dass

$$\text{Re}(z_1 + z_2) = \text{Re}(z_1) + \text{Re}(z_2).$$

2.47* Betrachten Sie die komplexen Größen $z_1 = (x + iy_1)$ und $z_2 = (x + iy_2)$ und zeigen Sie, dass

$$\text{Re}(z_1) \times \text{Re}(z_2) \neq \text{Re}(z_1 \times z_2).$$

2.48 Beweisen Sie ausgehend von Gleichung (2.51), dass

$$\psi(x, y, z, t) = Ae^{i[k(\alpha x + \beta y + \gamma z) - \omega t]}$$

und

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

ist. Zeichnen Sie eine Skizze, die alle auftretenden Größen enthält.

2.49* Zeigen Sie, dass die Gleichungen (2.64) und (2.65), die ebene Wellen mit beliebigem Profil beschreiben, Lösungen der dreidimensionalen Wellengleichung sind.

2.50* Das elektrische Feld einer elektromagnetischen Welle ist in SI-Einheiten gegeben durch

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(3x - \sqrt{2}y - 9,9 \times 10^8 t)}.$$

(a) Wie lautet die Kreisfrequenz der Welle? (b) Schreiben Sie einen Ausdruck für \mathbf{k} auf. (c) Wie groß ist der Betrag k ? (d) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Welle.

2.51* Gegeben sei die Funktion

$$\psi(z, t) = A \exp[-(a^2 z^2 + b^2 t^2 + 2abzt)]$$

mit den Konstanten A , a und b (alle in geeigneten SI-Einheiten). Repräsentiert dieser Ausdruck eine Welle? Wenn ja, wie groß ist ihre Geschwindigkeit und in welche Richtung propagiert sie?

2.52 Die De-Broglie-Hypothese besagt, dass jedem Teilchen eine Wellenlänge zugeordnet werden kann, die durch den Quotienten aus der planckschen Konstante ($h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$) und dem Impuls des Teilchens gegeben ist. Vergleichen Sie die Wellenlänge des sichtbaren Lichts mit der Wellenlänge eines 6 kg schweren Steins, der sich mit einer Geschwindigkeit von 1 m/s bewegt.

2.53 Schreiben Sie in kartesischen Koordinaten einen Ausdruck für eine harmonische Welle mit der Amplitude A und der Frequenz ω auf, die sich in Richtung des Vektors \mathbf{k} bewegt; dieser Vektor liegt auf einer Geraden, die durch den Ursprung des Koordinatensystems und den Punkt $(4, 2, 1)$ verläuft. [*Hinweis*: Bestimmen Sie zunächst \mathbf{k} und bilden Sie dann das Skalarprodukt mit \mathbf{r} .]

2.54* Schreiben Sie in kartesischen Koordinaten einen Ausdruck für eine harmonische Welle mit der Amplitude A und der Frequenz ω auf, die sich in positiver x -Richtung bewegt.

2.55 Zeigen Sie, dass $\psi(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}, t)$ eine ebene Welle sein kann, wobei \mathbf{k} senkrecht auf der Wellenfront steht. [*Hinweis*: \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 sollen Ortsvektoren zu zwei beliebigen Punkten auf der Ebene sein; zeigen Sie hierfür $\psi(\mathbf{r}_1, t) = \psi(\mathbf{r}_2, t)$.]

2.56* Zeigen Sie explizit, dass die Funktion

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t + \varepsilon)]$$

für $v = \omega/k$ eine Welle beschreibt.

2.57* Fertigen Sie eine Tabelle an, deren Spalten mit Werten von θ zwischen $-\pi/2$ und 2π in Intervallen von $\pi/4$ überschrieben sind. Tragen Sie in jede Spalte den zugehörigen Wert von $\sin \theta$, darunter den Wert von $2 \sin \theta$ ein. Addieren Sie die beiden Werte in jeder Spalte, sodass sich die jeweiligen Werte für die Funktion $\sin \theta + 2 \sin \theta$ ergeben. Zeichnen Sie alle drei Funktionen in ein Diagramm; schauen Sie sich die relativen Amplituden und Phasen an.

2.58* Fertigen Sie eine Tabelle an, deren Spalten mit Werten von θ zwischen $-\pi/2$ und 2π in Intervallen von $\pi/4$ überschrieben sind. Tragen Sie in jede Spalte untereinander die zugehörigen Werte von $\sin \theta$ und $\sin(\theta - \pi/2)$ ein. Addieren Sie die Werte in jeder Spalte, sodass sich die Werte für die Funktion $\sin \theta + \sin(\theta - \pi/2)$ ergeben. Zeichnen

Sie alle drei Funktionen in ein Diagramm; schauen Sie sich die relativen Amplituden und Phasen an.

- 2.59* Zeichnen Sie analog zum Vorgehen in den beiden vorangegangenen Aufgaben die drei Funktionen (a) $\sin \theta$, (b) $\sin(\theta - 3\pi/4)$ und (c) $\sin \theta + \sin(\theta - 3\pi/4)$. Vergleichen Sie die Amplitude der Funktion (c) mit den Ergebnissen der Aufgaben 2.57 und 2.58.
- 2.60* Fertigen Sie eine Tabelle an, deren Spalten mit Werten von kx zwischen $x = -\lambda/2$ und $x = +\lambda$ im Intervall von $\lambda/4$ überschrieben sind. Tragen Sie in jede Spalte untereinander die zugehörigen Werte von $\cos kx$ und von $\cos(kx + \pi)$ ein. Zeichnen Sie dann die Funktionen $\cos kx$, $\cos(kx + \pi)$ und $[\cos kx + \cos(kx + \pi)]$ in ein Diagramm und vergleichen Sie.

3 Theorie des Elektromagnetismus, Photonen und Licht

Die Arbeiten von J. Clerk Maxwell und spätere Entwicklungen seit dem Ausgang des achtzehnten Jahrhunderts bewiesen die elektromagnetische Natur des Lichts. Wie wir noch sehen werden, führt die klassische Elektrodynamik unvermeidlich zum Konzept des kontinuierlichen Energietransports durch elektromagnetische Wellen. Im Gegensatz dazu beschreibt die Quantenelektrodynamik (siehe Abschnitt 3.7), eine modernere Theorie, die elektromagnetische Wechselwirkung und den Energietransport mithilfe masseloser Elementar„teilchen“, so genannter Photonen. Nicht immer tritt die Quantennatur der Strahlungsenergie in der Praxis in Erscheinung – oft ist sie für die Optik auch nicht von praktischer Bedeutung. In vielen Situationen ist es weder möglich noch erwünscht, mit einer Messanordnung einzelne Lichtquanten zu registrieren.

Ist die Wellenlänge des Lichts klein im Vergleich zur Größe eines Messgerätes, so darf man – in erster Näherung – mit der *geometrischen Optik* arbeiten. Genauer und insbesondere bei Geräten kleinerer Abmessung besser geeignet ist die *physikalische Optik (Wellenoptik)*, bei der die Wellennatur des Lichts als dominierend betrachtet wird. Zum großen Teil kann man diese Theorie aufbauen, ohne exakt erklären zu müssen, um welche Art Welle es sich handelt; für die klassische physikalische Optik reicht es aus, Licht als elektromagnetische Welle aufzufassen.

Licht können wir uns als „dünnste“ Form der Materie vorstellen. Eine der grundlegenden Thesen der Quantenmechanik besagt tatsächlich, dass sowohl Licht als auch Materieteilchen gleichzeitig Eigenschaften von Welle und Teilchen (Welle-Teilchen-Dualismus) aufweisen. Erwin C. Schrödinger (1887–1961), einer der Begründer der Quantentheorie, formulierte:

In den neuen Vorstellungen ist die Unterscheidung [zwischen Welle und Teilchen] verschwunden, da entdeckt wurde, dass alle Teilchen auch Welleneigenschaften besitzen und umgekehrt. Keines der beiden Konzepte muss aufgegeben werden – vielmehr sind beide zu vereinigen. Welcher Aspekt hervortritt, hängt nicht vom physikalischen Objekt ab, sondern von dem Messgerät, mit dem man dieses untersuchen will.¹

¹ Erwin C. Schrödinger (1887–1991), *Science Theory and Man*, Dover Publications, New York, 1957.

Die Quantenmechanik ordnet einer Wellengleichung ein Teilchen zu, beispielsweise ein Photon, ein Elektron oder ein Proton. Handelt es sich um materielle Partikel (wie die beiden Letzteren), so werden die Wellenaspekte durch eine Feldgleichung, die Schrödinger-Gleichung, eingeführt. Die Wellennatur des Lichts wird in Form der klassischen elektromagnetischen Feldgleichungen von Maxwell dargestellt; davon ausgehend lässt sich eine quantenmechanische Behandlung der Photonen und ihrer Wechselwirkung mit Ladungen aufbauen. Die duale Natur des Lichts ist offensichtlich: Einerseits pflanzt sich Licht wie eine Welle im Raum fort, andererseits verhält es sich bei Vorgängen wie Emission oder Absorption wie ein Teilchenstrom. Die elektromagnetische Energie der Strahlung wird nicht kontinuierlich erzeugt und vernichtet, wie es bei klassischen Wellen der Fall ist, sondern in Quanten oder Photonen. Beim Durchgang durch eine Linse, ein Loch oder ein Gitter herrschen jedoch die Welleneigenschaften des Lichts vor. In der makroskopischen Welt ist uns ein solches Verhalten nicht vertraut, da die Wellenlänge eines Objekts umgekehrt proportional zu dessen Impuls ist: Schon einem Sandkorn (das sich kaum bewegt) ist eine so winzige Wellenlänge zugeordnet, dass man sie in keinem denkbaren Experiment beobachten könnte.

Das Photon besitzt keine Ruhemasse; einen Lichtstrahl hat man sich daher als Strom einer gewaltigen Anzahl niederenergetischer Photonen vorzustellen. Das Modell besagt weiterhin, dass diese dichten Photonenströme im Mittel definierte klassische Felder erzeugen. Ganz grob können wir dies mit Strömen von Fahrgästen auf einem Bahnhof während der Hauptverkehrszeit vergleichen: Jede einzelne Person verhält sich individuell, als „menschliches Quantum“, aber alle Personen bewegen sich auf ähnlichen Bahnen, da sie ein gemeinsames Ziel ansteuern. Ein weit entfernter, kurzsichtiger Beobachter sieht einen scheinbar kontinuierlichen, ruhigen Strom. Die Bewegung der Fahrgäste in ihrer Gesamtheit ist vorhersagbar; das Verhalten des Individuums dagegen ist, zumindest für den Beobachter, uninteressant. *Im Mittel* ist die von einer großen Zahl Photonen transportierte Energie äquivalent der Energie, die von einer klassischen elektromagnetischen Welle übertragen wird. Aus diesem Grunde ist und bleibt die Felddarstellung elektromagnetischer Phänomene so zweckdienlich.

Wir wollen das Licht also ganz pragmatisch als elektromagnetische Welle betrachten, dabei allerdings nicht vergessen, dass diese Beschreibung in manchen Situationen absolut unzureichend ist.

3.1 Die Grundgleichungen der Theorie des Elektromagnetismus

In diesem Abschnitt wollen wir einige Grundbegriffe besprechen und herleiten, die wir für das Verständnis des Lichts als elektromagnetische Welle benötigen.

Aus Experimenten wissen wir, dass Ladungen, selbst im Vakuum, aufeinander wirken. Erinnern wir uns an den bekannten Versuch zur Elektrostatik, der zeigt, wie eine

Holundermarkkugel die Anwesenheit eines geladenen Stabes „spürt“, ohne diesen zu berühren. Eine mögliche Erklärung wäre, dass jedes geladene Objekt einen Strom unbekannter Teilchen (*virtueller Photonen*) emittiert (oder absorbiert). Der Austausch dieser Teilchen zwischen den Ladungen ließe sich dann als Wechselwirkung interpretieren. Alternativ, aus klassischer Sicht, können wir uns auch vorstellen, dass jede Ladung von einem so genannten elektrischen Feld umgeben ist. Dann müssen wir nur noch annehmen, dass jede Ladung direkt mit dem umgebenden Feld in Wechselwirkung tritt. Wirkt auf eine Ladung q eine Kraft \mathbf{F}_E , so ist das *elektrische Feld* \mathbf{E} an der Stelle der Ladung definiert durch $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$. Wir beobachten außerdem, dass auf eine bewegte Ladung eine andere Kraft \mathbf{F}_M wirkt, die proportional zur Geschwindigkeit \mathbf{v} der Ladung ist. Dies führt uns zur Definition eines weiteren Feldes, der *magnetischen Induktion* (dem Magnetfeld) \mathbf{B} , sodass gilt $\mathbf{F}_M = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Wirken auf eine Ladung gleichzeitig ein elektrisches und ein magnetisches Feld, folgt $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Die Einheit von \mathbf{E} ist Volt/Meter oder Newton/Coulomb. Die Einheit von \mathbf{B} ist Tesla.

Wie wir noch sehen werden, erzeugen sowohl elektrische Ladungen als auch *zeitlich variierende Magnetfelder* elektrische Felder. Magnetfelder werden analog von elektrischen Strömen und *zeitlich variierenden elektrischen Feldern* erzeugt. Die gegenseitige Abhängigkeit von \mathbf{E} und \mathbf{B} ist ein Schlüsselpunkt bei der Beschreibung von Licht.

3.1.1 Das faradaysche Induktionsgesetz

„Magnetismus in Elektrizität umwandeln“ – diese kurze Notiz, von Michael Faraday 1822 aufgeschrieben, steht für eine Herausforderung, die Faraday sich selbst stellte, voller Vertrauen auf die Lösbarkeit der Aufgabe. Nach einigen mit anderweitigen Arbeiten ausgefüllten Jahren wandte Faraday sich 1831 dem Problem der elektromagnetischen Induktion wieder zu. Seine erste Versuchsanordnung enthielt zwei auf einen Holzkern gewickelte Spulen (Abb. 3.1 a). Eine davon, die Primärspule, war mit einem Schalter und einer Batterie verbunden, die andere, die Sekundärspule, mit einem Galvanometer. Schloss er den Schalter, so beobachtete Faraday einen kurzen

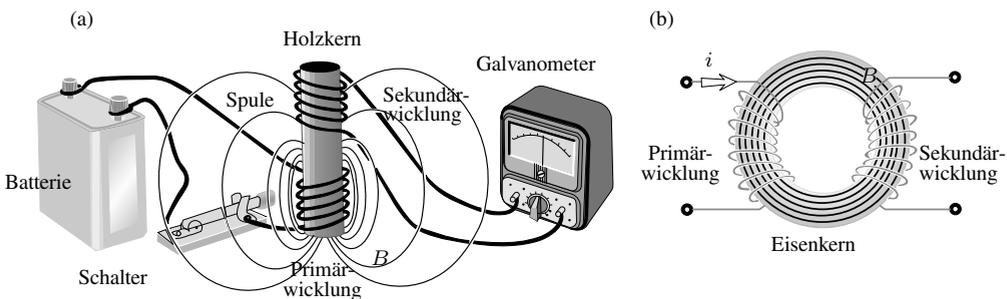


Bild 3.1: (a) Beginnt in einer der beiden Spulen ein Strom zu fließen, so baut sich ein zeitabhängiges Magnetfeld auf, das einen Strom in der anderen Spule induziert. (b) Primär- und Sekundärspule sind durch einen Eisenkern aneinander gekoppelt.

Ausschlag des Galvanometers in eine Richtung; anschließend stellte sich das Gerät sofort wieder auf Null, ungeachtet dessen, dass in der Primärspule nach wie vor ein konstanter Strom floss. Wurde der Schalter wieder geöffnet (und damit der Stromfluss durch die Primärspule unterbrochen), so schlug das Galvanometer erneut kurz aus, diesmal jedoch in die entgegengesetzte Richtung.

Um die „magnetische Kraft zu konzentrieren“, wickelte Faraday nun zwei Spulen um gegenüber liegende Abschnitte eines Weicheisenrings (Abb. 3.1 b). Der Effekt war unverkennbar: *Ein veränderliches Magnetfeld erzeugt einen Strom*. Diese Änderung des Feldes war, wie Faraday feststellen sollte, der für die elektromagnetische Induktion entscheidende Aspekt.

Indem er einen Magneten in eine Spule steckte, zeigte Faraday, dass an den Enden der Spule eine Spannung anliegt, die man auch als *elektromotorische Kraft* (EMK) bezeichnet. (Der Begriff *elektromotorische Kraft* ist irreführend – schließlich handelt es sich um eine Spannung, nicht um eine Kraft – und wird nur noch selten verwendet. Wir benutzen die Abkürzung EMK und denken dabei an ihre physikalische Bedeutung.) Die Amplitude der EMK hängt davon ab, wie schnell der Magnet bewegt wird: *Die induzierte EMK ist eine Funktion der Änderungsrate von B* , nicht des Wertes von B selbst. Ein schwacher, aber schnell bewegter Magnet kann eine größere EMK induzieren als ein starker, langsam bewegter.

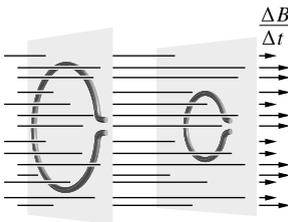


Bild 3.2: Die größere Leiterschleife wird von einem größeren zeitabhängigen magnetischen Fluss durchdrungen, zwischen ihren Enden wird eine größere Spannung induziert.

Wir betrachten nun ein veränderliches B -Feld, das durch zwei verschiedene Leiterschleifen hindurchläuft (Abb. 3.2). Dabei wird zwischen den Enden der größeren Schleife (links) eine größere EMK induziert. Mit anderen Worten: *Bei veränderlichem Magnetfeld ist die induzierte EMK der Fläche A der Leiterschleife proportional, die senkrecht zur Änderungsrichtung des Feldes überstrichen wird*. Kippt man die Schleife schrittweise nach vorne über (Abb. 3.3), dann wird die senkrecht zum Feld stehende Fläche A_{\perp} immer kleiner ($A_{\perp} = A \cos \theta$); bei $\theta = 90^{\circ}$ ist die EMK null, weil die überstrichene Fläche der Schleife null ist. Für $\Delta B / \Delta t \neq 0$ gilt $\text{EMK} \propto A_{\perp}$. Dieser Zusammenhang gilt auch umgekehrt: *Ist das Feld konstant, so ist die induzierte EMK proportional zur Änderungsrate der senkrecht zum Feld stehenden Fläche*. Wird eine in einem konstanten B -Feld befindliche Spule gebogen, gedreht oder auch nur zusammengedrückt, wobei sich die senkrecht durchdrungene Fläche ändert, so ist die induzierte EMK proportional zu $\Delta A_{\perp} / \Delta t$ und zu B . Fassen wir zusammen: Bei $A_{\perp} = \text{konstant}$ gilt $\text{EMK} \propto A_{\perp} \Delta B / \Delta t$, bei $B = \text{konstant}$ gilt $\text{EMK} \propto B \Delta A_{\perp} / \Delta t$.

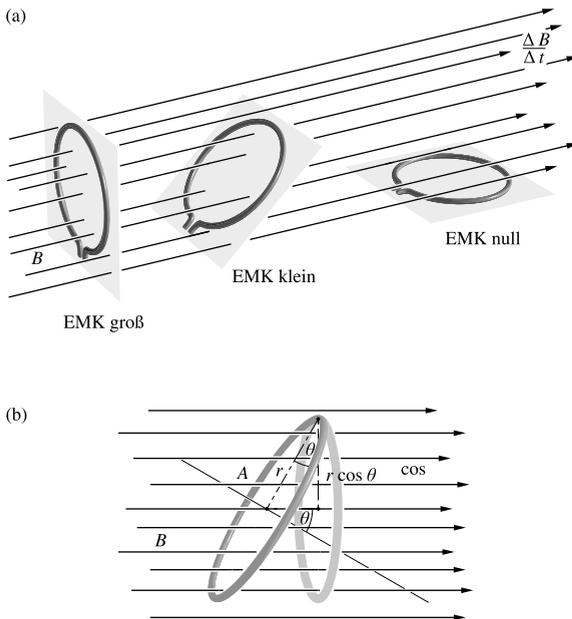


Bild 3.3: (a) Die induzierte EMK ist proportional der vom Magnetfeld – senkrecht zum Feld – durchdrungenen Fläche. (b) Diese Fläche ist proportional $\cos \theta$.

Die beschriebenen Beobachtungen lassen folgern, dass die EMK von den Änderungs-raten sowohl von B als auch von A_{\perp} abhängt, also von der Änderungsrate des Produkts $A_{\perp} B$. Wir erinnern uns an die Definition des Flusses als Produkt zwischen einem Feld und der Fläche, die senkrecht von diesem Feld durchdrungen wird. Folglich ist der **magnetische Fluss** durch die Leiterschleife gleich

$$\Phi_M = B_{\perp} A = B A_{\perp} = B A \cos \theta.$$

Allgemeiner formuliert: Verändert sich B zeitlich (was wahrscheinlich der Fall ist), so ist der magnetische Fluss durch eine offene, von einer Leiterschleife umschlossene Fläche (Abb. 3.4) gegeben durch

$$\Phi_M = \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.1)$$

wobei $d\mathbf{S}$ senkrecht zur Oberfläche nach außen zeigt. Die um die Schleife erzeugte Spannung (EMK) ist dann

$$\text{EMK} = - \frac{d\Phi_M}{dt}. \quad (3.2)$$

Das Minuszeichen sagt uns, dass die induzierte Spannung einen induzierten Strom antreibt, der wiederum ein induziertes magnetisches Feld erzeugt, welches der Flussänderung entgegenwirkt, die die Ursache für sein Entstehen war. Dies ist die lenzsche Regel, mit deren Hilfe man leicht die Richtung induzierter Felder herausfinden kann. Wenn das induzierte magnetische Feld der Flussänderung nicht entgegenwirken würde, würde diese Änderung unbegrenzt anwachsen. Wir sollten uns jedoch nicht allzu

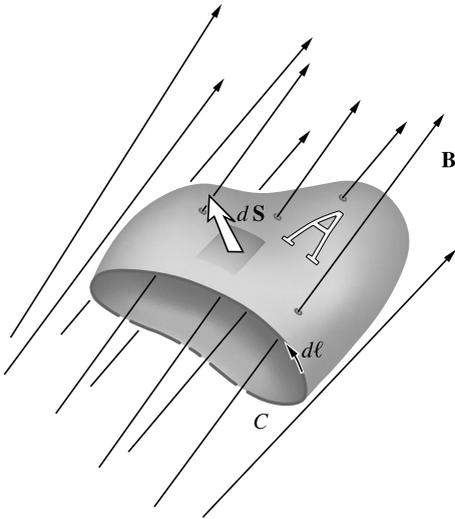


Bild 3.4: B-Feld, das eine offene Fläche A durchdringt.

sehr an das Bild von Drähten, Strömen und induzierter Spannung klammern – uns geht es vor allem um die Beziehungen zwischen elektrischem und magnetischem Feld.

Sehr allgemein ausgedrückt ist die EMK eine Potenzialdifferenz, also eine Differenz der potenziellen Energie pro Ladungseinheit. Eine Differenz der potenziellen Energie pro Ladungseinheit entspricht einer pro Ladungseinheit verrichteten Arbeit, also einer Kraft pro Ladungseinheit mal Abstand und folglich einem elektrischen Feld mal Abstand. Die EMK existiert nur infolge der Anwesenheit eines elektrischen Feldes,

$$\text{EMK} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\ell. \quad (3.3)$$

Integriert wird über eine geschlossene Kurve C (die Leiterschleife). Wir setzen die Gleichungen (3.2) und (3.3) gleich und erhalten mithilfe von Gleichung (3.1)

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\ell = -\frac{d}{dt} \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.4)$$

Hierbei liefern uns die Skalarprodukte die Beträge von \mathbf{E} und \mathbf{B} parallel zur Kurve C bzw. senkrecht zur Fläche A . Beachten Sie, dass A keine geschlossene Fläche ist (wie dies in den Gleichungen (3.7) und (3.9) der Fall sein wird).

Unsere Diskussion ging von einer Leiterschleife aus und führte zu Gleichung (3.4), einem Ausdruck, der sich – abgesehen vom Weg C – nicht mehr auf eine Schleife im physikalischen Sinn bezieht. Tatsächlich kann der Integrationsweg beliebig gewählt werden, er muss sich auch nicht innerhalb oder in der Nähe eines Leiters befinden. Das in Gleichung (3.4) enthaltene elektrische Feld entsteht nicht durch die Anwesenheit elektrischer Ladungen, sondern nur durch die Anwesenheit eines zeitlich veränderlichen Magnetfeldes. Sind keine Ladungen vorhanden, die als Quellen oder Senken wirken, so sind die Feldlinien in sich geschlossen (Abb. 3.5). Wir können die Richtung

des induzierten E -Feldes überprüfen, indem wir uns in dem von dem zunehmenden Fluss senkrecht durchdrungenen Gebiet eine Drahtschleife vorstellen. Das E -Feld im Bereich der Schleife muss so sein, dass ein induzierter Strom angetrieben wird. Dieser Strom (der mit Blick nach unten im Uhrzeigersinn fließt) würde gemäß der Lenzschen Regel ein nach unten gerichtetes Magnetfeld induzieren, das dem zunehmenden nach oben gerichteten Fluss entgegenwirkt.

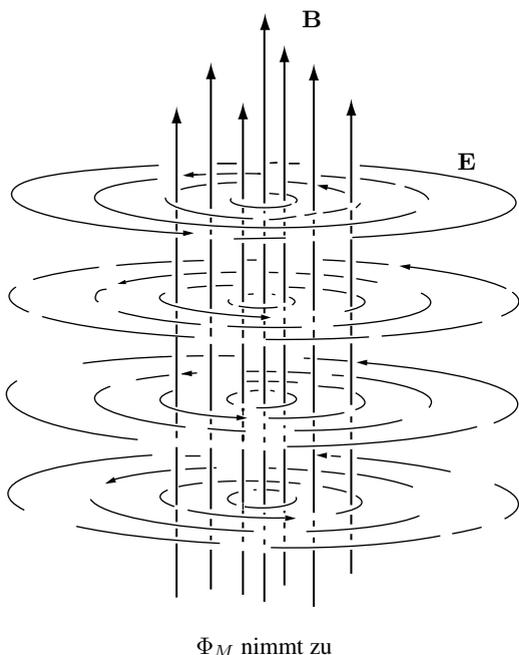


Bild 3.5: Zeitabhängiges \mathbf{B} -Feld. Um jeden Punkt, wo sich Φ_M ändert, bildet das \mathbf{E} -Feld geschlossene Linien.

Wir interessieren uns nun für elektromagnetische Wellen im Raum, wo es keine Leiterschleifen gibt; der magnetische Fluss ändert sich dort, weil sich \mathbf{B} ändert. Das Induktionsgesetz [Gl. (3.4)] kann dann wie folgt formuliert werden:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\ell = - \iint_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.5)$$

\mathbf{B} ist normalerweise auch eine Funktion der Ortsvariablen, deshalb wird es partiell nach der Zeit abgeleitet. Dieser Ausdruck ist faszinierend, denn er bedeutet: *Mit einem zeitlich veränderlichen Magnetfeld ist stets ein elektrisches Feld verknüpft.*

Für beliebige Felder wird das Linienintegral um einen geschlossenen Weg **Zirkulation** dieses Feldes genannt. Hier ist sie gleich der an einer Ladungseinheit verrichteten Arbeit, wenn diese einmal entlang des Weges bewegt wird.

3.1.2 Der gaußsche Satz für das elektrische Feld

Ein weiteres grundlegendes Gesetz des Elektromagnetismus trägt den Namen des deutschen Mathematikers Karl Friedrich Gauß (1777–1855). Es beschreibt die Beziehung zwischen dem Fluss des elektrischen Feldes und der Ladung als Quelle dieses Flusses. Der Grundgedanke leitet sich aus der Fluiddynamik her, wo die Begriffe des Feldes und des Flusses ursprünglich eingeführt wurden.



Johann Karl Friedrich Gauß (Pearson Education, Inc.)

Die Strömung eines Fluids, dargestellt durch ein Geschwindigkeitsfeld, wird graphisch durch Strömungslinien gekennzeichnet – ähnlich, wie das elektrische Feld durch Feldlinien verdeutlicht wird. Abbildung 3.6 zeigt einen Ausschnitt aus einer strömenden Flüssigkeit. Ein Teilbereich ist von einer imaginären geschlossenen Fläche (in Form eines Rohrs) umgeben. Der *Volumenfluss*, die Rate des Ausströmens der Flüssigkeit aus diesem Rohr, ist gleich dem Flüssigkeitsvolumen, das einen bestimmten Punkt des Rohrs pro Zeiteinheit passiert. Dabei muss der Volumenfluss durch die beiden Stirnflächen des Rohrs gleich groß sein (was pro Sekunde hineinfließt, fließt auch pro Sekunde wieder heraus). Der Nettofluss bezüglich der geschlossenen Fläche ist somit null. Stellen wir uns nun vor, durch die geschlossene Fläche würde ein Röhrchen gesteckt, das Flüssigkeit aus dem Rohr abzieht (eine Senke) oder in das Rohr zugibt (eine Quelle). Der Nettofluss ist dann natürlich verschieden von null.

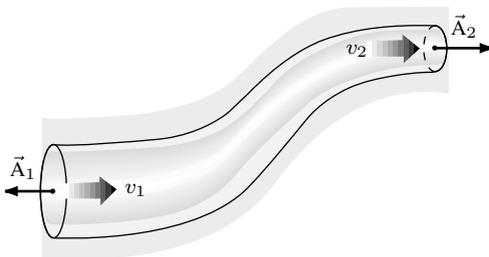


Bild 3.6: Strömung einer Flüssigkeit durch ein Rohr. Beachten Sie, dass die Vektoren an den Stirnflächen nach außen zeigen.

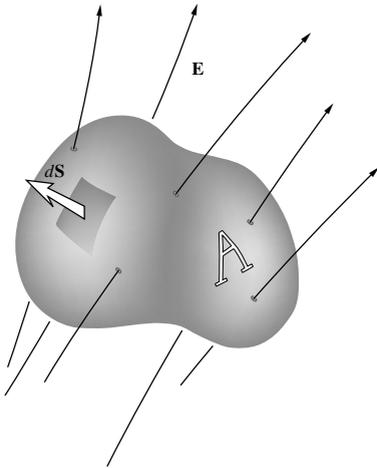


Bild 3.7: \mathbf{E} -Feld durch eine geschlossene Fläche A .

Um diese Ideen auf das elektrische Feld zu übertragen, betrachten wir eine imaginäre geschlossene Fläche A , die sich in einem beliebigen elektrischen Feld befindet (Abb. 3.7). Der Fluss des elektrischen Feldes durch A soll gegeben sein als

$$\Phi_E = \oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.6)$$

wobei uns das doppelte Kreisintegral daran erinnern soll, dass es sich um eine geschlossene Fläche handelt. Der Vektor $d\mathbf{S}$ zeigt senkrecht zur Fläche nach außen. *Hat das elektrische Feld in dem von der geschlossenen Fläche umgebenen Raum weder Quellen noch Senken, so ist der Nettofluss des Feldes durch die Fläche gleich null.* Diese Regel gilt allgemein für alle derartigen Felder.

Was geschieht nun, wenn das Feld innerhalb des umschlossenen Volumens Quellen oder Senken aufweist? Betrachten wir zur Beantwortung dieser Frage eine Kugelfläche mit dem Radius r , die eine in der Mitte befindliche positive Punktladung im Vakuum umgibt. Das \mathbf{E} -Feld zeigt überall radial nach außen und steht bei jedem beliebigen Abstand r senkrecht auf der Kugelfläche: $E = E_\perp$, also

$$\Phi_E = \oint_A E_\perp dS = \oint_A E dS.$$

E ist auf der Kugelfläche konstant und darf vor das Integral gezogen werden:

$$\Phi_E = E \oint_A dS = E 4\pi r^2.$$

Nach dem coulombschen Gesetz ist das elektrische Feld der Punktladung

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2},$$

weshalb gilt

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Dies ist der elektrische Fluss, der mit einer einzelnen Punktladung q innerhalb der geschlossenen Fläche verknüpft ist. Da sämtliche Ladungsverteilungen aus Punktladungen zusammengesetzt sind, ist es vernünftig, den **Nettofluss infolge einer Anzahl innerhalb der Fläche befindlicher Ladungen** als

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q.$$

anzusetzen. Durch Verknüpfung der beiden Gleichungen für Φ_E gelangen wir zum **gaußschen Satz**,

$$\oiint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q.$$

Der Satz besagt, dass in einem gegebenen Volumen eine positive Nettoladung enthalten sein muss, wenn mehr aus dem Volumen herausfließt als hineingeflossen ist; entsprechend muss das Volumen eine negative Nettoladung enthalten, wenn weniger herausfließt. Um mit dieser Gleichung zu rechnen ist es nützlich, die Ladungsverteilung als kontinuierlich anzunehmen. Das von A umschlossene Volumen sei V , und die Dichte der Ladungsverteilung sei ρ ; dann können wir den gaußschen Satz in der Form

$$\oiint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV \quad (3.7)$$

aufschreiben. Dieses Feld wird durch eine Ladung erzeugt, und der Nettofluss des Feldes durch eine beliebige geschlossene Fläche ist proportional zur eingeschlossenen Gesamtladung.

Die Dielektrizitätskonstante

Für den Spezialfall des Vakuums ist die absolute Dielektrizitätskonstante gegeben als $\epsilon_0 = 8,8542 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$ (*elektrische Feldkonstante, Influenzkonstante*). Der Wert von ϵ_0 ist per Definition festgelegt, und dieser krumme numerische Wert ist eher eine Folge der gewählten Einheiten, als dass er irgendetwas über die Natur des Vakuums aussagen würde. Befindet sich die Ladung hingegen in einem anderen Medium, so erscheint dessen absolute Dielektrizitätskonstante ϵ anstelle von ϵ_0 in Gleichung (3.7). In dieser Gleichung hat ϵ natürlich einerseits die Funktion, die Einheiten auszugleichen; andererseits spielt die Konstante eine grundlegende Rolle bei der Beschreibung des Plattenkondensators (siehe Abschn. 3.1.4). Dort ist ϵ der vom Medium abhängige Proportionalitätsfaktor zwischen der Kapazität und der Geometrie des Bauelements. Ein verbreitetes Verfahren zu Messung der Dielektrizitätskonstante eines Stoffes besteht darin, diesen zwischen die Platten eines Kondensators zu bringen. Im Grunde

beschreibt die Dielektrizitätskonstante das Verhalten eines Materials im elektrischen Feld: Sie erfasst sozusagen, in welchem Maße das Material vom umgebenden Feld durchdrungen wird, oder anders gesagt, wie viel von dem Feld das Medium „zulässt“.

Als die Forschungsarbeiten auf diesem Gebiet begannen, benutzte man noch kein einheitliches System physikalischer Einheiten; das führte unvermeidlich zu Verwirrung. Man musste die Zahlenwerte von ϵ in jedem gebräuchlichen Einheitensystem tabellieren, was zumindest eine Zeitverschwendung ist. Im Fall der Dichte lag das Problem ähnlich; hier behalf man sich durch die Angabe spezifischer Größen (also Verhältnissen von Dichten). So kam man auf die Idee, nicht Werte von ϵ zu tabellieren, sondern eine neue, nicht vom Einheitensystem abhängige Verhältnisgröße, die dimensionslose **relative Dielektrizitätskonstante** K_E . Die absolute Dielektrizitätskonstante eines Stoffes ist dann gegeben durch

$$\epsilon = K_E \epsilon_0 \quad (3.8)$$

und natürlich ist K_E für das Vakuum 1,0.

Wir haben hier ausführlich über K_E gesprochen, weil diese Größe mit der Lichtgeschwindigkeit in dielektrischen Medien wie Glas, Luft und Quarz zusammenhängt, worauf wir später zurückkommen werden.

3.1.3 Der gaußsche Satz für das magnetische Feld

Es gibt kein magnetisches Gegenstück zur elektrischen Ladung – trotz intensiven Suchens, selbst in Proben von der Mondoberfläche, wurden niemals isolierte magnetische Monopole gefunden. Im Gegensatz zum elektrischen Feld hat das Magnetfeld keine Quelle oder Senke, also keinen Punkt, von dem das Feld ausgeht oder in den es sich zusammenzieht. Magnetische Felder beschreibt man anhand von Stromverteilungen: Man kann sich einen Elementarmagneten als winzige Leiterschleife vorstellen, innerhalb derer sich die magnetischen Feldlinien schließen. Die Anzahl der Feldlinien, die in eine beliebige, in einem Magnetfeld befindliche geschlossene Oberfläche eintreten, ist gleich der Anzahl der aus dieser Fläche austretenden Feldlinien, denn innerhalb des umschlossenen Volumens gibt es keine magnetischen Monopole (Abb. 3.8). Die magnetische Flussdichte Φ_M durch die Oberfläche hindurch ist gleich null. Damit gelangen wir zum gaußschen Satz für das Magnetfeld:

$$\Phi_M = \oint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (3.9)$$

3.1.4 Das ampèresche Verkettungsgesetz

Eine andere Gleichung, die in unserem Zusammenhang eine Rolle spielt, stammt von André Marie Ampère (1775–1836). Der physikalische Ursprung dieses *Verkettungsgesetzes* (auch *Durchflutungsgesetzes*) ist nicht unbedingt offensichtlich, seine

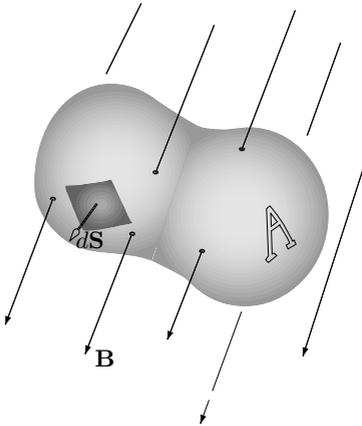


Bild 3.8: B-Feld, das eine geschlossene Fläche A durchdringt.

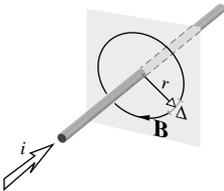


Bild 3.9: Magnetfeld um einen Strom führenden Draht.

Herleitung hier etwas ausführlicher zu besprechen ist aber durchaus der Mühe wert. Betrachten wir dazu einen geraden, Strom führenden Draht im Vakuum und das ihn umgebende kreisförmige Magnetfeld (Abb. 3.9). Aus Experimenten wissen wir, dass sich um einen geraden, von einem Strom i durchflossenen Draht das Magnetfeld $B = \mu_0 i / 2\pi r$ aufbaut. Versetzen wir uns nun zurück ins neunzehnte Jahrhundert. Damals stellte man sich vor, es gebe eine magnetische Ladung q_m ; diese Monopolladung sei so definiert, dass in einem Magnetfeld B eine Kraft $q_m B$ in Richtung von B auf sie wirke (äquivalent zur elektrischen Ladung q_e , auf die im E -Feld eine Kraft $q_e E$ wirkt). Diesen nach Norden zeigenden Monopol tragen wir nun in Gedanken eine Kreisbahn entlang, die senkrecht zu dem durch ihren Mittelpunkt verlaufenden Draht ausgerichtet ist, und überlegen, welche Arbeit dabei verrichtet wird. Die Richtung der Kraft ändert sich während des Prozesses, weil sich die Richtung von B ändert. Wir müssen den kreisförmigen Weg deshalb in winzige Abschnitte $\Delta\ell$ teilen und die zu den einzelnen Abschnitten gehörigen Teilarbeiten summieren. Die Arbeit ist gleich der Kraftkomponente parallel zur Verschiebung, multipliziert mit dieser Verschiebung, $\Delta W = q_m B_{\parallel} \Delta\ell$, und die insgesamt vom Feld verrichtete Arbeit ergibt sich folglich als $\sum q_m B_{\parallel} \Delta\ell$. \mathbf{B} zeigt überall in Richtung der Tangente an den Weg, weshalb gilt $B_{\parallel} = B = \mu_0 i / 2\pi r$; dies ist um den Kreis herum konstant. Sind also q_m und B Konstanten, so wird die Summe zu

$$q_m \sum B_{\parallel} \Delta\ell = q_m B \sum \Delta\ell = q_m B 2\pi r$$

mit $\sum \Delta\ell = 2\pi r$ als Umfang des kreisförmigen Weges.

Setzen wir nun für B den äquivalenten, von r abhängigen Ausdruck ein, der den Strom enthält (nämlich $\mu_0 i / 2\pi r$), so können wir r kürzen: Die verrichtete Arbeit hängt nicht von der Wahl der Kreisbahn ab. Bei der Bewegung senkrecht zu \mathbf{B} wird keine Arbeit verrichtet; die Arbeit ist deswegen gleich, ob wir q_m nun die Kreisbahn entlang bewegen oder auf einem Radius verschieben (vom Draht aus nach außen oder zum Draht hin nach innen), welchen wir schrittweise von einem Kreissegment zum nächsten verlagern. Tatsächlich hängt W überhaupt nicht vom Weg ab – für jeden *geschlossenen* Weg, der um den Draht herumführt, erhält man denselben Wert. Wir setzen nun den stromabhängigen Ausdruck für B ein und erhalten

$$q_m \sum B_{\parallel} \Delta \ell = q_m (\mu_0 i / 2\pi r) 2\pi r$$

Dann kürzen wir die „Ladung“ q_m , wodurch sich der folgende, recht bemerkenswerte Ausdruck ergibt:

$$\sum B_{\parallel} \Delta \ell = \mu_0 i.$$

Summiert wird entlang eines beliebigen geschlossenen Weges um den Strom herum.

Wie Sie sehen, ist die „magnetische Ladung“ verschwunden. Das ist angenehm, weil wir nicht hoffen können, unser Gedankenexperiment mit einem Monopol tatsächlich ausführen zu können. Die Physik ist trotzdem in sich konsistent; die Gleichung sollte gelten, ob es magnetische Monopole nun gibt oder nicht. Sind außerdem mehrere Strom führende Drähte von unserem geschlossenen Weg umgeben, so überlagern die entstehenden Felder einander zu einem Nettopfeld, für welches unsere Gleichung ebenso gilt wie für alle einzelnen Komponenten:

$$\sum B_{\parallel} \Delta \ell = \mu_0 \sum i.$$

Für $\Delta \ell \rightarrow 0$ wird die Summe zum Integral entlang eines geschlossenen Weges,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 \sum i.$$

Diese Gleichung nennt man heute das **ampèresche Verkettungsgesetz**. Es verknüpft ein Integral von \mathbf{B} entlang einer Tangente an eine geschlossene Kurve C mit dem Strom i , der insgesamt innerhalb der Kurve C fließt.

Ist der Querschnitt des Stromflusses nicht gleichförmig, so schreibt man das ampèresche Gesetz mithilfe der Stromdichte auf (das ist der Strom pro Flächeneinheit, integriert über die Fläche):

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 \iint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.10)$$

Die offene Fläche A wird von C begrenzt (siehe Abb. 3.10). Die Größe μ_0 ist die **Permeabilität des Vakuums (magnetische Feldkonstante)**, definiert als $\mu_0 = 4\pi \times$

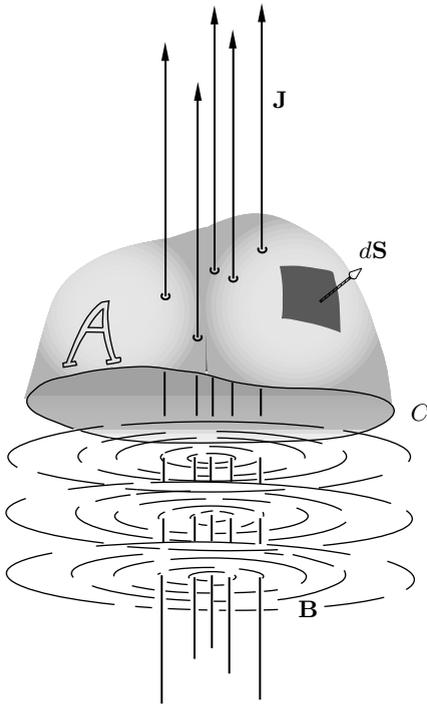


Bild 3.10: Stromdichte durch eine offene Fläche A .

$10^{-7} \text{ N} \cdot \text{s}^2 / \text{C}^2$. Fließt der Strom nicht im Vakuum, so erscheint in Gleichung (3.10) die Permeabilität μ des betreffenden Mediums. Analog zu Gleichung (3.8) ist

$$\mu = K_M \mu_0 \quad (3.11)$$

mit K_M als dimensionsloser *relativer Permeabilität*.

Gleichung (3.10) liefert zwar in vielen Situationen befriedigende Resultate, sie ist aber nicht die ganze Wahrheit. Die betrachtete Fläche wird nicht näher spezifiziert – es wird lediglich verlangt, dass sie von der Kurve C begrenzt sein soll. Probleme bereitet dies vor allem, wenn man die Aufladung eines Kondensators betrachtet, wie in Abbildung 3.11 *a* gezeigt ist: Durch die Fläche A_1 fließt ein Nettostrom i , und entlang der Kurve C baut sich ein Magnetfeld auf; die rechte Seite von Gleichung (3.10) ist damit verschieden von null, und für die linke Seite muss dies ebenfalls gelten. Bezieht man sich hingegen auf die Fläche A_2 , so fließt kein Strom, und das Feld muss null sein – obwohl sich im Vergleich zum ersteren Fall nichts Physikalisches geändert hat. Offensichtlich ist der Ansatz also nicht korrekt.

Bewegte Ladungen sind nicht die einzige Quelle von Magnetfeldern. Zwischen den Platten eines Kondensators kann man während dessen Auf- oder Entladung ein **B**-Feld messen (Abb. 3.11 *b*), welches sich nicht von dem Feld unterscheiden lässt, das

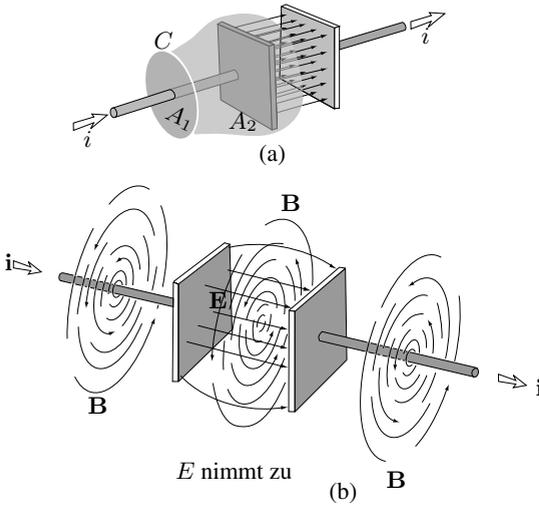


Bild 3.11: (a) Das ampèresche Gesetz sagt nichts darüber aus, welche Fläche (A_1 oder A_2) vom Weg C umschlossen wird. Ein Strom fließt aber durch A_1 und nicht durch A_2 . Der Ansatz muss demnach fehlerhaft sein. (b) \mathbf{B} -Feld mit begleitendem zeitabhängigem \mathbf{E} -Feld zwischen den Platten eines Kondensators.

die Zuleitungen umgibt, obwohl kein Strom wirklich durch den Kondensator fließt. Wenn A die Fläche jeder Platte ist und Q deren jeweilige Ladung, so ist jedoch

$$E = \frac{Q}{\epsilon A}.$$

Verändert sich die Ladung, so ändert sich auch das elektrische Feld. Die Ableitung beider Seiten der Gleichung liefert

$$\epsilon \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{i}{A},$$

und $\epsilon(\partial E/\partial t)$ ist effektiv eine Stromdichte. Maxwell stellte die Hypothese dieser von ihm so genannten *Verschiebungsstromdichte*² auf, die er wie folgt definierte:

$$J_D \equiv \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{3.12}$$

Als einer der wichtigsten Beiträge Maxwells gilt die Neuformulierung des ampèreschen Gesetzes,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu \iint_A \left(\mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}. \tag{3.13}$$

Die Gleichung besagt, dass *ein zeitabhängiges elektrisches Feld stets von einem Magnetfeld begleitet wird, selbst wenn $J = 0$ ist* (Abb. 3.12).

² Maxwells eigene Worte und Vorstellungen zu diesem Thema werden kommentiert von A. M. Bork in *Am. J. Phys.* **31**, 854 (1963). Übrigens spricht man „Clerk“ wie „Clark“ aus.

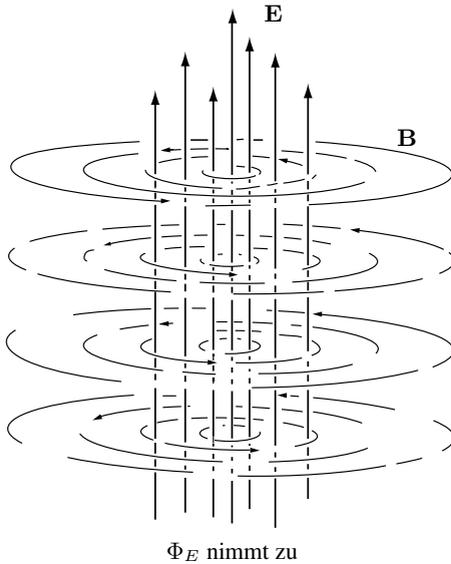


Bild 3.12: Ein zeitabhängiges \mathbf{E} -Feld. Um jeden Punkt, in dem sich Φ_E ändert, bilden die Magnetfeldlinien geschlossene Schleifen.

3.1.5 Die maxwellschen Gleichungen

Die Integralausdrücke (3.5), (3.7), (3.9) und (3.13) nennt man maxwellsche Gleichungen. Wir erinnern uns, dass sie durch eine Verallgemeinerung experimenteller Ergebnisse zustande gekommen sind. Die einfachste Aussage der Gleichungen bezieht sich auf das Verhalten von elektrischem und magnetischem Feld im Vakuum, wenn $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$ und ρ sowie \mathbf{J} gleich null sind. In diesem Fall ist

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.14)$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \epsilon_0 \iint_A \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.15)$$

$$\oiint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (3.16)$$

$$\oiint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (3.17)$$

Abgesehen von einem skalaren Faktor treten das elektrische und das magnetische Feld in den Gleichungen bemerkenswert symmetrisch auf: Beide Felder beeinflussen sich gegenseitig. Die mathematische Symmetrie lässt auf ein hohes Maß an physikalischer Symmetrie schließen.

Wenn jedem Punkt in einem räumlichen Gebiet ein Vektor zugeordnet ist, dann haben wir es mit einem **Vektorfeld** zu tun. Beispiele für Vektorfelder sind das elektrische und das magnetische Feld. Die maxwellschen Gleichungen in der obigen Form beschreiben

diese Felder mithilfe von Integralen, die über Kurven und Flächen in diesem Gebiet genommen werden. Im Gegensatz dazu kann jede der maxwellschen Gleichungen auch mithilfe von Ableitungen in bestimmten Punkten des Raumes geschrieben werden. Durch diese Umformulierung eröffnet sich eine völlig neue Perspektive. Wir wollen dieses Vorgehen zumindest in groben Zügen skizzieren (eine ausführliche Darstellung finden Sie in Anhang 1). Dazu führen wir zunächst einen wichtigen Differentialoperator, den Nablaoperator, ein. In kartesischen Koordinaten lautet dieser

$$\nabla = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Der Nablaoperator ist formal ein Vektor, sodass seine Anwendung auf ein Vektorfeld entweder als Skalarprodukt oder als Kreuzprodukt interpretiert werden kann. Das Ergebnis ist entsprechend ein Skalar oder ein Vektor. Mit $\mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{i}} + E_y \hat{\mathbf{j}} + E_z \hat{\mathbf{k}}$ können wir also schreiben

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(E_x \hat{\mathbf{i}} + E_y \hat{\mathbf{j}} + E_z \hat{\mathbf{k}} \right).$$

Dies wird als die **Divergenz** des Vektorfeldes \mathbf{E} bezeichnet:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Diesen Namen hat der große englische Elektroingenieur und Physiker Oliver Heaviside (1850–1925) eingeführt. Die Divergenz von \mathbf{E} ist die Änderung von E_x entlang der x -Achse plus die Änderung von E_y entlang der y -Achse plus die Änderung von E_z entlang der z -Achse. Sie kann positiv, negativ oder null sein. Die Gleichung sagt uns, wie wir die Divergenz zu berechnen haben, doch sie hilft uns nicht weiter, wenn wir verstehen wollen, was sie physikalisch bedeutet.

Da ein sich bewegendes Fluid leichter zu visualisieren und sicherlich auch leichter verbal zu beschreiben ist als ein statisches elektrisches Feld, geraten die Vorstellungen und Bilder leicht durcheinander. Am besten können Sie sich das Ganze vorstellen, indem Sie ein *strömendes Flüssigkeitsfeld in seinem stationären Zustand zeichnen und in Gedanken ein Foto davon machen – das elektrische Feld aufgrund einer Ladungsverteilung ist analog zu diesem statischen Bild*. Eine positive Divergenz bedeutet vereinfacht gesagt, dass sich das Feld ausbreitet oder von einem bestimmten Punkt weg bewegt. In jedem Punkt des Feldes, aus dem mehr „herausfließt als hinein, gibt es eine positive Divergenz. Wie wir beim gaußschen Gesetz gesehen haben, erzeugt eine Quelle einen Nettofluss *durch* eine sie umgebende *geschlossene Fläche*, und entsprechend erzeugt eine Quelle (eine positive Ladung) an einem Punkt im Raum eine positive Divergenz *an diesem Punkt*.

Die Divergenz an einem Punkt kann alles andere als offensichtlich sein, weil sie sowohl von der Stärke des Feldes abhängt als auch von seiner Neigung, entweder

zu dem betrachteten Punkt zu konvergieren oder von dort zu divergieren. Betrachten wir zum Beispiel eine positive Ladung im Punkt P_1 . Das elektrische Feld „fließt“ nach außen – wobei das „fließen“ hier nicht wörtlich genommen werden sollte – und im Punkt P_1 gibt es eine positive Divergenz. In einem Punkt P_2 in der Umgebung von P_1 breitet sich das Feld tatsächlich wie $1/r^2$ aus (was eine positive Divergenz beiträgt), doch gleichzeitig schwächt es sich mit $1/r^2$ ab (was eine negative Divergenz beiträgt). Das Ergebnis ist, dass $\operatorname{div} \mathbf{E}$ überall abseits der Punktladung null ist. Das Feld hat nicht die Neigung, von irgendeinem Punkt in seiner Umgebung, den es durchfließt, zu divergieren. Diese Schlussfolgerung lässt sich verallgemeinern: *Eine von null verschiedene Divergenz des elektrischen Feldes tritt nur an Orten auf, an denen sich Ladungen befinden.*

Wiederum vereinfacht gesagt, ist der Fluss das, was netto durch eine Oberfläche „fließt“, und die Divergenz ist das, was netto aus einem Punkt „herausfließt“. Durch eine weitere wichtige mathematische Definition lassen sich die beiden Größen miteinander in Beziehung setzen:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E}.$$

Mit anderen Worten, wir nehmen einen beliebigen Punkt des Vektorfeldes und legen um ihn herum eine kleine geschlossene Fläche mit dem Flächeninhalt A und dem kleinen Volumen ΔV . Wir schreiben einen Ausdruck für den Nettofluss des Feldes durch A auf – das ist das in der obigen Gleichung auftretende Doppelintegral – und dividieren diesen durch das in A eingeschlossene Volumen, um den Fluss pro Volumeneinheit zu erhalten. Dann lassen wir das Volumen auf einen Punkt zusammenschrumpfen. Das Ergebnis ist die Divergenz des Feldes in diesem Punkt. Wir können den Prozess des Schrumpfens anhalten, wenn die Oberfläche sehr, sehr klein ist, und nachschauen, ob der Fluss positiv, negativ oder null ist; wenn wir das Schrumpfen fortsetzen, erhalten wird im Limes entsprechend eine positive, eine negativ oder eine verschwindende Divergenz. Wir sehen also, dass der Fluss und die Divergenz tatsächlich zwei eng verwandte Konzepte sind.

Aus dem gaußschen Gesetz in Integralform, Gleichung (3.7), folgt, dass der Nettofluss gleich der eingeschlossenen Nettoladung ist. Division durch das Volumen liefert die Ladungsdichte ρ in diesem Punkt. Die differentielle Form des gaußschen Gesetzes für elektrische Felder lautet somit

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Wenn wir wissen, wie sich das E -Feld im Raum von einem Punkt zum anderen ändert, dann können wir in jedem beliebigen Punkt die Ladungsdichte berechnen (oder umgekehrt).

Auf ganz ähnliche Weise erhalten wir aus dem gaußschen Gesetz für das Magnetfeld, Gleichung (3.9), und der Tatsache, dass es keine magnetischen Ladungen gibt, die **differentielle Form des gaußschen Gesetzes für magnetische Felder:**

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Die Divergenz des magnetischen Feldes ist in jedem Punkt des Raumes null.

Betrachten wir nun noch einmal das faradaysche Induktionsgesetz [Gl. (3.14)], das wir ebenfalls in eine differentielle Form überführen wollen. Die Aussage des Gesetzes besteht darin, dass ein zeitlich variierendes B -Feld immer von einem E -Feld mit geschlossenen Feldlinien begleitet wird. Die linke Seite von Gleichung (3.14) ist die *Zirkulation* des elektrischen Feldes. Um das Gesetz in eine differentielle Form zu überführen, benötigen wir einen Differentialoperator, der als **Rotation**³ (kurz „rot“) bezeichnet wird, da er die Tendenz des Feldes widerspiegelt, um einen Punkt im Raum zu zirkulieren. Der Rotationsoperator wird durch den Vektor $\nabla \times$ symbolisiert. In kartesischen Koordinaten ist die Rotation eines Vektorfeldes \mathbf{E}

$$\nabla \times \mathbf{E} = \left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left(E_x \hat{\mathbf{i}} + E_y \hat{\mathbf{j}} + E_z \hat{\mathbf{k}} \right).$$

Ausmultipliziert ergibt dies

$$\nabla \times \mathbf{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}}.$$

Jeder der Klammerausdrücke spiegelt die Tendenz des E -Feldes wider, um den zugehörigen Einheitsvektor zu zirkulieren. Der erste Term beschreibt also die Zirkulation des Feldes in der xy -Ebene um den Einheitsvektor $\hat{\mathbf{i}}$ in einem bestimmten Punkt des Raumes. Die Gesamtzirkulation ist die vektorielle Summe der Einzelbeiträge.

Um die mathematische Beziehung zwischen der Zirkulation des elektrischen Feldes und seiner Rotation zu beleuchten, kommen wir noch einmal auf das faradaysche Induktionsgesetz zurück und betrachten einen Punkt P in einem elektrischen Feld, der auf einer kleinen, von der geschlossenen Kurve C begrenzten Fläche ΔA liegt. Die Zirkulation des Feldes ist durch die linke Seite von Gleichung 3.14 gegeben, während auf der rechten Seite ein Flächenintegral steht. Um die Zirkulation pro Flächeneinheit zu erhalten, teilen wir das Linienintegral durch ΔA . Wir wollen wissen, wie stark das Feld um den Punkt zirkuliert; also lassen wir C – und folglich ΔA – bis auf P zusammenschrumpfen. Das heißt, wir machen C infinitesimal, wodurch wir von der Zirkulation pro Flächeneinheit zur Rotation übergehen:

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta A} \oint \mathbf{E} \cdot d\ell = \text{rot } \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E}.$$

³ Anmerkung des Übersetzers: Im Englischen ist die vom Maxwell vorgeschlagene Bezeichnung **curl** üblich.

Auch wenn wir es nicht wirklich hergeleitet haben (dies wird in Anhang 1 nachgeholt), können wir doch aus Gleichung 3.14 die **differentielle Form des faradayschen Induktionsgesetzes** ablesen:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

In der Elektrostatik beginnen und enden elektrische Felder bei Ladungen; es gibt keine geschlossenen Feldlinien und keine Zirkulation. Daher ist die Rotation für jedes elektrostatische Feld null. Nur elektrische Felder, die von zeitlich variierenden B -Feldern erzeugt werden, haben eine Rotation.

Auf das ampèresche Gesetz können im Wesentlichen die gleichen Argumente angewendet werden. Der Einfachheit halber beschränken wir uns hier auf den Vakuumfall [Gl. (3.15)]. Wir betrachten also die Zirkulation eines Magnetfeldes, das durch ein zeitlich variierendes elektrisches Feld entsteht. Analog zu den obigen Überlegungen können wir die **differentielle Form des ampèreschen Gesetzes** folgendermaßen schreiben:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Diese Vektorgleichungen sind wunderbar kompakt und leicht zu merken. In kartesischen Koordinaten entsprechen sie den folgenden acht Differentialgleichungen:

Faradaysches Induktionsgesetz

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial z} = -\frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial t} \\ \text{(ii)} \quad & \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial x} = -\frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial t} \\ \text{(iii)} \quad & \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial y} = -\frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ampèresches Gesetz

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial z} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial t} \\ \text{(ii)} \quad & \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial t} \\ \text{(iii)} \quad & \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial y} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Gaußsches Gesetz für das magnetische Feld

$$\frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial z} = 0 \quad (3.20)$$

Gaußsches Gesetz für das elektrische Feld

$$\frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial z} = 0 \quad (3.21)$$

Wir haben nun das notwendige Rüstzeug erworben, um zu begreifen, wie sich untrennbar miteinander verbundene, sich gegenseitig erhaltende elektrische und magnetische Felder im Raum ausbreiten – als eine Einheit, ohne Ladungen und Ströme, losgelöst von Materie und Äther.

3.2 Elektromagnetische Wellen

Eine vollständige, mathematisch elegante Ableitung der elektromagnetischen Wellengleichung wurde in den Anhang 1 verlagert. An dieser Stelle wollen wir, was nicht weniger wichtig ist, die physikalischen Prozesse eher intuitiv beschreiben. Drei Fakten, auf die wir eine qualitative Vorstellung stützen können, stehen uns zur Verfügung: die Symmetrie der maxwellschen Gleichungen, die Wechselbeziehung zwischen **E**-Feld und **B**-Feld in diesen Gleichungen und die Tatsache, dass die beiden Felder generell senkrecht aufeinander stehen.

Beim Studium von Elektrizität und Magnetismus fällt alsbald auf, dass eine Reihe von Beziehungen die Form von Kreuzprodukten zwischen Vektoren (oder, wenn man so will, Rechte-Hand-Regeln) annimmt. Dies bedeutet, dass ein bestimmtes Ereignis eine senkrecht dazu ausgerichtete Antwort nach sich zieht. In unserem Zusammenhang ist besonders interessant, dass ein zeitabhängiges **E**-Feld ein **B**-Feld erzeugt, das stets senkrecht auf der Richtung steht, in der sich das **E**-Feld ändert (Abb. 3.12). In der gleichen Weise erzeugt ein zeitlich variierendes **B**-Feld ein **E**-Feld, das überall senkrecht zu der Richtung verläuft, in der **B** sich ändert (Abb. 3.5). Davon ausgehend können wir allgemein eine transversale Natur der beiden Felder in einer elektromagnetischen Störung erwarten.

Betrachten wir eine Ladung, die auf irgendeine Art aus der Ruhelage *beschleunigt* wird. Solange sich die Ladung nicht bewegt, ist sie von einem konstanten, radialen elektrischen Feld umgeben, das sich in alle Richtungen bis ins Unendliche ausdehnt. Beginnt die Ladung sich zu bewegen, so ändert sich das **E**-Feld in ihrer unmittelbaren Nachbarschaft; diese Änderung pflanzt sich mit einer bestimmten, endlichen Geschwindigkeit im Raum fort. Dieses zeitlich variierende elektrische Feld induziert ein magnetisches Feld entsprechend den Gleichungen (3.15) und (3.19). Wenn sich die Ladung mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, ist die Änderungsrate des **E**-Feldes ebenfalls konstant, und das entstehende Magnetfeld hängt nicht von der Zeit ab.

In unserem Fall soll die Ladung jedoch beschleunigt werden – das bedeutet, $\partial \mathbf{E} / \partial t$ ist nicht konstant, und das resultierende Magnetfeld ist zeitabhängig. Entsprechend den Gleichungen (3.14) oder (3.18) erzeugt das zeitlich variierende Magnetfeld wiederum ein elektrisches Feld, und der Prozess setzt sich fort: **E**-Feld und **B**-Feld sind direkt

aneinander gekoppelt. Ändert sich eines der beiden Felder, so erzeugt es ein neues Feld, das sich ein wenig weiter ausdehnt, und auf diese Weise bewegt sich die Störung Punkt für Punkt im Raum fort.

Ein sehr mechanistischer, aber anschaulicher Vergleich bietet sich an: Wir stellen uns die elektrischen Feldlinien als dicht beieinander liegende, radial verteilte Bindfäden vor. Zupft man an dieser Anordnung, so wird jeder einzelne Faden verformt; die Knickstellen wandern von der Störungsquelle nach außen. In ihrer Gesamtheit bilden die Knicke zu jedem Zeitpunkt eine dreidimensionale Störung im Kontinuum des (elektrischen) Feldes.

Zutreffender betrachtet man das \mathbf{E} - und das \mathbf{B} -Feld als zwei Aspekte eines einzigen physikalischen Phänomens, des *elektromagnetischen Feldes*, dessen Quelle eine bewegte Ladung ist. Eine in einem solchen Feld erzeugte Störung pflanzt sich unabhängig von ihrer Quelle im Raum als Welle fort. In einem endlosen Kreislauf, verknüpft zu einer Einheit, erneuern sich die zeitabhängigen Felder gegenseitig. Elektromagnetische Felder, die uns vom relativ nahe gelegenen, mit bloßem Auge sichtbaren Andromedanebel erreichen, waren über zwei Millionen Jahre lang unterwegs!

Bis jetzt haben wir die Ausbreitungsrichtung der Welle bezüglich der Feldkomponenten noch nicht diskutiert. Die hohe Symmetrie der maxwellschen Gleichungen für das Vakuum legt jedoch nahe, dass die Richtung der Fortpflanzung der Störung sowohl in Bezug auf \mathbf{E} als auch in Bezug auf \mathbf{B} symmetrisch ist. Daraus folgt unmittelbar, dass eine elektromagnetische Welle nicht rein longitudinal sein kann (jedenfalls, solange \mathbf{E} und \mathbf{B} nicht parallel zueinander sind). Wir wollen unsere Vermutungen nun mathematisch untermauern.

In Anhang 1 ist gezeigt, wie man die maxwellschen Gleichungen für das Vakuum zu zwei sehr übersichtlichen Vektorausdrücken umformen kann:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad [\text{A1.26}]$$

und

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} . \quad [\text{A1.27}]$$

Der Laplace-Operator⁴ ∇^2 wirkt auf jede Komponente von \mathbf{E} und \mathbf{B} , sodass die beiden Vektorgleichungen für insgesamt sechs Skalargleichungen stehen.

⁴ In kartesischen Koordinaten ist $\nabla^2 \mathbf{E} = \hat{\mathbf{i}} \nabla^2 \mathbf{E}_x + \hat{\mathbf{j}} \nabla^2 \mathbf{E}_y + \hat{\mathbf{k}} \nabla^2 \mathbf{E}_z$.

In kartesischen Koordinaten lauten die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

und

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}.$$

Ausdrücke, die wie diese die Ortsabhängigkeit einer physikalischen Größe zu ihrer Zeitabhängigkeit in Beziehung setzen, wurden bereits lange vor Maxwells Arbeiten untersucht; man wusste auch schon, dass sie Wellenphänomene beschreiben. Jede einzelne Komponente des elektromagnetischen Feldes (E_x , E_y , E_z , B_x , B_y und B_z) erfüllt die skalare Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad [2.60]$$

unter der Voraussetzung

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (3.24)$$

Zur Bestimmung von v verwendete Maxwell die Resultate von Experimenten, die Wilhelm Weber (1804–1891) und Rudolph Kohlrausch (1809–1858) 1856 in Leipzig vorgenommen hatten. In SI-Einheiten ist der Wert von μ_0 heute auf $4\pi \times 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{kg}/\text{C}^2$ festgelegt; bis vor kurzem hätte man außerdem ϵ_0 bestimmen müssen (durch einfache Messungen am Kondensator). Auf jeden Fall ist (in modernen Einheiten geschrieben)

$$\epsilon_0 \mu_0 \approx (8,85 \times 10^{-12} \text{ s}^2 \text{ C}^2 / \text{m}^3 \cdot \text{kg}) (4\pi \times 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{kg}/\text{C}^2)$$

oder

$$\epsilon_0 \mu_0 \approx 11,12 \times 10^{-18} \text{ s}^2 / \text{m}^2.$$

Nun kam der spannende Moment: Die aus diesen Zusammenhängen vorhergesagte Geschwindigkeit aller elektromagnetischen Wellen im Vakuum war

$$v \approx \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

Dieser theoretisch erhaltene Wert stimmte bemerkenswert gut mit der Lichtgeschwindigkeit überein, die Fizeau kurz zuvor gemessen hatte (315 300 km/s). Maxwell kannte Fizeaus Experimente von 1849 mit einem rotierenden Zahnrad und merkte dazu an:

Diese Geschwindigkeit [d.h. ihr theoretisch vorhergesagter Wert] ist der Lichtgeschwindigkeit so nahe, dass man mit großer Wahrscheinlichkeit folgern kann, dass es sich bei Licht selbst (einschließlich der Wärmestrahlung und anderer möglicherweise existierender Strahlungsarten) um eine elektromagnetische Störung in Form von Wellen handelt, welche sich durch das elektromagnetische Feld entsprechend den Gesetzen des Elektromagnetismus fortpflanzt.

Diese brillante Analyse kann als einer der bedeutendsten intellektuellen Triumphe aller Zeiten gelten. Es hat sich inzwischen eingebürgert, die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum mit dem Symbol c (von lateinisch *celer*, „schnell“) zu bezeichnen. Seit der 17. Conférence Générale des Poids et Mesures 1983 in Paris gilt eine neue Definition des Meters; die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum wurde damit auf exakt

$$c = 2,997\,924\,58 \times 10^8 \text{ m/s}$$

festgelegt. Die durch (3.24) gegebene Lichtgeschwindigkeit hängt weder von der Bewegung der Lichtquelle noch von der des Beobachters ab. Dies ist eine bemerkenswerte Schlussfolgerung und es ist erstaunlich, dass scheinbar niemand ihre Tragweite erkannt hat – bis Einstein 1905 die spezielle Relativitätstheorie formulierte.

3.2.1 Transversalwellen

Die experimentell bewiesene transversale Natur des Lichts muss nun im Kontext der Theorie des Elektromagnetismus erklärt werden. Betrachten wir dazu den recht einfachen Fall einer ebenen Welle, die sich im Vakuum in positiver x -Richtung fortpflanzt. Die elektrische Feldstärke ist eine Lösung von Gleichung (A1.26), wobei \mathbf{E} über jeder der unendlich vielen, senkrecht auf der x -Achse stehenden Ebenen konstant ist. \mathbf{E} ist daher nur eine Funktion von x und t , also $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, t)$. Kehren wir nun zu den maxwellischen Gleichungen zurück, insbesondere zu Gleichung (3.21) (man liest sie „Die Divergenz von \mathbf{E} ist gleich null.“). Da \mathbf{E} weder von y noch von z abhängt, reduziert sich die Gleichung zu

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0. \tag{3.25}$$

Ist E_x ungleich null – gibt es also eine Feldkomponente in der Ausbreitungsrichtung der Welle –, dann besagt Gleichung (3.25), dass diese Feldkomponente nicht von x abhängt: Zu jedem beliebigen Zeitpunkt ist E_x für alle Werte von x konstant. Für eine Welle, die sich in positiver x -Richtung ausbreitet, kann dies natürlich nicht gelten. Also muss E_x gleich null sein, damit Gleichung (3.25) erfüllt ist – die elektromagnetische Welle besitzt in der Richtung ihrer Ausbreitung keine Feldkomponente. Das mit der ebenen Welle verknüpfte elektrische Feld ist somit ausschließlich *transversal*.

Um eine Welle vollständig zu beschreiben, müssen wir aus diesem Grunde die zeitliche Entwicklung der Richtung des \mathbf{E} -Feldes angeben, die so genannte **Polarisierung** des Lichts, die in Kapitel 8 ausführlich behandelt wird. Im Augenblick wollen wir uns ohne Beschränkung der Allgemeinheit ausschließlich auf *linear polarisierte* Wellen beziehen, also solche, bei denen sich die Richtung des schwingenden \mathbf{E} -Vektors nicht ändert. Wir orientieren dafür unser Koordinatensystem so, dass das elektrische Feld parallel zur y -Achse ausgerichtet ist, woraufhin

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{j}} E_y(x, t) \quad (3.26)$$

ist. Wir bilden die Rotation und verwenden Gleichung 3.18. Wegen $E_x = E_z = 0$ und weil E_y nur eine Funktion von x , nicht aber von y und z ist, erhalten wir

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \quad (3.27)$$

B_x und B_y sind folglich konstant und für uns momentan uninteressant. Das zeitabhängige Magnetfeld kann nur in z -Richtung eine Komponente haben. Offensichtlich *ist die linear polarisierte Welle im Vakuum daher transversal* (Abb. 3.13). Außer bei senkrechtem Einfall pflanzen sich solche Wellen in realen Medien nicht transversal fort, weil das Material Energie absorbieren oder freie Ladungen enthalten kann. Für den Moment werden wir ausschließlich dielektrische Medien (also Nichtleiter) betrachten, die homogen, isotrop, linear und stationär sind. In diesem Fall sind ebene elektromagnetische Wellen transversal.

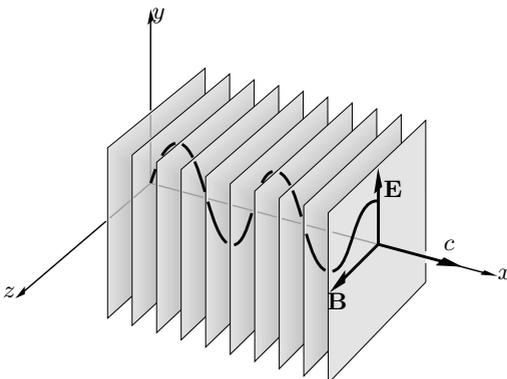


Bild 3.13: Felder einer ebenen harmonischen elektromagnetischen Welle.

Abgesehen von unserer Forderung, dass die Welle linear polarisiert sein soll, haben wir die Form der Störung noch nicht festgelegt. Daher sind unsere Schlussfolgerungen von sehr allgemeiner Natur, sie können sowohl auf einzelne Pulse als auch auf kontinuierliche Wellen angewendet werden. Wir haben bereits herausgearbeitet, dass harmonische Funktionen von besonderer Bedeutung sind, da man jede beliebige (periodische) Welle mithilfe der Fourieranalyse (Abschn. 7.3) aus sinusförmigen Komponenten zusammensetzen kann. Also beschränken wir unsere Diskussion auf harmonische Wellen und schreiben $E_y(x, t)$ auf als

$$E_y(x, t) = E_{0y} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \varepsilon \right]. \quad (3.28)$$

Die Geschwindigkeit der Fortpflanzung ist c . Durch direkte Integration von Gleichung (3.27) gelangt man zur zugehörigen magnetischen Flussdichte

$$B_z = - \int \frac{\partial E_y}{\partial x} dt.$$

Mithilfe von Gleichung (3.28) erhalten wir

$$B_z = - \frac{E_{0y}\omega}{c} \int \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \varepsilon \right] dt$$

oder

$$B_z(x, t) = \frac{1}{c} E_{0y} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \varepsilon \right]. \quad (3.29)$$

Die Integrationskonstante, die dem zeitunabhängigen Feld entspricht, wurde im letzteren Fall vernachlässigt. Beim Vergleich dieses Ergebnisses mit Gleichung (3.28) sieht man sofort, dass

$$E_y = cB_z \quad (3.30)$$

ist. Da sich E_y und B_z nur durch einen skalaren Faktor voneinander unterscheiden und die Zeitabhängigkeit beider Komponenten demnach gleich ist, sind \mathbf{E} und \mathbf{B} in allen Punkten des Raumes *in Phase*. Außerdem stehen $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{j}}E_y(x, t)$ und $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{k}}B_z(x, t)$ *senkrecht* aufeinander, und ihr Kreuzprodukt $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ zeigt in die Fortpflanzungsrichtung der Welle, $\hat{\mathbf{i}}$ (Abb. 3.14).

In gewöhnlichen dielektrischen Materialien, die vor allem nichtleitend und nicht magnetisch sind, kann Gleichung 3.30 verallgemeinert werden zu

$$E = vB,$$

wobei v die Geschwindigkeit der Welle im Medium und $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ ist.

Ebene Wellen sind zwar wichtig, aber bei weitem nicht die einzigen Lösungen der Maxwell-Gleichungen. Im vorherigen Kapitel haben wir gesehen, dass die Wellengleichung viele Lösungen hat, darunter auch Zylinder- und Kugelwellen (Abb. 3.15).

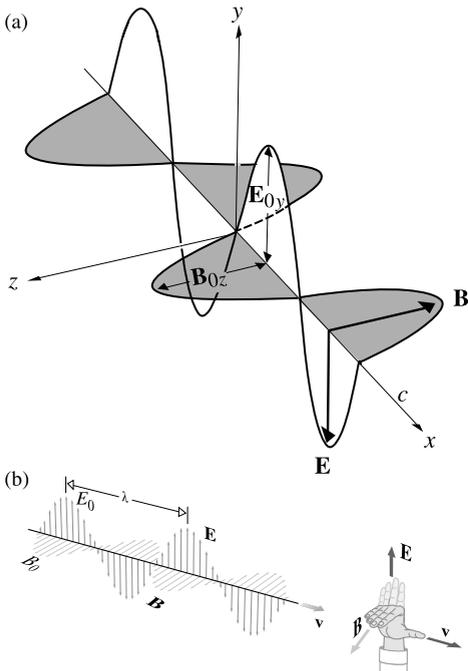


Bild 3.14: (a) Orthogonale harmonische \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Felder einer linear polarisierten Welle. (b) Die Welle breitet sich in Richtung von $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ aus.

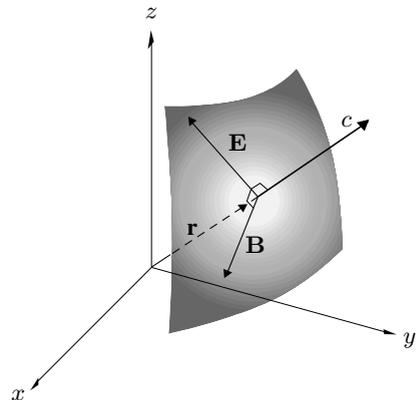


Bild 3.15: Ausschnitt aus der Front einer Kugelwelle in großer Entfernung von der Quelle.

Es muss an dieser Stelle aber noch einmal darauf hingewiesen werden, dass elektromagnetische Kugelwellen in der Realität nicht existieren, wenngleich sie ein nützliches Konzept sind, das wir gelegentlich aufgreifen werden. Es gibt keine Anordnung von Emittoren, deren Strahlungsfelder so kombiniert werden können, dass sie echte Kugelwellen erzeugen. Außerdem wissen wir aus der Quantenmechanik, dass die Strahlungsemission grundsätzlich anisotrop ist. Wie ebene Wellen sind auch Kugelwellen nur eine Näherung.

Beispiel 3.1

Eine sinusförmige, ebene elektromagnetische Welle mit einer Amplitude von $1,0 \text{ V/m}$ und einer Wellenlänge von $2,0 \text{ m}$ propagiert im Vakuum in die positive z -Richtung. (a) Schreiben Sie für den Fall, dass das elektrische Feld in x -Richtung verläuft und $\mathbf{E}(0,0) = 0$ ist, einen Ausdruck für $\mathbf{E}(z,t)$ auf. (b) Schreiben Sie einen Ausdruck für \mathbf{B} auf. (c) Verifizieren Sie, dass $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ in die Richtung der Propagation zeigt.

Lösung (a) Es ist $\mathbf{E}(z, t) = \hat{\mathbf{i}}(1,0 \text{ V/m}) \sin k(z - ct)$ mit $k = 2\pi/2 = \pi$, und daher $\mathbf{E}(z, t) = \hat{\mathbf{i}}(1,0 \text{ V/m}) \sin \pi(z - ct)$. Das elektrische Feld zeigt offensichtlich in x -Richtung und es gilt $\mathbf{E}(0, 0) = 0$.

(b) Gemäß Gleichung (3.30) ist $E = cB$ und somit $\mathbf{B}(z, t) = \hat{\mathbf{j}}(1,0 \text{ V/m})/c \sin \pi(z - ct)$.

(c) $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ hat die Richtung von $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}$. Dieses Kreuzprodukt hat die Richtung des Basisvektors $\hat{\mathbf{k}}$, d. h. die z -Richtung.

3.3 Energie und Impuls

Eine der wichtigsten Eigenschaften einer elektromagnetischen Welle ist, dass sie Energie und Impuls transportiert. Das Licht selbst des sonnennächsten Sterns legt rund vierzig Billionen Kilometer zurück, um zur Erde zu gelangen, und ist dann noch immer energiereich genug, um an den Elektronen in unserem Auge Arbeit zu verrichten.

3.3.1 Der Poynting-Vektor

Jede elektromagnetische Welle existiert in einem bestimmten Gebiet des Raumes. Es erscheint daher sinnvoll, die *Strahlungsenergie pro Volumeneinheit* zu betrachten, die **Energiedichte** u . Nehmen wir an, ein elektromagnetisches Feld könne auf irgendeine Weise Energie speichern. Dies ist ein wichtiger logischer Schritt, der das Feld zur physikalischen Realität macht: Besitzt das Feld Energie, so ist es ein „Ding an sich“. Diese Energie ist außerdem kontinuierlich verteilt, weil das klassische Feld kontinuierlich ist. Wir wollen nun sehen, wohin uns diese Annahmen führen.

Angenommen, ein Plattenkondensator mit der Kapazität C wird auf eine Spannung V geladen. Wir können uns vorstellen, dass die im Kondensator gespeicherte Energie ($\frac{1}{2}CV^2$) durch Interaktion der Ladungen im Feld E zwischen den Platten sitzt. Wenn die Plattenfläche A ist und der Plattenabstand d , dann ist $C = \epsilon_0 A/d$. Im Zwischenraum ist die Energie pro Volumeneinheit

$$u_E = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{Ad} = \frac{\frac{1}{2}(\epsilon_0 A/d)(Ed)^2}{Ad}.$$

Die Energiedichte des elektrischen Feldes im Vakuum ist daher

$$u_E = \frac{\epsilon_0}{2}E^2. \quad (3.31)$$

Analog dazu kann die Energiedichte eines einzelnen Magnetfeldes bestimmt werden, indem man eine Spule mit der Induktivität L betrachtet, die einen Strom I führt. Eine einfache Zylinderspule ohne Kern (Luftspule) mit der Querschnittsfläche A , der Länge l und n Windungen pro Längeneinheit hat die Induktivität $L = \mu_0 n^2 l A$. Das

Magnetfeld im Inneren der Spule ist $B = \mu_0 n I$, und somit ist die Energiedichte in diesem Gebiet

$$u_B = \frac{\frac{1}{2} L I^2}{A l} = \frac{\frac{1}{2} (\mu_0 n^2 l A) (B / \mu_0 n)^2}{A l}.$$

Und wenn wir noch einen Schritt weiter gehen, erhalten wir die Energiedichte für ein beliebiges Magnetfeld im Vakuum

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2. \quad (3.32)$$

Die Beziehung $E = cB$ wurde speziell für ebene Wellen hergeleitet, ist aber recht allgemein anwendbar. Mit $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ folgt

$$u_E = u_B. \quad (3.33)$$

Die Energie einer sich durch den Raum bewegenden elektromagnetischen Welle entfällt zu gleichen Teilen auf deren elektrische und magnetische Feldkomponente. So ist

$$u = u_E + u_B, \quad (3.34)$$

$$u = \epsilon_0 E^2 \quad (3.35)$$

oder äquivalent

$$u = \frac{1}{\mu_0} B^2. \quad (3.36)$$

Vergessen Sie dabei nicht, dass die Felder sich ändern und dass u eine Funktion der Zeit ist. Zur Darstellung des Flusses der elektromagnetischen Energie, der mit einer Welle verbunden ist, wollen wir den Energietransport pro Zeiteinheit (die Leistung) durch eine Flächeneinheit hindurch mit S bezeichnen. In SI-Einheiten wird S in W/m^2 angegeben. Abbildung 3.16 zeigt eine elektromagnetische Welle, die sich mit der Geschwindigkeit c durch eine Fläche A bewegt. Während eines sehr kurzen

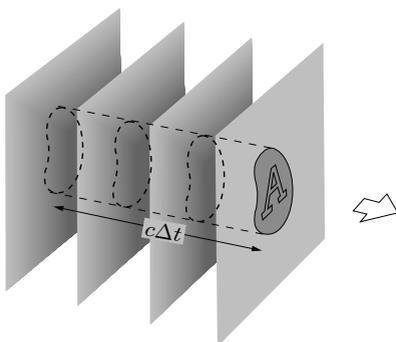


Bild 3.16: Der Fluss der elektromagnetischen Energie.

Zeitintervalls Δt fließt nur diejenige Energie $u(c \Delta t A)$ durch A , die in einem zylindrischen Volumen $(c \Delta t A)$ enthalten ist. So ist

$$S = \frac{u c \Delta t A}{\Delta t A} = uc \quad (3.37)$$

oder mit Gleichung (3.35)

$$S = \frac{1}{\mu_0} EB. \quad (3.38)$$

Wir nehmen nun vernünftigerweise (für isotrope Medien) an, dass die Energie in Ausbreitungsrichtung der Welle fließt. Der zugehörige *Vektor S* ist dann

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (3.39)$$

oder

$$\mathbf{S} = c^2 \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (3.40)$$

Der Betrag von \mathbf{S} ist die Leistung pro Flächeneinheit, die durch eine Fläche fließt, deren Normale parallel zu \mathbf{S} ist. Nach John Henry Poynting (1852–1914) wurde der Vektor **Poynting-Vektor** benannt. Bevor wir fortfahren, sei darauf hingewiesen, dass gemäß der Quantenmechanik die mit einer elektromagnetischen Welle verbundene Energie tatsächlich quantisiert ist; sie ist nicht kontinuierlich. Andererseits liefert die klassische Theorie unter gewöhnlichen Umständen eine sehr gute Näherung, und deshalb werden wir Lichtwellen weiterhin so behandeln, als wären sie ein kontinuierlicher „Stoff“, der die Fähigkeit besitzt, ein räumliches Gebiet auszufüllen.

Wir wollen dieses Ergebnis nun auf eine harmonische, linear polarisierte (das heißt, die Richtungen des elektrischen und des magnetischen Feldes sind festgelegt) ebene Welle anwenden, die sich im Vakuum in Richtung von \mathbf{k} ausbreitet:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t), \quad (3.41)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t). \quad (3.42)$$

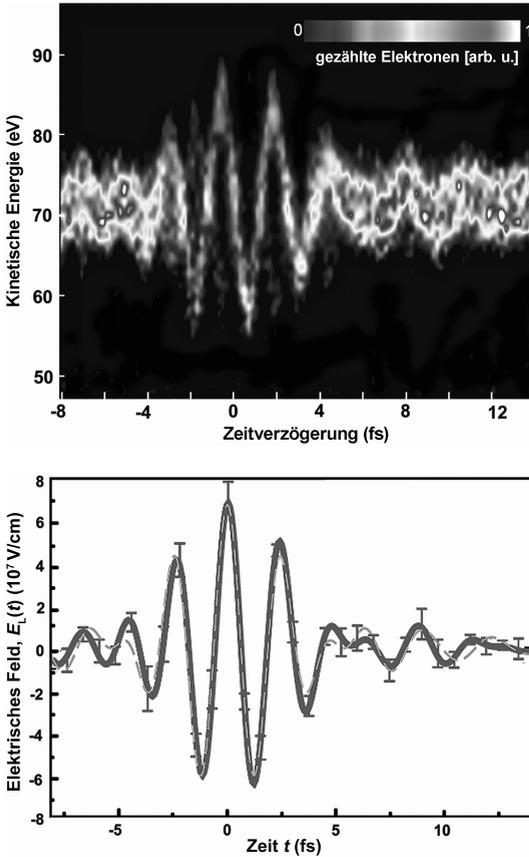
Unter Verwendung von Gleichung (3.40) kommen wir zu

$$\mathbf{S} = c^2 \epsilon_0 \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t). \quad (3.43)$$

Dies ist der Momentanwert des Energieflusses je Flächen- und Zeiteinheit.

Die Mittelung harmonischer Funktionen

Offensichtlich schwankt $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ zwischen Maxima und Minima. Bei Frequenzen von etwa 10^{15} Hz (optischen Frequenzen) ist \mathbf{S} eine sehr schnell veränderliche Funktion der Zeit (die Frequenz von \mathbf{S} ist infolge des Kosinusquadrat-Terms doppelt so hoch wie die Frequenzen der beiden Felder, die jeweils einen Kosinusterm enthalten). Der



Oben: Ergebnis einer Elektronenuntersuchung. Zu sehen sind die Oszillationen des elektrischen Feldes eines intensiven Pulses von rotem Licht (ca. 750 nm), der nur aus einigen wenigen Zyklen besteht. Die Zeitskala liegt im Femtosekundenbereich. Unten: Die erste mehr oder weniger direkte Messung eines oszillatorischen E -Feldes einer Lichtwelle. (Max-Planck-Institut für Quantenoptik)

Momentanwert von S ist daher eine Größe, deren direkte Messung sehr schwierig ist (siehe Foto). Günstiger ist eine zeitliche Mittelung. Dazu betrachten wir die in einem endlichen Zeitintervall von beispielsweise einer Fozelle, einer Fotoplatte oder der Netzhaut des menschlichen Auges absorbierte Energie.

Die spezifische Gestalt von Gleichung (3.43) und die besondere Rolle, die harmonische Funktionen in unseren Betrachtungen spielen, lassen es ratsam erscheinen, dass wir uns kurz mit den Mittelwerten solcher Funktionen beschäftigen. Der zeitliche Mittelwert einer Funktion $f(t)$ in einem Intervall T wird mit $\langle f(t) \rangle_T$ bezeichnet und ist gegeben durch

$$\langle f(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} f(t) dt.$$

Welcher Wert sich für $\langle f(t) \rangle_T$ ergibt, hängt weitgehend von T ab. Zur Bestimmung des Mittelwerts einer harmonischen Funktion gehen wir wie folgt vor:

$$\langle e^{i\omega t} \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} e^{i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega T} e^{i\omega t} \Big|_{t-T/2}^{t+T/2},$$

$$\langle e^{i\omega t} \rangle_T = \frac{1}{i\omega T} \left(e^{i\omega(t+T/2)} - e^{i\omega(t-T/2)} \right)$$

und

$$\langle e^{i\omega t} \rangle_T = \frac{1}{i\omega T} e^{i\omega t} \left(e^{i\omega T/2} - e^{-i\omega T/2} \right).$$

Der Term in der Klammer erinnert uns an $\sin \omega T/2$; daher ist

$$\langle e^{i\omega t} \rangle_T = \left(\frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2} \right) e^{i\omega t}.$$

Der Klammerausdruck auf der rechten Seite kommt in der Optik so häufig vor, dass er eine eigene Bezeichnung erhalten hat: $(\sin u)/u$ heißt $(\text{sinc } u)$. Zerlegen wir den Ausdruck in Real- und Imaginärteil, so haben wir

$$\langle \cos \omega t \rangle_T = (\text{sinc } u) \cos \omega t \quad \text{und} \quad \langle \sin \omega t \rangle_T = (\text{sinc } u) \sin \omega t.$$

Der Mittelwert der Kosinusfunktion ist wieder eine Kosinusfunktion mit derselben Frequenz, aber der Amplitude einer sinc-Funktion, die ausgehend von ihrem Anfangswert 1,0 sehr schnell abfällt (Abb. 3.17). Da $\text{sinc } u = 0$ ist bei $u = \omega T/2 = \pi$ und dies wiederum auftritt bei $T = \tau$, beträgt der Mittelwert von $\cos \omega t$ in einem Intervall T , das gerade einer Periode entspricht, null. Das gilt gleichfalls für jedes T , das einer ganzen Zahl von Perioden entspricht, und trifft auch für $\sin \omega t$ zu. Diese Tatsache verwundert nicht, denn das Integral in der Definition entspricht der Fläche unter der jeweiligen Kurve; in beiden Fällen ist die negative Fläche unterhalb der x -Achse gleich

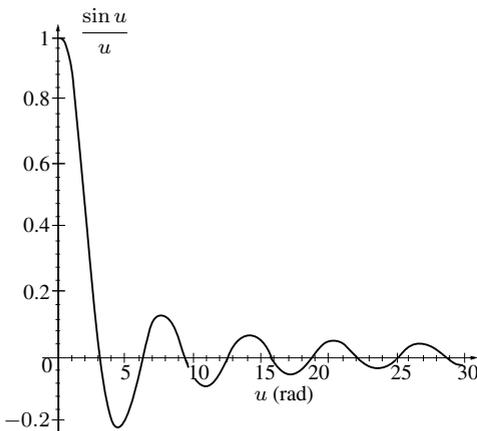


Bild 3.17: Die Funktion $\text{sinc } u$. Bei $u = \pi, 2\pi, 3\pi$ usw. ist der Funktionswert null.

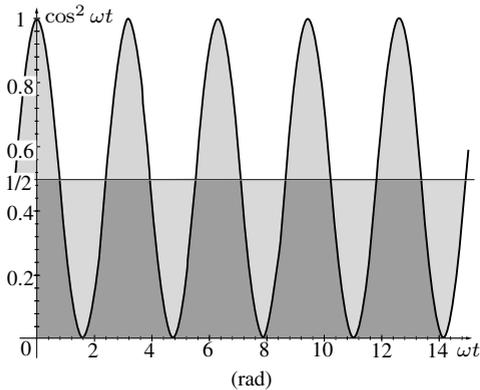


Bild 3.18: Die Lücken unterhalb der Linie bei $\frac{1}{2}$ wurden mit den Spitzen oberhalb dieser Linie ausgefüllt. Der Mittelwert sollte demnach $\frac{1}{2}$ betragen.

der positiven Fläche oberhalb der x -Achse, sodass die Summe der Flächenanteile null ist. Nach dem Ablauf einiger Perioden wird der sinc-Term so klein, dass man die Fluktuationen um null herum vernachlässigen kann: $\langle \cos \omega t \rangle_T$ und $\langle \sin \omega t \rangle_T$ sind dann nahezu null.

In Aufgabe 3.16 sollen Sie zeigen, dass $\langle \cos^2 \omega t \rangle_T = \frac{1}{2}[1 + \text{sinc } \omega T \cos 2\omega t]$ ist; dieser Term oszilliert mit einer Frequenz von 2ω um den Wert $\frac{1}{2}$ und erreicht Letzteren bei fortschreitendem T innerhalb weniger Perioden. Im Falle des Lichts ist $\tau \approx 10^{-15}\text{s}$; bereits eine Mittelung über eine Mikrosekunde entspricht dann $T \approx 10^9 \tau$ – das ist viel mehr, als erforderlich wäre, um die sinc-Funktion vernachlässigbar klein werden zu lassen, sodass $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$ ist. Auch Abbildung 3.18 lässt dieses Ergebnis vermuten: Wir schneiden die Gipfel der Fläche unter der Funktion oberhalb von $\frac{1}{2}$ ab und füllen damit die Lücken aus, die unterhalb von $\frac{1}{2}$ vorhanden sind. Nach hinreichend vielen Zyklen nähert sich die Fläche unter $f(t)$, geteilt durch T (dies ist gerade $\langle f(t) \rangle_T$), dem Wert $\frac{1}{2}$.

3.3.2 Die Bestrahlungsstärke

Wenn wir von der „Lichtmenge“ sprechen, die auf eine Oberfläche fällt, meinen wir damit die (über ein Zeitintervall und diese Fläche integrierte) **Bestrahlungsstärke**⁵ I , die *durchschnittliche Energie pro Flächen- und Zeiteinheit*. Jeder Detektor für Strahlung hat ein Eintrittsfenster, das heißt, gemessen wird die Strahlungsenergie, die auf einer bestimmten Fläche A auftrifft. Um die Abhängigkeit des Ergebnisses von der Größe von A zu eliminieren, dividiert man den Messwert durch A . Außerdem kann man natürlich keinen Momentanwert des Energieflusses messen, sondern man integriert über eine endliche Zeit T , die Messdauer. Will man den *Nettoenergiefluss* pro Flächeneinheit bestimmen, der von T abhängt, ist eine solche integrierende Messung offensichtlich wenig sinnvoll; aus einer zweiten Messung unter gleichen Bedingungen,

⁵ Früher bezeichnete man den Energiefluss pro Flächen- und Zeiteinheit in der Physik als „Intensität“. In der Optik einigte man sich zumindest international, wenn auch noch nicht generell, darauf, diesen Begriff allmählich durch „Bestrahlungsstärke“ zu ersetzen.

aber mit einem anderen T kann man ein anderes Ergebnis erhalten. Daher dividiert man noch durch T und erhält so eine in der Praxis höchst nützliche Größe – nämlich I , den Mittelwert der Energie pro Zeit- und Flächeneinheit.

Ein Maß für I ist der zeitliche Mittelwert ($T \gg \tau$) des Betrages des Poynting-Vektors, $\langle S \rangle_T$. Für den Spezialfall harmonischer Felder und Gleichung (3.43) ist

$$\langle S \rangle_T = c^2 \epsilon_0 |\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0| \langle \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \rangle .$$

Wegen $\langle \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \rangle_T = \frac{1}{2}$ für $T \gg \tau$ (siehe Aufgabe 3.15) gilt

$$\langle S \rangle_T = \frac{c^2 \epsilon_0}{2} |\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0|$$

oder

$$I \equiv \langle S \rangle_T = \frac{c \epsilon_0}{2} E_0^2 . \quad (3.44)$$

Die Bestrahlungsstärke ist dem Quadrat der Amplitude des elektrischen Feldes proportional. Zwei weitere einfache Möglichkeiten, diesen Fakt auszudrücken, sind

$$I = \frac{c}{\mu_0} \langle B^2 \rangle_T \quad (3.45)$$

und

$$I = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle_T . \quad (3.46)$$

Innerhalb eines linearen, homogenen, isotropen Dielektrikums ergibt sich für die Bestrahlungsstärke

$$I = \epsilon v \langle E^2 \rangle_T . \quad (3.47)$$

Da, wie gezeigt wurde, \mathbf{E} viel effektiver Kräfte auf Ladungen ausübt oder an Ladungen Arbeit verrichtet als \mathbf{B} , wollen wir \mathbf{E} als **optisches Feld** bezeichnen und fast ausschließlich Gleichung (3.46) verwenden.

Beispiel 3.2

Stellen Sie sich eine ebene harmonische Welle vor, die in einem homogenen, isotropen Dielektrikum in z -Richtung propagiert. Angenommen, die Welle, deren Amplitude E_0 sei, hat zur Zeit $t = 0$ bei $z = 0$ die Auslenkung null.

(a) Zeigen Sie, dass die Energiedichte der Welle gegeben ist durch

$$u(t) = \epsilon E_0^2 \sin^2 k(z - vt) .$$

(b) Bestimmen Sie einen Ausdruck für die Bestrahlungsstärke der Welle.

Lösung (a) Aus Gleichung 3.34, angewendet auf ein Dielektrikum, folgt

$$u = \frac{\epsilon}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2 \quad \text{mit} \quad E = E_0 \sin k(z - vt).$$

Mit $E = vB$ erhalten wir

$$u = \frac{\epsilon}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu} \frac{E^2}{v^2} = \epsilon E^2 = \epsilon E_0^2 \sin^2 k(z - vt).$$

(b) Die Bestrahlungsstärke folgt aus Gleichung (3.37), nämlich $S = uv$, bzw.

$$S = \epsilon v E_0^2 \sin^2 k(z - vt)$$

und somit

$$I = \langle S \rangle_T = \frac{1}{2} \epsilon v E_0^2.$$

Die Rate des Flusses der Strahlungsenergie ist eine Leistung, genannt *Strahlungsfluss* und gemessen in Watt. Dividieren wir den Strahlungsfluss, der auf eine Fläche fällt oder aus dieser austritt, durch diese Fläche, dann erhalten wir die *Strahlungsflussdichte* in W/m^2 . Im ersteren Fall spricht man von der *Bestrahlungsstärke*, im letzteren vom *Emissionsvermögen* und in beiden Fällen von der **Flussdichte**. Die Bestrahlungsstärke ist ein Maß für die *Leistungskonzentration*. Die schwächsten Sterne, die man am Nachthimmel mit bloßem Auge sehen kann, haben Bestrahlungsstärken von nur etwa $0,6 \times 10^{-9} \text{ W/m}^2$.

Beispiel 3.3

Das elektrische Feld einer ebenen elektromagnetischen Welle ist gegeben durch

$$\mathbf{E} = (-2,99 \text{ V/m}) \hat{\mathbf{j}} e^{i(kz - \omega t)}.$$

Bestimmen Sie für die Werte $\omega = 2,99 \times 10^{15} \text{ rad/s}$ und $k = 1,00 \times 10^7 \text{ rad/m}$ (a) den zugehörigen magnetischen Feldvektor und (b) die Bestrahlungsstärke der Welle.

Lösung (a) Die Welle pflanzt sich in die $+z$ -Richtung fort. \mathbf{E}_0 zeigt in die Richtung von $-\hat{\mathbf{j}}$ oder $-y$. Da $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ in die Richtung von $\hat{\mathbf{k}}$ oder z zeigt, muss \mathbf{B}_0 in die Richtung von $\hat{\mathbf{i}}$ oder $+x$ zeigen. Es gilt $E_0 = vB_0$ und $v = \omega/k = 2,99 \times 10^{15} / 1,00 \times 10^7 = 2,99 \times 10^8 \text{ m/s}$ und daher

$$\mathbf{B} = \left(\frac{2,99 \text{ V/m}}{2,99 \times 10^8 \text{ m/s}} \right) \hat{\mathbf{i}} e^{i(kz - \omega t)} = (10^{-8} \text{ T}) \hat{\mathbf{i}} e^{i(kz - \omega t)}.$$

(b) Da die Geschwindigkeit $2,99 \times 10^8$ m/s ist, haben wir es mit einem Vakuum zu tun, und folglich ist

$$I = \frac{c\epsilon_0}{2} E_0^2 = \frac{(2,99 \times 10^8 \text{ m/s})(8,854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)}{2} (2,99 \text{ V/m})^2 = 0,0118 \text{ W/m}^2 .$$

Das quadratische Entfernungsgesetz

Wir haben bereits gesehen, dass die Kugelwelle als Lösung der Wellengleichung eine Amplitude besitzt, die umgekehrt proportional zu r ist. Wir wollen diese Beziehung nun im Kontext der Energieerhaltung untersuchen. Betrachten wir dazu eine isotrope, punktförmige Quelle im Vakuum, die in alle Raumrichtungen gleichmäßig Energie (also Kugelwellen) aussendet. Wir umgeben die Quelle dazu mit zwei konzentrischen Kugelflächen der Radien r_1 und r_2 , wie in Abbildung 3.19 gezeigt ist.

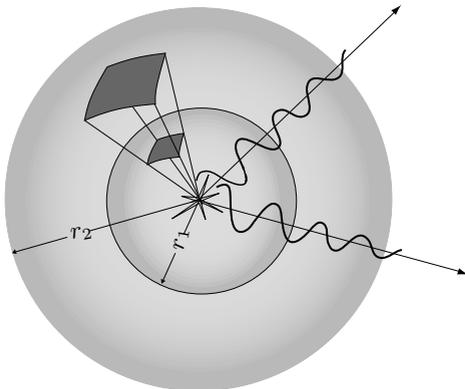


Bild 3.19: Zum quadratischen Entfernungsgesetz.

$E_0(r_1)$ und $E_0(r_2)$ seien die Amplituden der Welle auf der ersten bzw. zweiten Fläche. Gemäß der Energieerhaltung muss die Energie, die pro Sekunde durch die erste Fläche fließt, gleich der Energie sein, die in dieser Zeit durch die zweite Fläche fließt, denn es gibt keine anderen Quellen oder Senken. Wir multiplizieren I mit der Kugelfläche und ziehen die Wurzel; so ergibt sich

$$r_1 E_0(r_1) = r_2 E_0(r_2) .$$

Da r_1 und r_2 beliebig sind, folgt

$$r E_0(r) = \text{konstant} .$$

Die Amplitude muss also umgekehrt proportional zu r abnehmen. Die Bestrahlungsstärke einer Punktquelle ist proportional zu $1/r^2$; diesen bekannten Zusammenhang

nennt man **quadratisches Entfernungsgesetz**. Mithilfe einer Strahlungsquelle und eines fotografischen Belichtungsmessers kann man das Gesetz leicht nachprüfen.

3.3.3 Photonen

Licht wird in Form winziger, diskreter Partikel elektromagnetischer „Materie“, den Photonen, absorbiert und emittiert. Dies wurde oft nachgewiesen und ist allgemein anerkannt.⁶ Gewöhnlich besteht ein Lichtstrahl aus so vielen winzig kleinen Energiequanten, dass seine Teilchennatur makroskopisch nicht mehr in Erscheinung tritt: Man sieht ein kontinuierliches Phänomen. Solche Effekte sind in der Natur nicht selten. Die Kräfte, die eine große Anzahl Gasmoleküle ausüben, machen sich in einem Windstoß als scheinbar kontinuierlicher Druck bemerkbar – aber mikroskopisch ist das Phänomen diskret. Die Analogie zwischen einem Gas und einem Photonenstrahl werden wir uns noch zunutze machen.

Der große französische Physiker Louis de Broglie drückte es so aus: „Licht ist, kurz gesagt, die feinste Form der Materie.“ Jede Form der Materie, einschließlich das Licht, ist gequantelt, besteht also aus kleinen Elementarteilchen – Quarks, Leptonen, W-Bosonen, Z-Bosonen und Photonen. Diese Einheitlichkeit gehört zu den überzeugendsten Argumenten zugunsten der Teilchennatur des Photons. Es sei jedoch betont, dass wir hier von Quantenteilchen sprechen, die etwas völlig anderes sind als die gewöhnlichen „Partikel“, die uns im Alltag begegnen.

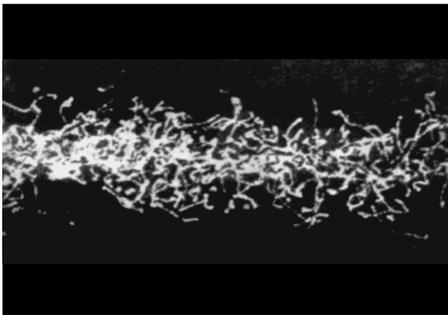
Das Versagen der klassischen Theorie

1900 erarbeitete Max Planck eine vorläufige und nicht völlig fehlerfreie Analyse der so genannten *Hohlraumstrahlung*. Ungeachtet der Irrtümer der Theorie passte der Ausdruck, den Planck erhalten hatte, hervorragend zu den verfügbaren experimentellen Ergebnissen – eine Leistung, der bis zu diesem Zeitpunkt noch kein Ansatz auch nur nahe gekommen war. Planck betrachtete elektromagnetische Wellen im Gleichgewicht innerhalb einer isothermen Kammer (eines Hohlraums; eine ausführliche Behandlung erfolgt in Abschn. 13.1.1). Sämtliche elektromagnetische Energie innerhalb des Raums wird von dessen Wänden absorbiert oder emittiert, von außen kann keine Strahlung eindringen. Auf diese Weise entspricht die spektrale Zusammensetzung der Hohlraumstrahlung derjenigen, die von einer idealen schwarzen Oberfläche ausgesendet wird. Plancks Ziel bestand darin, das Spektrum der Strahlung vorauszusagen, die den Hohlraum durch eine kleine Öffnung verlässt. An dieser Frage verzweifelte der Forscher fast; schließlich wandte er sich der klassischen statistischen Analyse von Maxwell und Boltzmann zu, die als Grundlage der kinetischen Gastheorie entwickelt worden war. Philosophisch betrachtet, handelt es sich dabei um eine vollständig deterministische Behandlung – sie geht davon aus, dass man (zumindest im Prinzip) die Bewegung jedes einzelnen Atoms im System verfolgen kann. Folglich sind die Atome von-

⁶ Siehe den Übersichtsartikel „Evolution of the modern photon“ von R. Kidd, J. Ardin und A. Anton, *Am. J. Phys.* **57** (1), 27 (1989).

einander unabhängig, man kann sie durchnummerieren und unterscheiden. Aus rein rechentechnischen Gründen stellte Planck die Hypothese auf, dass jeder Oszillator, der die Wände des Hohlraums streift, nur diskrete, zu seiner Schwingungsfrequenz proportionale Energiemengen absorbieren und emittieren kann. Diese Energiebündel entsprachen ganzzahligen Vielfachen von $h\nu$; h nennt man heute **plancksche Konstante (plancksches Wirkungsquantum)**, ihr Wert liegt bei $6,626 \times 10^{-34}$ J·s. Planck war ansonsten ziemlich konservativ und beharrte auf dem klassischen Wellenbild des Lichts – lediglich die Oszillatoren sollten gequantelt sein.

J. J. Thomson, der Entdecker des Elektrons, äußerte 1903 die wahrhaft prophetische Vermutung, dass sich elektromagnetische Wellen grundsätzlich von anderen Wellenarten unterscheiden; vielleicht, meinte er, gibt es tatsächlich örtliche Ansammlungen von Strahlungsenergie. Thomson hatte beobachtet, dass nur vereinzelte Atome eines von hochfrequenter elektromagnetischer Strahlung (Röntgenstrahlung) getroffenen Gases ionisiert werden – als ob die Strahlungsenergie nicht kontinuierlich über die Wellenfront verteilt wäre, sondern sich an bestimmten Stellen konzentrierte (siehe Foto).



Ein Röntgenstrahl tritt von links in eine Nebelkammer ein. Die Spuren stammen von Elektronen, die entweder durch den photoelektrischen Effekt (lange Spuren, die seitlich vom Strahl abweichen) oder durch den Compton-Effekt (kurze Spuren ungefähr in Richtung des Strahls) erzeugt wurden. Aus klassischer Sicht sollte die Energie eines Röntgenstrahls gleichförmig entlang transversaler Wellenfronten verteilt sein. Die Streuung erscheint jedoch als diskreter, zufälliger Prozess. (Smithsonian Report, 1915.)

Der Begriff des Photons, wie wir ihn heute verwenden, kam 1905 durch Einsteins brillante theoretische Arbeit zum photoelektrischen Effekt ins Spiel. Wird ein Metall elektromagnetischer Strahlung ausgesetzt, emittiert es Elektronen. Die Einzelheiten dieses Prozesses waren bereits jahrzehntelang untersucht worden, ohne dass eine schlüssige Beschreibung im Rahmen der Theorie des Elektromagnetismus gelungen wäre. Einsteins erstaunlicher Ansatz bestand darin, dass *das elektromagnetische Feld selbst gequantelt sein sollte*. Jedem der Bestandteile dieses Feldes, den Photonen, ordnete Einstein eine Energie zu, die dem Produkt aus dem planckschen Wirkungsquantum und der Frequenz des Strahlungsfeldes entspricht:

$$\mathcal{E} = h\nu. \quad (3.48)$$

Photonen sind *stabile, ungeladene, masselose Elementarteilchen, die sämtlich die Lichtgeschwindigkeit (c) haben*. Alle bisher durchgeführten Experimente haben ergeben, dass – sollte das Photon eine Ladung haben – diese um den Faktor 5×10^{-30} kleiner sein muss als die Ladung des Elektrons und seine Masse – falls es überhaupt

eine hat – weniger als 10^{-52} kg betragen muss. Wenn wir versuchen, uns das Photon als eine winzige Konzentration an elektromagnetischer Energie vorzustellen, dann hätte diese eine räumliche Ausdehnung von weniger als 10^{-20} m. Mit anderen Worten gilt wie im Falle des Elektrons, dass bislang kein einziges Experiment irgendeinen Hinweis auf eine endliche Größe des Photons erbracht hat. Mit einer Größe von null (was immer das bedeutet) hat das Photon vermutlich keine inneren Bestandteile und muss daher als „fundamental“, also als ein Elementarteilchen angesehen werden.

1924 legte Satyendra N. Bose einen neuen, überzeugenden Beweis der planckschen Theorie der Hohlraumstrahlung vor, indem er statistische Methoden auf Lichtquanten anwendete. Bose betrachtete den Hohlraum als angefüllt mit einem „Photonengas“, dessen elementare Bestandteile er als *nicht voneinander unterscheidbar* auffasste. Die letztere Annahme, einer der wichtigsten Schritte der quantenmechanischen Argumentation, sagt aus, dass die Teilchen austauschbar sind – dies hat einen grundlegenden Einfluss auf die statistische Formulierung. In mathematischer Hinsicht steht jedes Teilchen dieses „Quantengases“ in Beziehung zu jedem anderen Teilchen; kein Partikel ist statistisch vom System in seiner Gesamtheit unabhängig. Die quantenmechanische Wahrscheinlichkeitsfunktion, die das statistische Verhalten der Wärmestrahlung beschreibt, nennt man heute Bose-Einstein-Verteilung. So wurde das Photon – was auch immer es in Wirklichkeit ist – zum unentbehrlichen Hilfsmittel der theoretischen Physik.

1932 führten zwei sowjetische Physiker, Jewgeni M. Brumberg und Sergei I. Wawilow, eine Reihe von einfachen Experimenten durch, die bestätigten, dass Licht ein Quantenphänomen ist. Vor dem Aufkommen elektronischer Detektoren (z. B. von Photomultipliern) entwickelten sie eine photometrische Technik, mit der man mit bloßem Auge den statistischen Charakter von Licht studieren kann. Der Trick bestand darin, die Bestrahlungsstärke auf ein Niveau zu senken, das sehr nahe an der Sehschwelle lag. Das taten sie in einem dunklen Raum, in dem sie einen außerordentlich schwachen ($\approx 200 \times 10^{-18}$) Strahl von grünem Licht (505 nm) auf eine Blende richteten, die für kurze Intervalle (0,1 s) geöffnet werden konnte. In jedem dieser Intervalle gingen im Mittel 50 Photonen durch die geöffnete Blende. Das Auge kann theoretisch ein paar der Photonen „sehen“, aber 50 lag etwa an der Grenze dessen, was zuverlässig detektiert werden kann. Brumberg und Wawilow schauten also einfach auf die Blende und zeichneten ihre Beobachtungen auf. Wenn Licht eine klassische Welle mit gleichmäßig über die Wellenfronten verteilter Energie wäre, hätten die Wissenschaftler jedesmal einen schwachen Lichtblitz sehen müssen, wenn sich die Blende öffnet. Wenn Licht dagegen ein unregelmäßiger Strom von Photonen wäre, sähe die Sache ganz anders aus. Was die Experimentatoren sahen, war eindeutig: In der Hälfte der Intervalle mit geöffneter Blende sahen sie einen Blitz und in der anderen Hälfte sahen sie nichts, wobei die Reihenfolge der unterschiedlichen Ergebnisse völlig zufällig war. Wawilow zog hieraus den richtigen Schluss: Die Zufälligkeit der Beobachtung lag an der inherent quantenmechanischen und damit fluktuierenden Natur des Strahls – wenn der Strahl

gerade genug Photonen enthielt, um die Wahrnehmungsschwelle zu überschreiten, dann sahen sie den Strahl, und wenn die Photonenzahl unter der Schwelle lag, dann sahen sie nichts. Wie erwartet, reduzierte sich die Anzahl der Nichtbeobachtungen sehr schnell, als sie die Bestrahlungsstärke erhöhten.

Im Gegensatz zu „gewöhnlichen“ Objekten kann man Photonen nicht sehen; sämtliche Informationen über die Photonen bezieht man aus Vorgängen, bei denen sie entweder entstehen oder vernichtet werden. Niemals „sieht“ man Licht, das den Raum durchflutet. Man sieht nur die Effekte der Wechselwirkung des Lichts mit seiner Umgebung, und solche Effekte entstehen nur, wenn Photonen erzeugt werden oder verschwinden. Zur Geburt und zum Tod eines Photons sind geladene Partikel vonnöten. Meist werden Photonen von Elektronen emittiert oder absorbiert, die aus Elektronenhüllen der Atome stammen. Die Quantennatur des Emissionsprozesses wurde durch etliche Experimente bestätigt. Stellen wir uns zum Beispiel eine sehr schwache Lichtquelle vor, die in jeweils gleichen Abständen von identischen, hochempfindlichen Strahlungsdetektoren umgeben ist. Hätte die Emission – egal, wie schwach sie ist – die Form einer kontinuierlichen Welle, wie es die klassische Theorie besagt, so müsste jeder ausgesendete Puls von allen Detektoren gleichzeitig empfangen werden. Doch genau dies geschieht nicht: Die Detektoren registrieren unabhängig voneinander einzelne Energiemengen, was offensichtlich im Einklang mit der Hypothese steht, dass Atome lokalisierte Lichtquanten in zufällige Richtungen aussenden.

Weiterhin konnte man zeigen, dass sich ein Atom, das Licht (also ein Photon) emittiert, bei diesem Prozess ein wenig in die entgegengesetzte Richtung bewegt – vergleichbar etwa dem Rückstoß, der beim Abschließen einer Pistole auftritt. In Abbildung 3.20 sieht man, wie mit überschüssiger Energie angereicherte („angeregte“, siehe Abschn. 3.4.4) Atome zu einem scharfen Strahl fokussiert werden. Nach kurzer Zeit senden die Atome in alle Richtungen Photonen aus und fliegen dabei selbst in die jeweils entgegengesetzte Richtung, wobei sie oft seitlich aus dem Strahl ausbrechen. Auf diese Weise verbreitert sich der Strahl – es handelt sich hier eindeutig um einen quantenmechanischen Effekt, der ausgehend vom klassischen Bild der symmetrischen Welle nicht zu erklären ist.

Wo innerhalb eines Strahls hält sich ein bestimmtes Photon auf? Dies ist eine Frage, die wir nicht beantworten können. Die Bewegung eines Photons lässt sich nicht verfolgen wie der Flug einer Kanonenkugel. Herumfliegende Photonen können nicht mit beliebiger Genauigkeit lokalisiert werden, doch zumindest können wir sagen, dass es in Propagationsrichtung besser möglich ist als transversal dazu. Man kann zeigen, dass die longitudinale Unbestimmtheit ungefähr von der Ordnung der Wellenlänge des Lichts ist. Daher kann die Darstellung eines Photons in Form eines kurzen elektromagnetischen Wellenzuges (wie in Abbildung 3.20) nützlich sein, doch das sollte nicht wörtlich genommen werden. Wir könnten darauf bestehen, das Photon als ein „Teilchen“ zu betrachten, so etwas wie ein winziges Kügelchen, und uns naiverweise vorstellen, dass es sich irgendwo im Bereich des Wellenzuges befindet.

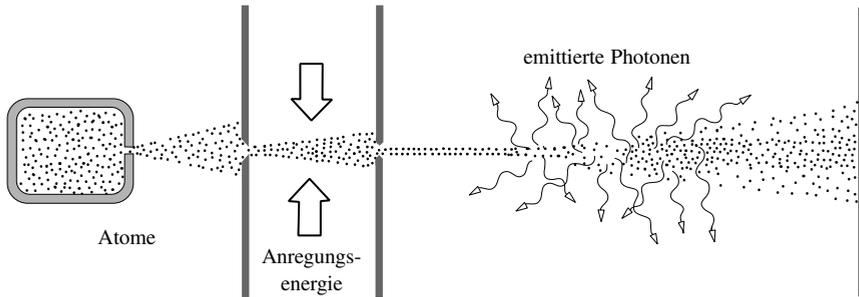


Bild 3.20: Atome in angeregten Zuständen, die zu einem scharfen Strahl fokussiert werden und Photonen aussenden, werden durch den „Rückstoß“ in seitlicher Richtung abgelenkt; der Strahl verbreitert sich. Zu einer solchen Verbreiterung kommt es nicht, wenn der Strahl von Atomen im Grundzustand gebildet wird.

Diese Vorstellung ist jedoch sehr problematisch. Wir können sagen, dass sich das mit der Geschwindigkeit c durch den Raum bewegende Photon – das nur bei c existiert – ein winziges, stabiles, ladungs- und masseloses Objekt ist. Es ist Träger von Energie, linearem Impuls und Drehimpuls; es zeigt ein Verhalten, das elektromagnetisch und oszillatorisch ist, und es kann etwas unlokalisiert sein, eher ein „Hauch“ als ein traditionelles „Teilchen“. Es ist, wie auch die anderen Elementarteilchen, ein *Quantenteilchen*. Der Hauptunterschied ist, dass andere Elementarteilchen eine Masse haben und in Ruhe existieren können, was für das Photon nicht gilt. Kurz gesagt ist das Objekt, das wir Photon nennen, die Summe seiner Eigenschaften, die in zahllosen Experimenten aufgedeckt wurden. Über diese Formulierung hinaus gibt es tatsächlich bis heute keine befriedigende Beschreibung in makroskopischen Begriffen.

Photonenströme

Wenn man Phänomene untersucht, an denen eine sehr große Zahl von Individuen – in unserem Falle Photonen – beteiligt ist, muss man in der Regel auf statistische Verfahren zurückgreifen. Neben der klassischen Maxwell-Boltzmann-Statistik (für unterscheidbare Teilchen) gibt es zwei quantenmechanische Ansätze (für ununterscheidbare Teilchen), die Bose-Einstein- und die Fermi-Dirac-Statistik. Der erstgenannte Ansatz gilt für Teilchen, die *nicht* vom paulischen Ausschlussprinzip betroffen sind (also solche mit ganzzahligem Spin oder einem Spin von null); mithilfe des letzteren Ansatzes beschreibt man alle anderen Teilchen (deren Spins ungeradzahlig Vielfache von $\frac{1}{2}$ sind). Teilchen mit einem Spin von 1, deren Ensembles sich gemäß der Bose-Einstein-Statistik verhalten und zu denen auch das Photon gehört, heißen **Bosonen**; Teilchen mit einem Spin von $\frac{1}{2}$ (wie das Elektron), deren Ensembles sich gemäß der Fermi-Dirac-Statistik verhalten, heißen **Fermionen**.

Elementarteilchen sind definiert durch charakteristische und unveränderliche, nur jeweils einer Teilchenart eigene physikalische Eigenschaften wie Masse, Ladung und Spin. Eigenschaften, die den Augenblickszustand des Teilchens beschreiben – wie

die Energie, der Impuls und die Orientierung des Spins – sind dagegen variabel. Ein vollständiger Satz dieser Variablen entspricht einem momentanen **Zustand** des Teilchens.

Fermionen sind Einzelgänger: *Nur jeweils ein Fermion kann einen bestimmten Zustand einnehmen.* Bosonen dagegen sind gesellig – *unbegrenzt viele können in ein und demselben Zustand vorliegen, und außerdem bilden sie gern größere Teilchenverbände.* Wird ein bestimmter Zustand von sehr vielen Photonen gleichzeitig besetzt, so verschwindet die „Körnung“ des Lichtstrahls, und das elektromagnetische Feld erscheint als kontinuierliches Trägermedium einer elektromagnetischen Welle. Eine monochromatische (monoenergetische) ebene Welle können wir daher einem Strom von Photonen mit hoher Populationsdichte gleichsetzen, wobei sich die einzelnen Photonen im selben Zustand befinden (das heißt, ihre Frequenz, Energie, Richtung und ihr Impuls stimmen überein). *Verschiedene monochromatische ebene Wellen gehören zu verschiedenen Photonenzuständen.*

Im Gegensatz zu den Photonen sind Elektronen Fermionen – das bedeutet, dass nicht einmal zwei, geschweige denn sehr viele von ihnen einen gemeinsamen Zustand besetzen können. Ein monoenergetischer Elektronenstrahl erscheint daher, im Unterschied zu elektromagnetischen Wellen, makroskopisch betrachtet nicht als klassische kontinuierliche Welle.

Für einen gleichförmigen monochromatischen Lichtstrahl der Frequenz ν entspricht die Größe $I/h\nu$ der durchschnittlichen Anzahl Photonen, die pro Zeiteinheit auf einer zur Strahlrichtung senkrechten Flächeneinheit auftreffen – das ist die Photonenflussdichte. In der Realität ist ein Lichtstrahl bestenfalls quasimonochromatisch mit einer mittleren Frequenz ν_0 , und $I/h\nu_0$ ist dann die **mittlere Photonenflussdichte**. Der **mittlere Photonenfluss** eines quasimonochromatischen einfallenden Strahls mit einem Querschnitt A ist gegeben durch

$$\Phi = \frac{AI}{h\nu_0} = \frac{P}{h\nu_0} \quad (3.49)$$

mit P als optischer **Leistung**, gemessen in Watt. Der mittlere Photonenfluss ist gleich der durchschnittlichen Anzahl der pro Zeiteinheit auftreffenden Photonen (Tab. 3.1). Ein kleiner He-Ne-Laser mit einer Leistung von 1 mW und einer Wellenlänge von 632,8 nm liefert beispielsweise einen mittleren Photonenfluss von

$$\begin{aligned} \frac{P}{h\nu_0} &= \frac{1,0 \times 10^{-3} \text{ W}}{(6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}) (2,998 \times 10^8 \text{ m/s}) / (632,8 \times 10^{-9} \text{ m})} \\ &= 3,2 \times 10^{15} \text{ Photonen pro Sekunde.} \end{aligned}$$

Stellen wir uns einen gleichförmigen Lichtstrahl vor, der mit konstanter Stärke (also mit konstantem Strahlungsfluss) auf einen Schirm trifft. Die Strahlungsenergie wird dabei in Form unzähliger, zufällig verteilter kleiner Blitze auf den Schirm übertragen.

Tabelle 3.1: Mittlere Photonenflussdichte für verschiedene Lichtquellen und Situationen.

Lichtquelle	Mittlere Photonenflussdichte Φ/A Einheit: (Photonen/s·m ²)
Laserstrahl (10 mW, He-Ne-Laser, fokussiert auf 20 μm)	10^{26}
Laserstrahl (1 mW, He-Ne-Laser)	10^{21}
Helles Sonnenlicht	10^{18}
Licht in Innenräumen	10^{16}
Licht in der Dämmerung	10^{14}
Mondlicht	10^{12}
Sternenlicht	10^{10}

Wo und zu welchem Zeitpunkt ein einzelnes Photon auf den Schirm trifft, kann nicht vorhergesagt werden. Der Lichtstrahl erscheint uns zwar als Strom vieler zufällig verteilter Photonen, aber diese Schlussfolgerung ist durch die Beobachtungen nicht beweisbar (allerdings ist sie verlockend). Es steht lediglich fest, dass ein Lichtstrahl seine Energie in Form unzähliger kleiner „Einschläge“ überträgt, welche innerhalb des Strahls räumlich und zeitlich zufällig verteilt sind.

Betrachten wir nun ein Bild, das auf einen Schirm fällt, etwa ein Interferenzmuster oder das Gesicht einer Frau. In dem Photonenstrom, der das Bild formt, herrscht ein statistisches Durcheinander: Wir können nicht vorhersagen, wann ein Photon auf eine bestimmte Stelle trifft. Berechnen können wir aber die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Photon oder mehrere in einem endlichen Zeitintervall in einem bestimmten Punkt des Schirms eintreffen. *In jedem Punkt des Schirms ist der gemessene (oder klassisch berechnete) Wert der Bestrahlungsstärke proportional der Wahrscheinlichkeit, in diesem Punkt ein Photon zu finden.*

In Abbildung 1.1 lässt sich verfolgen, wie einzelne Photonen auf einem Schirm auftreffen. Das Bild wurde mithilfe eines speziellen Photovervielfachers gewonnen. Um die Teilchen- (Photonen-)Natur der Strahlung noch anschaulicher zu machen, wollen wir das einfallende Licht nun mittels eines ganz anderen, gewöhnlicheren fotografischen Verfahrens registrieren. In einer fotografischen Emulsion befinden sich fein verteilte, mikroskopisch kleine (ca. 10^{-6} m) Silberhalogenid-Kristalle, die jeweils ungefähr 10^{10} Silberatome enthalten. Bei der Wechselwirkung eines solchen Kristalls mit einem einzelnen Photon kann eine Silber-Halogen-Bindung gespalten und damit ein Silberatom freigesetzt werden. Ein oder mehrere solche Atome bilden einen Entwicklungskeim in der belichteten Schicht. Zur Entwicklung setzt man den Film einer reduzierenden Chemikalie aus, welche die belichteten Kristalle löst und an ihrer Stelle ein Körnchen aus elementarem Silber hinterlässt.

Abbildung 3.21 zeigt eine Serie von Bildern mit zunehmender Belichtung. Bei sehr schwachem Licht mit nur wenigen tausend einfallenden Photonen entstehen ungefähr ebenso viele Silberkörnchen, die ein Muster bilden, das nur entfernt an das fotografierte Gesicht erinnert. Bei steigender Photonenzahl (mit jedem Bild um etwa den Faktor



Bild 3.21: Diese elektronisch verstärkten Fotos beweisen eindrucksvoll, dass einzelne „Lichtteilchen“ mit der Materie in Wechselwirkung treten. Bei extrem geringer Beleuchtung sieht man ein Muster fast zufällig verteilter Photonen (jeder Punkt entspricht einem Photon); bei wachsender Lichtstärke tritt die gequantelte Natur des Prozesses immer mehr in den Hintergrund. (Siehe *Advances in Biological and Medical Physics* V, 1957, 211–242.) (Mit frdl. Genehmigung der Radio Corporation of America.)

zehn) wird das Bild immer klarer und besser erkennbar. Wirken viele Millionen Photonen bei der Entstehung des Bildes mit, so erscheint dieses gewohnt kontinuierlich; die statistische Natur des Photonenstrahls ist nicht mehr erkennbar.

Photonenzählung

Kann über die statistische Natur eines Photonenstroms, den wir als Lichtstrahl sehen, überhaupt irgendetwas ausgesagt werden? Um diese Frage zu beantworten, erdachten Forscher im Laufe der letzten 30 Jahre zahlreiche Experimente, um einzelne Photonen buchstäblich zu zählen. Sie stellten dabei fest, dass das Muster der ankommenden Photonen von der Lichtquelle abhängt.⁷ Die theoretischen Details wollen wir an dieser Stelle nicht näher beleuchten, aber es ist recht interessant, zumindest die Ergebnisse für zwei Extremfälle zu betrachten – für das *kohärente* und das *chaotische* Licht.

⁷ Siehe P. Koczyk, P. Wiewior und C. Radzewicz, „Photon counting statistics – Undergraduate experiment“, *Am. J. Phys.* **64**(3), 240 (1996) sowie A. C. Funk und M. Beck, „Sub-Poissonian photocurrent statistics: Theory and undergraduate experiment“, *Am. J. Phys.* **65** (6), 492 (1997).

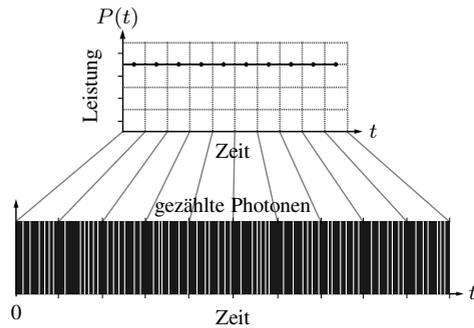


Bild 3.22: Ergebnis der Photonenzählung bei konstanter optischer Leistung: Die einzelnen Photonen kommen völlig unabhängig voneinander am Detektor an.

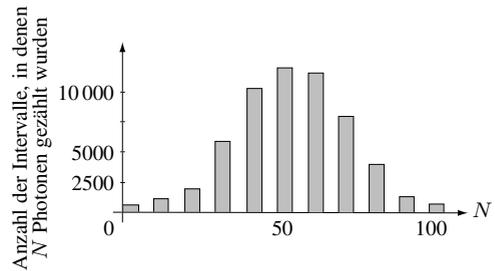


Bild 3.23: Das Balkendiagramm zeigt eine typische Wahrscheinlichkeits- oder Photonenzahlverteilung für einen Lichtstrahl konstanter Bestrahlungsstärke.

Betrachten wir einen idealen, kontinuierlichen Laserstrahl mit *konstanter Bestrahlungsstärke*; wir erinnern uns, dass Letztere nach Gleichung (3.46) eine zeitgemittelte Größe ist. Konstant ist dann auch die optische Leistung P , ebenfalls eine zeitgemittelte Größe, und entsprechend Gleichung (3.49) ist der mittlere Photonfluss des Strahls gleich Φ . Abbildung 3.22 zeigt die Zufallsverteilung der Ankunft der Photonen auf einer Zeitskala, die klein gegen das Intervall ist, innerhalb dessen die Bestrahlungsstärke gemittelt wird. Für die makroskopische Größe P misst man daher einen konstanten Wert, obwohl die zugrunde liegende Energieübertragung ein diskontinuierlicher Prozess ist.

Nun lassen wir den Strahl durch einen Verschluss fallen, der während einer kurzen Messzeit T (etwa $10\ \mu\text{s}$ bis $10\ \text{ms}$) geöffnet bleibt, und zählen die Photonen, die in dieser Zeit am Photodetektor ankommen. Dies wiederholen wir nach jeweils einer kurzen Pause etliche zehntausend Mal. Das Ergebnis zeigt das Balkendiagramm in Abbildung 3.23 – hier ist die Anzahl der Versuche, bei denen N Photonen gezählt wurden, in Abhängigkeit von N aufgetragen. Nur in wenigen Versuchen zählt man sehr wenige oder sehr viele Photonen. Die mittlere Anzahl der auftreffenden Photonen beträgt $N_{av} = \Phi T = PT/h\nu_0$. Die Form des Diagramms, die man mithilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie herleiten kann, ähnelt stark der bekannten *Poisson-Verteilung*: Dargestellt ist die Wahrscheinlichkeit, innerhalb eines Versuchsintervalls T kein Photon, ein Photon, zwei Photonen und so weiter zu zählen.

Eine Poisson-Verteilung mit dieser symmetrischen Gestalt erhält man auch, wenn man die Teilchen zählt, die von einer radioaktiven Probe mit langer Halbwertszeit in einem bestimmten Intervall zufällig ausgesendet werden, oder wenn man die Regentropfen zählt, die während eines gleichmäßigen Schauers auf eine bestimmte Fläche fallen. Auch die Wahrscheinlichkeit, mit einer Münze einen „Kopf“ zu werfen, aufgetragen gegen die Zahl der bei über ca. 20 Würfeln insgesamt geworfenen Köpfe (N), ist eine Poisson-Verteilung: Die höchste Wahrscheinlichkeit bei $N_{\max} = 20$ tritt in der Nähe des Mittelwerts N_{mit} auf, genauer gesagt, bei $\frac{1}{2}N_{\max} = 10$; die geringsten Wahrscheinlichkeiten findet man für $N = 0$ und $N = 20$. Am wahrscheinlichsten ist