Vojtěch Kolman
Zahlen

Grundthemen Philosophie

Herausgegeben von
Dieter Birnbacher
Pirmin Stekeler-Weithofer
Holm Tetens

Vojtěch Kolman

Zahlen

DE GRUYTER

Die Arbeit an diesem Buch wurde durch ein Forschungsstipendium der Alexander von Humboldt-Stiftung und im Rahmen des Forschungsprojekts P401/11/0371 der Tschechischen Agentur zur Unterstützung der Wissenschaft (GAČR) gefördert.

ISBN 978-3-11-048088-7
ISBN (PDF) 978-3-11-048246-1
ISBN (EPUB) 978-3-11-048092-4

Library of Congress Cataloging-in-Publication Data
A CIP catalog record for this book has been applied for at the Library of Congress.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de abrufbar.

Einbandabbildung: Martin Zech
Satz: fidus Publikations-Service GmbH, Nördlingen
Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck
♾ Gedruckt auf säurefreiem Papier
Printed in Germany

www.degruyter.com

Wunderbarer Ursprung aller Zahlen aus 1 und 0 welcher ein schöhnes Vorbild gibet des Geheimnißes der Schöpfung; da alles von Gott und sonst aus Nichts, entstehet: Essentiae Rerum sunt sicut Numeri.

(G. W. Leibniz, 8. 5. 1696, an Herzog Rudolf August zu Braunschweig und Lüneburg)

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Zahlen nehmen eine besondere Stelle in der philosophischen Reflexion ein, so wie die Arithmetik und Mathematik in der allgemeinen Bildung. Warum das so ist, vielleicht auch so sein sollte, ist keineswegs ganz klar, noch nicht einmal, wie weit der Einfluss der mathematischen Paradigmen im philosophischen Denken reicht. Manche Philosophen, einschließlich Platon, Kant, Hegel, Frege und Wittgenstein, behandeln die Zahlen explizit. Andere führen ihre philosophischen Vorstellungen eher exemplarisch anhand der Arithmetik vor oder verdecken ihre mathematische Herkunft, wie man das bei den Monaden von Leibniz sicher vermuten kann.

So ergeben sich ganz natürlich die folgenden ‚metaphilosophischen' Fragen: Ist die Rolle, welche die Mathematik für die Philosophie spielt, eine Folge irgendeiner Version des *Pythagoräismus* und *ihrer Zahlenmystik*, wie sie Aristoteles anscheinend Platons Ideenlehre vorwirft? Oder gibt es eine *Hierarchie des Wissens*, in welcher die Mathematik mit ihrer angeblich besonderen Klarheit und Deutlichkeit die anderen Erfahrungsgebiete übertrifft? In diesem Buch gehe ich bewusst antithetisch vor und beginne mit der Annahme, die Zahlen und die Arithmetik seien als philosophisches Thema nicht *wegen* ihrer Sicherheit, Strenge, abstrakten Idealität und Unendlichkeit, sondern *trotz* dieser Eigentümlichkeiten interessant, und zwar aufgrund ihres eigentümlich indirekten, am Ende hochkomplexen, Verhältnisses zur empirischen, auch alltäglichen Welt.

Dieses Verhältnis zu beschreiben, ist eine Aufgabe, die einige Geduld erfordert. Zunächst scheint klar zu sein, dass man Zahlen nicht sehen, als solche also nicht wahrnehmen kann, da sie sich ja von ihren Namen unterscheiden. Andererseits kritisiert schon Aristoteles Platons Vorstellung, es ließen sich die abstrakten und idealen Zahlen und Formen von den sinnlichen Dingen trennen. Aber sie sind auch nicht einfach mit diesen zu identifizieren. Der Streit geht daher auch darum, wie weit Zahlen und dann auch abstrakte Bedeutungen von ihren Benennungen in der Sprache unabhängig sind. Diese Spannung zwischen (1) der *Unmittelbarkeit*, sei es jene der sinnlichen Erfahrung, der Intuition oder eines schon etablierten und zum *common sense* gewordenen Vorherwissens, und (2) der *Vermittlung* durch *Sprache*, symbolische Formen und höherstufige Reflexionen ist eines der philosophischen Rahmenthemen dieses Buches. Der *Aufweis der Spannungen* ist das *erste Leitmotiv*, das sich durch die zu besprechenden Themen einer Philosophie der Zahlen oder der Zahl, also der Arithmetik und Mathematik überhaupt, zieht und sie verbindet.

Dass das Wissen der Arithmetik *exakt*, *sicher* und *gewiss* ist, gilt als ausgemacht. In ihrer elementaren Form ist sie uns wie die Muttersprache seit der Kindheit vertraut. Dieses Vorwissen oder Vorherwissen macht einen wichtigen

Unterschied aus zum empirischen oder historischen Fakten-Wissen – dass es z. B. in Sibirien ein Mastodon gab oder dass man von der Engelsburg in den Tiber springen kann (wie es Victorien Sardou in seiner dramatischen Vorlage zum Libretto von Puccinis *Tosca* irrtümlich voraussetzt). Weil man sie auswendig lernen kann, ohne die Welt zu erforschen, erscheinen die arithmetischen Wahrheiten des Rechnens mit Zahlwörtern als *analytisch*, was besagen soll, dass sie rein aus Definitionen folgen. Die Gültigkeit einer Gleichung wie $23 + 3 = 56 - 20$ kann man ja auf der Stelle, also immer und überall, prüfen, ohne z. B. nach Rom zu fahren oder die Vergangenheit Sibiriens zu erforschen. Diese unmittelbare Sicherheit der arithmetischen Sätze hört aber sofort auf, wenn wir Dinge in der Welt zählen und dabei die reinen, formalen, idealen mathematischen Wahrheiten mit der unreinen, materialen, dafür realen Wirklichkeit, also mit der veränderlichen sinnlichen Welt konfrontieren. In der realen Welt können sich z. B. zwei Wassertropfen zu einem einzigen (größeren) addieren, so dass aus 1 Ding und 1 Ding 1 Ding entstehen würde. Es hilft nicht viel zu sagen, dass es hier um den Unterschied zwischen Theorie und Praxis geht, konkret also *nur* um die richtige *Anwendung* des Zählens, die im Unterschied zu einer *idealen* Theorie immer bloß approximativ oder irgendwie *unrein* sei. Denn damit wird suggeriert, dass die Anwendung – d. h. das Verhältnis einer Theorie zur alltäglichen Welt – auf das in der Theorie artikulierte Wissen *nur von außen* hinzutrete und am Ende ganz unwesentlich sei.

Das ‚ontologische' Problem dieser Meinung zeigt sich besonders deutlich in der *eleatischen Verdoppelung* der Wirklichkeit in die ideale Welt des echten Wissens (*episteme*, *theoria*) und die vergängliche Welt der bloß subjektiven Anschauung (*doxa*, *empeiria*). Echtes Wissen über ein zeitallgemeines Sein, für welches Parmenides aus Elea eintritt, kennt nur situationsinvariante Formen oder Ideen, ist rein theoretisch, strukturell. Die Doxa des Meinens und Glaubens aber geht auf empirische Erscheinungen und sagt etwas darüber, was ich hier wahrnehme, was hier oder dort da ist, oder was jetzt, damals oder künftig wahrgenommen werden könnte. In ironischem Doppelspiel kritisiert nun aber gerade Parmenides in dem ihm von Platon gewidmeten Dialog dessen frühere Ideenlehre, als deren Vater er selbst ausgegeben wird. Platon versucht, diese Kritik dadurch aufzuheben, dass er den Unterschied der Welt der reinen Strukturen und der empirischen Welt des wahrnehmend Erfahrbaren durch eine Art projektive Relation unter dem Titel „Teilnahme" (*methexis*) überbrückt. Es ergibt sich insgesamt eine Art *Mischung* beider in der Intersubjektivität des Weltbezugs auf der Grundlage einer gemeinsamen, auf einem Konsens begründeten, Begriffsbestimmung. Eine *dihairetische* Methode der Definition von klassifikatorischen Begriffen durch Merkmale soll dabei schon gegebene gemeinsame begriffliche Unterscheidungen explizieren oder neue möglich machen.[1] Insgesamt zeigt eine solche von einer frühen Ideenlehre oder einem Platonismus gereinigte Analyse des Zusammenspiels orts- und zeitallgemeiner *Formen*, dass beide ‚Welten' nur als Teilaspekte oder ‚Momente', mithin auch als Entwicklungsphasen, einer durchaus schon vor Aristoteles dynamisch konzipierten und durch Sprache und Begriff vermittelten Wirklichkeit aufzufassen sind.

Wenn Platon zum Beispiel auch in den *Nomoi*[2] die Analyse der Inkommensurabilität von geometrischen Größen als eine intellektuelle Übung (etwa anstelle von Brettspielen) empfiehlt, geschieht das nicht etwa um eines rein theoretischen Wissens willen. Er hält das mathematische Wissen für „weder schädlich noch schwierig". Philosophisch relevant daran ist vielmehr der frappante Unterschied zwischen der intellektuellen Unausweichlichkeit oder Notwendigkeit einer *innermathematischen* Wahrheit wie im Fall der Unendlichkeit der Inkommensurabilität und der *empirischen* Tatsache, dass Messen immer nur zu rationalen, also kommensurablen, Verhältnissen führt. Unmittelbar, empirisch, *gibt* es also die irrationalen Größen überhaupt *nicht*. Was es gibt, ist die ‚gemischte', durch die theoretische Überlegung vermittelte Tatsache, dass man ein Quadrat oder ein Pentagon im Prinzip immer so groß und akkurat zeichnen kann, dass eine vorher empirisch bestimmte (größte) gemeinsame Maßeinheit die betreffende Seite und Diagonale nicht mehr *exakt* misst. Anders gesagt, je nach Größe der Form muss eine andere, bessere, genauere *Maßeinheit* gesetzt werden.

Als die älteste Vorstellung davon, wie diese vermittelte Struktur der Wirklichkeit aussieht, kann man Platons berühmte Unterscheidung zwischen

(1) Namen,
(2) Definition und
(3) Abbildung

aus dem *Siebten Brief* angeben.[3] In einer Antizipation des modernen sprachanalytischen Standpunkts schlage ich vor, die entsprechende Passage wie folgt zu deuten: Zu einer Bestimmung dessen, worüber man spricht, braucht man nicht nur (1) *vertikale* Beziehungen einer Repräsentation (des Namens) zur sinnlichen Welt, sondern (2) auch situationsübergreifende Definitionen, welche den Ausdruck *horizontal* mit anderen Ausdrücken verbinden. (Siehe Abbildung 1.) Diese Definitionen und das mit ihnen verbundene Sprachnetz in seinem aktiven *Gebrauch*, also dessen Beziehung zu *uns*, sind hier also die *Mitte*, welche (3) die *unmittelbar* gegebenen Abbildungen, wozu auch die Wörter als physikalische Geräusche und Zeichen gehören, zu einer *vermittelten Unmittelbarkeit* bedeutungsvoller Wörter und der mit ihnen verbundenen Wirklichkeit heranführt.

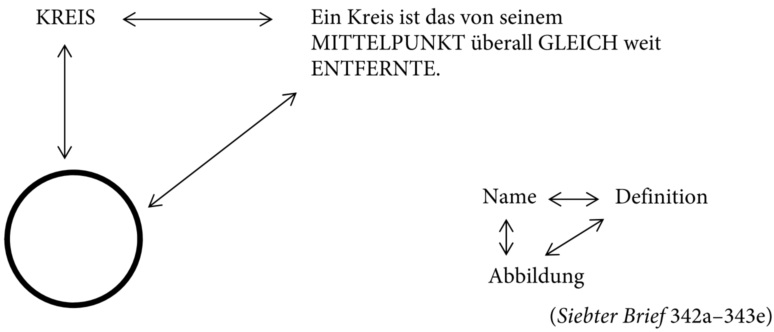

Abb. 1

Dass es eben diese mehrdimensionale Struktur der Wirklichkeit ist, die man als für die kontinuierliche Entwicklung der Begriffe, d. h. ihre Geschichtlichkeit, verantwortlich erklären kann, lässt sich in einer propädeutischen Weise z. B. am Fall der geometrischen Beispiele, etwa am *Parallelenprinzip*, veranschaulichen. Es geht dabei um den Übergang von der euklidischen zu nichteuklidischen Geometrien in einer *axiomatischen* Vermittlung. Noch geeigneter zu diesem Zweck sind aber die komplexeren Begriffe der Arithmetik, welche sich, wie der Zahlbegriff, und speziell *der Begriff der reellen Zahl*, in ihren Entwicklungsstufen durch die ganze Geschichte der Mathematik und deren Philosophie hindurchziehen.

So werde ich hier mit der altpythagoräischen Wechselwegnahme (*anthyphairesis*) anfangen. Es folgt Eudoxos' Definition der Proportionengleichheit auf der Grundlage von geometrischen Formen, die mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind. Wir gelangen dann, bei Descartes, zur Auffassung der Zahlen als Wurzeln oder Nullstellen rationaler Polynome. Diese bilden die algebraischen Punkte auf der Zahlengerade, von denen wir dann zu den modernen Theorien der reellen Zahl kommen. In diesen werden die reellen Zahlen typischerweise durch konvergente Folgen rationaler Zahlen repräsentiert. Die damit grob skizzierte schrittweise Erweiterung des Zahlbegriffs ist eine *zweite Leitlinie* für eine systematische Rekonstruktion einer Gründegeschichte, wie sie in diesem Buch intendiert ist.

Platons dreifachen Aufbau der Welt kann man in diesem Kontext so weiterentwickeln, dass am Ende einsichtig wird, wie zu einer vollständigen Konstitution des (Rede-)Gegenstandes immer die folgenden – auf Frege zurückgehenden – Bestimmungen gehören:

(1) *Repräsentationen*, z. B. die Dezimalentwicklungen der reellen Zahlen (die *Namen*),

(2) *Gleichheitskriterien*, nach welchen z. B. 0,5000... und 0,4999... Namen *derselben* Zahl sind (die *Definitionen*), und

(3) *praktische Veranschaulichungen*, wie z. B. in Teilungen einer Strecke durch Identifizierung der Teilpunkte mit dem Limes einer Folge (die *Abbildungen*).

Diese logischen Kategorien der Konstitution von Gegenständen werden in den Erweiterungen der Zahlenbereiche in ihrer Wirkweise sichtbar und ihre Explikation bildet ein weiteres Strukturmoment der folgenden Darstellung.

Freges Analyse des Zahlbegriffs in seinen *Grundlagen der Arithmetik*, mit welcher übrigens die vollwertige, selbstbewusste Philosophie der Arithmetik allererst beginnt, beschäftigte sich allerdings – freilich aus systematischen Gründen – nicht mit der Gegenstandkonstitution der *reellen*, sondern nur der *natürlichen* Zahlen. Die didaktischen Vorteile der elementaren Arithmetik sind zwar offensichtlich. Sie verwandeln sich aber leicht auch in einen Nachteil, wenn man mit Frege den Zusammenhang der natürlichen mit den reellen Zahlen unterschätzt, die Möglichkeit dagegen überschätzt, die arithmetischen Sätze alle als rein analytisch verstehen zu können. Die Paradoxien, welche sich aus Freges Projekt einer logischen Grundlegung der Arithmetik ergeben, verhalten sich aus dieser Perspektive analog zu Kants Antinomien der reinen Vernunft. Das heißt, dass irgendwelche *Grenzen* überschritten wurden. Für einen angemessenen Umgang mit solchen Fällen sind Hegels Vorschläge zur Aufhebung von Widersprüchen von besonderer Wichtigkeit. Denn ein auftretendes kategoriales Problem oder ein Widerspruch wird nicht automatisch als Bankrott der Vernunft gedeutet, sondern als erster Schritt zur Einsicht in die Notwendigkeit einer begrifflichen Entwicklung. Eine solche Entwicklung liefert uns die Erweiterung des Begriffs der Zahl oder der Größe, der Menge oder des Quantums von der Entdeckung der *Inkommensurabilität* im alten Griechenland bis zu den von Newton und Leibniz entwickelten Kalkülen der Differential- und Integralrechnung oder mathematischen *Analysis*.

Das zeigt, dass man nicht immer gut daran tut, Antinomien – wie Kant in seiner Dialektik – einfach zu verbieten oder auf zu einfache Weise aufzulösen. Schon der Fall der *irrationalen* Zahl, welche ursprünglich den ironisch-widersprüchlichen Titel eines *alogos logos*, einer *irrationalen Ratio* trug, repräsentiert ein Paradebeispiel dafür, wie man Widersprüche im Denken und Sprechen aufheben – also die Probleme überwinden und die in ihnen aufgewiesenen Differenzierungen dennoch erhalten – kann, um so zu einer weiteren Entfaltung der Mathematik zu gelangen. In dieser Entfaltung werde ich Cantors *Diagonalkonstruktion* eine besonders wichtige Rolle zuschreiben. Sie liefert nicht nur die Basis für eine völlig liberale und damit in einem gewissen Sinn endgültige Erweiterung des Begriffs der reellen Zahl, sondern auch für die Einführung von ganz unterschiedlichen unendlichen Ordinal- und Kardinalzahlen als so genannten Mächtigkeiten von transfiniten Mengen. Wir werden dabei sehen, wie in diesem Prozess erstens *situationsabhängige* und zweitens *selbstreflexive* Züge des Denkens gegen die Vorstellung völliger Situationsinvarianz oder platonistischer Trennung der Sphären der Gegenstände der Theorie und der Bezugnahmen durch uns doch auch wieder ihr Eigenrecht verlangen. Das wird später noch klarer bei der Besprechung von Gödels *Unvollständigkeitssätzen*.

Diese Themen stecken skizzenhaft das Terrain einer *Philosophie der Mathematik* ab, welche nicht nur im Dienste der Sachwissenschaften, sondern auch im Dienste ihrer Selbstreflexion und der begrifflichen Reflexion überhaupt steht. Mathematik nimmt dabei eine *mittlere* Rolle ein, wie das schon Platon im sechsten und siebten Buch seiner *Politeia* diskutiert. Die dort angeführten Gleichnisse, besonders das *Liniengleichnis*,[4] zeigen nämlich, wie die mathematische Bildung des Philosophen zu deuten ist: Mathematische Sätze und Objekte sind für ihn keine nicht weiter problematisierten *Ausgangspunkte*, sondern nur *Einübung* und *Anlauf*,[5] was in gewisser Weise in einer Analogie steht zu Wittgensteins Leiter, die man wegwerfen muss, nachdem man auf ihr hinaufgestiegen ist.[6] Andernfalls droht die Gefahr, dass man die mathematischen Erkenntnisse und die Wissenschaften überhaupt als direkte Beschreibungen einer höheren Realität versteht. Man vergisst dann, dass sie *per definitionem* ‚für uns' sind, d. h. zu der praktischen und immer neu zu beurteilenden Ortung in der Welt (also zum *Tun*), nicht allein zu einer wertneutralen und abstrakten Theorie ‚an sich' (zum reinen *Denken* oder *Sagen*) *dienen* können und sollen.

1 Grundzahlen

Das Zählen ist eine grundlegende menschliche Tätigkeit, die schon in der Rechenkunst der Babylonier und Ägypter hoch entwickelt war. Aber erst in der *griechischen Mathematik* ist die Zahl zu einem Gegenstand des Denkens geworden, zunächst wohl in der altpythagoräischen Lehre vom Geraden und Ungeraden, wie sie im IX. Buch von Euklids *Elementen* erhalten geblieben ist. In den *Elementen* gibt es auch eine erste explizite Definition der Zahl (*arithmos*):

> die Zahl ist die aus Einheiten zusammengesetzte Menge.[1]

Aus heutiger Perspektive erscheint die Definition noch als sehr naiv oder bloß orakelhaft, zumal das begriffliche Feld der Zahlen und ihrer Familienähnlichkeiten, wie Wittgenstein solche Fälle nennt,[2] sich als wesentlich komplizierter darstellen. Denn man hat heute nicht nur *die Zahl* im Sinne des Begriffs der natürlichen Zahlen, sondern *die Zahlen* im Sinne verschiedener Arten von Zahlen wie der rationalen oder reellen Zahlen oder aber auch der endlichen und unendlichen Ordinal- und Kardinalzahlen zu erläutern. Hier gibt es keine gemeinsame Definition.

Der Sache nach hatte das William James schon vor Wittgenstein und seinem Konzept eines ‚*Sprachspiels*' am Fall des *Religionsbegriffes* und anhand des Kontrasts zwischen *der Religion* und *den Religionen* demonstriert.[3] So wie man monotheistische, polytheistische, atheistische, auch philosophische, politische, institutionelle oder rein persönliche Religionen kennt, gibt es auch eine Mannigfaltigkeit der Zahlenarten, welche keine gemeinsame Charakteristik haben. Für die Operationen, strukturellen Eigenschaften oder Anwendungsgebiete der Zahlen gibt es allerdings Ketten von partiellen Ähnlichkeiten, die etwa die *natürlichen Zahlen* sowohl mit den *Ordinalzahlen* als auch den *reellen* und *komplexen Zahlen* verbinden. Im Laufe der Zeit hat man für verschiedene Zwecke verschiedene Zahlenbereiche eingeführt, u. a. die so genannten negativen, algebraischen, imaginären, infinitesimalen, hyperkomplexen, transfiniten oder Nichtstandard-Zahlen.[4] Gleichzeitig haben sich die Begriffe der natürlichen (kardinalen und ordinalen) und der reellen Zahl (des Kontinuums) weiterentwickelt. Das geschah nicht nur *extensional* (in gewissen Erweiterungen der natürlichen Zahlenreihe und der verschiedenen reellen Zahlenkörper), sondern auch *intensional* (es gibt verschiedene Konstruktionen des Kontinuums) und damit *begründungstheoretisch* (es gibt verschiedene Antworten auf die Frage von Richard Dedekind: „Was sind und was sollen die Zahlen?").

Ohne nach einer allgemeingültigen Definition zu streben, was in Hinblick auf die Mannigfaltigkeit der Zahlengebiete offenbar aussichtslos ist, kann man den

Zahlbegriff mit dem verwandten Allgemeinbegriff des *Quantums* verbinden, der Menge, Größe und Zahl umfasst. Die allgemeine Aufgabe der Zahlen kann dann als *Quantifizierung* angesehen werden. Dabei fällt auch schon der Zusammenhang von Zählen und Sprechen auf, wenn wir Ausdrücke wie „er*zählen*“ oder „to give an *account*“ betrachten. Diese Verknüpfung ist am Ende auch für den Übergang von Zahlen als *Momenten* (Hilfsmittel) einer Praxis des Zählens, Rechnens und Messens zu den Zahlen als selbständigen (d. h. rein *quantitativ* unterschiedenen) *Objekten* der Untersuchung verantwortlich, welche je eigene Eigenschaften und eigene Urteilsformen haben.

1.1 Von der synkategorematischen zur objektiven Rede

Mit Frege gesehen, also sprachanalytisch, handelt es sich beim Übergang von den so genannten (empirisch) *benannten* Zahlen bzw. der entsprechenden Ausdrucksformen, wie „5 Äpfel“, „2,5 Pfund“ oder vielleicht sogar schon „$\sqrt{2}$ Fuß“, zu den *reinen* Zahlen, wie 5, $\frac{5}{2}$ und $\sqrt{2}$, die eine *selbständige* Bedeutung haben, um eine gegenstandsbildende Abstraktion. Es geht um den Übergang von Sätzen wie

(a) im Korb gibt es 5 Äpfel

zu Sätzen wie

(b) 5 ist eine Primzahl.

Nach Freges bekannter Analyse[5] findet man den Zusammenhang in der Beobachtung, dass im praktischen Zählen der beigefügte Begriff ‚Apfel‘ oder ‚Korb‘ die relevante Einheit (also 1 Apfel, 1 Korb) nennt, ohne welche die zu einer Zahlangabe führende Frage „wie viel?“ gar keinen konkreten Sinn hat. Im Unterschied dazu erhält man durch die Frage

(c) wie viele Äpfel gibt es im Korb?

eine klare Anleitung, wie der Ausdruck

(d) die Anzahl der Äpfel im Korb

zu verstehen ist, auch wenn (c) zunächst vielleicht nur mit Hilfe einer Redewendung wie der folgenden zu beantworten ist:

(e) die Anzahl der Äpfel in dem Korb ist gleich der Anzahl der Knöpfe in der Tasche.

In (e) unterstellt man noch keinen eigenständigen Gegenstandsbereich der (An-)Zahlen, sondern nur die Praxis einer umkehrbar eindeutigen, oder *bijektiven* Zuordnung der unter die entsprechenden Begriffe fallenden Gegenstände. Unter Bijektion versteht man dabei weiterhin eine Zuordnung, welche jedem Gegenstande vom Typ *A* (Apfel) genau einen Gegenstand vom Typ *B* (Knopf) beiordnet, so dass am Ende die Gegenstände *A* mit den Gegenständen *B* und umgekehrt *B* mit *A* eindeutig verpaart sind und keine nichtverpaarten Gegenstände verbleiben. (Siehe Kap. 8 für eine weitere Erklärung.) Es ist genau diese Praxis einer bijektiven Zuordnung, welche für die Einführung der *natürlichen Zahlen* in die Gemeinsprache verantwortlich ist.

Die Erfindung der Zahlen wird daher auf interessante Weise zu einem paradigmatischen Analogon für die Erfindung des *Geldes*. Die Abstraktion des reinen Geldwerts ist ja in der Tat ein Motor der natürlichen Erweiterung des Tauschhandels. Auch das Geld hat eine Bedeutung nur im Ganzen des gemeinsamen menschlichen Handelns. Es gehört nie zu den Endzielen, sondern immer nur zu den Ziele vermittelnden *Instrumenten*. Dass manche das ganze Leben der Mathematik, dem Bankwesen, dem Studium der Sprache(n), oder der rein Geizige ausschließlich der Vermehrung des Geldbesitzes, weihen können, ist eine andere Sache, die mit der selbst-bewussten, selbst-reflexiven Natur des Menschen und der Möglichkeit der Arbeitsteilung und Themenfokussierung zusammenhängt. Für die arithmetische Sprache werden wir besonders in Kap. 11 auf diesen Kontext zurückkommen.

Die Rolle der Antwort (e) in der Formation einer wissenschaftlichen Arithmetik ist dabei eine dreifache. (1) Erstens markiert sie einen Übergang zu der verwandten Antwort

(f) die Anzahl der Äpfel in dem Korb ist 5,

in welcher man die Präsenz einer konkreten Tasche als Behälter konkreter Knöpfe ersetzt durch die situationsinvariante Möglichkeit, eine Anzahl durch ein Zahlwort zu kennzeichnen, welches die Anzahl der *Vorgängerzahlwörter* zählt. Da die sprachlichen und kulturellen Besonderheiten der Artikulation der *Zahlterme* etwa im griechischen, römischen oder arabischen System gleichgültig sind, sagen wir, dass wir nicht die *Zahlwörter*, sondern die abstrakten *Zahlen* zum Zählen verwenden. Man ersetzt so die Menge der konkreten Knöpfe durch abstrakte Einheiten, die es sozusagen in jedermanns ‚Kopf' gibt. (2) In (e) und (f) zeigt sich zweitens, dass die Auffassung der natürlichen Zahlen als endliche

Kardinal- bzw. Ordinalzahlen, wie sie sich in Antworten auf die Grundfragen „wie viel?“ bzw. „an der wievielten Position in einer Reihe?“ manifestiert, von Anfang an eng zusammenhängen. Schon aus mnemotechnischen Gründen kann man nämlich die zu zählenden Einheiten mit ihrer Ordnung in der entstehenden Reihe gleichsetzen und beides dann als 1, 2, 3, 4, ... notieren, d. h. in der Form einer Folge, deren Glieder nicht nur die *Stellung*, sondern auch die *Anzahl* der vorangehenden Glieder (einschließlich des betreffenden Gliedes selbst oder der noch einzuführenden Null) vertreten. (3) Drittens demonstrieren die Antworten (e) und (f) schon ihrer Form nach eine äußerst wichtige logische Einsicht, welche (u. a.) Frege in seinen *Grundlagen* explizit machte,[6] nämlich dass die Erweiterung der bestehenden Redepraxis um die neuen Sprachmittel wie „Anzahl“ oder „5“ mit dem Phänomen der *Gleichheit* zusammenhängt.

1.2 Die Gleichheit und ihre Logik

Wie schon David Hume in seinen erkenntnistheoretischen Untersuchungen gezeigt hatte,[7] ist die Identität und die Permanenz der Gegenstände der Außenwelt (genauso wie die Identität von ‚Ich‘ und die Kausalität der Ereignisse) nicht einfach aus den Sinneseindrücken herzuleiten. Denn die Sinne geben uns immer nur eine Abfolge von stets *verschiedenen* und sogar partiell unabhängigen, auch perspektivisch kontingenten ‚Empfindungen‘, die als solche noch keine Wahrnehmungen von *Gegenständen* sind. Rein empirisch ist also, wie es scheint, ein Satz der Form

M und *N* sind gleich

immer ‚falsch‘ oder bestenfalls ‚approximativ wahr‘. Humes ‚skeptische Lösung‘ des Paradoxes, dass wir trotzdem an die von uns unabhängige (und kausal gegliederte) Welt der Gegenstände glauben, welche in ihrer Identität hinter der Diversität der Erscheinungen stehen, besagt bekanntlich, es gebe dafür keine ‚rationalen‘ Gründe (im Sinn theoretischen Wissens), sondern nur praktische Opportunitäten, auf der Grundlage einer sich auf gewisse Relationen von Ähnlichkeit und Regelmäßigkeit stützenden *Gewöhnung*. Doch Gewöhnung ist etwas, was in uns und nicht in der Außenwelt wurzelt. Daher ist bei Hume in gewissem Sinne schon die Reaktion Kants vorweggenommen, welcher die *passive* Macht der Gewohnheit zumindest partiell durch die *Spontaneität* tätigen Handelns und damit auch einer Art gesetzgebender Vernunft mit ihren vereinheitlichenden Funktionen zu ersetzen suchte.

Die allgemeine Rolle der Gleichheit in der ganzen Geschichte besteht nun darin, dass sie nichts *unmittelbar* Gegebenes (Humes ‚*impression*', dann auch ‚*perception*' und die davon abgeleitete ‚*idea*') darstellt, sondern als eine (vermittelte) Verneinung der (unmittelbaren) Ungleichheit zu deuten ist. Die unmittelbar gegebenen Wahrnehmungen sind als gleich *gesetzt*, also nur in Bezug auf diese Gleichsetzung als gleich *erfasst*. Demzufolge ist die Gleichheit $M = N$ keine deskriptive *Beschreibung* einer vorgegebenen Tatsache. Eine solche Tatsache kann es gar nicht geben. Denn zwischen *zwei* potentiellen Gegenständen M und N ist es immer *möglich* zu unterscheiden. Es handelt sich vielmehr um eine praktische *Entscheidung*, auf gewisse Unterschiede in der Beurteilung von M und N zu verzichten. Welche Unterschiede dies sind, ist dabei auch nicht allein durch eine von uns völlig unabhängige Wirklichkeit, sondern praktisch bestimmt.

Beim Zählen ist es gleichgültig, ob man dazu laute oder leise Wörter, fette oder kursive, arabische oder römische, lange oder kürzere Ziffern gebraucht. In eben diesem Sinn sind Gleichungen wie „*8* = **V** + III" wahr, obwohl für andere, z. B. typographische oder historische Kontexte die angegebenen Differenzen relevant sein können. Auch wenn man den Ausdruck „dieses Buch" in einer konkreten Situation äußert, entscheidet weder diese Äußerung an sich, noch die mit dem Ausdruck verbundene Wahrnehmung, ob man damit das Buch als ein konkretes *Exemplar*, einen abstrakten *Titel* oder etwas ganz Anderes meint. Der Ausdruck kann für eine indefinite Vielheit von Gegenständen stehen. Wenn man aber z. B. über den *Inhalt* des Buches spricht, dann ist es gleichgültig, ob das Buch gebunden oder geklebt, auf Englisch oder auf Deutsch geschrieben ist, während diese Eigenschaften in Besprechungen konkreter *Exemplare*, *Auflagen* oder *Übersetzungen* des Buches höchst wichtige Unterschiede artikulieren können.

So sieht man mit Kant und Frege ein, dass die *vertikalen* Verhältnisse einer Repräsentation zu dem repräsentierten Gegenstand (des Namens zur Abbildung) von den *horizontalen* Verhältnissen der einzelnen Repräsentationen (der Namen zueinander) abhängen, so dass man häufig sogar – *cum grano salis* – den zu benennenden Gegenstand mit der Äquivalenzklasse aller als gleich gesetzten Benennungen identifizieren kann. Dieser horizontale Aspekt der Wirklichkeit weist schon darauf hin, dass man auf die Frage

was ist M?,

also „was ist dieses Buch?", „was ist die Anzahl von Äpfeln in dem Korb?" usw., nur so antworten kann:

N, für welche $M = N$ gilt,