

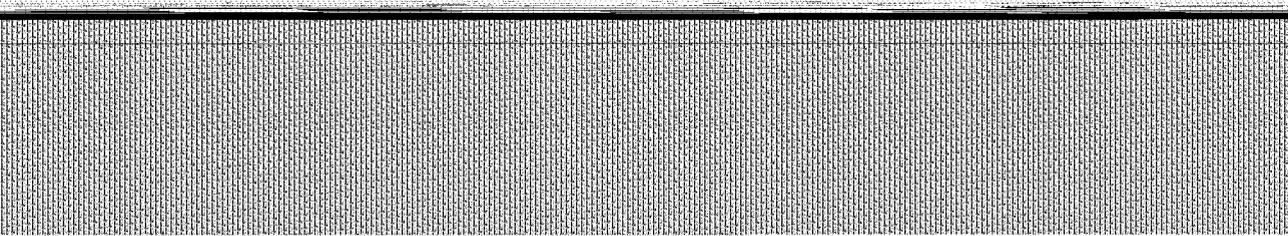
2.5	Behandlung von Systemen höherer als 2. Ordnung in der Zustandsebene	156
2.6	Nichtlineare Systeme 1. Ordnung in der Zustandsebene	162
2.6.1	Regelkreis mit Hysteresekennlinie	162
2.6.2	Schaltender PI-Regler	166
3	Grundzüge und Anwendung der Direkten Methode	177
3.1	Grundgedanke der Direkten Methode	177
3.2	Stabilitätskriterien	182
3.3	Konstruktion von Ljapunow-Funktionen	189
3.3.1	Positiv definite Funktionen	190
3.3.2	Ljapunow-Funktionen für lineare Systeme	194
3.3.3	Beispiele zur Konstruktion von Ljapunow-Funktionen für nichtlineare Systeme	201
3.3.4	Die Methode von <i>M.A.Aiserman</i>	211
3.4	Eine Anwendung der Direkten Methode: Methode der ersten Näherung	218
3.5	Weitere Anwendung der Direkten Methode: Entwurf struktumschaltender Regelungen	232
3.5.1	Zweck und mathematische Beschreibung struktumschaltender Regelungen	232
3.5.2	Entwurf der Umschaltstrategie mittels einer Ljapunow-Funktion	237
3.5.3	Beispiel und Literaturanmerkungen	243
3.6	Eine dritte Anwendung der Direkten Methode: Synthese nichtlinearer Regelungen durch Gütemaßangleichung nach <i>U. Sieber</i>	253
3.6.1	Mathematische Vorbemerkung: Kronecker-Produkt und Vektorisierungsoperator	253
3.6.2	Beschreibung des Syntheseverfahrens	260
3.6.3	Herleitung der Reglerformel	265
3.6.4	Beispiel: Über Feld und Anker geregelter Gleichstrommotor	269
3.6.5	Entwurf nichtlinearer Ausgangsrückführungen	274
	Übungsaufgaben mit Lösungen zu Band I	292
	Verzeichnis von Buchveröffentlichungen zu nichtlinearen Systemen	337
	Sachwortverzeichnis zu Band I	344

Band II

4	Harmonische Balance (Harmonische Linearisierung, Methode der Beschreibungsfunktion)	11
4.1	Einführung der Beschreibungsfunktion und die Gleichung der Harmonischen Balance	12
4.2	Berechnung der Beschreibungsfunktion	22
4.3	Lösung der Gleichung der Harmonischen Balance	30
4.4	Beispiele zur Lösung der Gleichung der Harmonischen Balance	37
4.4.1	Regelkreis mit Dreipunktkenlinie	37
4.4.2	Nichtlineare Regelungen mit Totzeit	45
4.4.3	Regelkreis mit Hysterese	53
4.4.4	Ein kritischer Fall	57
4.5	Benutzung von Frequenzkennlinien	63
4.6	Stabilitätsverhalten von Dauerschwingungen	69
4.7	Dauerschwingungen und das Stabilitätsverhalten der Ruhelage	82
4.8	Stabilisierung nichtlinearer Regelungen	87
4.8.1	Lineare Stabilisierung	87
4.8.2	Nichtlineare Stabilisierung anhand eines Anwendungsbeispiels	91
4.9	Anwendung der Harmonischen Balance auf Regelkreise mit mehreren Kennlinien	107
4.9.1	In Reihe gelegene Kennlinien	107
4.9.2	Beliebige Lage der Kennlinien im Regelkreis	114
4.10	Anwendung der Harmonischen Balance auf Regelkreise mit unsymmetrischer Kennlinie und konstanten Eingangsgrößen	121
4.10.1	Aufstellen der Gleichungen der Harmonischen Balance	121
4.10.2	Lösung der Gleichungen der Harmonischen Balance	129
4.11	Harmonische Balance bei sinusförmigen Eingangsgrößen und allgemeineren Nichtlinearitäten (Querverbindung zur Schwingungstechnik)	139
4.11.1	Die Schwingungsdifferentialgleichung als Regelkreis	140
4.11.2	Die Gleichung der Harmonischen Balance für den Regelkreis der Schwingungsdifferentialgleichung	146
4.11.3	Beispiele	149
4.11.4	Die ungedämpfte Schwingungsdifferentialgleichung $\ddot{x} + f(x) = 0$	152
4.12	Zusammenstellung einiger Beschreibungsfunktionen	157

5	Stabilitätskriterien im Frequenzbereich	159
5.1	Die absolute Stabilität von Regelkreisen	159
5.2	Das Popow-Kriterium	161
5.3	Erweiterungen des Popow-Kriteriums	166
5.4	Formelmäßige Lösung der Popow-Ungleichung	169
5.5	Geometrische Deutung der Popow-Ungleichung	173
5.6	Sektortransformation	179
5.7	Popow-Sektor und Hurwitz-Sektor	186
5.8	Das Kreiskriterium	197
	5.8.1 Zusammenhang zwischen Popow- und Kreiskriterium	197
	5.8.2 Anwendung des Kreiskriteriums	201
	5.8.3 Vergleich von Popow- und Kreiskriterium	204
6	Hyperstabilität	209
6.1	Begriff der Hyperstabilität	209
6.2	Hyperstabilitätskriterien	221
6.3	Behandlung von Eingrößenregelungen mittels der Hyperstabilität	232
	6.3.1 Allgemeine Vorgehensweise	232
	6.3.2 Beispiele	240
	6.3.3 Ein Regelkreis mit Stellgrößenbegrenzung	246
6.4	Behandlung von Mehrgrößenregelungen mittels der Hyperstabilität	254
	6.4.1 Allgemeine Vorgehensweise	254
	6.4.2 Beispiele	257
6.5	Verknüpfung hyperstabiler Systeme	266
	6.5.1 Verknüpfungsregeln	266
	6.5.2 Anwendung der Verknüpfungsregeln zur Regelungssynthese	271
7	Synthese nichtlinearer Regelungen durch Kompensation und Entkopplung („globale“ oder „exakte Linearisierung“)	281
7.1	Struktur der nichtlinearen Strecke	283
7.2	Begriff der Differenzordnung und direkte Systembeschreibung	288
7.3	Entwurf nichtlinearer Eingrößenregelungen durch Kompensation	299
7.4	Entwurf nichtlinearer Mehrgrößenregelungen durch Kompensation und Entkopplung	309

7.5	Nichtlineare Beobachter	324
7.5.1	Beobachterentwurf mittels Linearisierung	326
7.5.2	Beobachterentwurf mittels Gütemaßangleichung	337
	Übungsaufgaben mit Lösungen zu Band II	349
	Verzeichnis von Buchveröffentlichungen zu nichtlinearen Systemen	387
	Sachwortverzeichnis zu Band II	394



1 Grundbegriffe nichtlinearer Systeme

1.1 Lineare und nichtlineare Übertragungsglieder

Am Anfang einer Betrachtung über nichtlineare Systeme muß die Begriffsbestimmung des nichtlinearen Verhaltens stehen. Da es durch eine Verneinung definiert ist, wird man vom linearen Verhalten ausgehen müssen.

Ganz allgemein sei zunächst unter einem *Übertragungsglied* eine Anordnung verstanden, welche aus einer Eingangsgröße $u(t)$ eine eindeutig bestimmte Ausgangsgröße $y(t)$ erzeugt. Bezeichnet man die Gesamtheit der Operationen, durch die das geschieht, mit dem Symbol φ , so kann man das Übertragungsglied durch die Gleichung

$$y = \varphi\{u\} \quad (1.1)$$

charakterisieren. φ heißt der Operator des Übertragungsgliedes.

Beispielsweise gilt für ein Integrierglied (I-Glied) die Beziehung

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau,$$

durch die jeder (integrierbaren) Eingangsgröße $u(t)$ eine eindeutig bestimmte Ausgangsgröße $y(t)$ zugeordnet wird. Der Operator φ besteht hier in der Ausführung der Integration.

Ein Operator kann somit als eine Abbildung von Funktionen auf Funktionen angesehen werden. Er ist daher wohl zu unterscheiden von einer Funktion, die eine Abbildung von Zahlen auf Zahlen vermittelt. So wird z.B. durch $y = e^x$ jeder Zahl x eine Zahl y zugeordnet.

Man nennt nun ein *Übertragungsglied linear*, wenn es das Überlagerungs- und Verstärkungsprinzip erfüllt. Das soll heißen: Sind für irgend zwei Eingangsgrößen $u(t)$ und $\tilde{u}(t)$ die zugehörigen Ausgangsgrößen $y(t)$ und $\tilde{y}(t)$, so ist die zur Summe $u(t) + \tilde{u}(t)$ gehörende Ausgangsgröße $y(t) + \tilde{y}(t)$; ist c irgendeine reelle Zahl, so gehört zu $cu(t)$ die Ausgangsgröße $cy(t)$.

In Formeln: Ist $y = \varphi\{u\}$, $\tilde{y} = \varphi\{\tilde{u}\}$, so gilt $\varphi\{u+\tilde{u}\} = y+\tilde{y}$, also

$$\varphi\{u+\tilde{u}\} = \varphi\{u\} + \varphi\{\tilde{u}\}, \quad (1.2)$$

und $\varphi\{cu\} = cy$, also

$$\varphi\{cu\} = c\varphi\{u\}. \quad (1.3)$$

Das ist die formelmäßige Definition des linearen Übertragungsgliedes, wobei zu beachten ist, daß (1.2) und (1.3) für beliebige Eingangsfunktionen $u(t)$ und $\tilde{u}(t)$ sowie für beliebige reelle Zahlen c gelten sollen.

Die beiden Beziehungen (1.2) und (1.3) kann man zu *einer* Gleichung zusammenfassen:

$$\varphi\{cu + \tilde{c}\tilde{u}\} = c\varphi\{u\} + \tilde{c}\varphi\{\tilde{u}\}. \quad (1.4)$$

Diese *Linearitätsrelation* wird häufig ebenfalls als Überlagerungs- oder Superpositionsprinzip bezeichnet. Ist sie für beliebige Zeitfunktionen $u(t)$ und $\tilde{u}(t)$ sowie beliebige Konstanten c und \tilde{c} erfüllt, so ist das Übertragungsglied also linear.

Erfüllt ein Übertragungsglied das Überlagerungs- und Verstärkungsprinzip nicht, gibt es also Funktionen $u(t)$ und $\tilde{u}(t)$, für die (1.2) nicht gilt, oder eine Funktion $u(t)$ und eine Zahl c , für die (1.3) nicht erfüllt ist, so heißt das Übertragungsglied nichtlinear.

Ein einfaches Beispiel sieht man im Bild 1/1. Hier ist eine Begrenzungskennlinie $y = F(u)$ dargestellt, wie sie in Regelungssystemen häufig vorkommt, vor allem in der Stelleinrichtung. Der Operator besteht hier in der Anwendung der Funktion F auf die Eingangsgröße $u(t)$. Schaltet man speziell die konstante Zeitfunktion $u_0(t) = 0,5$ auf, so ist auch die Ausgangsgröße $y_0(t) = 0,5$. Wählt man dann $4u_0(t) = 2$ als Eingangsgröße, so ist die zugehörige Ausgangsgröße nicht etwa $4y_0(t) = 2$, sondern wegen der Begrenzung nur 1. Also ist $F(4u_0) \neq 4y_0$, d.h. das Verstärkungsprinzip ist verletzt. Entsprechend sieht man, daß auch das Überlagerungsprinzip nicht gilt. Wie hier für die Begrenzung, so kann man generell für alle nichtgeradlinigen Kennlinien einsehen, daß sie nichtlineare Übertragungsglieder sind.

Die Tatsache, daß nichtlineare Übertragungsglieder die beiden so einfachen Gesetze der ungestörten Überlagerung und Verstärkung nicht erfüllen, ist von einschneidender Bedeutung. Sie hat nämlich zur Folge, daß der Zusammenhang zwi-

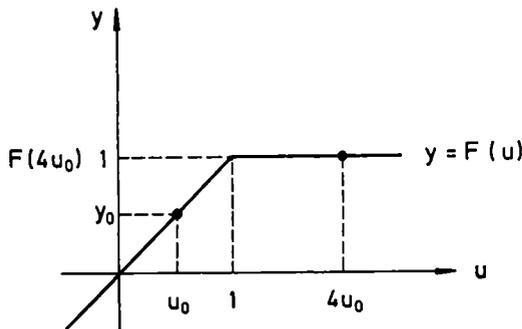


Bild 1/1 Beispiel eines nichtlinearen Übertragungsgliedes

schen Ein- und Ausgangsgröße nicht durch ein Faltungsintegral darstellbar ist und infolgedessen keine komplexe Übertragungsfunktion und kein Frequenzgang erklärt werden können, auch nicht in einem abgeschwächten Sinn wie etwa bei den Abtastsystemen. Die in der linearen Theorie so erfolgreichen Hilfsmittel der Laplace-Transformation und komplexen Funktionentheorie sind hier – abgesehen von Einzelfällen – nicht verwendbar.

Bisher wurden ausschließlich Übertragungsglieder mit einer einzigen Eingangsgröße betrachtet. Bei mehreren Eingangsgrößen sind die Verhältnisse ganz entsprechend. Hat ein Übertragungsglied p Eingangsgrößen u_1, \dots, u_p und faßt man diese zu einem Vektor

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}$$

zusammen¹⁾, so lauten Überlagerungs- und Verstärkungsprinzip sowie die Linearitätsrelation ganz entsprechend wie oben

$$\varphi\{\underline{u} + \tilde{\underline{u}}\} = \varphi\{\underline{u}\} + \varphi\{\tilde{\underline{u}}\}, \quad (1.5)$$

$$\varphi\{c\underline{u}\} = c\varphi\{\underline{u}\}; \quad (1.6)$$

$$\varphi\{c\underline{u} + \tilde{c}\tilde{\underline{u}}\} = c\varphi\{\underline{u}\} + \tilde{c}\varphi\{\tilde{\underline{u}}\}, \quad (1.7)$$

wobei φ wiederum der Operator des Übertragungsgliedes ist.

¹⁾ Wie in der Zustandsbeschreibung dynamischer Systeme üblich, werden in der Regel Vektoren durch *kleine* Buchstaben mit Unterstreichung gekennzeichnet, Matrizen hingegen durch *große* Buchstaben mit Unterstreichung.

Erfüllt der Operator φ eines Übertragungsgliedes $\underline{y} = \varphi\{\underline{u}\}$ die Gleichungen (1.5) und (1.6) bzw. die Gleichung (1.7) nicht für beliebige $\underline{u}(t)$, $\tilde{\underline{u}}(t)$, c und \tilde{c} , so ist das Übertragungsglied nichtlinear.

Einfaches Beispiel eines linearen Übertragungsgliedes mit mehreren Eingangsgrößen ist das Summierglied:

$$y = \varphi\{\underline{u}\} = u_1 + u_2 + \dots + u_p = \sum_{\nu=1}^p u_{\nu}.$$

Dann wird aus der Linearitätsrelation

$$\varphi\{c\underline{u} + \tilde{c}\tilde{\underline{u}}\} = \sum_{\nu=1}^p (cu_{\nu} + \tilde{c}\tilde{u}_{\nu}) = c \sum_{\nu=1}^p u_{\nu} + \tilde{c} \sum_{\nu=1}^p \tilde{u}_{\nu} = c\varphi\{\underline{u}\} + \tilde{c}\varphi\{\tilde{\underline{u}}\},$$

ganz gleich, wie man $\underline{u}(t)$, $\tilde{\underline{u}}(t)$, c und \tilde{c} wählt.

Betrachten wir hingegen das *Multiplizierglied*

$$y = \varphi\{\underline{u}\} = \varphi \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = u_1 \cdot u_2,$$

bei dem der Operator φ also in der Multiplikation zweier zeitveränderlicher Größen besteht, so gilt

$$\begin{aligned} \varphi\{\underline{u} + \tilde{\underline{u}}\} &= \varphi \begin{bmatrix} u_1 + \tilde{u}_1 \\ u_2 + \tilde{u}_2 \end{bmatrix} = (u_1 + \tilde{u}_1) \cdot (u_2 + \tilde{u}_2) = \\ &= u_1 \cdot u_2 + u_1 \cdot \tilde{u}_2 + \tilde{u}_1 \cdot u_2 + \tilde{u}_1 \cdot \tilde{u}_2 = \\ &= \varphi\{\underline{u}\} + u_1 \cdot \tilde{u}_2 + \tilde{u}_1 \cdot u_2 + \varphi\{\tilde{\underline{u}}\}. \end{aligned}$$

Wegen der beiden mittleren Terme ist also das Überlagerungsprinzip nicht erfüllt, das Multiplizierglied mithin nichtlinear.

Neben der Unterscheidung zwischen linearen und nichtlinearen Übertragungsgliedern gibt es eine weitere fundamentale Einteilung der Übertragungsglieder: in zeitinvariante und zeitvariante (oder zeitvariable) Übertragungsglieder. So wie die linearen Übertragungsglieder durch die Erfüllung des Linearitätsprinzips charak-

terisiert sind, werden die zeitinvarianten Übertragungsglieder dadurch gekennzeichnet, daß für sie das *Verschiebungsprinzip* gilt:

Ist $y(t) = \varphi\{u(t)\}$ und stellt $u(t-t_0)$ die um ein beliebiges Stück $t_0 > 0$ nach rechts verschobene Eingangsgröße $u(t)$ dar, so ist

$$\varphi\{u(t-t_0)\} = y(t-t_0),$$

d.h. es ergibt sich die um t_0 nach rechts verschobene Ausgangsgröße $y(t)$, und dies für eine beliebige Funktion $u(t)$. (1.8)

Betrachten wir als Beispiel die nichtlineare Kennlinie

$$y = u^2. \quad (1.9)$$

Ist etwa $u(t) = \sin t$, so hat man als zugehörige Ausgangsgröße

$$y(t) = \sin^2 t. \quad (1.10)$$

Weiterhin folgt wegen (1.9) aus $u(t-t_0) = \sin(t-t_0)$ die Ausgangsgröße

$$\sin^2(t-t_0).$$

Nach (1.10) ist $\sin^2(t-t_0)$ gleich $y(t-t_0)$, sodaß in der Tat die um t_0 nach rechts verschobene Eingangsgröße die gleichfalls um t_0 nach rechts verschobene Ausgangsgröße erzeugt. Da dies offensichtlich für jede Eingangsgröße $u(t)$ gilt, ist die obige Kennlinie zeitinvariant.

Nehmen wir hingegen die Nichtlinearität

$$y = tu^2, \quad (1.11)$$

ebenfalls für $u(t) = \sin t$:

$$y(t) = t \sin^2 t. \quad (1.12)$$

Schaltet man hier

$$u = \sin(t-t_0)$$

auf, so entsteht nach (1.11) die Ausgangsgröße

$$t \sin^2(t-t_0) .$$

Nach (1.12) ist jedoch

$$y(t-t_0) = (t-t_0) \sin^2(t-t_0) .$$

Diese Nichtlinearität antwortet somit auf $u(t-t_0)$ im allgemeinen nicht mit $y(t-t_0)$ und ist deshalb zeitvariant.

Eine besonders wichtige Klasse stellen die *linearen und zeitinvarianten Übertragungsglieder (LZI-Glieder)* dar (siehe etwa [73], Abschnitt 2.5). Für sie (und nur für sie) gibt es eine komplexe Übertragungsgleichung

$$Y(s) = G(s)U(s) ,$$

zwischen der Eingangsgröße $u(t)$ und der Ausgangsgröße $y(t)$, wobei $U(s)$ und $Y(s)$ die Laplace-Transformierten der Zeitfunktionen $u(t)$ und $y(t)$ sind. Ihr Gegenstück im Zeitbereich ist die Faltungsgleichung

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau ,$$

wobei die Gewichtsfunktion $g(t)$ die Originalfunktion zur Übertragungsfunktion $G(s)$ ist.

Die verschiedenen LZI-Glieder unterscheiden sich durch ihre Übertragungsfunktion. Am häufigsten begegnet man LZI-Gliedern, deren Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

eine rationale Funktion, also der Quotient zweier Polynome $Z(s)$ und $N(s)$ ist, wobei man im Realfall stets $\text{Grad } Z(s) \leq \text{Grad } N(s)$ und meist sogar $\text{Grad } Z(s) < \text{Grad } N(s)$ voraussetzen darf. Solche LZI-Glieder seien als *rationale Übertragungsglieder* oder kurz als *R-Glieder* bezeichnet ([73], Unterabschnitt 2.4.3). Im Zeitbereich entsprechen ihnen lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Ein weiteres LZI-Glied, das in Regelstrecken häufig vorkommt, ist das *Totzeitglied* (TZ-Glied, T_t -Glied). Es hat die Übertragungsfunktion

$$G(s) = K e^{-T_t s}, \quad K, T_t > 0 \text{ konstant},$$

und wird demgemäß im Zeitbereich durch die Differenzengleichung

$$y(t) = K u(t - T_t)$$

beschrieben.

Die in diesem Buch auftretenden linearen Systeme bzw. Teilsysteme sind in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle R-Glieder oder entstehen durch Verknüpfung von R- und TZ-Gliedern, sind also linear und zeitinvariant²⁾. Um den Sprachgebrauch nach Möglichkeit zu vereinfachen, wollen wir aber im folgenden kurzerhand von „linearen Systemen“ reden, worin die Zeitinvarianz mitenthalten sei. Auch die weiterhin auftretenden Nichtlinearitäten seien als zeitinvariant vorausgesetzt, ohne daß dies besonders hervorgehoben wird. Sollte es einmal anders sein, wird dies kenntlich gemacht werden.

1.2 Struktur nichtlinearer Systeme

Nachdem der Begriff des nichtlinearen Übertragungsgliedes geklärt ist, erhebt sich sogleich die Frage, welche Arten nichtlinearer Übertragungsglieder es gibt. Es liegt auf der Hand, daß es vom mathematischen Standpunkt eine unübersehbare Mannigfaltigkeit solcher Glieder geben wird, da eben alles, was nicht die Linearitätseigenschaft aufweist, zum nichtlinearen Bereich gehört. Für die technischen Anwendungen, vor allem auf dem Gebiet der Elektrotechnik, des Maschinenbaus und der Verfahrenstechnik, reduziert sich diese Fülle aber sehr stark. Um dies zu sehen, werde ein einfaches Beispiel betrachtet, das für viele andere stehen mag. Es wurde ein elektrotechnisches System gewählt, um seine Gleichungen leicht aufstellen zu können. Technische Systeme mit anderen physikalischen Gesetzmäßigkeiten führen aber auf die gleiche Grundstruktur.

²⁾ Zwischen "Übertragungsglied" und "System" werden wir keinen Unterschied machen. Das gleiche Objekt kann als "Übertragungsglied" oder als "System" bezeichnet werden, je nachdem, ob man mehr Gewicht auf das Ein-Ausgangs-Verhalten oder auf die Innenstruktur legt.

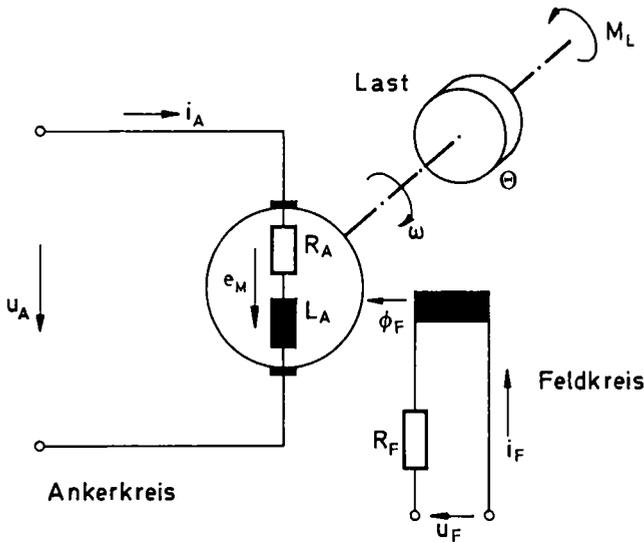


Bild 1/2 Gleichstrommotor

Es werde der *Gleichstrommotor* betrachtet. Aus Bild 1/2 liest man zunächst für den Feldkreis die Gleichung

$$u_F = R_F i_F + \dot{\Phi}_F$$

ab, wobei u_F die von außen angelegte Feldspannung ist, während $R_F i_F$ den Spannungsabfall am Ohmschen Widerstand R_F des Feldkreises und $\dot{\Phi}_F = d\Phi/dt$ den induktiven Spannungsabfall an der Feldwicklung darstellt. Dabei hängt der magnetische Fluß Φ_F von dem Feldstrom i_F ab, und zwar über eine Magnetisierungskennlinie

$$\Phi_F = F(i_F),$$

wie sie in Bild 1/3 wiedergegeben ist.

Bezeichnet u_A die von außen aufgeprägte Ankerspannung des Motors und e_M die im Anker induzierte Gegen-EMK, so gilt für den Ankerkreis die Gleichung

$$u_A - e_M = R_A i_A + L_A \dot{i}_A,$$

wobei also $R_A i_A$ bzw. $L_A \dot{i}_A$ der Spannungsabfall am Ohmschen Widerstand bzw. der Induktivität des Ankerkreises ist. Die Gegen-EMK e_M ist durch das

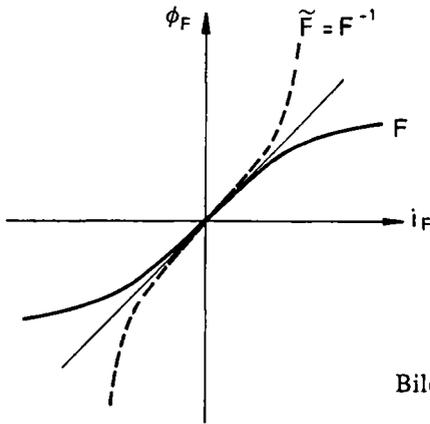


Bild 1/3 Magnetisierungskennlinie

Produkt aus der Winkelgeschwindigkeit ω des Ankers und dem Feldfluß Φ_F gegeben:

$$e_M = c\omega\Phi_F, \quad c \text{ konstant.}$$

Der Motor entwickelt das Antriebsmoment

$$M_A = c i_A \Phi_F,$$

wobei i_A der Ankerstrom ist. Damit treibt er eine Last an, die starr mit dem Anker gekoppelt sei (z.B. Pumpe, Arbeitsmaschine). Wirkt auf sie das Lastmoment M_L und ist Θ das gemeinsame Trägheitsmoment von Motoranker und Last, so gilt die Bewegungsgleichung

$$\Theta \dot{\omega} = M_A - M_L.$$

Damit sind die Gleichungen, welche das dynamische Verhalten des Motors beschreiben, zusammengestellt. Da die in ihnen enthaltenen Differentialgleichungen linear sind, kann man auf sie die Laplace-Transformation anwenden. Zur Vermeidung von Umständlichkeiten wird dabei hier wie auch im folgenden die Bezeichnung der Größen nicht geändert. Sofern die Anfangswerte Null sind, erhält man so die folgenden Beziehungen:

Feldkreis:

$$\Phi_F = \frac{1}{s} (u_F - R_F i_F),$$

$$i_F = F^{-1}(\Phi_F) = \tilde{F}(\Phi_F);$$

Ankerkreis:

$$i_A = \frac{1/R_A}{1+(L_A/R_A)s} (u_A - e_M),$$

$$e_M = c\omega\Phi_F;$$

mechanische Gleichungen:

$$\omega = \frac{1}{\Theta_S} (M_A - M_L),$$

$$M_A = c i_A \Phi_F.$$

Wie man sieht, besteht jedes der drei Teilsysteme, durch die man die Dynamik des Motors beschreiben kann, aus zwei Gleichungen, einer linearen Differentialgleichung bzw. der zugehörigen komplexen Übertragungsgleichung und einer nichtlinearen gewöhnlichen Gleichung. Darin ist $\tilde{F} = F^{-1}$ die Umkehrfunktion zu F , die man also durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten aus der gewöhnlich graphisch gegebenen Kennlinie F erhält (Bild 1/3).

Stellt man diese Gleichungen in der üblichen Weise im Strukturbild (Signalflußplan, Wirkplan) dar, so ergibt sich Bild 1/4. Da auch nichtlineare Glieder auftreten, muß man bei dem gesamten Bild im Zeitbereich bleiben. Dennoch sind die linearen Übertragungsglieder durch ihre komplexen Übertragungsfunktionen charakterisiert, die man als einfache Symbole für die zugehörigen Differentialgleichungen auffassen kann.

Das Typische an Bild 1/4, das unabhängig von der speziellen Natur des Beispiels ist, besteht darin, daß die Struktur ein *lineares Grundgerüst aufweist, in dem das Zeitverhalten des Systems konzentriert ist und in das einzelne nichtlineare Glieder eingesprengt sind*, welche durch gewöhnliche Gleichungen beschrieben werden.

Das lineare Gerüst setzt sich dabei meist aus sehr einfachen Gliedern zusammen, die entweder durch lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden (rationale Übertragungsglieder) oder aber Totzeitglieder sind. Die nichtlinearen Übertragungsglieder sind entweder *Kennlinienglieder*, werden also durch eine Gleichung

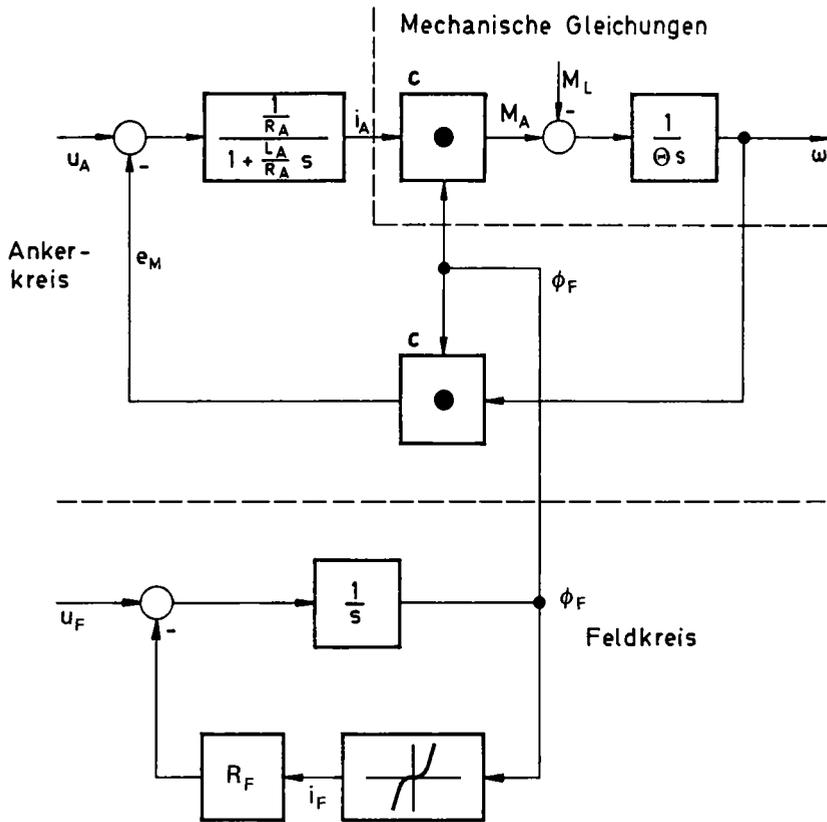


Bild 1/4 Strukturbild des Gleichstrommotors

$$y = F(u) \tag{1.13}$$

charakterisiert, oder stellen *Multiplizierglieder* dar, genügen also der Gleichung

$$y = Ku_1u_2, \quad K > 0 \text{ konstant.} \tag{1.14}$$

Beide Nichtlinearitäten gemeinsam werden durch eine Beziehung der Form

$$y = F(u_1, u_2, \dots, u_p) \tag{1.15}$$

erfaßt. Gleichungen vom Typ (1.15) können ebenfalls bei der Beschreibung realer Systeme auftreten, lassen sich aber gewöhnlich aus Kennliniengliedern vom Typ (1.13) mit nur einer Eingangsgröße, aus Multipliziergliedern, Proportionalgliedern und Summiergliedern zusammensetzen.

Nichtlineare Strukturen der eben beschriebenen Art treten bei zahlreichen technischen Anwendungen auf. Liegt insbesondere ein *nichtlinearer Regelkreis* vor, so tritt sehr häufig der Fall auf, daß er nur *eine* wesentliche Nichtlinearität enthält, und zwar in Form einer Kennlinie, während die anderen Glieder linear sind oder doch mit genügender Näherung als linear angesehen werden dürfen. Die nichtlineare Kennlinie kann zur Regeleinrichtung gehören, und zwar absichtlich in sie eingebaut sein, um ein gewünschtes dynamisches Verhalten der Regelung zu liefern, oder einfach deshalb, weil sie mit wenig Aufwand zu realisieren ist (z.B. Relaisregler). Sie kann aber auch in der Stelleinrichtung oder Strecke als eine sehr unerwünschte Erscheinung vorkommen, die man nicht vermeiden kann. Das gilt besonders für eine Begrenzung in der Stelleinrichtung, die grundsätzlich stets vorhanden und oft nicht zu ignorieren ist. Ein Regelkreis dieser Art hat meist die in Bild 1/5 wiedergegebene Struktur, wobei es gleichgültig ist, ob die Kennlinie zur dynamischen Beeinflussung der Regelung dient, in der Stelleinrichtung oder der Strecke auftritt, ob sie gewollt oder ungewollt ist. $L_1(s)$, $L_2(s)$ und $L_3(s)$ sind die Übertragungsfunktionen seiner linearen Teilsysteme, wobei $L_1(s)$ und $L_3(s)$ auch identisch 1 sein können (Bild 1/6). An eine nichtlineare Struktur nach Bild 1/5 oder 1/6 ist bei den folgenden Betrachtungen in erster Linie gedacht.

Neben dem Strukturbild werden wir im folgenden häufig die *Zustandsbeschreibung dynamischer Systeme* benötigen. Sind x_1, \dots, x_n die Zustandsvariablen, u_1, \dots, u_p die Eingangsgrößen und y_1, \dots, y_q die Ausgangsgrößen des dynamischen Systems, so lautet sie allgemein

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_p; t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.16)$$

$$y_k = g_k(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_p; t), \quad k = 1, \dots, q. \quad (1.17)$$

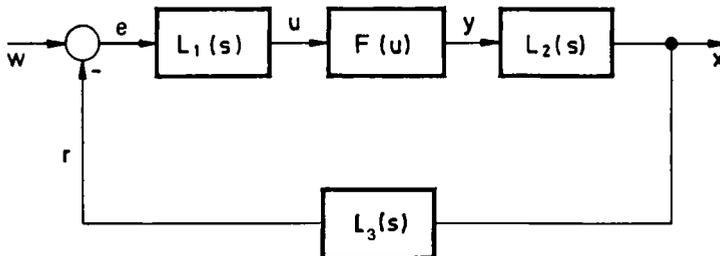


Bild 1/5 Normaltyp einer nichtlinearen Regelung

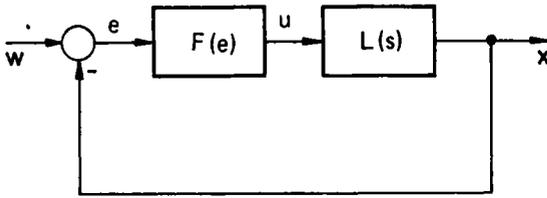


Bild 1/6 Spezialfall des Regelkreises von Bild 1/5

Betrachtet man beispielsweise die Gleichungen von Feldkreis, Ankerkreis und mechanischer Bewegung des Gleichstrommotors, wie sie oben aufgestellt wurden, und geht von den komplexen Übertragungsgleichungen zu den Differentialgleichungen zurück, so erhält man zunächst

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_F &= u_F - R_F i_F, & i_F &= \tilde{F}(\Phi_F); \\ \frac{L_A}{R_A} \dot{i}_A + i_A &= \frac{1}{R_A} (u_A - e_M), & e_M &= c\omega\Phi_F; \\ \Theta \dot{\omega} &= M_A - M_L, & M_A &= c i_A \Phi_F.\end{aligned}$$

Setzt man die nichtlinearen gewöhnlichen Gleichungen in diese Differentialgleichungen ein und löst dann nach den Ableitungen auf, so wird

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_F &= -R_F \tilde{F}(\Phi_F) + u_F, \\ \dot{i}_A &= -\frac{c}{L_A} \Phi_F \omega - \frac{R_A}{L_A} i_A + \frac{1}{L_A} u_A, \\ \dot{\omega} &= \frac{c}{\Theta} \Phi_F i_A - \frac{1}{\Theta} M_L.\end{aligned}$$

Dies sind die Zustandsdifferentialgleichungen (1.16), wobei als Eingangsgrößen die Feldspannung u_F , die Ankerspannung u_A und das Lastmoment M_L wirken, während Feldfluß Φ_F , Ankerstrom i_A und Winkelgeschwindigkeit ω als Zustandsvariablen auftreten.

Ist ω die interessierende Ausgangsgröße, wie es meist der Fall ist, so hat man mit

$$y = \omega$$

die Ausgangsgleichung (1.17) vor sich.

Im konkreten Fall wird man das Strukturbild eines Systems häufig den Zustandsgleichungen vorziehen, da im Strukturbild die in einfacher Gestalt vorliegenden Nichtlinearitäten prägnant faßbar sind, während sie in der Zustandsdarstellung zu unübersichtlichen nichtlinearen Beziehungen „verschmiert“ werden. Für die Formulierung allgemeiner Aussagen ist die Zustandsbeschreibung aber nicht zu entbehren.

Faßt man die Zustandsvariablen x_1, \dots, x_n zum Zustandsvektor \underline{x} , die Eingangsgrößen u_1, \dots, u_p zum Eingangsvektor \underline{u} und die Ausgangsgrößen y_1, \dots, y_q zum Ausgangsvektor \underline{y} zusammen, so erhält man aus (1.16) und (1.17) die *vektorielle Darstellung*

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t), \quad (1.18)$$

$$\underline{y} = \underline{g}(\underline{x}, \underline{u}, t) \quad (1.19)$$

mit den Funktionenvektoren

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad \underline{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_q \end{bmatrix}.$$

Zu der vektoriellen Zustandsdifferentialgleichung (1.18) ist noch die Anfangsbedingung

$$\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$$

hinzuzufügen.

Ist das dynamische System *zeitinvariant*, wie beispielsweise beim Gleichstrommotor, so hängen die rechten Seiten von (1.18) und (1.19) nicht von t ab.

Ist das System *linear*, so sind die Zustandsdifferentialgleichung (1.18) und die Ausgangsgleichung (1.19) von der Form

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u}, \quad (1.20)$$

$$\underline{y} = \underline{C}\underline{x} + \underline{D}\underline{u}, \quad (1.21)$$

wobei also die rechten Seiten lineare Funktionen der Vektoren \underline{x} und \underline{u} sind. Die

Matrizen **A**, **B**, **C** und **D** dürfen dabei von der Zeit t abhängig sein. Sind sie konstant, so liegt ein *lineares und zeitinvariantes System* vor.

1.3 Häufig auftretende Kennlinien

Wie am typischen Beispiel des Gleichstrommotors zu Beginn des vorigen Abschnitts zu sehen ist, treten als nichtlineare Blöcke im Strukturbild eines technischen Systems das Multiplizierglied und Kennlinienglieder auf. Einige häufig auftretende Kennlinien wollen wir im folgenden etwas näher betrachten.

Schauen wir als erste die *Zweipunktkennlinie* an, die üblicherweise wie im Bild 1/7 dargestellt wird. Für sie gilt

$$y = \begin{cases} -b & \text{für } u < 0, \\ b & \text{für } u > 0. \end{cases}$$

Ihr Wert an der Sprungstelle $u = 0$ ist für unsere Untersuchungen im allgemeinen ohne Interesse, da an Sprungstellen einer Funktion meist nur die Grenzwerte von links und rechts von Bedeutung sind. Benötigt man den Funktionswert an einer Sprungstelle doch einmal, so nimmt man gewöhnlich das arithmetrische Mittel des links- und rechtsseitigen Grenzwertes, hier also den Wert 0. Eine derartige Wahl des Funktionswertes an einer Sprungstelle ist sachgerecht, da beispielsweise die Fourierentwicklung einer Funktion an Sprungstellen diesen Wert annimmt. Wir können also die obige Definition in der folgenden Weise vervollständigen:

$$y = \begin{cases} -b, & u < 0, \\ 0, & u = 0, \\ b, & u > 0. \end{cases} \quad (1.22)$$

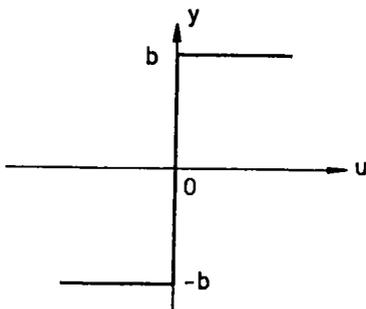


Bild 1/7 Zweipunktkennlinie

Dieser Zusammenhang zwischen u und y läßt sich kürzer ausdrücken, wenn man die *Signum- oder Vorzeichenfunktion*

$$\operatorname{sgn} u = \begin{cases} -1, & u < 0, \\ 0, & u = 0, \\ 1, & u > 0, \end{cases} \quad (1.23)$$

verwendet:

$$y = b \operatorname{sgn} u. \quad (1.24)$$

Bei der in der Technik üblichen Darstellung der Zweipunktkenlinie, wie sie im Bild 1/7 wiedergegeben ist, wird an der Sprungstelle ein vertikales Geradenstück eingezeichnet, obwohl doch der Funktionswert dort entweder garnicht oder aber eindeutig definiert ist. Diese Darstellung rührt von einer möglichen Realisierung der Zweipunktkenlinie her. Wird sie durch einen Verstärker mit Begrenzung verwirklicht, so erhält man eine Kennlinie mit sehr steil ansteigendem Mittelstück und daran anschließenden horizontalen Geradenstücken. Darauf weist die Darstellung in Bild 1/7 hin. Entsprechendes gilt auch für die Sprungstellen anderer Kennlinien, mit denen wir uns im folgenden befassen.

Die Zweipunktkenlinie tritt beispielsweise dann auf, wenn ein Relais ohne mittlere Ruhelage verwendet wird. Dies ist unter anderem bei *Temperaturregelungen* der Fall, wo das Zweipunktglied als Regler eingesetzt wird. Das Bild 1/8 zeigt die (vereinfachte) Struktur einer solchen Regelung.

Regelgröße x ist die Temperatur eines Raumes. Die Führungsgröße, proportional zur gewünschten Raumtemperatur, habe den konstanten Wert W_0 . Die Stell-einrichtung, z.B. ein Ventil, das einen Warmwasserzustrom steuert, kann hinreichend genau durch ein I-Glied beschrieben werden. Das Totzeitglied kennzeichnet den Wärmetransport vom Stellort zum Meßort. Am Meßort erfolgt der Übergang der Wärme an den auf der gewünschten Temperatur zu haltenden

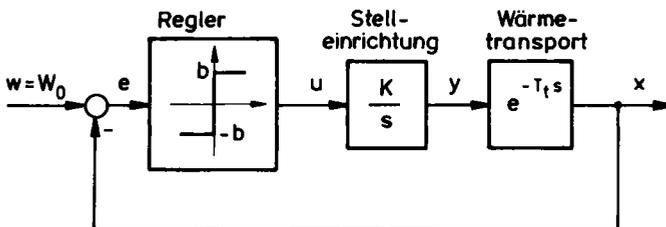


Bild 1/8 Temperaturregelung (vereinfacht)

Raum, was näherungsweise durch ein Verzögerungsglied 1. Ordnung (P-T₁-Glied, VZ₁-Glied) beschrieben werden kann. Zur Vereinfachung der Betrachtung wurde dieses P-T₁-Glied nicht berücksichtigt, was am grundsätzlichen Verlauf des Vorganges jedoch nichts ändert.

Bei einem so einfachen System kommt man ohne viel Theorie aus, kann den zeitlichen Ablauf vielmehr unmittelbar aus dem Strukturbild im Bild 1/8 ablesen. Zum Zeitpunkt t = 0 sei etwa x = x₀ > W₀. Dann ist e₀ = W₀ - x₀ < 0 und damit u = -b. y stellt daher eine fallende Rampenfunktion mit dem Gefälle -bK dar. Da die Totzeit lediglich eine Verschiebung bewirkt, ohne die Funktionswerte zu verändern, gilt das gleiche für x, und zwar so lange, bis x < W₀ wird. Dann wird e = W₀ - x > 0. Damit springt u auf den Wert +b und hierdurch geht y in eine steigende Rampenfunktion mit dem Anstieg +bK über. Bis x dieses Verhalten annimmt, vergeht aber noch die Totzeit T_t. Solange läuft x noch als fallende Rampenfunktion weiter. Setzt man diese Betrachtung fort, so erhält man für x(t) den im Bild 1/9 dargestellten Zeitverlauf in Gestalt einer Dreiecksschwingung.

Aus diesem Bild kann man Amplitude und Frequenz der Dauerschwingung ablesen. Der Anstieg der Rampenfunktion ist einerseits gleich bK, andererseits nach Bild 1/9 durch

$$\tan \alpha = \frac{A}{T_t}$$

gegeben. Aus bK = A/T_t folgt

$$A = KbT_t \quad (1.25)$$

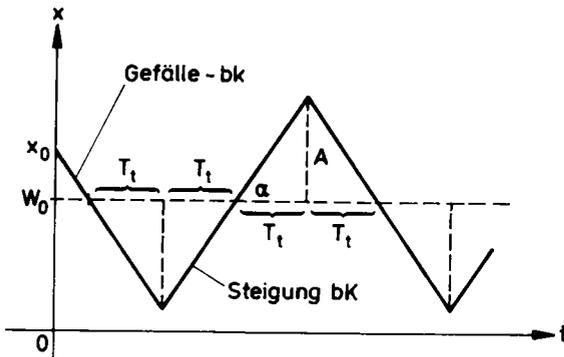


Bild 1/9 Dauerschwingung der Temperaturregelung

Für die Schwingungsperiode liest man aus Bild 1/9

$$T_p = 4 T_t ,$$

also

$$\omega_p = \frac{2\pi}{T_p} = \frac{\pi}{2T_t} \quad (1.26)$$

ab.

Es sei noch auf zwei Eigenschaften dieser Schwingung hingewiesen, da sie für eine ganze Klasse nichtlinearer Schwingungen charakteristisch sind:

- (I) Amplitude und Frequenz der Schwingung sind gemäß (1.25) und (1.26) durch Systemparameter bestimmt und hängen nicht von äußeren Einflüssen, wie dem Anfangswert x_0 , ab. Die Schwingung ist also eine Struktureigenschaft des nichtlinearen Systems.
- (II) Ändert man die Systemparameter b , K , T_t , so ändern sich Amplitude und Frequenz, die Schwingung aber bleibt erhalten (sofern keine zu krassen Parameteränderungen vorgenommen werden). Die Schwingung ist daher in der Tat eine *Dauerschwingung*.

Zum Zweipunktglied zurückkehrend sei abschließend festgestellt, daß es auch bei regelungstechnisch ehrgeizigeren Zielsetzungen als einer Temperaturregelung Verwendung findet, nämlich bei zeit- oder schnelligkeitsoptimalen Entwürfen (siehe Kapitel 2).

Die Zweipunktkennlinie hat regeldynamisch den Nachteil, daß sie bei den kleinsten Änderungen der Eingangsgröße u um die Stelle 0 mit Vollausschlag reagiert. Bei häufigen Änderungen von u um diese Stelle, etwa infolge von Störungen, wird dann die Stelleinrichtung stark in Anspruch genommen. Um dies zu vermeiden, kann man zu einer *Dreipunktkennlinie* übergehen (Bild 1/10). Bei ihr ist

$$y = \begin{cases} -b, & u < -a, \\ 0, & -a < u < a, \\ b, & u > a. \end{cases} \quad (1.27)$$

Daher entsteht eine von Null verschiedene Ausgangsgröße erst dann, wenn die Störungen so groß sind, daß $|u| > a$ wird. Man vermeidet so eine zu starke Abnutzung der Stelleinrichtung.

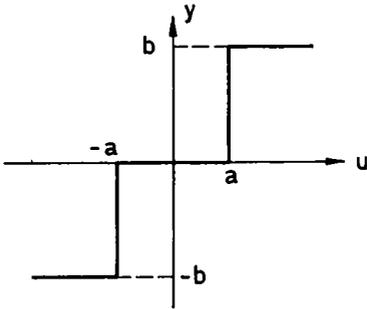


Bild 1/10 Dreipunktkenlinie

In Bild 1/11 ist dargestellt, wie man die Dreipunktkenlinie aus Zweipunktkenlinien aufbauen kann: Man sieht unmittelbar, daß die Dreipunktkenlinie durch Addition der beiden dort gestrichelt eingezeichneten Zweipunktkenlinien hervorgeht. Die obere von ihnen hat gegenüber der Zweipunktkenlinie im Bild 1/7 nur die Sprunghöhe $b/2$ und ist überdies um a nach rechts und um $b/2$ nach oben verschoben. Daher ist sie durch die Funktion

$$\frac{b}{2} + \frac{b}{2} \operatorname{sgn}(u - a)$$

gegeben. Entsprechend erhält man für die untere Zweipunktkenlinie im Bild 1/11

$$-\frac{b}{2} + \frac{b}{2} \operatorname{sgn}(u + a).$$

Die Addition dieser beiden Beziehungen liefert für die Dreipunktkenlinie die Gleichung

$$y = \frac{b}{2} [\operatorname{sgn}(u - a) + \operatorname{sgn}(u + a)]. \quad (1.28)$$

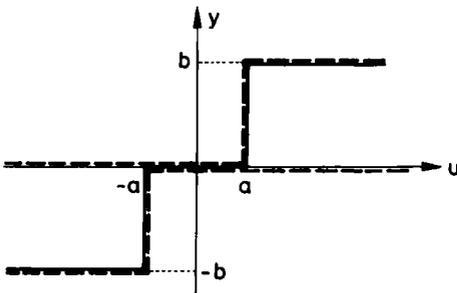


Bild 1/11 Aufbau der Dreipunktkenlinie aus Zweipunktkenlinien