

4 Harmonische Balance (Harmonische Linearisierung, Methode der Beschreibungsfunktion)

In den beiden vorangegangenen Kapiteln über die Anwendung der Zustandsebene und die Direkte Methode wurden die Regelungen im Zustandsraum und damit im Zeitbereich behandelt. Im Mittelpunkt stand dabei die Analyse und Verbesserung des Stabilitätsverhaltens von Ruhelagen sowie die Erzeugung günstiger Zeitvorgänge beim Übergang eines Systems von einer Ruhelage in eine andere.

Wir wollen nunmehr unsere Sichtweise verändern und statt des Stabilitätsverhaltens der Ruhelage ein anderes Phänomen zum Gegenstand der Betrachtung machen, das uns bereits im Kapitel 1 als charakteristische Erscheinung in nicht-linearen Systemen aufgefallen ist: das Auftreten von *Dauerschwingungen*, wobei hierunter beliebige periodische Zeitvorgänge verstanden sind.

Nichts liegt näher als der Versuch, sie in Fourierreihen zu entwickeln und durch geeignete Vernachlässigungen zu einer übersichtlichen Beschreibung zu gelangen, um so tieferen Einblick in die Eigenschaften der Dauerschwingungen zu gewinnen. Auf diese Weise erhält man den Begriff der *Beschreibungsfunktion*, der Ähnlichkeit mit dem Begriff des Frequenzgangs linearer Systeme aufweist und unter gewissen Voraussetzungen das Verhalten einer Nichtlinearität zu beschreiben vermag. Mit der Einführung dieser Beschreibung verläßt man den Zeitbereich und geht in den Frequenzbereich über. In ihm werden wir uns in diesem Kapitel bewegen.

Die *Methode der Beschreibungsfunktion*, aus Gründen, die wir bald kennenlernen werden, auch *Harmonische Balance* oder *Harmonische Linearisierung* genannt, besitzt zwar nicht die Anschaulichkeit der Betrachtung in der Zustandsebene, kommt aber – wie schon die vorangegangene grundsätzliche Charakterisierung andeutet – den Vorstellungen des Ingenieurs in anderer Weise entgegen. In der Tat handelt es sich um eine leicht zu handhabende und dabei sehr wirkungsvolle Methode. Allerdings ist sie nicht vom gleichen Exaktheitsgrad wie die Betrachtungen in der Zustandsebene oder die Direkte Methode, jedenfalls dann nicht, wenn man ihr die Leichtigkeit der Handhabung erhalten und sie nicht durch einschränkende Bedingungen beengen will. Mit einem Wort: Sie ist eine leistungsfähige *Ingenieurmethode*, und als solche wollen wir sie hier auch behandeln (und nicht versuchen, aus ihr eine mathematische Theorie zu machen).

4.1 Einführung der Beschreibungsfunktion und die Gleichung der Harmonischen Balance

Es sollen die Dauerschwingungen des nichtlinearen Standardregelkreises im Bild 4/1 ermittelt werden. Dazu nimmt man an, daß sich der Regelkreis im *Zustand des Schwingungsgleichgewichts* befindet. Das heißt: Jede der zeitveränderlichen Größen e , u und x der Regelung führt eine Dauerschwingung aus, wobei die Dauerschwingung am Eingang des Kennliniengliedes gerade eine derartige Dauerschwingung an dessen Ausgang erzeugt, daß diese wiederum am Ausgang des linearen Teilsystems bis auf das Vorzeichen die ursprüngliche Dauerschwingung hervorbringt. Unter gewissen Voraussetzungen kann man die Dauerschwingungen durch harmonische Schwingungen annähern. Da auf diesen Vorstellungen die näherungsweise Bestimmung der Dauerschwingungen beruht, wird das Verfahren nach *N. M. Krylow* und *N. N. Bogoljubow* durch die Benennung „Harmonische Balance“ treffend charakterisiert ¹⁾.

Wie ein solcher Zustand des Schwingungsgleichgewichts entsteht, wird beim Verfahren der Harmonischen Balance nicht untersucht, er wird vielmehr als gegeben angenommen. Die Methode zielt darauf, Amplitude und Frequenz der Schwingung näherungsweise zu ermitteln und dabei auch Bedingungen anzugeben, wann eine solche Schwingung überhaupt auftreten kann.

Wir wollen zunächst die Voraussetzungen zusammenstellen, die neben der Grundvoraussetzung des vorhandenen Schwingungsgleichgewichts für die Herleitung des Verfahrens erforderlich sind.

(I) Annahmen über das lineare Teilsystem.

(L1) $L(s) = R(s)e^{-T_t s}$ mit einer rationalen Funktion $R(s) = Z(s)/N(s)$, $T_t \geq 0$ und $L(0) > 0$ (letzteres, damit keine Mitkopplung vorliegt).

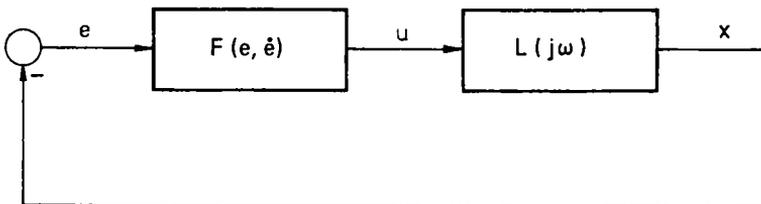


Bild 4/1 Nichtlinearer Standardregelkreis

¹⁾ *N. M. Krylow – N. N. Bogoljubow*: Einführung in die nichtlineare Mechanik. Kiew, 1937 (russisch). Englische Übersetzung: Princeton University Press, 1947.

- (L2) Pole von $R(s)$ links der j -Achse gelegen, mit etwaiger Ausnahme eines einfachen Pols in $s = 0$ (I-Glied im linearen Teilsystem).
- (L3) Der Frequenzgang $L(j\omega)$ des linearen Teilsystems besitzt genügend starken Tiefpaßcharakter, d.h. $|L(j\omega)|$ fällt mit wachsendem ω genügend stark. Das ist sicher der Fall, wenn $\text{Grad } Z \leq \text{Grad } N - 2$ ist. Nimmt man bei der späteren Approximation größere Abweichungen in Kauf, so kann manchmal schon der Gradunterschied 1 ausreichen.
- (II) Annahmen über die Nichtlinearität $F(e, \dot{e})$.
 - (N1) $F(e, \dot{e})$ ist symmetrisch zum Ursprung, d.h. $F(-e, -\dot{e}) = -F(e, \dot{e})$. Das bedeutet bei einer eindeutigen Kennlinie, daß sie ungerade ist, bei einer Hysteresekennlinie, daß sie durch Spiegelung am Ursprung in sich übergeht.
 - (N2) Die Kennlinie $F(e)$ bzw. die beiden Äste $F_u(e)$, $F_o(e)$ einer Hysteresekennlinie sind monoton steigend („enthalten keine Wellen“).

Als wichtigste Eigenschaften in (I) und (II) sind der Tiefpaßcharakter des linearen Teilsystems und die Ursprungssymmetrie der Nichtlinearität anzusehen. Erstere darf man bei realistischen Systemen fast stets voraussetzen, letztere war bei allen bisher von uns betrachteten Kennlinien vorhanden.

Es wird sich zeigen, daß wir noch eine weitere Voraussetzung benötigen, die sich auf die Dauerschwingungen selbst bezieht:

- (III) Die Frequenz ω_p der Dauerschwingung liegt im Bereich der Knickfrequenzen $1/T_1, 1/T_2, \dots$ des linearen Teilsystems.

Bild 4/2 zeigt die Betragskennlinie des linearen Teilsystems mit diesen Knickfrequenzen und veranschaulicht so, daß die Frequenz der Dauerschwingung auf

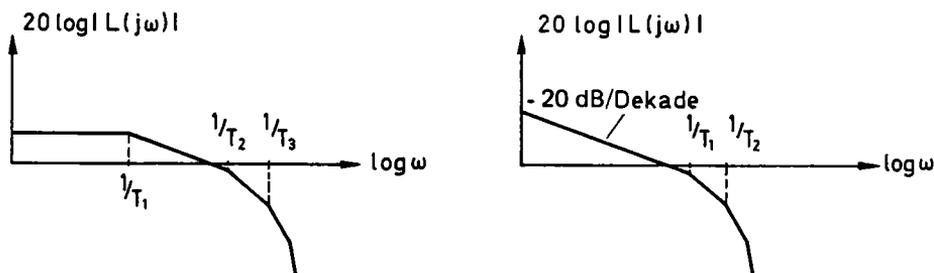


Bild 4/2 Betragskennlinie von $L(j\omega)$ bei Proportional- und Integralverhalten des linearen Teilsystems

dem genügend abschüssigen Teil der Betragskennlinie liegen soll. Warum das verlangt wird und wie diese Bedingung zu überprüfen ist, wird alsbald klar werden.

Im Zustand des Schwingungsgleichgewichts sind die zeitveränderlichen Größen u , x und $e = -x$ periodische Funktionen und können deshalb in Fourierreihen entwickelt werden. Bezeichnet man ihre – noch unbekannte – Frequenz mit ω_p , so gilt für u die Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} u(t) &= b_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu} \sin \nu \omega_p t + b_{\nu} \cos \nu \omega_p t) = \\ &= b_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} C_{\nu} \sin(\nu \omega_p t + \varphi_{\nu}). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Unter den von uns gemachten Annahmen ist der Gleichterm $b_0 = 0$. Dafür entscheidend ist die Voraussetzung (N1), also die Symmetrie der Kennlinie zum Ursprung. In der Tat erscheint es plausibel, daß eine zum Ursprung symmetrische Kennlinie eine zur t -Achse symmetrische Ausgangsgröße produzieren wird. Doch reicht allein die Voraussetzung (N1) hierfür nicht aus, vielmehr sind auch unsere anderen Voraussetzungen erforderlich, besonders (N2). Doch wollen wir hierauf nicht weiter eingehen²⁾.

Da im Schwingungsgleichgewicht der eingeschwungene Zustand vorliegt, erzeugt jede Einzelschwingung in $u(t)$ beim Durchlaufen des linearen Teilsystems wiederum eine Sinusschwingung. Daher ist

$$x(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} |L(j\nu\omega_p)| C_{\nu} \sin \left[\nu \omega_p t + \varphi_{\nu} + \angle L(j\nu\omega_p) \right], \quad (4.2)$$

wobei also $|L(j\omega)|$ der Betrag und $\angle L(j\omega)$ das Argument des Frequenzganges $L(j\omega)$ ist. Nach der Voraussetzung (L3) stellt das lineare Teilsystem einen kräftigen Tiefpaß dar, der Betrag $|L(j\omega)|$ nimmt also mit wachsendem ω schnell ab, wie dies im Bild 4/2 skizziert wurde. Daher werden die Terme der Fourierreihenentwicklung (4.2) mit wachsendem Index ν dem Betrage nach rasch kleiner. Man wird deshalb in (4.2) die Oberschwingungen ($\nu > 1$) gegenüber der Grundschwin-

²⁾ Für den Beweis siehe *O. Föllinger – M. Pandit: Anwendung der Harmonischen Balance beim Vorhandensein von Gleichtermen. Regelungstechnik 20 (1972), S. 237–246, und zwar S. 239.*

gung ($\nu = 1$) vernachlässigen dürfen, so daß $x(t)$ annähernd durch eine Sinusschwingung dargestellt wird.

Um allerdings sämtliche Oberschwingungen vernachlässigen zu können, muß man voraussetzen, daß nicht etwa die im Bild 4/3 skizzierte Situation vorliegt, bei der die Grundschwingung und mindestens noch eine Oberschwingung beim Durchlaufen des linearen Teilsystems mit dem gleichen Betragsfaktor versehen werden. Dies wird durch unsere Voraussetzung (III) ausgeschlossen, daß ω_p auf dem abschüssigen Teil der Betragskennlinie liegen soll.

Allerdings kann man diese Voraussetzung erst überprüfen, nachdem man ω_p gefunden hat. Man wendet also das im folgenden hergeleitete Verfahren an und berechnet ω_p . Danach verifiziert man die Annahme (III). In der Praxis wird man sich dies normalerweise schenken. Treten aber bei der Anwendung der Harmonischen Balance Ungereimtheiten oder Widersprüche auf, so ist (III) unbedingt nachzuprüfen. Nicht selten beruhen sie auf der Nichtbeachtung der Voraussetzung (III), wofür im Unterabschnitt 4.4.4 ein Beispiel gebracht wird. Wie die folgenden Betrachtungen zeigen werden, steht und fällt die Harmonische Balance (in der hier gebrachten normalen Form) mit der Tatsache, daß die Eingangsgröße der Nichtlinearität hinreichend sinusförmig ist. Das ist aber gewiß nicht mehr der Fall, wenn die Voraussetzung (III) verletzt wird.

Gelten jedoch die Voraussetzungen (I) bis (III), so wirkt die Eingangsgröße $u(t)$ des linearen Teilsystems so, als ob sie nur aus ihrem ersten Teil bestände, da die Wirkungen der übrigen Terme ja vernachlässigt werden können. Obwohl also die höheren Summanden in $u(t)$ durchaus vorhanden sind und keineswegs vernachlässigbar sein müssen, darf man sie bei der Betrachtung des Schwingungsgleichgewichts ignorieren, da sie sich im geschlossenen Kreis nicht auswirken. Mithin darf man u durch die harmonische Schwingung

$$u_1 = a_1 \sin \omega_p t + b_1 \cos \omega_p t = C_1 \sin(\omega_p t + \varphi_1) \tag{4.3}$$

ersetzen.

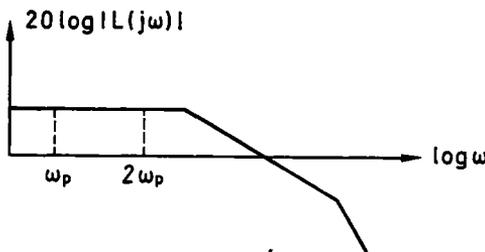


Bild 4/3
Unerwünschte Lage der Frequenz ω_p
der Dauerschwingung

Weiterhin darf man mit x auch $e = -x$ als reine Sinusschwingung ansehen und kann infolgedessen

$$e = A_p \sin \omega t \quad (4.4)$$

schreiben. Dabei ist die Phasenkonstante gleich Null gesetzt, was man bei *einer* der im Regelkreis auftretenden Sinusschwingungen annehmen darf. Die Amplitude A_p der Dauerschwingung ist vorläufig noch unbekannt.

Läßt man in den Beziehungen (4.3) und (4.4) der Einfachheit halber den Index p nunmehr weg, so erhält man das Bild 4/4 als Darstellung des Regelkreises im Schwingungsgleichgewicht. Dabei handelt es sich um eine Näherung, bei der die periodischen Zeitvorgänge durch ihre Grundschwingungen ersetzt sind.

Wie man sieht, stellt der zum Bild 4/4 führende Gedankengang keine strenge Schlußweise dar. Bei der Anwendung der Harmonischen Balance ist daher eine gewisse Vorsicht geboten, um Irrtümer in Grenzfällen zu vermeiden. Bei den üblicherweise in technischen Systemen auftretenden linearen Teilsystemen und Nichtlinearitäten sind Schwierigkeiten jedoch nicht zu erwarten.

Wie man aus Bild 4/4 abliest, besteht die Wirkung des Kennliniengliedes im Schwingungsgleichgewicht darin, aus der Eingangsgröße

$$e = A \sin \omega t$$

die Ausgangsgröße

$$u_1 = a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t = C_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \quad (4.5)$$

zu machen, also aus einer Sinusschwingung wiederum eine Sinusschwingung der gleichen Frequenz, nur mit anderer Amplitude und Phase, zu erzeugen. Das ist aber ein Verhalten, das von den linearen Übertragungsgliedern her ganz geläufig

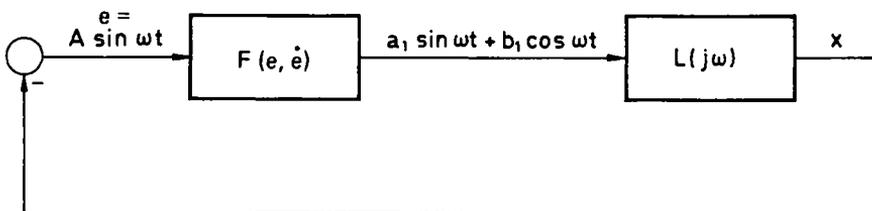


Bild 4/4 Nichtlinearer Regelkreis im Zustand der Harmonischen Balance

ist. Nichts liegt daher näher, als das Übertragungsverhalten des Kennliniengliedes genau so wie bei ihnen zu beschreiben. Man geht von den Sinusschwingungen zu den Zeigerdarstellungen³⁾

$$\tilde{e} = Ae^{j\omega t}$$

und

$$\tilde{u}_1 = C_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)}$$

über und bildet deren Quotienten:

$$\frac{\tilde{u}_1}{\tilde{e}} = \frac{C_1}{A} e^{j\varphi_1} = \frac{C_1 \cos \varphi_1}{A} + j \frac{C_1 \sin \varphi_1}{A}.$$

Da aus (4.5)

$$C_1 \cos \varphi_1 = a_1, \quad C_1 \sin \varphi_1 = b_1$$

folgt, kann man auch

$$\frac{\tilde{u}_1}{\tilde{e}} = \frac{a_1}{A} + j \frac{b_1}{A}$$

schreiben. Bei den linearen Übertragungsgliedern ist der Quotient \tilde{u}_1/\tilde{e} der *Frequenzgang*. Man hat also in dem zuletzt gebildeten Ausdruck eine Art *Ersatzfrequenzgang des Kennliniengliedes* vor sich. Er wird – leider sehr farblos – als dessen *Beschreibungsfunktion* bezeichnet (in der russischen Literatur: äquivalenter komplexer Verstärkungsfaktor).

In

$$N = \frac{a_1}{A} + j \frac{b_1}{A} \quad (4.6)$$

³⁾ Unter der Zeigerdarstellung einer harmonischen Schwingung $z = A \sin(\omega t + \varphi)$ versteht man die komplexwertige e-Funktion $\tilde{z} = Ae^{j(\omega t + \varphi)}$.

sind a_1 und b_1 gemäß (4.1) die ersten Fourierkoeffizienten der Funktion $u(t)$. Bezeichnet man die zur Dauerschwingungsfrequenz ω gehörige Periode $2\pi/\omega$ mit τ , so ist

$$a_1 = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} u(t) \sin \omega t \, dt, \quad b_1 = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} u(t) \cos \omega t \, dt.$$

Führt man an der Stelle von t die neue Integrationsvariable $\omega t = v$ ein, so wird wegen $dt = (1/\omega) dv$ und $\omega\tau = 2\pi$:

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u\left[\frac{v}{\omega}\right] \sin v \, dv, \quad b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u\left[\frac{v}{\omega}\right] \cos v \, dv.$$

Damit wird

$$N = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} u\left[\frac{v}{\omega}\right] \sin v \, dv + j \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} u\left[\frac{v}{\omega}\right] \cos v \, dv. \quad (4.7)$$

Hierin ist $u\left[\frac{v}{\omega}\right]$ nichts weiter als die Ausgangsgröße u des Kennliniengliedes, nur als Funktion von $v = \omega t$ ausgedrückt.

Berücksichtigt man, daß im Schwingungsgleichgewicht

$$u(t) = F(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) = F(A \sin \omega t, \omega A \cos \omega t),$$

also

$$u\left[\frac{v}{\omega}\right] = F(A \sin v, \omega A \cos v)$$

gilt, so kann man für (4.7) auch schreiben:

$$N = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin v, \omega A \cos v) \sin v \, dv + \\ + j \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin v, \omega A \cos v) \cos v \, dv. \quad (4.8)$$

Da F bekannt ist, hat man hiermit eine Formel zur Berechnung der Beschreibungsfunktion N .

Die Beschreibungsfunktion hängt also im allgemeinen von A und ω ab. Für die im vorhergehenden betrachtete Klasse von Kennlinien ist aber die Abhängigkeit von ω nur eine scheinbare. Ist nämlich die nichtlineare Kennlinie eindeutig, so ist F eine Funktion von $e = A \sin v$ allein, so daß ω im Integranden von vornherein gar nicht vorkommt. Liegt eine Hysteresekennlinie vor, so hängt sie zwar von $\dot{e} = A\omega \cos v$ ab, jedoch in sehr spezieller Weise über die Vorzeichenfunktion $\operatorname{sgn} \dot{e} = \operatorname{sgn}(A\omega \cos v)$. Da ω und auch A gewiß als ≥ 0 vorausgesetzt werden dürfen, wird die Vorzeichenfunktion durch sie nicht beeinflusst, und so wird $\operatorname{sgn} \dot{e} = \operatorname{sgn} \cos v$. Das heißt: Auch bei mehrdeutigen Kennlinien ist die Beschreibungsfunktion von der Frequenz ω unabhängig. Sie ist somit eine Funktion von A allein:

$$N(A) = R(A) + jI(A) \quad (4.9)$$

mit

$$R(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} u \left[\frac{v}{\omega} \right] \sin v \, dv = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin v, \omega A \cos v) \sin v \, dv, \quad (4.10)$$

$$I(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} u \left[\frac{v}{\omega} \right] \cos v \, dv = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin v, \omega A \cos v) \cos v \, dv. \quad (4.11)$$

Ausdrücklich sei bemerkt, daß bei komplizierteren Nichtlinearitäten, in denen die Kennlinien mit Differentialgleichungsgliedern verquickt sind, die Beschreibungsfunktion auch von ω abhängen kann (siehe Abschnitt 4.11).

Aus der Herleitung der Beschreibungsfunktion geht hervor, daß sie für das Kennlinienglied die gleiche Rolle spielt wie der Frequenzgang für ein lineares Übertragungsglied. Da also durch die Einführung der Beschreibungsfunktion das nichtlineare Glied ganz entsprechend wie ein lineares Übertragungsglied beschrieben wird, spricht man auch von *Harmonischer Linearisierung*, harmonisch deshalb, weil es sich um die Reaktion des nichtlinearen Gliedes auf die Aufschaltung von harmonischen Schwingungen handelt. Selbstverständlich ist diese Art der „Linearisierung“ nicht identisch mit der „Linearisierung um einen Arbeitspunkt“. Dort wird eine Kennlinie durch die Tangente im Arbeitspunkt ersetzt, was nur dann zulässig ist, wenn die Abweichungen vom Arbeitspunkt genügend

klein sind. Irgendeine derartige Voraussetzung wird bei der Beschreibungsfunktion nicht gemacht; hier wird vielmehr das unveränderte nichtlineare System untersucht.

Wenngleich die *Beschreibungsfunktion* eine dem Frequenzgang analoge Begriffsbildung ist, so sind doch die *Unterschiede gegenüber dem Frequenzgang* eines linearen Übertragungsgliedes tiefgehend. Während der lineare Frequenzgang allein von der Frequenz ω abhängt, aber nicht von der Amplitude A der Eingangsschwingung, ist bei der Beschreibungsfunktion gerade die Amplitude A die wesentliche unabhängige Variable. Das muß auch so sein, wenn man wirklich etwas von den Eigenschaften der Nichtlinearität erfassen will, denn die Unabhängigkeit von der Amplitude ist eine unmittelbare Folge der linearen Grundgesetze, insbesondere des Verstärkungsprinzips, und kann daher bei einer Nichtlinearität gar nicht erhalten bleiben. Daß die Beschreibungsfunktion hingegen bei den von uns betrachteten Kennlinien nicht von ω abhängt, ist demgegenüber von sekundärer Bedeutung und rührt von der Trennung in (im wesentlichen) statische Nichtlinearitäten und dynamische lineare Glieder her.

Noch in einem weiteren Punkt besteht ein erheblicher Unterschied zwischen der Beschreibungsfunktion und dem linearen Frequenzgang. Der letztere wird zunächst durch die Reaktion des Übertragungsgliedes auf die Aufschaltung von Sinusschwingungen definiert – jedenfalls ist das die in der Regelungstechnik meist übliche Einführung des Frequenzganges. Aber durch seinen unmittelbaren Zusammenhang mit der komplexen Übertragungsfunktion – stellt er doch deren analytische Fortsetzung auf die imaginäre Achse dar – kann er zur Beschreibung des gesamten Übertragungsverhaltens dienen. Insbesondere kann man aus ihm auch die Antwort des linearen Übertragungsgliedes auf andere Eingangsgrößen als Sinusschwingungen berechnen. Eine derartig allgemeine Bedeutung besitzt die Beschreibungsfunktion für das Kennlinienglied nicht. Sie beschreibt dessen Verhalten nur im Zustand des Schwingungsgleichgewichts und aus Stetigkeitsgründen überdies noch in Nachbarzuständen, also bei auf- und abklingenden Schwingungen, die eventuell aus der Dauerschwingung entstehen. Es ist jedoch beispielsweise sinnlos, die Beschreibungsfunktion zu benutzen, um die Antwort des nichtlinearen Regelkreises auf den Einheitssprung zu ermitteln.

Im Zustand der Harmonischen Balance aber gilt für das Kennlinienglied die Gleichung

$$\bar{u}_1 = N(A)\bar{e}, \quad (4.12)$$

wobei $\tilde{e} = Ae^{j\omega t}$ und $\tilde{u}_1 = C_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)}$ die Grundschiwingung von Ein- und Ausgangsgröße in Zeigerdarstellung sind. Für ein lineares Übertragungsglied mit der Eingangsgröße x_e , der Ausgangsgröße x_a und dem Frequenzgang $G(j\omega)$ gilt bei Aufschaltung einer Sinusschwingung im stationären Schwingungszustand die völlig entsprechende Gleichung

$$\tilde{x}_a = G(j\omega)\tilde{x}_e$$

mit den Zeigerdarstellungen \tilde{x}_e und \tilde{x}_a von Ein- und Ausgangsgröße. Diese Übereinstimmung in den Zeigergleichungen zwischen Nichtlinearität und linearem Übertragungsglied ist entscheidend dafür, daß die Behandlung nichtlinearer Systeme durch die Beschreibungsfunktion ganz wesentlich vereinfacht wird: Man kann nun mit Nichtlinearitäten und linearen Gliedern in der gleichen einfachen Weise umgehen. Aber, um es nochmals zu sagen: Das gilt nur im Zustand des Schwingungsgleichgewicht (und Nachbarzuständen).

Für das lineare Teilsystem gilt nach Bild 4/4 wegen $x = -e$

$$-\tilde{e} = L(j\omega)\tilde{u}_1, \quad (4.13)$$

wo $L(j\omega)$ der lineare Frequenzgang ist. Setzt man (4.12) in (4.13) ein, so erhält man

$$-\tilde{e} = L(j\omega)N(A)\tilde{e}$$

oder

$$\{L(j\omega)N(A) + 1\}\tilde{e} = 0.$$

Da dies für alle t gelten soll, muß

$$L(j\omega)N(A) + 1 = 0 \quad (4.14)$$

sein.

Wenn also in dem nichtlinearen Regelkreis eine Dauerschwingung existiert und wenn man sie durch ihre Grundschiwingung approximiert, so erfüllen Amplitude A und Frequenz ω die Gleichung (4.14). Sie stellt die *charakteristische Gleichung*

der nichtlinearen Regelung dar und sei die Gleichung der Harmonischen Balance genannt. Es handelt sich bei ihr um eine komplexe Gleichung, die somit zwei reellen Gleichungen entspricht. Aus ihnen hat man die Unbekannten A und ω zu bestimmen.

Bevor man an die Lösung der Gleichung der Harmonischen Balance herangeht, wird es gut sein, sich eine Vorstellung vom Aussehen der Beschreibungsfunktion zu verschaffen. Dazu sollen für die wichtigsten in Abschnitt 1.3 besprochenen Kennlinien die Beschreibungsfunktionen berechnet werden.

4.2 Berechnung der Beschreibungsfunktion

Als erste nichtlineare Kennlinie möge die allgemeine Relaiskennlinie in Bild 4/5 betrachtet werden, die dem Dreipunktglied mit Hysterese entspricht. Sie enthält mehrere andere Relaiskennlinien als Spezialfälle:

- Für $q=1$ ergibt sich das Dreipunktglied, da alsdann qa mit a und $-qa$ mit $-a$ zusammenfällt.
- Für $q = 1$ und $a = 0$ wird aus dem Dreipunktglied das Zweipunktglied.
- Setzt man $q = -1$, so fällt qa mit $-a$ und umgekehrt $-qa$ mit $+a$ zusammen. Dadurch ergibt sich die Kennlinie des Zweipunktgliedes mit Hysterese.

Auf die allgemeine Relaiskennlinie wird nun als Eingangsgröße

$$e = A \sin \omega t = A \sin v, \quad 0 \leq v \leq 2\pi,$$

gegeben. Da das Verhalten des Systems im Zustand der Harmonischen Balance interessiert, darf man annehmen, daß der Parameter $A > a$ ist. Denn andernfalls kommt keine Schwingung der Ausgangsgröße u zustande.

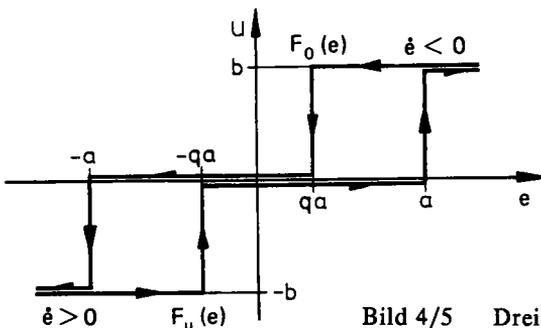


Bild 4/5 Dreipunktkenlinie mit Hysterese

Während $v = \omega t$ von 0 ab läuft, durchquert $e = A \sin v$ zunächst das Stück von 0 bis a auf der e -Achse, so daß $u = 0$ ist. Bei $e = a$, wenn also $A \sin v = a$ geworden ist, springt u auf den Wert b um und bleibt dort auf dem oberen Ast, bis e nach Durchlaufen seines Maximums A bei $v = \pi/2$ abnehmend die Stelle qa erreicht. Dies ist der Fall für $A \sin v = qa$. Darauf bleibt u wiederum Null, bis $e = 0$, also $v = \pi$ wird. Während v nun das Intervall von π bis 2π durchläuft, wiederholt sich der ganze Vorgang, nur daß u entgegengesetztes Vorzeichen hat.

Man erhält so das Bild 4/6. Darin ist v_a durch die Gleichung $A \sin v = a$, also $\sin v_a = a/A$ gegeben, wobei $0 \leq v_a \leq \pi/2$ gelten muß. Entsprechend ist v_{qa} durch $A \sin v = qa$, also $\sin v_{qa} = qa/A$ bestimmt, und zwar mit $\pi/2 \leq v_{qa} \leq \pi$.

Aus Bild 4/6 ersieht man unmittelbar, daß das Produkt $u \sin v = F(A \sin v, A \omega \cos v) \sin v$, also der Integrand von $R(A)$ in (4.10), periodisch mit π ist. Daher ist nach (4.10)

$$R = \frac{1}{\pi A} \cdot 2 \cdot \int_0^\pi u \sin v \, dv .$$

Liest man u aus Bild 4/6 ab, so erhält man hieraus

$$R = \frac{2}{\pi A} \int_{v_a}^{v_{qa}} b \sin v \, dv = \frac{2b}{\pi A} (\cos v_a - \cos v_{qa}) . \tag{4.15}$$

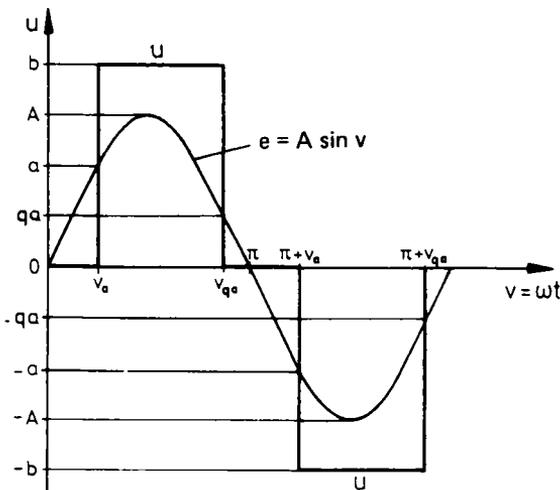


Bild 4/6 Die Ausgangsgröße u des Dreipunktgliedes mit Hysterese zur Eingangsgröße $e = A \sin v$

Wegen $\sin v_a = \frac{a}{A}$ ist

$$\cos v_a = \sqrt{1 - \sin^2 v_a} = \sqrt{1 - (a/A)^2}.$$

Entsprechendes gilt für $\cos v_{qa}$. Dabei ist nur zu beachten, daß im Gegensatz zu v_a der Wert v_{qa} bereits $\geq \pi/2$ ist und damit der Cosinus ≤ 0 werden muß. Deshalb ist $\cos v_{qa} = -\sqrt{1 - (qa/A)^2}$. Auf diese Weise bekommt man aus (4.15)

$$R(A) = \frac{2b}{\pi A} \left[\sqrt{1 - \left[\frac{a}{A}\right]^2} + \sqrt{1 - q^2 \left[\frac{a}{A}\right]^2} \right], \quad A \geq a. \quad (4.16)$$

Den Imaginärteil $I(A)$ der Beschreibungsfunktion kann man in der gleichen Weise berechnen. Man hat lediglich die in Bild 4/6 dargestellte Funktion $u(v)$ mit $\cos v$ statt mit $\sin v$ zu multiplizieren. Es soll jedoch ein anderer Weg eingeschlagen werden, der über die Berechnung der speziellen Beschreibungsfunktion hinaus ein bemerkenswertes allgemeines Ergebnis liefert.

Dazu wird von der Tatsache ausgegangen, daß

$$u = F(e, \dot{e}) = \begin{cases} F_u(e) & \text{für } \dot{e} > 0 \\ F_o(e) & \text{für } \dot{e} < 0 \end{cases}$$

ist (Bild 4/5). Bewegt sich v von 0 bis $\pi/2$, so wächst e von 0 bis zum Maximalwert A , sodaß $u = F_u(e) = F_u(A \sin v)$ ist. Während v von $\pi/2$ bis $3\pi/2$ läuft, nimmt e von A bis $-A$ ab; daher ist jetzt $u = F_o(e) = F_o(A \sin v)$. Bewegt sich schließlich v von $3\pi/2$ bis 2π , so nimmt e wieder von $-A$ bis 0 zu, und infolgedessen hat man $u = F_u(e) = F_u(A \sin v)$ zu setzen. Das Integral (4.11) kann man daher in der folgenden Form aufspalten:

$$I(A) = \frac{1}{\pi A} \left[\int_0^{\pi/2} F_u(A \sin v) \cos v \, dv + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} F_o(A \sin v) \cos v \, dv + \int_{3\pi/2}^{2\pi} F_u(A \sin v) \cos v \, dv \right].$$

Da $e = A \sin v$, ist $de = A \cos v \, dv$, also $\cos v \, dv = 1/A \, de$. Setzt man dies in die letzte Gleichung ein, so erhält man

$$I(A) = \frac{1}{\pi A^2} \left[\int_0^A F_u(e) de + \int_A^{-A} F_o(e) de + \int_{-A}^0 F_u(e) de \right].$$

Daraus folgt weiter

$$I(A) = \frac{1}{\pi A^2} \left[\int_{-A}^A F_u(e) de - \int_{-A}^A F_o(e) de \right]$$

oder

$$I(A) = - \frac{1}{\pi A^2} \int_{-A}^A [F_o(e) - F_u(e)] de. \quad (4.17)$$

Ein Blick auf Bild 4/5 lehrt, daß das Integral nichts anderes ist als die von der Kennlinie eingeschlossene Fläche.

Dieses Resultat wurde hergeleitet, ohne irgendeine spezielle Eigenschaft der Relaiskennlinie zu benutzen. Es wird lediglich vorausgesetzt, daß die Hystereseschleife tatsächlich umlaufen wird. Es gilt daher allgemein, ganz gleich, ob es sich um eine Relaiskennlinie, eine andere stückweise lineare Kennlinie oder um eine gekrümmte Kennlinie handelt. Sie darf auch eindeutig sein; dann sind die Funktionen $F_u(e)$ und $F_o(e)$ identisch und die von ihnen eingeschlossene Fläche ist Null.

Man kann das Ergebnis daher in der folgenden Form aussprechen:

Der Imaginärteil $I(A)$ der Beschreibungsfunktion einer Kennlinie ist allgemein durch

$$I(A) = - \frac{S}{\pi A^2}$$

gegeben, wo S die von der Kennlinie umschlossene Fläche ist, so umlaufen, daß sie zur Linken liegt. Ist die Kennlinie insbesondere eindeutig, so ist $I(A) = 0$, also die Beschreibungsfunktion reell.

(4.18)

Bei der allgemeinen Relaiskennlinie ist

$$S = 2(a - qa)b = 2ab(1 - q),$$

so daß

$$I(A) = - \frac{2ab(1-q)}{\pi A^2} . \quad (4.19)$$

Aus den Formeln (4.18) und (4.19) kann man nunmehr durch Spezialisierung die Beschreibungsfunktionen der einzelnen Relaiskenlinien erhalten:

a) *Dreipunktglied*

Für $q = 1$ wird

$$N(A) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \left[\frac{a}{A}\right]^2} , \quad A > a . \quad (4.20)$$

b) *Zweipunktglied*

Aus (4.20) folgt für $a = 0$

$$N(A) = \frac{4b}{\pi A} , \quad A > 0 . \quad (4.21)$$

c) *Zweipunktglied mit Hysterese*

Setzt man $q = -1$, so wird

$$N(A) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \left[\frac{a}{A}\right]^2} - j \frac{4ab}{\pi A^2} , \quad A > a . \quad (4.22)$$

Auch für den *Realteil der Beschreibungsfunktion* kann man eine allgemeine Formel herleiten, die entsprechend wie der Ausdruck (4.17) für den Imaginärteil aufgebaut ist:

$$R(A) = \frac{1}{\pi A^2} \int_{-A}^A \left[F_o(e) + F_u(e) \right] \frac{e}{\sqrt{A^2 - e^2}} de . \quad (4.23)$$

Leider gibt es aber bei ihr keine so schöne geometrische Deutung wie bei der Formel des Imaginärteils! Man kann sie noch etwas vereinfachen. Wegen der Symmetrie der Kennlinie zum Ursprung gilt

$$F_o(-e) = -F_u(e), \quad F_u(-e) = -F_o(e).$$

Demgemäß gilt für den Integranden $J(e)$ in (4.23):

$$\begin{aligned} J(-e) &= \left[F_o(-e) + F_u(-e) \right] \frac{(-e)}{\sqrt{A^2 - e^2}} = \\ &= - \left[F_u(e) + F_o(e) \right] \frac{(-e)}{\sqrt{A^2 - e^2}} = J(e). \end{aligned}$$

$J(e)$ ist also eine gerade Funktion, und deshalb folgt aus (4.23)

$$R(A) = \frac{2}{\pi A^2} \int_0^A \left[F_o(e) + F_u(e) \right] \frac{e}{\sqrt{A^2 - e^2}} de. \quad (4.24)$$

Handelt es sich speziell um eine eindeutige Kennlinie, so ist $F_o(e) = F_u(e) = F(e)$ und (4.24) geht in

$$R(A) = \frac{4}{\pi A^2} \int_0^A F(e) \frac{e}{\sqrt{A^2 - e^2}} de \quad (4.25)$$

über. Sofern das Integral in (4.24) bzw. (4.25) einfach auszuwerten ist, besteht der Vorzug dieser Ausdrücke gegenüber der ursprünglichen Formel (4.10) darin, daß man auf die Ermittlung des Verlaufs von u über der v -Achse verzichten kann, wie sie bei der Bestimmung von $R(A)$ für das Dreipunktglied mit Hysterese durchgeführt wurde.

Als Beispiel für die Anwendung von (4.25) berechnen wir die Beschreibungsfunktion der *Begrenzungskennlinie* (Bild 4/7). Für sie gilt

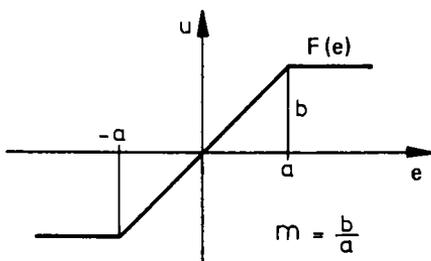


Bild 4/7 Begrenzungskennlinie

$$u = F(e) = \begin{cases} me = \frac{b}{a}e, & 0 \leq e \leq a, \\ b & , e > a. \end{cases}$$

Da sie eine eindeutige Kennlinie ist, gilt $N(A) = R(A)$. Daher ist in $0 \leq A \leq a$

$$\begin{aligned} N(A) &= \frac{4}{\pi A^2} \int_0^A me \frac{e}{\sqrt{A^2 - e^2}} de = \frac{4m}{\pi A^2} \left[-\frac{e}{2} \sqrt{A^2 - e^2} + \frac{A^2}{2} \arcsin \frac{e}{A} \right]_0^A = \\ &= \frac{4m}{\pi A^2} \cdot \frac{\pi A^2}{4} = m. \quad 4) \end{aligned}$$

Für $A > a$ ist nach (4.25)

$$\begin{aligned} N(A) &= \frac{4}{\pi A^2} \left\{ \int_0^a me \frac{e}{\sqrt{A^2 - e^2}} de + \int_a^A b \frac{e}{\sqrt{A^2 - e^2}} de \right\} = \\ &= \frac{4m}{\pi A^2} \left[-\frac{e}{2} \sqrt{A^2 - e^2} + \frac{A^2}{2} \arcsin \frac{e}{A} \right]_0^a + \frac{4b}{\pi A^2} \left[-\sqrt{A^2 - e^2} \right]_a^A. \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Einsetzen der Grenzen und Zusammenfassen

$$N(A) = \frac{2m}{\pi} \left[\arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left[\frac{a}{A} \right]^2} \right].$$

Insgesamt hat man so als *Beschreibungsfunktion der Begrenzungskennlinie*

$$N(A) = \begin{cases} m & , A \leq a \\ \frac{2m}{\pi} \left[\arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left[\frac{a}{A} \right]^2} \right] & , A > a. \end{cases} \quad (4.26)$$

Manchmal ist es möglich, eine *Kennlinie durch Addition oder Subtraktion anderer Kennlinien* zu erhalten:

$$F(e) = F_1(e) \pm F_2(e).$$

4) Hier wie auch im folgenden ist unter $y = \arcsin x$ der Hauptwert zu verstehen, d.h. der Funktionswert im Intervall $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Speziell ist $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

Dann folgt unmittelbar aus der Definition der Beschreibungsfunktion:

$$N(A) = N_1(A) \pm N_2(A) .$$

Dies kann die Berechnung der Beschreibungsfunktion $N(A)$ erleichtern.

Als *Beispiel* betrachten wir die *Totzone* (Bild 4/8). Für die Gerade g ist $F(e) = me$, also mit $e = A \sin v$:

$$N(A) = R(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} mA \sin v \cdot \sin v \, dv = m .$$

Für eine Gerade, die ja ebenfalls eine spezielle Kennlinie darstellt und damit eine Beschreibungsfunktion besitzt, ergibt sich ihr Anstieg m als Beschreibungsfunktion - vernünftigerweise, wird doch jede aufgeschaltete Sinusschwingung einfach mit m multipliziert.

Benutzt man nun das Ergebnis (4.26), so wird die Beschreibungsfunktion der Totzone

$$N(A) = m - \begin{cases} m & , A \leq a , \\ \frac{2m}{\pi} \left[\arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right] & , A > a , \end{cases}$$

also

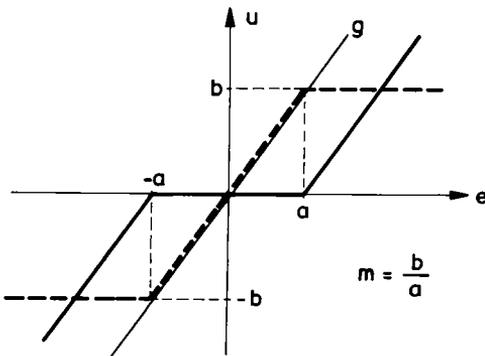


Bild 4/8 Totzone als Differenz von Gerade g und Begrenzungskennlinie (gestrichelt)

$$N(A) = m - \frac{2m}{\pi} \left[\arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left[\frac{a}{A} \right]^2} \right], \quad A > a, \quad (4.27)$$

während für $A \leq a$ $N(A) = 0$ ist, da im Bereich der Nullzone $u = 0$ gilt, also keine Dauerschwingung auftritt.

Beschreibungsfunktionen für weitere nichtlineare Kennlinien findet man in den Abschnitten 4.8, 4.10, 4.11 und den Übungsaufgaben sowie in [36, 37], aber auch in anderen Büchern, die nichtlineare Systeme behandeln. Am Schluß dieses Kapitels sind einige Beschreibungsfunktionen zusammengestellt (Abschnitt 4.12).

4.3 Lösung der Gleichung der Harmonischen Balance

Als erstes wird man eine *formelmäßige* Lösung der Gleichung

$$L(j\omega)N(A) + 1 = 0 \quad (4.28)$$

anstreben, die in der Tat in vielen praktisch wichtigen Fällen ohne Schwierigkeit zu erhalten ist. Dazu ist es angebracht, (4.28) in der Form

$$N(A) = -L^{-1}(j\omega) \quad (4.29)$$

zu schreiben. Vielfach hat nämlich das lineare Teilsystem reines Verzögerungsverhalten, das heißt, es ist totzeitfrei und der Zähler von $L(j\omega)$ ist eine Konstante. Dann ist $L^{-1}(j\omega)$ ein Polynom in $j\omega$ und keine wirklich gebrochene rationale Funktion, was die weitere Rechnung sehr erleichtert. Auch ein eventuell vorkommender Totzeitfaktor $e^{-T_t j\omega}$ in $L(j\omega)$ stört dabei nicht, da er lediglich in $e^{+T_t j\omega}$ übergeht, was rechnerisch gegenüber $e^{-T_t j\omega}$ keine zusätzlichen Schwierigkeiten macht.

Geht man in (4.29) zum Real- und Imaginärteil über, so erhält man

$$\operatorname{Re} N(A) = -\operatorname{Re} L^{-1}(j\omega), \quad (4.30)$$

$$\operatorname{Im} N(A) = -\operatorname{Im} L^{-1}(j\omega). \quad (4.31)$$

Damit hat man ein System von zwei reellen Gleichungen zur Ermittlung der beiden Unbekannten A und ω , die als Amplitude und Frequenz einer Dauerschwingung reell und ≥ 0 sind.

Handelt es sich speziell um eine eindeutige Kennlinie, so nimmt das Gleichungssystem eine einfachere Form an. Da alsdann nach (4.18) die Beschreibungsfunktion $N(A)$ reell ist, wird ihr Imaginärteil Null, und es ergibt sich

$$\operatorname{Im} L^{-1}(j\omega) = 0, \quad (4.32)$$

$$\operatorname{Re} N(A) = -\operatorname{Re} L^{-1}(j\omega). \quad (4.33)$$

Die Lösung des Gleichungssystems reduziert sich hier auf die Lösung zweier getrennter Gleichungen. Man bestimmt zunächst aus (4.32) die Wurzeln ω . Setzt man sie in die rechte Seite von (4.33) ein, so hat man eine Gleichung für A allein.

In komplizierteren Fällen, etwa bei hoher Ordnung des linearen Teilsystems oder bei schwierigeren Kennlinien, kann es unmöglich oder doch zu mühselig sein, zu einer formelmäßigen Lösung zu gelangen. Dann kann man zur numerischen Lösung der Gleichungen übergehen, worüber nichts Spezielles gesagt zu werden braucht. Man kann aber auch versuchen, auf geometrischem Weg weiter zu kommen. Dazu ist es angebracht, die Gleichung der Harmonischen Balance anders umzuformen als bei der formelmäßigen Lösung, sie nämlich in der Gestalt

$$L(j\omega) = -\frac{1}{N(A)} \quad (4.34)$$

zu schreiben. Dann stellt

$$z = L(j\omega) \quad (4.35)$$

die gewöhnliche *lineare Ortskurve* dar, deren Aussehen und Verhalten bei Parameteränderungen dem Regelungstechniker von den linearen Systemen her vertraut ist. Durch die Funktion

$$z = N_J(A) = -\frac{1}{N(A)}, \quad (4.36)$$

also die negative inverse Beschreibungsfunktion, wird jedem Parameterwert A eine eindeutig bestimmte komplexe Zahl z zugeordnet. Deutet man sie ebenfalls

als Punkt der komplexen z -Ebene, der „Ortskurvenebene“, so stellt (4.36) für den laufenden Parameter A eine zweite Ortskurve dar, die für das Kennlinienglied charakteristisch ist. Sie sei als *nichtlineare Ortskurve* bezeichnet. Die Gleichung (4.34), also die umgeschriebene Gleichung der Harmonischen Balance, besagt alsdann:

Man erhält die Amplituden A und Frequenzen ω der Dauerschwingungen des nichtlinearen Regelkreises, wenn man die Schnittpunkte der linearen und der nichtlinearen Ortskurve ermittelt und die zugehörigen Parameterwerte A und ω feststellt. (4.37)

Das ist im Bild 4/9 skizziert. Diese geometrische Methode zur Lösung der Gleichung der Harmonischen Balance bezeichnet man als *Zwei-Ortskurven-Verfahren*. Es geht auf *W. Oppelt* zurück und wurde unabhängig davon auch von *Tustin*, *Kochenburger* und *Goldfarb* angegeben ⁵⁾.

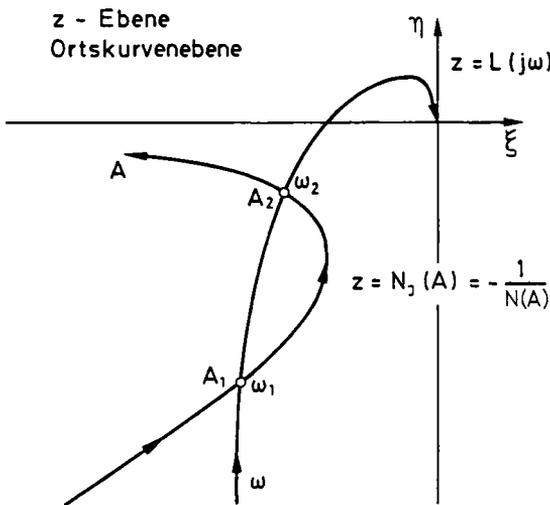


Bild 4/9 Zwei-Ortskurven-Verfahren

⁵⁾ *W. Oppelt*: Über die Stabilität unstetiger Regelvorgänge. Elektrotechnik 2(1948), S. 71–78.

W. Oppelt: Über Ortskurvenverfahren bei Regelvorgängen mit Reibung. Zeitschrift des VDI 90 (1948), S. 179–183.

L. C. Goldfarb: Über einige nichtlineare Phänomene in Regelsystemen (russisch). Automatika i Telemekhanika 8 (1947), S. 349–383

A. Tustin: The effects of backlash and of speed-dependent friction on the stability of closed cycle control systems. Journ. Instn. El. Engrs. 94, Pt. IIA (1947), S. 143–151.

R. J. Kochenburger: A frequency response method for analyzing and synthesizing contactor servo mechanisms. Trans. AIEE 69 Pt. I (1950), S. 270–284.

Mit dem Zwei-Ortskurven-Verfahren kann man sich in sehr anschaulicher Weise zunächst einen Überblick verschaffen, ob überhaupt Lösungen der Gleichung der Harmonischen Balance existieren, ob also überhaupt Dauerschwingungen vorhanden sind, und wie viele es gibt. Beide Fragen sind ja bei einem nichtlinearen Gleichungssystem, wie es hier vorliegt, zunächst völlig offen.

Sofern eine formelmäßige Lösung nicht möglich ist, kann man aus dem Ortskurvenbild eine numerische Näherungslösung erhalten, indem man die ω -Skala auf der linearen und die A -Skala auf der nichtlinearen Ortskurve vom Rechner aufzeichnen läßt und die Parameterwerte der Schnittpunkte interpoliert. Die so erreichte Genauigkeit wird für regelungstechnische Zwecke normalerweise genügen. Wenn nicht, kann man ein numerisches Verfahren zur Nullstellenbestimmung anschließen, da man jetzt durch das Zwei-Ortskurven-Verfahren über gute Startwerte verfügt.

Bei eindeutigen Kennlinien kann es auch möglich sein, ähnlich wie im linearen Bereich von den Ortskurven zu den Frequenzkennlinien (oder Bode-Diagrammen) überzugehen. Dies wird im nächsten Abschnitt beschrieben werden.

Will man das Zwei-Ortskurven-Verfahren anwenden, muß man sich zunächst mit der *Gestalt der nichtlinearen Ortskurve* vertraut machen. Für die im vorhergehenden betrachteten Kennlinien soll sie jetzt skizziert werden.

Betrachtet man als einfachste Nichtlinearität zunächst das *Zweipunktglied*, so ist wegen (4.21)

$$z = N_J(A) = -\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A}{4b}, \quad 0 \leq A < +\infty. \quad (4.38)$$

Die Ortskurve fällt also gerade mit der negativen reellen Achse der Ortskurvenebene zusammen, wobei sie für $A = 0$ im Ursprung beginnt und mit wachsendem A gegen $-\infty$ geht (Bild 4/10).

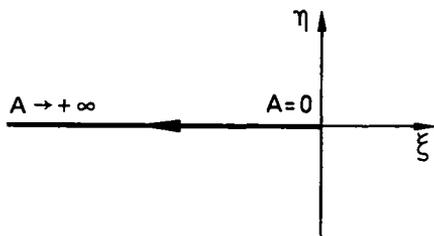


Bild 4/10 Ortskurve $z = N_J(A)$ des Zweipunktgliedes

Beim Dreipunktglied ist nach (4.20)

$$z = N_J(A) = -\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A}{4b} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}} = -\frac{\pi a}{4b} \frac{\frac{A}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}}$$

Erweitert man mit A/a , so wird

$$z = N_J(A) = -\frac{\pi a}{4b} \frac{\left(\frac{A}{a}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{A}{a}\right)^2 - 1}}, \quad a < A < +\infty. \quad (4.39)$$

Das ist eine Funktion der normierten Amplitude A/a . Da sie reell und negativ ist, liegt die Ortskurve vollständig in der negativen reellen Achse. Für $A \rightarrow a+0$ geht sie $\rightarrow -\infty$, ebenso für $A \rightarrow +\infty$, da der Zähler stärker anwächst als der Nenner. Für $A/a = \sqrt{2}$ weist die Funktion ein Maximum auf, nämlich $-\pi a/2b$. Die Ortskurve hat daher die im Bild 4/11 skizzierte Gestalt. Links vom Maximum wird die negative reelle Achse doppelt überdeckt. Zu jedem derartigen Punkt der reellen Achse gehören somit zwei Parameterwerte A_1 und A_2 , von denen einer, etwa A_1 , $< a\sqrt{2}$, der andere $> a\sqrt{2}$ ist.

Bei der *Begrenzungskennlinie* hat man von den Gleichungen (4.26) auszugehen. Setzt man $a/A = \lambda$ und betrachtet zunächst die Funktion

$$f(\lambda) = \arcsin \lambda + \lambda \sqrt{1 - \lambda^2}, \quad 1 \geq \lambda > 0 \quad (a \leq A < \infty),$$

so ist $f(1) = \pi/2$ und $f(+0) = 0$. Da $f'(\lambda) = 2\sqrt{1 - \lambda^2} > 0$, wächst die Funktion mit zunehmendem λ , nimmt also ab mit zunehmendem A . Man erhält so die

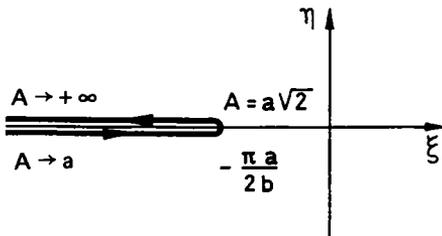


Bild 4/11
Ortskurve $z = N_J(A)$ des
Dreipunktgliedes

Kurve $z = N(A)$ in Bild 4/12. Dabei ist zu beachten, daß für das gesamte Intervall $0 \leq A \leq a$ $N(A) = m$ ist. Geht man nun in der z -Ebene vom Punkt $z = N(A)$ zum Punkt $z = N_j(A) = -1/N(A)$ über, so erhält man die gewünschte Ortskurve, die gleichfalls in Bild 4/12 dargestellt ist.

Ganz entsprechend wie für die Begrenzung kann man auch für die *Totzone* die nichtlineare Ortskurve $z = -1/N(A)$ skizzieren. Im Gegensatz zur Begrenzung beginnt sie für $A = a$ bei $-\infty$ auf der reellen Achse und endet für $A \rightarrow +\infty$ im Punkt $-1/m$. Sie durchläuft also das gleiche Stück der reellen Achse wie die Ortskurve $z = N_j(A)$ der Begrenzungskennlinie, jedoch in der entgegengesetzten Richtung (Bild 4/13).

Bisher wurden eindeutige Kennlinien betrachtet, deren Ortskurven zwangsläufig auf der reellen Achse liegen müssen. Als Beispiel einer mehrdeutigen Kennlinie mag das *Zweipunktglied mit Hysterese* dienen. Aus (4.22) folgt

$$N(A) = \frac{4b}{\pi a} \left[\frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} - j \left(\frac{a}{A}\right)^2 \right], \tag{4.40}$$

also mit $\lambda = \frac{a}{A}$:

$$N_j(A) = - \frac{\pi a}{4b} \frac{1}{\lambda \sqrt{1 - \lambda^2} - j \lambda^2}.$$

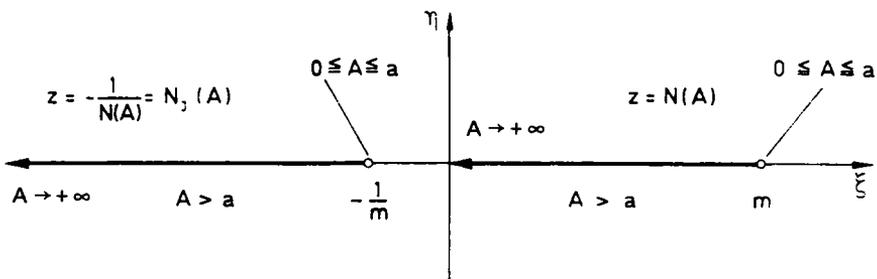


Bild 4/12 Ortskurven $z = N(A)$ und $z = N_j(A)$ der Begrenzungskennlinie

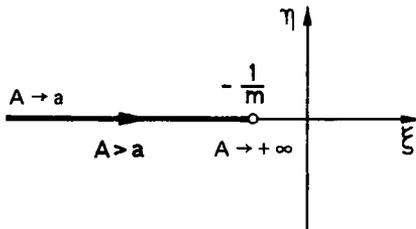


Bild 4/13
Ortskurve $z = N_j(A)$ der Totzone

Erweitern mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners führt auf

$$N_J(A) = - \frac{\pi a}{4b} \frac{\lambda \sqrt{1-\lambda^2} + j\lambda^2}{\lambda^2}$$

oder

$$N_J(A) = - \frac{\pi a}{4b} \sqrt{\left(\frac{A}{a}\right)^2 - 1} - \frac{\pi a}{4b} j, \tag{4.41}$$

wobei $A > a$ ist, da sonst keine Dauerschwingung vorhanden sein kann. Die nichtlineare Ortskurve läuft also parallel zur reellen Achse im Abstand $-\pi a/4b$. Für $A = a$ beginnt sie auf der imaginären Achse und strebt für $A \rightarrow \infty$ gegen $-\infty$. Man erhält so das Bild 4/14.

Schließlich findet man im Bild 4/15 die Ortskurve des Dreipunktgliedes mit Hysterese, vom Rechner aufgezeichnet, und zwar in Abhängigkeit vom Parameter q der Kennlinie. Man erkennt, daß im Grenzfall $q = -1$ die Ortskurve des Zweipunktgliedes mit Hysterese entsteht, im Grenzfall $q = 1$ die Ortskurve der Dreipunktkenlinie ohne Hysterese. Im letztgenannten Fall ist zu beachten, daß die reelle Achse links von -2 doppelt überdeckt wird, ein Verhalten, das nach Bild 4/15 offensichtlich als Grenzverhalten der Ortskurven für $q \rightarrow 1$ zustande kommt.

Nunmehr soll an einigen typischen Fällen gezeigt werden, wie die Gleichung der Harmonischen Balance durch Kombination des Zwei-Ortskurven-Verfahrens mit der algebraischen Behandlung der Gleichung gelöst werden kann.

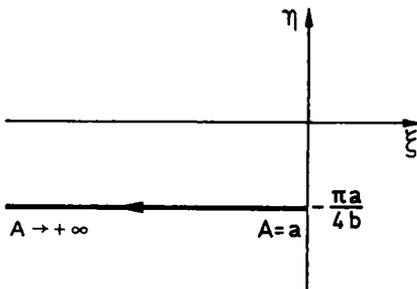


Bild 4/14 Ortskurve $z = N_J(A)$ des Zweipunktgliedes mit Hysterese

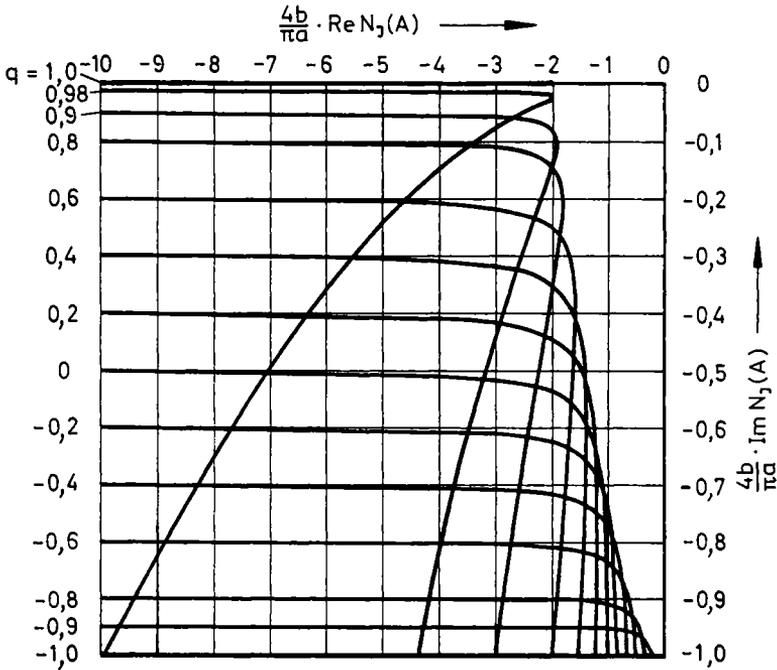


Bild 4/15 Ortskurve $z = N_j(A)$ des Dreipunktgliedes mit Hysterese

4.4 Beispiele zur Lösung der Gleichung der Harmonischen Balance

4.4.1 Regelkreis mit Dreipunktkenlinie (Bild 4/16)

Das lineare Teilsystem sei ein Verzögerungssystem: totzeitfrei, mit konstantem Zähler (den man stets zu 1 normieren kann) und Polen links der j -Achse mit etwaiger Ausnahme eines einfachen Pols in $s = 0$, der einem I-Glied entspricht. Dann ist

$$L(s) = \frac{1}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}$$

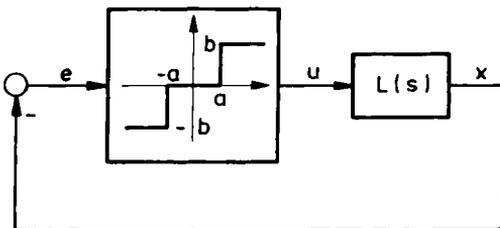


Bild 4/16 Regelkreis mit Dreipunktkenlinie

mit $a_1, \dots, a_n > 0$ und $a_0 \geq 0$, wobei $a_0 = 0$ mit dem Auftreten des I-Gliedes korrespondiert. Der Fahrstrahl der Ortskurve des linearen Teilsystems dreht dann im Uhrzeigersinn monoton aus der Anfangslage 0° (für P-Verhalten des linearen Teilsystems) bzw. -90° (für I-Verhalten des linearen Teilsystems) in die Endlage $-n \cdot 90^\circ$ (siehe [73], Abschnitt 4.9). Dieses Verhalten ist im Bild 4/17 für I-Verhalten des linearen Teilsystems skizziert, in welchem Fall die Ortskurven für $\omega = +0$ aus dem Unendlichen, und zwar aus der Richtung der negativen j -Achse, kommen. Der Anfangsverlauf der Ortskurven spielt für die folgende Untersuchung jedoch keine Rolle.

Wie man sieht, gibt es für $n = 2$ keinen Schnittpunkt mit der negativen reellen Achse, während für $3 \leq n \leq 6$ genau ein derartiger Schnittpunkt vorliegt. ω_p sei der Parameter dieses Schnittpunktes. Man erkennt auch, daß für $n > 6$ mehr als ein Schnittpunkt mit der reellen Achse vorhanden ist, da die lineare Ortskurve dann weiter vordreht.

Da die nichtlineare Ortskurve des Dreipunktgliedes nach Bild 4/11 vollständig auf der negativen reellen Achse liegt, kann es *im Fall* $n = 2$ keinen Schnittpunkt der linearen und nichtlinearen Ortskurve und somit *keine Dauerschwingung des Regelkreises* geben.

Wir setzen nun voraus, daß

$$3 \leq n \leq 6$$

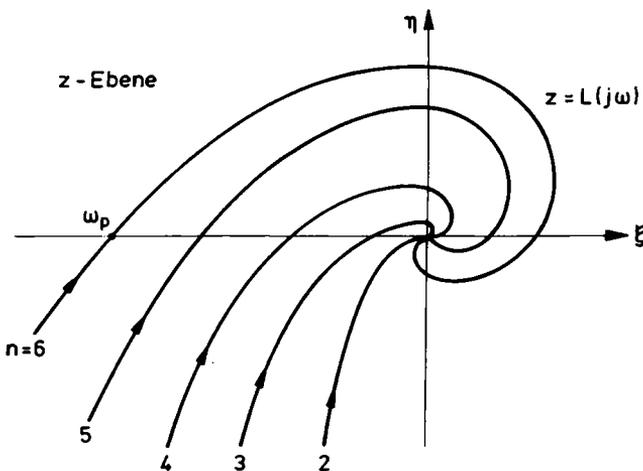


Bild 4/17 Ortskurven des linearen Teilsystems aus Bild 4/16
 n Ordnung des linearen Teilsystems

gilt. Darin werden die praktisch auftretenden Fälle normalerweise enthalten sein, da man im Rahmen einer nichtlinearen Untersuchung das lineare Teilsystem im allgemeinen durch ein System höchstens 6. Ordnung annähern wird. Die dann vorliegende Situation werde zunächst im Licht des Zwei-Ortskurven-Verfahrens betrachtet: Bild 4/18 . Es gibt hier zwei Möglichkeiten:

- (I) Kein Schnittpunkt der beiden Ortskurven und daher keine Dauerschwingung. Die Bedingung hierfür lautet

$$L(j\omega_p) = \operatorname{Re}L(j\omega_p) > -\frac{\pi a}{2b} . \tag{4.42}$$

- (II) Zwei Schnittpunkte der beiden Ortskurven, die übereinander liegen, da die beiden Äste der nichtlinearen Ortskurve sich überdecken und in Bild 4/18 nur aus zeichnerischen Gründen nebeneinander gelegt sind. Zu diesen beiden Schnittpunkten gehört nur *ein* Parameterwert ω_p . Jedoch sind die beiden zugehörigen Amplitudenwerte verschieden, da sie den zwei verschiedenen Ästen der nichtlinearen Ortskurve entsprechen:

$$A_1 < a\sqrt{2} \quad (\text{gehört zum nach rechts strebenden Ast}) ,$$

$$A_2 > a\sqrt{2} \quad (\text{gehört zum nach links strebenden Ast}) .$$

Man hat also zwei Dauerschwingungen mit der gleichen Frequenz, jedoch verschiedenen Amplituden. Die Bedingung für diese Situation lautet

$$L(j\omega_p) < -\frac{\pi a}{2b} . \tag{4.43}$$

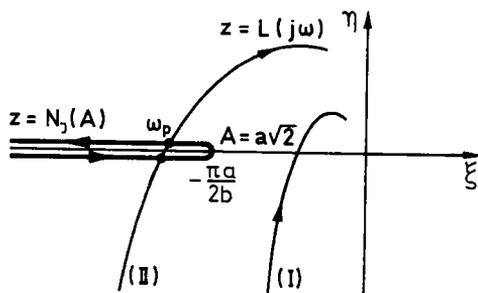


Bild 4/18 Typische Lage der Ortskurven von Dreipunktglied und Verzögerungssystem 3. bis 6. Ordnung

Die Zwischenposition, daß die lineare Ortskurve gerade durch den Scheitelpunkt der nichtlinearen Ortskurve geht, können wir ignorieren, da sie praktisch nicht auftreten wird.

Man kann an diesem Beispiel sehr schön sehen, welche Einsichten in das Verhalten nichtlinearer Regelungen das Zwei-Ortskurven-Verfahren ermöglicht, ohne daß irgendwelche Rechnungen erforderlich sind. Sie sind erst dann vonnöten, wenn man außer Existenz und Anzahl der Dauerschwingungen etwas über ihre Amplitude und Frequenz erfahren will.

Um zur formelmäßigen Lösung zu gelangen, gehen wir von den Gleichungen (4.30), (4.31) der in Real- und Imaginärteil zerlegten Gleichung der Harmonischen Balance aus. Da die Dreipunktkenlinie eindeutig und demgemäß ihre Beschreibungsfunktion reell ist, gilt $\text{Im}N(A) = 0$, also wegen (4.31)

$$\text{Im}L^{-1}(j\omega) = 0. \quad (4.44)$$

Wie stets ist dabei $L^{-1}(j\omega) = \frac{1}{L(j\omega)}$. (4.44) ist eine Gleichung nur für $\omega = \omega_p$, während die zweite Unbekannte A in ihr nicht mehr auftritt. Hat man ω_p berechnet und in (4.30) eingesetzt, so wird aus dieser Gleichung

$$\text{Re}N(A) = -\text{Re}L^{-1}(j\omega_p).$$

Da $N(A)$ und $L^{-1}(j\omega_p)$ reell sind, gilt $N(A) = \text{Re}N(A)$, $L^{-1}(j\omega_p) = \text{Re}L^{-1}(j\omega_p)$ und man kann schreiben

$$N(A) = -L^{-1}(j\omega_p). \quad (4.45)$$

Dies ist eine Bestimmungsgleichung für A allein.

Bei dieser Betrachtung wurde weder von speziellen Eigenschaften der Dreipunktkenlinie noch des linearen Teilsystems Gebrauch gemacht, sie gilt daher für jede eindeutige Kennlinie. Man hat so als *allgemeinen Satz*:

Ist die Kennlinie der nichtlinearen Standardregelung eindeutig, so erhält man die Frequenzen ω_p der Dauerschwingungen aus

$$\text{Im}L^{-1}(j\omega_p) = 0,$$